А.А. САМАРСКИЙ, В.Б. АНДРЕЕВ

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. А. САМАРСКИЙ, В. Б. АНДРЕЕВ

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

518
С 17
УДК 517.949.8

Разностные методы для эллиптических уравнений. А. А. Самарский, В. Б. Андреев. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976.

Монография посвящена теории разностных схем, предназначенных для приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа

В ней излагаются различные методы построения разностных схем для типичных задач математической физики, рассмотрены метод баланса, вариационно-разностные методы, методы аппроксимации функционала, метод повышения порядка погрешности аппроксимации путем аппроксимации на решении и др.

Книга предназначена для студентов-математиков старших курсов университетов, аспирантов и научных сотрудников.

Александр Андреевич Самарский, Владимир Борисович Андреев

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М., 1976 г., 352 стр. с илл.

Редакторы *Е. В. Шикин, И. М. Овчинникова.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *А. Л. Ипатова*

Сдано в набор 25/VII 1975 г. Подписано к печати 20/I 1976 г. Бумага 84×108¹/₃₂.
Физ. печ. л. 11. Условн. печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 17,92.
Тираж 6500 экз. Т-01851. Цена книги 1 р. 37 к. Заказ № 132
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука», Москва, Г-99, Шубинский пер., 10, Заказ 320.

С $\frac{20204-017}{053(02)-76}$ 59-75

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. **Введение** 9

§ 1. Примеры научно-технических задач, приводящих к эллиптическим уравнениям 9
§ 2. Краткие сведения об эллиптических уравнениях . . . 33

Глава II. **Методы построения разностных схем** 41

§ 1. Основные понятия метода сеток 41
§ 2. Принципы построения разностных схем 56
§ 3. Методы построения разностных схем 71

Глава III. **Разностные схемы для уравнения Пуассона. Принцип максимума** 108

§ 1. Построение разностных схем для уравнения Пуассона 108
§ 2. Постановка сеточных краевых задач для уравнения Пуассона в случае граничных условий Дирихле . . . 129
§ 3. Принцип максимума 140
§ 4. Априорные оценки и оценки скорости сходимости разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона . . . 147

Глава IV. **Разностные схемы для основных краевых задач математической физики** 162

§ 1. Краевые задачи для уравнений второго порядка . . . 162
§ 2. Сеточные аппроксимации уравнений второго порядка 172
§ 3. Аппроксимация условий сопряжения и граничных условий для уравнений второго порядка 184
§ 4. Краевые задачи для системы уравнений теории упругости 204
§ 5. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка . . 214
§ 6. Аппроксимация краевых задач для уравнений четвертого порядка 230

Глава V. **Математический аппарат теории разностных схем** . . 253

§ 1. Обозначения, разностные формулы и некоторые неравенства 253
§ 2. Одномерные модели 257
§ 3. Сеточные задачи на собственные значения 281
§ 4. Теоремы вложения 289
§ 5. Оценки снизу для некоторых операторов 299

Глава VI. **Априорные оценки** 314

§ 1. Метод энергетических неравенств 315
§ 2. Метод функции Грина 334

Дополнение 1 339
Дополнение 2 341
Библиографические указания 351
Литература 352

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие установившиеся процессы различной физической природы приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных эллиптического типа. Достаточно указать стационарные задачи теплопроводности и диффузии, задачу о распределении тока в проводящей среде, задачи электростатики и магнитостатики, задачи теории упругости, теории фильтрации и т. д.

Точные решения краевых задач для эллиптических уравнений удается получить лишь в частных случаях. Поэтому надо уметь решать эти задачи приближенно.

Универсальным и эффективным методом решения эллиптических уравнений является метод конечных разностей, которому и посвящена данная книга.

Процесс решения дифференциальных уравнений разностным методом состоит из двух основных этапов:

1) первый этап — замена дифференциального уравнения и дополнительных условий (например, краевых условий) системой сеточных уравнений (построение разностной схемы);

2) второй этап — решение полученной системы сеточных (разностных) уравнений.

В данной книге рассматриваются только вопросы, связанные с построением и исследованием разностных схем. Методы (прямые и итерационные) решения разностных

уравнений, аппроксимирующих эллиптические уравнения, будут рассмотрены в отдельной книге.

Основное внимание в этой книге уделяется построению разностных аппроксимаций уравнений и дополнительных условий для типичных задач математической физики. Мы ограничиваемся изучением только задач, соответствующих уравнениям и системам уравнений 2-го и 4-го порядков, особо выделяя те из них, которые имеют непосредственное практическое применение. В связи с этим мы сочли уместным привести постановки ряда задач математической физики (гл. I), снабдив их выводом уравнений и граничных условий.

Отметим, что разностные аппроксимации эллиптических уравнений могут быть использованы при построении разностных схем для нестационарных задач математической физики, связанных с уравнениями параболического и гиперболического типов.

С целью упрощения изложения, в данной книге рассматриваются в основном схемы для уравнений с двумя независимыми переменными. Переход к случаю трех измерений не вызывает никаких принципиальных затруднений и приводит лишь к более громоздким формулам.

При написании разностных схем следует всегда иметь в виду ту вычислительную работу, которую придется затратить для решения получающихся систем разностных уравнений. Поэтому мы ограничиваемся изучением простейших схем с минимальным шаблоном, на котором обеспечивается второй (или четвертый) порядок точности. Именно схемы подобного типа широко применяются на практике.

При построении разностных схем приходится заботиться не только о том, чтобы они хорошо аппроксимировали исходную задачу для дифференциального уравнения с точки зрения погрешности аппроксимации, но и о том, чтобы они моделировали в пространстве сеточных функций основные свойства исходной задачи (такие, например, как самосопря-

женность, эллиптичность и др.). В книге этому вопросу уделено должное внимание.

В настоящее время имеется довольно много способов построения разностных аппроксимаций для эллиптических задач. Детальное изложение этих методов в общем виде в рамках данной книги не представляется возможным.

Различные методы построения разностных схем излагаются на простейших примерах одномерных задач. Такой подход позволяет выделить конструктивную идею того или иного метода, не перегружая изложение весьма сложными техническими деталями, которые появляются при рассмотрении достаточно общих уравнений.

Качество разностной схемы определяется прежде всего ее точностью. Изучение разностных схем в книге основано на детальном исследовании их погрешности аппроксимации и устойчивости, ибо именно эти характеристики определяют точность схемы.

Изучение устойчивости разностных схем сводится к получению априорных оценок для решений разностных краевых задач. Для разностных схем, соответствующих эллиптическим уравнениям, известно много различных априорных оценок, в той или иной степени имитирующих априорные оценки для дифференциальных уравнений.

В книге априорные оценки в значительной степени носят иллюстративный характер. Не для всех разностных схем, построенных в книге, приводятся априорные оценки. Однако методы, изложенные в главах III, V и VI, позволяют эти оценки получить.

Наиболее детально изучены разностные схемы для уравнения Пуассона в различных системах координат (гл. III).

В главе IV рассмотрены разностные схемы для основных краевых задач в случае эллиптических уравнений второго порядка (со смешанными производными и без них, повышенного порядка, схемы на неравномерных сетках и т. д.),

для системы уравнений теории упругости, а также для уравнений четвертого порядка.

Подробно изучаются аппроксимации условий сопряжения и граничных условий разного типа для уравнений второго и четвертого порядков.

В главе V вводится минимальный математический аппарат теории разностных схем (разностные формулы Грина, задачи на собственные значения для разностных операторов, сеточные теоремы вложения и др.), который используется в главе VI для получения методом энергетических неравенств некоторых априорных оценок.

Методы построения разностных схем, изложенные в этой книге, могут быть использованы и при получении разностных аппроксимаций для нелинейных уравнений. Однако нелинейные схемы в книге не рассматриваются, так как их изучение потребовало бы существенно большего внимания к получению априорных оценок, что в этой книге представляется нецелесообразным.

Эта книга возникла на основе лекций, читавшихся авторами в течение многих лет в Московском университете для студентов механико-математического и физического факультетов и факультета вычислительной математики и кибернетики. Книга рассчитана на широкий круг читателей и может быть использована в качестве учебного пособия при изучении разностных методов решения уравнений математической физики. Изложение носит систематический и элементарный характер и не предполагает предварительно подготовки читателя по теории разностных схем. Следует отметить методическую и идейную близость этой книги с книгой А. А. Самарского «Введение в теорию разностных схем» («Наука», Москва, 1971 г.).

Авторы выражают благодарность И. Г. Белухиной за помощь при оформлении рукописи.

А. А. Самарский, В. Б. Андреев

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Примеры научно-технических задач, приводящих к эллиптическим уравнениям

1. Стационарные задачи теплопроводности и диффузии. Стационарные (т. е. не меняющиеся во времени) процессы различной физической природы описываются уравнениями эллиптического типа, в простейшем случае (однородной среды и отсутствия источников) — уравнением Лапласа. Укажем, например, задачи теплопроводности, диффузии, задачи электростатики, магнитостатики, задачи о потенциальном течении жидкости и т. д.

Рассмотрим задачу о стационарном распределении тепла в некотором объеме G с поверхностью Γ трехмерного пространства $x=(x_1, x_2, x_3)$. Процесс переноса тепла (или теплопроводности) определяется *законом Фурье*: вектор плотности теплового потока W пропорционален градиенту температуры $u=u(x)$, так что

$$W=-k\operatorname{grad} u, \tag{1}$$

где $k=k(x)$ — *коэффициент теплопроводности*. Плотность теплового потока равна количеству тепла, протекающего в единицу времени через единичную площадку изотермической поверхности.

Напишем уравнение баланса тепла для некоторого объема V, целиком лежащего внутри G и имеющего поверхность S. Пусть внутри объема V имеются источ-

ники тепла, распределенные с плотностью $f(x)$, так что $f(x)\,dV$ есть количество тепла, выделившееся в объеме dV.

Пусть W_n — проекция вектора $\boldsymbol{W}$ на внешнюю нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности S. *Уравнение баланса* тепла выражает очевидный факт: суммарный поток тепла через поверхность S

$$\iint_S W_n\,dS$$

должен быть равен количеству тепла

$$\iiint_V f(x)\,dV,$$

выделяющегося в объеме V, т. е.

$$\iint_S W_n\,dS=\iiint_V f(x)\,dV. \tag{2}$$

Воспользуемся формулой Остроградского

$$\iint_S W_n\,dS=\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{W}\,dV$$

и перепишем уравнение баланса (2) в виде

$$\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{W}-f(x))\,dV=0. \tag{2'}$$

Если $f(x)$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{W}$ — непрерывные функции точки $x=(x_1, x_2, x_3)$, то в силу произвольности объема V из (2') следует:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W}=f(x). \tag{3}$$

Подставляя сюда выражение (1) для вектора теплового потока $\boldsymbol{W}$, получаем уравнение для стационарной температуры $u=u(x)$

$$Lu=\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)=-f(x), \tag{4}$$

или в развернутом виде,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)=-f(x_1, x_2, x_3). \tag{4'}$$

Коэффициент k является функцией точки $x=(x_1, x_2, x_3)$:

$$k=k(x)=k(x_1, x_2, x_3).$$

В случае однородной среды коэффициент теплопроводности $k=\text{const}$ не зависит от точки x, и стационарное распределение температуры $u=u(x)$ описывается уравнением Пуассона

$$\Delta u=-\bar{f}(x), \qquad \bar{f}=f/k.$$

Удобнее сохранить для правой части обозначение $f(x)$ и писать

$$\Delta u=-f(x), \tag{5}$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=-f(x). \tag{5'}$$

Если источников тепла нет, т. е. $f(x)\equiv 0$, то для стационарной температуры $u=u(x)$ получаем однородное уравнение

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u)=0,$$

(или уравнение Лапласа $\Delta u=0$ в случае $k=\text{const}$.)

Уравнение теплопроводности (4) получено в предположении изотропности процесса переноса тепла. Если коэффициент теплопроводности зависит от направления и является тензором (среда анизотропна), то вместо (4) получается уравнение

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=-f(x). \tag{6}$$

Если $k_{\alpha\beta}\equiv 0$ при $\alpha\neq\beta$, то уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(k_{33}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)=-f.$$

Уравнение (4) выполняется во всех внутренних точках области G. На ее границе Γ задаются дополнительные условия.

Обычно это одно из следующих условий:

а) задана температура: $u=g(x)$ при $x\in\Gamma$;

б) задан тепловой поток: $k\dfrac{\partial u}{\partial n}=g(x)$ при $x\in\Gamma$;

в) задан *теплообмен по закону Ньютона*: $k\frac{\partial u}{\partial n}=\varkappa u+$ $+g(x)$, $x\in\Gamma$, где $\varkappa=\varkappa(x)>0$.

В соответствии с этим получаем три основных краевых задачи:

а) первая краевая задача, или задача Дирихле: найти непрерывную в замкнутой области $G+\Gamma$ функцию $u(x)$ из условий

$$Lu=-f(x) \quad \text{при} \quad x\in G, \quad u=g(x) \quad \text{при} \quad x\in\Gamma;$$

б) вторая краевая задача, или задача Неймана:

$$Lu=-f(x) \quad \text{при} \quad x\in G, \quad k\frac{\partial u}{\partial n}=g(x) \quad \text{при} \quad x\in\Gamma;$$

в) третья краевая задача:

$$Lu=-f(x) \quad \text{при} \quad x\in G, \quad k\frac{\partial u}{\partial n}=\varkappa u+g(x) \quad \text{при} \quad x\in\Gamma.$$

Заметим, что для разрешимости задачи Неймана необходимо выполнение условия

$$\int_\Gamma g(x)\,d\sigma+\int_G f(x)\,dx=0, \tag{7}$$

которое в случае однородного уравнения ($f\equiv 0$) имеет вид

$$\int_\Gamma g(x)\,d\sigma=0. \tag{8}$$

Это условие означает, что количество тепла, втекающего в область G, должно быть равно количеству вытекающего тепла (в противном случае процесс будет носить нестационарный характер).

Процессы диффузии вещества во многом аналогичны процессам теплопроводности. При описании диффузии аналогом основного закона теплопроводности является *закон Нернста*, согласно которому вектор плотности потока вещества W пропорционален градиенту концентрации $u=u(x)$:

$$W=-D\ \operatorname{grad} u,$$

где $D=D(x)$ – коэффициент диффузии. Подставляя это выражение в уравнение (3) при $f(x)=0$ (что означает

отсутствие источников диффундирующего вещества), получаем уравнение диффузии

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) = 0,$$

которое в случае однородной среды ($D = \text{const}$) переходит в уравнение Лапласа $\Delta u = 0$.

Если среда, в которой происходит диффузия, движется со скоростью $v = (v_1, v_2, v_3)$, то для стационарного распределения концентрации $u = u(x)$ уравнение диффузии имеет вид

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(vu) = 0 \tag{9}$$

или

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0,$$

если $\operatorname{div} v = 0$ (среда несжимаема). В самом деле, если среда движется, то суммарный поток вещества состоит из диффузионного потока, равного $-D \operatorname{grad} u$, и потока переноса (трансляционного потока), равного uv, так что суммарный поток есть

$$W = -D \operatorname{grad} u + uv.$$

Теперь остается подставить это выражение в (3) при $f \equiv 0$ (нет источников). В процессе диффузии может происходить реакция распада или размножения данного вещества, что соответствует появлению стоков или источников. Если плотность этих источников (стоков), например, пропорциональна концентрации, то вместо (9) получим уравнение

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - (v \operatorname{grad} u) + \beta u = 0, \tag{10}$$

где β — коэффициент пропорциональности (при $\beta > 0$ имеем источник (размножение вещества), при $\beta < 0$ — сток).

Замечание 1. К уравнениям указанного выше вида приводят и другие задачи. Рассмотрим, например, задачу об электростатическом поле в непроводящей среде. Она описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} E = 0, \qquad \operatorname{div} D = 4\pi\rho, \qquad D = \varepsilon E,$$

где E — вектор напряженности электрического поля, D — вектор электрической индукции, $\varepsilon = \varepsilon(x)$ — диэлектри-

ческая постоянная среды, $\rho = \rho(x)$ — объемная плотность зарядов в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$. Из уравнения $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ следует, что $\boldsymbol{E}$ — потенциальный вектор, представимый в виде

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u,$$

где $u = u(x)$ — потенциал поля. Подставляя $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$ в уравнение $\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$, получаем

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho.$$

Если среда однородна ($\varepsilon = \text{const}$), то

$$\Delta u = -4\pi\rho/\varepsilon;$$

в пустоте ($\varepsilon = 1$) мы будем иметь $\Delta u = -4\pi\rho$.

Если задача стационарна, то для вектора напряженности магнитного поля из уравнений Максвелла получаем (уравнения магнитостатики)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}.$$

По аналогии с электростатикой вводим потенциал u магнитного поля, который в однородной среде ($\mu = \text{const}$) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, причем $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} u$.

Замечание 2. Потенциал скоростей φ стационарного потока несжимаемой жидкости также удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$, причем скорость $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$.

Если решение уравнения (4) не зависит от x_3 (что, очевидно, может иметь место лишь в случае $f = f(x_1, x_2)$, $k = k(x_1, x_2)$, краевых условий, не зависящих от x_3, и областей специального вида), то мы получаем для определения $u = u(x_1, x_2)$ двумерное уравнение

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x_1, x_2).$$

Это может, например, иметь место в случае бесконечной цилиндрической области с образующей вдоль x_3 при условии, если вдоль образующей не меняются входные данные, т. е. коэффициенты и правые части уравнения и краевых условий. Тогда задачу можно рассматривать

в любом поперечном сечении цилиндра, параллельном плоскости (x_1, x_2).

В дальнейшем для упрощения изложения рассматриваем лишь двумерные задачи. Переход к трехмерным эллиптическим задачам принципиальных трудностей не вызывает, порождая, как правило, лишь усложнение вычислений и формул.

2. Задачи о стационарном распределении плотности тока в проводящей среде. К уравнениям эллиптического типа приводят задачи о стационарном распределении электрического и магнитного полей. Эти задачи описываются системой уравнений Максвелла, которые в стационарном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \\ \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} &= 0, \qquad \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\boldsymbol{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $\boldsymbol{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\boldsymbol{j}$ — вектор объемной плотности электрического тока, ρ — объемная плотность электрических зарядов, μ — коэффициент магнитной проницаемости, ε — коэффициент диэлектрической проницаемости.

В общем случае анизотропной и неоднородной среды ε и μ — тензоры, зависящие от точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ пространства. Если среда изотропна, то ε и μ — скалярные функции x. В случае однородной и изотропной среды ε и μ — постоянные: $\varepsilon = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const} > 0$. В диэлектрике можно считать $\mu = 1$, в проводнике $\varepsilon = 1$, в вакууме $\varepsilon = \mu = 1$.

В общем случае вместо $\boldsymbol{j}$ в уравнения (11) входит сумма $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^{(e)}$, где $\boldsymbol{j}^{(e)}$ — вектор объемной плотности тока, происходящего от сторонних э. д. с. Мы считаем здесь, что $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$. Если среда непроводящая, то $\boldsymbol{j} = 0$. Уравнения магнитостатики ($\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$, $\operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 0$) имеют место и в непроводящей среде.

Условие $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ означает, как было отмечено выше, потенциальность вектора $\boldsymbol{E}$, а условие $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$, которое имеет место при $\mu = \text{const}$, означает соленоидальность вектора $\boldsymbol{H}$, т. е. существование векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ такого, что $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$. Вектор $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет

уравнению Пуассона $\Delta \boldsymbol{A} = (-4\pi/c)\boldsymbol{j}$. В самом деле, первое уравнение (11) дает

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = -\Delta \boldsymbol{A} = -(4\pi/c)\boldsymbol{j}.$$

Интересные задачи возникают в связи с изучением стационарного распределения тока в проводящей среде. Из уравнений Максвелла (11) следует закон сохранения электрического заряда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

к которому следует присоединить условие потенциальности электрического поля, т. е. формулу

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u. \tag{12}$$

Между векторами плотности тока $\boldsymbol{j}$ и напряженности электрического поля существует связь. Эту связь выражает *закон Ома*

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{13}$$

где σ — коэффициент электропроводности, который является скалярной функцией $x = (x_1, x_2, x_3)$, если проводимость среды не зависит от направления (среда изотропна по проводимости); в противном случае σ является тензором. Из двух последних формул следует: $\boldsymbol{j} = -\sigma \operatorname{grad} u$. Отсюда и из формулы $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$ получаем уравнение для потенциала: $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0$, которое в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \quad \text{в анизотропной среде,}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{в изотропной среде,}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{в однородной и изотропной среде.}$$

На проводящей поверхности тангенциальная составляющая вектора электрического поля равна нулю, что эквивалентно постоянству потенциала: $u = \text{const}$ (краевое условие первого рода). В частности, на заземленной идеально проводящей поверхности $u \equiv 0$. На границе про-

водника с диэлектриком равна нулю нормальная составляющая плотности электрического тока, $j_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n}$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{(краевое условие второго рода).}$$

При изучении течений жидкостей и газов в магнитогидродинамических каналах, при исследовании поведения неравновесной плазмы в сильных магнитных полях и др. встречаются стационарные задачи электродинамики в ограниченном объеме, характерной особенностью которых является обобщенный закон Ома, выражающий зависимость вектора $\boldsymbol{j}$ не только от $\boldsymbol{E}$, но и от $\boldsymbol{H}$. Заметим прежде всего, что в среде, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}$, закон Ома (13) принимает вид

$$\boldsymbol{j} = \sigma (\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]). \tag{14}$$

Если среда движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ и учитывается так называемый эффект Холла, то имеет место обобщенный закон Ома

$$\boldsymbol{j} + [\boldsymbol{j}\Omega] = \sigma (\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]), \qquad \Omega = \beta \frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{H}|}, \tag{15}$$

где β — параметр Холла, $\sigma > 0$ — коэффициент электропроводности.

Если параметр Холла $\beta = 0$, то это уравнение для $\boldsymbol{j}$ переходит в выражение для обычного закона Ома в движущейся среде.

Предположение о том, что токи смещения и индуцированные магнитные поля пренебрежимо малы, позволяет считать магнитное поле постоянным и заданным.

Пространственное распределение проводимости σ, параметра Холла β и скорости среды $\boldsymbol{v}$ будем считать заданными. В общем случае эти величины находятся в результате решения других уравнений, например уравнений магнитной газодинамики, закона сохранения энергии электронов и т. д.

В дальнейшем ограничимся изучением двумерной задачи, предполагая, что векторы $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{v}$ не зависят от координаты x_3 и лежат в одной плоскости (x_1, x_2), так что

$$\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, 0), \quad \boldsymbol{E} = (E_1, E_2, 0), \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, 0),$$

а магнитное поле H и вектор Ω перпендикулярны плоскости (x_1, x_2):

$$H=(0,\ 0,\ H), \qquad \Omega=(0,\ 0,\ \Omega).$$

Все функции j_1, j_2, E_1, E_2, v_1, v_2, H, Ω зависят только от x_1 и x_2. В этом случае уравнения $\operatorname{rot} E=0$, $\operatorname{div} j=0$ и закон Ома (15) имеют вид

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial j_1}{\partial x_1}+\frac{\partial j_2}{\partial x_2}=0,$$
$$j_1+\Omega j_2=\sigma(E_1+v_2H), \quad j_2-\Omega j_1=\sigma(E_2-v_1H). \tag{16}$$

Здесь написаны четыре уравнения относительно четырех неизвестных функций E_1, E_2, j_1 и j_2; функции v_1, v_2, H, Ω и σ являются заданными.

Рассмотрим эти уравнения в конечной области G с границей Г. На кривой Г должны быть заданы краевые условия. Рассмотрим следующие краевые условия.

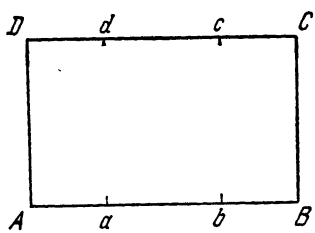


Рис 1.

а) Задана нормальная составляющая вектора плотности электрического тока, протекающего через границу:

$$j_n=g(s) \text{ на } \Gamma,$$

где $g(s)$ — заданная функция длины дуги s, отсчитываемой от некоторой точки кривой Г, j_n — проекция вектора j на внешнюю нормаль n к кривой Г.

Случай $g(s)\equiv 0$ соответствует идеальному диэлектрику, случай $g(s)\not\equiv 0$ — «идеально-секционированному» электроду.

б) Другой тип краевого условия состоит в требовании непрерывности тангенциальной (касательной) составляющей E_τ вектора электрического поля на границе раздела двух сред. Так, вдоль сплошного идеально проводящего электрода тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю:

$$E_\tau=0.$$

В общем случае граница Г разбита на конечное число участков γ_k, на которых заданы краевые условия различного типа.

В дальнейшем мы предполагаем, что G — прямоугольник $ABCD$. Границей области Г являются идеально

диэлектрические стенки, за исключением двух электродов $ab \subset AB$ и $cd \subset CD$, которые являются либо идеально-секционированными ($j_n \neq 0$), либо идеально проводящими ($E_\tau = 0$). Из уравнений (16) следует, что можно ввести скалярную функцию $\varphi(x_1, x_2)$ и положить

$$E = -\operatorname{grad}\varphi \quad \text{или} \quad E_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad E_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},$$

а также вектор-функцию (векторный потенциал) $\psi = (0, 0, \psi(x_1, x_2))$ и положить

$$j = \operatorname{rot}\psi \quad \text{или} \quad j_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad j_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

Подставляя эти выражения в закон Ома (15), получим

$$\begin{aligned} \Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} &= -\sigma v_2 H, \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} &= \sigma v_1 H. \end{aligned} \tag{17}$$

Граничное условие $j_n = g(s)$ принимает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = g(s)$$

и эквивалентно условию

$$\psi(x)\,|_{x\in\Gamma} = \nu(s) = \int g(s)\,ds. \tag{18}$$

Вместо $E_\tau = 0$ получаем $\partial\varphi/\partial s = 0$, откуда следует:

$$\varphi(x)\,|_{x\in\Gamma} = \text{const}.$$

Систему двух уравнений первого порядка для функций ψ и φ нетрудно свести путем исключения φ к одному уравнению второго порядка для функции ψ:

$$L\psi = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) = f,$$

$$f = \frac{\partial}{\partial x_1}(v_1 H) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_2 H) = \operatorname{div}(H\boldsymbol{v}).$$

Для этого достаточно умножить уравнения (17) на $1/\sigma$, продифференцировать первое уравнение по x_2, а второе уравнение — по x_1 и из первого равенства вычесть второе.

Краевое условие $\psi(s)=\nu(s)$ остается в силе, а условие $\varphi(s)=\text{const}$ в силу уравнений (17), (18) переходит в условие с косой производной

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}+\Omega\frac{\partial\psi}{\partial s}=\sigma v_n H. \tag{19}$$

В самом деле, пусть $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ — единичный вектор внешней нормали, а $\boldsymbol{\tau}=(-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ — единичный вектор, касательный к кривой Г. Заметим сначала, что $v_n=v_1\cos\alpha+v_2\sin\alpha$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cos\alpha+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\sin\alpha,\quad \frac{\partial\psi}{\partial s}=-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\sin\alpha+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cos\alpha.$$

Затем умножим уравнение (17) на $-\sin\alpha$, а уравнение (18) на $\cos\alpha$ и сложим полученные уравнения:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}+\Omega\frac{\partial\psi}{\partial s}-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\sigma v_n H.$$

Отсюда и следует условие (19), если положить $\varphi(s)=$ $=\text{const}$ или $\partial\varphi/\partial s=0$. Если параметры σ и Ω постоянны, то уравнение $L\psi=f$ переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta\psi=-\sigma f.$$

Итак, мы имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} L\psi&=f && \text{при } x=(x_1,\ x_2)\in G,\\ \psi(s)&=\nu(s) && \text{на } \gamma_1,\\ \frac{\partial\psi}{\partial n}+\Omega\frac{\partial\psi}{\partial s}&=\sigma v_n H && \text{на } \gamma_2, \end{aligned} \tag{19'}$$

причем $\gamma_1+\gamma_2=\Gamma$.

Рассмотрим класс Ψ функций ψ, удовлетворяющих однородным условиям (18) или (19), или (19').

Оператор L, определенный выше, на классе Ψ функций ψ является положительным:

$$(\psi,\ L\psi)=\int\int\psi L\psi\,dx_1\,dx_2>0$$

и вообще говоря, несамосопряженным, $L\neq L^*$, т. е.

$$(\psi,\ L\bar{\psi})\neq(L\psi,\ \bar{\psi})$$

для любых ψ, $\bar{\psi}$ из Ψ. Заметим, однако, что если тока

Холла нет, т. е. $\Omega \equiv 0$, то оператор $\mathring{L}$:

$$\mathring{L}\psi = -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{grad}\psi\right),$$

является самосопряженным, $\mathring{L} = \mathring{L}^*$.

Покажем, например, справедливость соотношения $(\psi, L\psi) > 0$. Для этого воспользуемся формулами Грина:

$$(\psi, L\bar{\psi}) = \iint_G \psi\left\{-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1} + \Omega\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \Omega\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right)\right\} dx_1\, dx_2 =$$

$$= \iint_G \frac{1}{\sigma}\nabla\psi\nabla\bar{\psi}\, dx_1\, dx_2 + \iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \oint_\Gamma \psi\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}\right) ds. \quad (20)$$

Под знаком интеграла по границе Г стоит функция

$$\psi\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}\right) = F(s),$$

которая обращается в нуль, если для ψ и $\bar{\psi}$ выполнено одно из условий (18) или (19), т. е. ψ и $\bar{\psi}$ принадлежат классу Ψ. Полагая затем $\bar{\psi} = \psi$ в формуле (20), сразу получаем

$$(\psi, L\psi) = \iint_G \frac{1}{\sigma}|\nabla\psi|^2\, dx_1\, dx_2 = (\psi, \mathring{L}\psi) > 0.$$

Из формулы (20) также видно, что

$$(\psi, L\bar{\psi}) = \iint_G \frac{1}{\sigma}\nabla\psi\nabla\bar{\psi}\, dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2,$$

$$(\bar{\psi}, L\psi) = \iint_G \frac{1}{\sigma}\nabla\psi\,\nabla\bar{\psi}\, dx_1\, dx_2 -$$

$$- \iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2,$$

т. е. $(\bar{\psi}, L\psi)=(L\bar{\psi}, \psi)$ только при условии

$$\iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right)dx_1\,dx_2=0,$$

которое выполняется в случае $\Omega=0$.

3. **Статика упругого твердого тела.** Под влиянием приложенных сил твердые тела в той или иной степени деформируются, т. е. меняют свою форму и объем. Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор некоторой точки твердого тела до того, как к нему были приложены внешние силы, а $\boldsymbol{x}'=(x_1', x_2', x_3')$ — радиус-вектор той же материальной точки после приложения сил. Перемещение точки при деформации характеризуется вектором $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$, который носит название *вектора перемещения*, компоненты которого равны:

$$u_i(x)=x_i'-x_i, \qquad i=1, 2, 3.$$

Очевидно, что деформированное состояние тела полностью описывается заданием вектора перемещения для каждой точки тела.

Для вывода уравнений, описывающих деформированное состояние твердого тела (находящегося, по предположению, в равновесии), выделим в теле произвольный объем V, ограниченный поверхностью S. Запишем условие равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на объем V. Главный вектор объемных сил равен

$$\iiint_V \boldsymbol{F}\,dV,$$

где $\boldsymbol{F}=(F_1, F_2, F_3)$ есть сила, действующая на единицу объема тела. Главный вектор сил, действующих на данный объем через поверхность S со стороны окружающих объем V частей, равен

$$\iint_S \boldsymbol{f}\,dS,$$

где $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, f_3)$ есть сила, действующая на единицу площади. Приравнивая нулю сумму главных векторов объемных и поверхностных сил, получим

$$\iiint_V \boldsymbol{F}\,dV+\iint_S \boldsymbol{f}\,dS=0. \tag{21}$$

Преобразуем это соотношение. Согласно формуле Остроградского поверхностный интеграл

$$\iint_S f_i \, dS$$

от скалярной функции f_i может быть представлен в виде объемного интеграла от дивергенции некоторого вектора τ_i, т. е.

$$\iint_S f_i \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \tau_i \, dV, \tag{22}$$

где $\tau_i = \{\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}\}$. При этом

$$f_i = \tau_{i1} \cos(n, x_1) + \tau_{i2} \cos(n, x_2) + \tau_{i3} \cos(n, x_3), \tag{23}$$

где n — внешняя нормаль к S. Подставляя (22) в (21) и учитывая, что (21) справедливо для любого объема V, получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{24}$$

Тензор

$$\hat{T} = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Vmatrix}$$

носит название *тензора напряжения*, а функции τ_{ik} называются *компонентами* тензора напряжения.

Выясним механический смысл компонент тензора напряжения. По определению f_i есть проекция на ось x_i силы f (действующей на единицу поверхности), приложенной к поверхности S. Выбирая на S точку, в которой внешняя нормаль направлена вдоль оси x_1, из (23) получим, что

$$f_i = \tau_{i1}.$$

Тем самым τ_{i1} есть проекция на ось Ox_i силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярной оси Ox_1; точнее, τ_{11} есть нормальная составляющая этой силы, а τ_{21} и τ_{31} — тангенциальные составляющие. На рис. 2 иллюстрируется механический смысл компонент тензора напряжения.

Запишем теперь условия равенства нулю главных моментов относительно осей координат. Момент относительно

оси Ox_1 равен нулю:

$$\iiint_V (x_2F_3 - x_3F_2)\,dV + \iint_S (x_2f_3 - x_3f_2)\,dS = 0. \qquad (25)$$

В силу формулы (23) имеем

$$\iint_S (x_2f_3 - x_3f_2)\,dS = \iint_S \{(x_2\tau_{31} - x_3\tau_{21})\cos(\boldsymbol{n}, x_1) +$$
$$+ (x_2\tau_{32} - x_3\tau_{22})\cos(\boldsymbol{n}, x_2) + (x_2\tau_{33} - x_3\tau_{23})\cos(\boldsymbol{n}, x_1)\}\,dS,$$

или, преобразуя последний интеграл по формуле Остроградского:

$$\iint_S (x_2f_3 - x_3f_2)\,dS = \iiint_V \operatorname{div}(x_2\tau_3 - x_3\tau_2)\,dV =$$
$$= \iiint_V \left\{x_2\left(\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{33}}{\partial x_3}\right) -\right.$$
$$\left. - x_3\left(\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_3}\right) + \tau_{32} - \tau_{23}\right\} dV.$$

Подставляя это соотношение в (25) и принимая во внимание (24), получим

$$\iiint_V (\tau_{32} - \tau_{23})\,dV = 0.$$

В силу произвольности объема V отсюда следует, что $\tau_{32} = \tau_{23}$. Аналогично устанавливаются соотношения $\tau_{12} = \tau_{21}$, $\tau_{13} = \tau_{31}$.

Мы доказали, что тензор напряжений симметричен и, следовательно, система (24) содержит лишь шесть неизвестных функций.

Чтобы получить систему уравнений для отыскания вектора перемещения $\boldsymbol{u}$, введем в рассмотрение тензор деформации и установим связь между компонентами тензора напряжений и компонентами тензора деформации.

При деформировании тела меняются расстояния между его точками. Рассмотрим какие-нибудь две близкие точки. Пусть радиус-вектор первой есть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, а второй $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} = (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$. Вектор перемещения точки $\boldsymbol{x}$ есть $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}))$, а точки $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ —

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x})),$$

Вектор $\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ характеризует изменение положения вектора $\Delta \boldsymbol{x}$, причем:

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^{3} \Delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + O(|\Delta \boldsymbol{x}|^2), \tag{26}$$

а вектор $\Delta \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{u}$ характеризует взаимное расположение

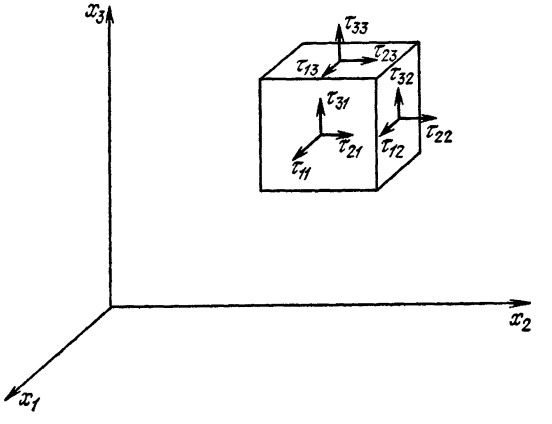


Рис. 2.

указанных точек после их перемещения. Вычислим длину вектора $\Delta \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{u}$:

$$|\Delta \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{u}|^2 = |\Delta \boldsymbol{x}|^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \Delta u_i + |\Delta \boldsymbol{u}|^2 =$$

$$= |\Delta \boldsymbol{x}|^2 + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \Delta x_j + |\Delta \boldsymbol{u}|^2 + O(|\Delta \boldsymbol{x}|^3).$$

Введем теперь предположения, принятые в геометрически линейной теории упругости. Будем считать, что рассматриваемое тело деформируется слабо и поэтому можно предполагать, что $\partial u_i / \partial x_j \ll 1$. Этим предположением допускается пренебрежение квадратами и произведениями производных $\partial u_i / \partial x_j$ по сравнению с их первыми степенями.

Если

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)=0, \qquad (27)$$

то с точностью до $O(|\Delta \boldsymbol{x}|^3+|\Delta \boldsymbol{u}|^2)$ квадрат расстояния между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}$ после их перемещения остается неизменным, т. е. в этом случае можно считать, что деформация отсутствует.

Итак, при сделанных предположениях условия (27) есть условия перемещения без деформации, т. е. жесткого перемещения.

Перепишем соотношения (26) в следующем виде:

$$\Delta u_i=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\Delta x_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\Delta x_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+$$
$$+O(|\Delta \boldsymbol{x}|^2), \quad i=1,\ 2,\ 3.$$

Из этой записи следует, что изменение положения вектора $\Delta \boldsymbol{x}$ после перемещения точек $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}$, характеризующееся вектором $\Delta \boldsymbol{u}$, с точностью до величин $O(|\Delta \boldsymbol{x}|^2)$ вызывается жестким перемещением и преобразованием с симметричным тензором:

$$\hat{\varepsilon}=\begin{Vmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{Vmatrix},$$

где

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \qquad (28)$$

Этот тензор носит название *тензора деформации*, а функции $\varepsilon_{ij}(x)$ называются *компонентами* тензора деформации.

Можно показать, что компоненты тензора деформации имеют следующий механический смысл: ε_{ii} есть относительное удлинение отрезка, первоначально параллельного оси Ox_i; $2\varepsilon_{ij}$ при $i\neq j$ представляет собой уменьшение угла, первоначально прямого, между двумя векторами, имеющими направления (положительные) осей Ox_i, Ox_j.

Связь между компонентами тензоров напряжений и деформации устанавливает *обобщенный закон Гука*: компоненты тензора напряжений есть однородные линейные

функции компонент тензора деформации, т. е:

$$\tau_{ij}=\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3} C_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad i,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

Тензор четвертого ранга $C_{ij\alpha\beta}$ носит название *тензора модулей упругости*. Известно, что он всегда обладает следующими свойствами симметрии:

$$C_{ij\alpha\beta}=C_{ji\alpha\beta}=C_{ij\beta\alpha}=C_{\alpha\beta ij},$$

т. е. из 81 параметра различными являются только 21.

В случае изотропного тела число различных параметров сокращается до двух. В этом случае *закон Гука* принимает вид

$$\begin{aligned}&\tau_{ii}=\lambda\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{jj}+2\mu\varepsilon_{ii}, \quad i=1,\ 2,\ 3,\\ &\tau_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij},\ i\neq j, \quad i,\ j=1,\ 2,\ 3.\end{aligned} \tag{29}$$

Подставляя (29) в (24) и учитывая (28), получим следующую систему уравнений равновесия упругого твердого тела (систему Ляме) в перемещениях:

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)\right]+F_i=0. \tag{30}$$

Если тело однородно, т. е. если коэффициенты Ляме λ и μ не зависят от x, то система (30), будучи записанной в векторной форме, выглядит так:

$$\mu\,\Delta\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}=0.$$

Если, кроме того, $F_3=0$ и $u_3=0$, а F_1, F_2 и u_1, u_2 не зависят от x_3, то мы имеем плоскую задачу

$$\begin{aligned}&(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial x_2}+F_1=0,\\ &(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+F_2=0.\end{aligned} \tag{31}$$

В качестве граничных условий, например для системы (31), могут быть заданы значения на границе области компонент вектора перемещения u_1 и u_2, т. е.

$$u_1=g_1, \qquad u_2=g_2$$

или компоненты вектора напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{11}\cos(n, x_1)+\tau_{12}\cos(n, x_2)&=f_1,\\ \tau_{12}\cos(n, x_1)+\tau_{22}\cos(n, x_2)&=f_2, \end{aligned} \tag{32}$$

где τ_{ij} — определяются соотношениями (29), (28). Возможны постановки и других задач.

4. Равновесие пластины. В качестве второго примера задачи из теории упругости рассмотрим уравнение равновесия тонкой пластины. Под пластиной мы будем понимать упругое тело, ограниченное с двух сторон параллельными плоскостями, расстояние между которыми много меньше других измерений этого тела.

Возьмем однородную изотропную пластину, толщина которой равна h и расположим ее относительно координатных осей так, чтобы плоскость (x_1, x_2) являлась срединной плоскостью пластины. Предположим, что действующая на пластину нагрузка нормальна к ее поверхности и приложена, например, к ее верхней поверхности, а нижняя поверхность свободна.

Чтобы получить уравнение, описывающее деформированное состояние пластины, воспользуемся выведенными ранее соотношениями (24), полагая в них $F_1=F_2=F_3=0$, т. е. считая, что объемные силы отсутствуют.

Умножим первые два соотношения (24) на x_3, проинтегрируем их по x_3 от $-h/2$ до $h/2$ и преобразуем последние члены левых частей при помощи интегрирования по частям. Принимая во внимание симметрию тензора напряжения и то, что по условию нагрузка ортогональна к поверхности пластины, т. е.

$$\tau_{13}(x_1, x_2, h/2)=\tau_{13}(x_1, x_2, -h/2)=$$
$$=\tau_{23}(x_1, x_2, h/2)=\tau_{23}(x_1, x_2, -h/2)=0,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{11}x_3\,dx_3+\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3\,dx_3-\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}\,dx_3=0,\\ \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3\,dx_3+\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{22}x_3\,dx_3-\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}\,dx_3=0. \end{aligned} \tag{33}$$

Проинтегрируем по x_3 от $-h/2$ до $h/2$ третье уравнение (24), воспользуемся симметрией тензора напряжения и

тем, что нагрузка приложена к верхней поверхности пластины:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}\,dx_3+\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}\,dx_3+\tau_{33}(x_1,\ x_2,\ h/2)=0. \quad (34)$$

Введем следующие обозначения:

$$M_1=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{11}x_3\,dx_3, \qquad M_2=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{22}x_3\,dx_3,$$

$$M_{12}=-\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3\,dx_3, \qquad q=\tau_{33}(x_1,\ x_2,\ h/2), \quad (35)$$

$$Q_1=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}\,dx_3, \qquad Q_2=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}\,dx_3.$$

Функции $M_1(x_1, x_2)$ и $M_2(x_1, x_2)$ называются *изгибающими моментами*, $M_{12}(x_1, x_2)$ — *крутящим моментом*, $Q_1(x_1, x_2)$ и $Q_2(x_1, x_2)$ — *перерезывающими силами*. В новых обозначениях уравнения (33), (34) примут вид:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}-Q_1=0,$$

$$-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}-Q_2=0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+q=0.$$

Исключая отсюда Q_1 и Q_2, получим одно уравнение с тремя неизвестными

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}=-q. \quad (36)$$

Однако эти три неизвестные не являются независимыми. В этом можно убедиться, выразив моменты M_1, M_2 и M_{12} через функцию прогиба $w(x_1, x_2)\equiv u_3(x_1, x_2, 0)$. Будем предполагать, что прогиб мал по сравнению с толщиной пластины, а срединная поверхность (та поверхность, в которую переходит срединная плоскость после приложения нагрузки) нейтральна, т. е. не испытывает растяжений и сжатий.

Найдем сначала выражения через w для относительных удлинений $\varepsilon_{11}(x_1, x_2, x_3)$, $\varepsilon_{22}(x_1, x_2, x_3)$ и относитель-

ного сдвига $\varepsilon_{12}(x_1, x_2, x_3)$. Выделим элемент пластины, высекаемый из нее плоскостями $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$, $x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + \Delta x_1$; $x_2 = \overset{\circ}{x}_2$, $x_2 = \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2$. Будем предполагать, что после деформации этого элемента его боковые поверхности остаются плоскими. Рассмотрим сечение деформированного элемента плоскостью, параллельной плоскости Ox_1x_3. Это сечение изображено на рис. 3.

В силу малости прогибов можно считать малыми и углы поворота срединной поверхности, а потому полагать их равными своим тангенсам. Тогда

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\Delta x_1.$$

Относительное удлинение в направлении оси Ox_1 элемента

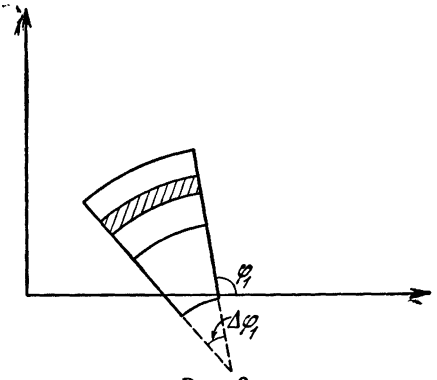


Рис. 3.

пластины, отстоящего от срединной поверхности на величину x_3, пропорционально x_3, и, следовательно,

$$\varepsilon_{11} = x_3 \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}. \tag{37}$$

Аналогично находим

$$\varepsilon_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \tag{38}$$

Относительные удлинения найдены.

Плоскости, высекающие рассматриваемый элемент поверхности, при деформации претерпевают вращение. При этом перемещение u_1 точки пластины будет тем большим,

чем дальше она отстоит от срединной поверхности и чем больше угол поворота. Именно

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}.$$

Из аналогичных соображений

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}.$$

Подставляя эти соотношения в выражение для ε_{12}, получим

$$\varepsilon_{12} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{39}$$

Для отыскания напряжений по заданным деформациям воспользуемся законом Гука (29). При этом будем предполагать, что компонента тензора напряжения τ_{33} пренебрежимо мала по сравнению с τ_{11} и τ_{22}. Тогда

$$\tau_{11} = \frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{11} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{22},$$
$$\tau_{22} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{11} + \frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{22},$$
$$\tau_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}.$$

Переходя от коэффициентов Ляме λ и μ к другим упругим постоянным — модулю растяжения (модулю Юнга) E и коэффициенту Пуассона ν, которые связаны с λ и μ соотношениями

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

будем иметь

$$\tau_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \qquad \tau_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}),$$
$$\tau_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}.$$

Подставляя сюда соотношения (37)—(39), а новые представления для τ_{ij} в (35), получим представление моментов через функцию прогибов

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \qquad M_2 = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),$$
$$M_{12} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{40}$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ — коэффициент цилиндрической жесткости пластины.

Подставляя, наконец, формулы (40) в уравнение (36), получим уравнение для функции прогибов

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^2} = \frac{q}{D}. \qquad (41)$$

Граничные условия для уравнения (41) наиболее просто получаются при изучении вариации энергии пластины. Не останавливаясь на выводе представления для энергии, запишем ее выражение для случая квадратной пластины со стороной единичной длины:

$$W = \frac{D}{2}\int_0^1\int_0^1 \left\{(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right]\right\} dx_1\, dx_2. \qquad (42)$$

Проварьировав энергию (42) и преобразовав полученное выражение с помощью интегрирования по частям, получим следующие варианты граничных условий (например, при $x_1 = 0$):

1) Условия жесткой заделки

$$w(0, x_2) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1}(0, x_2) = 0.$$

2) Условия шарнирного опирания

$$w(0, x_2) = 0, \quad D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0.$$

3) Условия свободного края

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0, \quad D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0.$$

Аналогичные граничные условия можно написать и на других участках границы пластины. Заметим только, что если на двух смежных сторонах пластины заданы условия свободного края, то в примыкающем к этим сторонам угле следует дополнительно задать значение крутящего момента.

Помимо написанных граничных условий, могут быть заданы условия и иного типа, но мы на этом здесь останавливаться не будем.

§ 2. Краткие сведения об эллиптических уравнениях

1. Уравнения второго порядка. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с n независимыми переменными имеет вид

$$L(u)=\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+ \\ +\sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+C(x)\,u=f(x). \qquad (1)$$

Здесь $A_{\alpha\beta}$, B_α, C и f — вещественные функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем трактовать как координаты некоторой точки x в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Будем считать также, что функции $A_{\alpha\beta}$, B_α и C измеримы и ограничены. Уравнение (1) называется *эллиптическим в точке* $\bar{x}$, если

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\,\xi_\alpha\xi_\beta\neq 0 \quad \text{при} \quad |\xi|\neq 0, \qquad (2)$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — любые вещественные числа, а $|\xi|=\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha^2\right)^{1/2}$.

Условию эллиптичности (2) можно придать и несколько иную форму. Левая часть неравенства (2) есть непрерывная функция ξ_α, и поэтому при выполнении неравенства (2) знакоопределенна. Изменив в случае необходимости знаки всех коэффициентов $A_{\alpha\beta}$, вместо (2) получим эквивалентное условие:

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\,\xi_\alpha\xi_\beta>0 \quad \text{при} \quad |\xi|\neq 0. \qquad (3)$$

Без ограничения общности можно считать, что $A_{\alpha\beta}(\bar{x})=A_{\beta\alpha}(\bar{x})$. Поэтому неравенство (3) есть условие положительной определенности квадратичной формы. Но для положительно определенных квадратичных форм справедливо неравенство

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\,\xi_\alpha\xi_\beta\geqslant\nu(\bar{x})\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha^2, \qquad \nu(\bar{x})>0, \qquad (4)$$

где $\nu(\bar{x})$ — минимальное собственное значение симметричной матрицы $\|A_{\alpha\beta}\|$. Следовательно, в определении эллиптичности уравнения (1) вместо условия (2) можно требовать выполнения условия (4).

В случае пространства двух измерений, т. е. при $n=2$, условие эллиптичности (2), или, что то же самое, требование положительной определенности квадратичной формы (2), можно сформулировать в виде

$$A_{12}^2(\bar{x}) = A_{21}^2(\bar{x}) < A_{11}(\bar{x})\, A_{22}(\bar{x}). \tag{5}$$

Уравнение (1) называется *эллиптическим в области* $D \in E_n$, если в каждой точке этой области оно эллиптично.

Уравнение (1) называется *равномерно эллиптическим в области* $D \in E_n$, если в условии (4)

$$\inf_{x \in D} \nu(\bar{x}) = \nu > 0.$$

В этом случае вместо (4) можно написать

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x)\,\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \nu \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2, \qquad \nu = \text{const} > 0, \quad x \in D. \tag{6}$$

Примерами эллиптических уравнений второго порядка могут служить:

уравнение Лапласа

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0,$$

уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x),$$

уравнение без смешанных производных

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C(x)\,u = f(x)$$

при

$$A_{\alpha\alpha}(x) > 0.$$

2. Уравнения высших порядков. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных порядка $2m$

с n независимыми переменными можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{2m} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2} \ldots \partial x_{\alpha_k}} = f(x). \quad (7)$$

Уравнение (7) называется *эллиптическим в точке* $\bar{x}$, если

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}}(\bar{x}) \xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{2m}} \neq 0 \quad (8)$$

при $|\xi| \neq 0$.

Уравнение (7) называется *эллиптическим в области* $D \subset E_n$, если в каждой точке этой области оно эллиптично.

Так же, как и в случае уравнений второго порядка, условие эллиптичности (8) можно записать в виде

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}}(\bar{x}) \xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{2m}} \geqslant \nu(\bar{x}) \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^{2m}. \quad (9)$$

Важным примером эллиптического уравнения высокого порядка является *полигармоническое уравнение*

$$(-\Delta)^m u = f(x),$$

где Δ^m означают m-ю итерацию оператора Лапласа и определяется рекуррентными соотношениями

$$\Delta^1 u = \Delta u, \quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u), \quad \ldots, \quad \Delta^m u = \Delta(\Delta^{m-1} u), \qquad m > 1.$$

При $m = n = 2$ имеем бигармоническое уравнение на плоскости

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x).$$

Всякое эллиптическое уравнение при $n > 1$ имеет четный порядок.

3. Системы уравнений. Пусть система дифференциальных уравнений в частных производных содержит p неизвестных функций $u_1, u_2, \ldots, u_p$, каждая из которых зависит от n переменных, и пусть m_j — наивысший порядок входящих в систему производных функций u_j. Такую

систему можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_k=1}^{n} A^{(i,\,j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(x)\frac{\partial^k u_j}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}\ldots\partial x_{\alpha_k}}=f_i(x), \tag{10}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ p.$$

Рассмотрим определитель порядка p, у которого на пересечении i-й строки и j-го столбца находится элемент

$$\sum_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_{m_j}=1}^{n} A^{(i,\,j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_j}}\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{m_j}}.$$

Система (10) называется *эллиптической в точке* $\bar{x}$, если

$$\det\left|\sum_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_{m_j}=1}^{n} A^{(i,\,j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_j}}(\bar{x})\,\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{m_j}}\right|\neq 0$$

$$\text{при } |\xi|\neq 0. \tag{11}$$

Система (10) называется *эллиптической* в некоторой *области* $D\in E_n$, если она эллиптична в каждой точке $\bar{x}\in D$.

Весьма важным примером эллиптической системы служит система уравнений Ляме

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3}=-f_1,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}=-f_2,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}+\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+$$
$$+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}=-f_3.$$

Эта система содержит три неизвестные функции ($p=3$), зависящие от трех независимых переменных ($n=3$). Система содержит только вторые производные ($m_j=2$). Определитель, фигурирующий в условии (11), для этой

системы равен

$$\begin{vmatrix} \mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)\xi_1^2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & \mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 & \mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)\xi_3^2 \end{vmatrix} = \\ = \mu^2(\lambda+2\mu)|\xi|^6.$$

По крайней мере при $\lambda>0$ и $\mu>0$, как это и бывает в реальных задачах, указанный определитель при $|\xi|\neq 0$ в нуль не обращается.

В двумерном случае система принимает вид

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}=-f_1,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}=-f_2,$$

а определитель из условия (11) равен $\mu(\lambda+2\mu)|\xi|^4$.

4. Обобщенные решения. Пусть в области G n-мерного евклидова пространства задано эллиптическое уравнение второго порядка

$$Lu \equiv \\ \equiv \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+C(x)u=f(x). \tag{12}$$

Обобщенным решением из $W_2^1(G)$ *уравнения* (12) называется функция $u(x)$, принадлежащая пространству $W_2^1(G)$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_G\left(-\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta}{\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{n}B_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\eta+Cu\eta\right)dx=\int_G f\eta\,dx \tag{13}$$

при любой функции $\eta(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$.

Здесь $W_2^1(G)$ — пространство функций, принадлежащих $L_2(G)$ и имеющих первые обобщенные производные, также принадлежащие $L_2(G)$. Норма в пространстве $W_2^1(G)$ определяется равенством

$$\|v\|_{W_2^1(G)}=\left\{\int_G\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2+u^2\right]dx\right\}^{1/2}. \tag{14}$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ — подпространство пространства $W_2^1(G)$, полученное замыканием в норме $W_2^1(G)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителями в G.

Пусть для уравнения (12) на границе Γ области G задано граничное условие

$$u(x)=0, \quad x\in\Gamma. \tag{15}$$

Обобщенным решением из $W_2^1(G)$ *задачи* (12), (15) называется такая функция $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, которая при любой функции $\eta(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ удовлетворяет интегральному тождеству (13).

Пусть для уравнения (12) на границе Γ задано граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial N}\equiv\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\cos(n,\,x_\alpha)=0, \tag{16}$$

где n — внутренняя нормаль к Γ.

Обобщенным решением из $W_2^1(G)$ *задачи* (12), (16) называется такая функция $u(x)\in W_2^1(G)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству (13) при любой функции $\eta(x)\in W_2^1(G)$.

Аналогичным образом определяются обобщенные решения для уравнений высокого порядка и для систем уравнений.

5. Вариационные формулировки краевых задач. Многие задачи математической физики, приводящие к эллиптическим уравнениям, помимо основной формулировки, связанной с отысканием решения дифференциального уравнения, допускают еще так называемую вариационную формулировку. Это означает, что существует функционал, минимизирующий элемент которого совпадает с искомым решением рассматриваемой задачи. В этом случае вместо того, чтобы ставить задачу о нахождении того или иного решения дифференциального уравнения, можно поставить задачу об отыскании элемента, доставляющего экстремум соответствующему функционалу.

Пусть в области G n-мерного евклидова пространства требуется найти решение уравнения

$$Lu\equiv\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)-C(x)u=f(x), \tag{17}$$

удовлетворяющее на границе Γ области G однородному граничному условию первого рода

$$u(x)=0, \quad x\in\Gamma. \tag{18}$$

Предполагается, что уравнение (17) — эллиптическое, а матрица $\{A_{\alpha\beta}(x)\}$ симметрична, т. е. $A_{\alpha\beta}(x)\equiv A_{\beta\alpha}(x)$. Задача (17), (18) эквивалентна следующей вариационной задаче: в классе достаточно гладких функций, удовлетворяющих условию (18), найти такую, которая минимизирует функционал

$$I(u)\equiv\frac{1}{2}\int_G\left[\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+C(x)u^2\right]dx+$$

$$+\int_G f(x)u(x)\,dx. \tag{19}$$

Если в области G требуется найти решение уравнения (17), удовлетворяющее граничным условиям второго рода (16), то соответствующая вариационная задача формулируется так: в классе достаточно гладких функций найти такую, которая минимизирует функционал (19). В случае задачи с граничными условиями второго рода на функции, среди которых ищется минимизирующий элемент, никакие граничные условия не накладываются.

Для системы Ляме

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+F_i=0, \qquad i=1,\ 2,$$

с граничными условиями второго рода

$$\sum_{j=1}^{2}\tau_{ij}\cos(n,\ x_j)+f_i=0, \quad i=1,\ 2, \quad x\in\Gamma,$$

вариационная задача формулируется следующим образом: в классе достаточно гладких вектор-функций найти такую, которая минимизирует функционал

$$I(u)\equiv W(u)-\int_G\sum_{i=1}^{2}F_iu_i\,dx-\int_\Gamma\sum_{i=1}^{2}f_iu_i\,ds,$$

где

$$W(u) \equiv \frac{1}{2}\int_G \left\{2\mu\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right] + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2\right\} dx.$$

Функционал $W(u)$ есть функционал энергии упругой деформации.

Отметим, наконец, вариационную формулировку первой краевой задачи для двумерного бигармонического уравнения. В области G ищется решение уравнения

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in G, \tag{20}$$

удовлетворяющее на границе Γ граничным условиям первого рода:

$$u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{21}$$

Вариационная формулировка задачи (20), (21): в классе достаточно гладких функций, удовлетворяющих условиям (21), найти такую, которая минимизирует функционал

$$I(u) \equiv \frac{1}{2}\int_G \left\{(\Delta u)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right]\right\} dx -$$
$$- \int_G f(x)\, u\, dx. \tag{22}$$

В задачах, связанных с изгибом пластинки, ν есть коэффициент Пуассона. В рассматриваемом случае минимизирующий элемент не зависит от ν, так что для упрощения функционала $I(u)$ можно положить $\nu = 1$.

Если на класс функций, среди которых ищется минимум функционала (22), не накладывать граничные условия (21), то всякий минимизирующий элемент этого функционала будет решением уравнения (20) с так называемыми граничными условиями свободного края (см. п. 4 § 1).

ГЛАВА II

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

§ 1. Основные понятия метода сеток

Метод конечных разностей, или метод сеток, в настоящее время является одним из наиболее распространенных методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Суть метода состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов (например, отрезок, прямоугольник и т. д.) заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым сеткой; вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые сеточными функциями. Производные, входящие в дифференциальное уравнение и граничные условия, заменяются (аппроксимируются) разностными отношениями, т. е. линейными комбинациями значений сеточной функции в некоторых узлах сетки; при этом краевая задача для дифференциального уравнения заменяется системой линейных (если исходная задача была линейной) алгебраических уравнений (разностной схемой).

Если полученная таким образом разностная краевая задача разрешима и ее решение при измельчении сетки приближается (сходится) к решению исходной задачи для дифференциального уравнения, то оно и принимается за приближенное решение исходной задачи.

Несмотря на кажущуюся простоту метода, прежде чем приступать к решению конкретной задачи, необходимо уметь дать ответы на следующие вопросы:

1. Как выбрать сетку?

2. Как написать разностную схему?

Если эти вопросы решены, то важно иметь информацию по следующим вопросам:

3. Сколь хорошо разностная схема аппроксимирует исходную задачу?

4. Устойчива ли разностная схема и в каком смысле?

5. Какова скорость сходимости решения разностной задачи к решению исходной задачи?

Разбору этих вопросов для тех или иных задач и посвящена эта книга.

1. Сетки и сеточные функции. Рассмотрим простейшие примеры сеток. Пусть область изменения аргумента x есть отрезок $0 \leqslant x \leqslant l$. Разобьем этот отрезок точками $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$ на N равных частей длины $h = l/N$ каждая. Множество точек $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, называется *равномерной сеткой* на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ и обозначается $\bar{\omega} = \{x_i = ih \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$, а число h — расстояние между точками (узлами) сетки $\bar{\omega}$ — называется *шагом сетки*.

Отрезок $[0, l]$ можно разбить на N частей, вводя произвольные точки $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{N-1} < l$. Тогда получим сетку $\bar{\omega} = \{x_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$ с шагом $h_i = x_i - x_{i-1}$, который зависит от номера i узла x_i. Если $h_i \neq h_{i+1}$ хотя бы для одного номера i, то сетка $\bar{\omega}$ называется *неравномерной*. Если $h_i = \text{const} = h = l/N$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N$, то мы получаем построенную выше *равномерную сетку*.

На бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ можно рассматривать сетку $\Omega = \{x + ih \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ с началом в любой точке x, состоящую из бесконечного числа узлов.

Иногда бывает удобно строить сетку так, что лишь один первый шаг отличен от остальных, а прочие шаги совпадают. Примером такой сетки на $[0, l]$ может служить сетка

$$\bar{\omega} = \{x_i = ih + 0{,}5h \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N, \ h = l/(N + 0{,}5)\}.$$

В этом случае левый конец отрезка $x = 0$ не является узлом сетки.

Пусть область изменения аргументов $x = (x_1, x_2)$ есть прямоугольник $D = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \ \alpha = 1, 2\}$.

Построим на отрезке $0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$ сетку $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha \mid i_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, N_\alpha\}$ с шагом $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$. Множество узлов $x = x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $i = (i_1, i_2)$ с координатами $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$ и $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$ назовем *сеткой в прямоугольнике* D и обозначим через $\bar{\omega} = \{x = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \ i_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, N_\alpha; \ \alpha = 1, 2\}$. Эта сетка равномерна по каждому из переменных x_1 и x_2. Если хотя бы одна из сеток $\bar{\omega}_\alpha$ неравномерна, то сетка $\bar{\omega}$ называется неравномерной. Если $h_1 = h_2$, то сетка называется *квадратной*. Если же $h_1 \neq h_2$, то равномерную сетку $\bar{\omega}$ будем называть *прямоугольной*. Сетка $\bar{\omega}$, очевидно, состоит из точек пересечения прямых $x_1 = x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$, $i_1 = 0, 1, 2, \ldots, N_1$, и прямых $x_2 = x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$, $i_2 = 0, 1, 2, \ldots, N_2$.

Функцию $\varphi = \varphi(x_i)$ дискретного аргумента x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, называют *сеточной функцией*, определенной на сетке $\bar{\omega}$ (сетка задана на отрезке $[0, l]$).

Всякой непрерывной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, l]$, можно поставить в соответствие сеточную функцию φ_i, заданную на сетке $\bar{\omega}$ (спроектировать $f(x)$ на сетку $\bar{\omega}$), полагая, например, $\varphi_i = f(x_i) \equiv f_i$, $\varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_i - 1/2}^{x_i + 1/2} f(x)\, dx$ и т. д. Вторая из указанных проекций на сетку может быть осуществлена не только для непрерывных функций, но и для функций, имеющих разрывы первого рода и даже для просто интегрируемых функций.

Следует иметь в виду, что одна и та же сеточная функция, будучи заданной на двух различных, но имеющих общие узлы сетках, не обязана в этих общих узлах принимать одно и то же значение. Более точно, пусть имеются некоторая сеточная функция $\varphi^h(x)$ и две сетки, для одной из которых шаг $h = h_1$, а для другой $h = h_2$, причем $h_1 \neq h_2$. Обозначим эти сетки ω^{h_1} и ω^{h_2} соответственно. Тогда, вообще говоря, $\varphi^{h_1}(x) \neq \varphi^{h_2}(x)$ при $x \in \omega^{h_1}$ и $x \in \omega^{h_2}$. Одним из простейших примеров таких функций является сеточная функция $\varphi_i = \frac{1}{h} \int_{(i-0{,}5)\,h}^{(i+0{,}5)\,h} f(x)\, dx$, где $f(x)$ есть некоторая функция непрерывного аргумента.

2. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Погрешность аппроксимации. Оператор L_h, преобразующий сеточную функцию y в сеточную функцию $Y = L_h y$, называется сеточным или *разностным оператором*. Дифференциальный оператор L, заданный в классе функций непрерывного аргумента, может быть приближенно заменен (аппроксимирован) разностным оператором L_h, заданным на сеточных функциях. Для этого каждая из производных заменяется разностным отношением, содержащим значения сеточной функции в нескольких узлах сетки. Множество узлов сетки, используемое при написании разностного оператора, называется *шаблоном* этого оператора.

Посмотрим, как строится аппроксимация для первых и вторых производных функции одного переменного.

Пусть $\Omega = \{\bar{x} + ih \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — равномерная сетка с шагом h на прямой $-\infty < x < \infty$. Рассмотрим первую производную $Lv \equiv v'$ функции $v(x)$. Заменить ее разностным выражением можно различными способами. Например:

$$Lv \sim \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \equiv L_h^- v_i$$

— *левое разностное отношение*,

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \equiv L_h^+ v_i$$

— *правое разностное отношение*,

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} \equiv L_h^\circ v_i$$

— *центральное разностное отношение*.

Здесь $v_i = v(x_i)$, знак $\sim$ означает соответствие или аппроксимацию. При замене Lv разностным выражением $L_h v$ допускается погрешность $L_h v_i - (Lv)_i = \psi_i$, называемая *погрешностью аппроксимации* оператора L разностным оператором L_h. Естественно требовать, чтобы при стремлении h к нулю эта погрешность стремилась к нулю. Для оценки ψ_i нужно предположить, что $v(x)$ — гладкая функция. Пусть $v(x) \in C^{(m)}$, где $m \geqslant 2$. Разложим $v(x)$ в окрестности точки $x = x_i$ по формуле Тейлора:

$$v_{i\pm 1} = v_i \pm h v_i' + O(h^2)$$

и вычислим

$$\psi_i^- = L_h^- v_i - v_i' = O(h), \quad \psi_i^+ = L_h^+ v_i - v_i' = O(h).$$

Отсюда следует, что $\psi_i^{\pm} \to 0$ при $h \to 0$.

Пусть L — дифференциальный оператор, L_h — разностный оператор, заданный на некоторой сетке Ω, где h — параметр, характеризующий мелкость сетки. Говорят, что разностный оператор L_h:

1) *аппроксимирует* дифференциальный оператор L в узле $x_i \in \Omega$, если $\psi_i = L_h v_i - (Lv)_i$, где $v(x)$ — достаточно гладкая функция, стремится к нулю при $h \to 0$;

2) *аппроксимирует L с порядком n* $(n > 0)$ в узле $x_i \in \Omega$, если $\psi_i = O(h^n)$.

Обращаясь к формулам для $L_h^{\pm}$, видим, что $L_h^- v_i$ и $L_h^+ v_i$ аппроксимируют $Lv = v'$ с первым порядком при $v \in C^{(m)}$, где $m \geqslant 2$. Увеличение числа m не меняет порядка аппроксимации.

Возьмем теперь оператор L_h^0. Как нетрудно показать, $L_h^0 v_i$ аппроксимирует $v'(x)$ при $v(x) \in C^{(m)}$, $m \geqslant 3$, со вторым порядком.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$v_{\bar{x},\,i} \equiv (v_i - v_{i-1})/h, \quad v_{x,\,i} \equiv (v_{i+1} - v_i)/h,$$

$$v_{\mathring{x},\,i} = (v_{i+1} - v_{i-1})/(2h) = \frac{1}{2}(v_{x,\,i} + v_{\bar{x},\,i}).$$

В тех случаях, когда номер i узла не будет иметь значения, будем его опускать и писать просто $v_{\bar{x}}$, v_x, $v_{\mathring{x}}$.

Рассмотрим теперь вторую производную $Lv \equiv v''$. Очевидно, что на двухточечном шаблоне ее аппроксимировать нельзя. Выберем *трехточечный шаблон*, состоящий из узлов x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, и рассмотрим разностный оператор

$$L_h v_i \equiv v_{\bar{x}x,\,i} = \frac{1}{h}(v_{x,\,i} - v_{\bar{x},\,i}) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}.$$

Если $v(x) \in C^{(m)}$, $m \geqslant 4$, то можно написать, что

$$v_{i\pm1} = v_i \pm hv_i' + \frac{h^2}{2} v_i'' \pm \frac{h^3}{6} v_i''' + O(h^4).$$

Отсюда следует (индекс i опускаем), что

$$v_{\bar{x}x} - v'' = O(h^2),$$

т. е. $v_{\bar{x}x}$ аппроксимирует v'' со вторым порядком.

Отметим, что на самом деле порядок аппроксимации разностного оператора L_h зависит от порядка m дифференцируемости функции $v(x)$. Мы везде фактически говорили о том максимальном порядке аппроксимации, который не меняется при увеличении номера m класса $C^{(m)}$, считая, что $v(x)$ — любая функция из $C^{(m)}$.

Рассмотрим более сложный оператор

$$Lu \equiv \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

где $u \equiv u(x_1, x_2)$ — функция двух аргументов x_1 и x_2, меняющихся на плоскости Ox_1x_2. Введем сетку

$$\Omega = \left\{ x_i = x_{i_1 i_2} = \left(x_1^{(i_2)}, x_2^{(i_2)}\right) \middle| x_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha + i_\alpha h_\alpha, \right.$$
$$\left. i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \alpha = 1, 2 \right\}.$$

и произведем замену

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\bigg|_{x=x_i} \sim \frac{u\left(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)}\right) - 2u\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right) + u\left(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)}\right)}{h_1^2} =$$
$$= u_{\bar{x}_1 x_1,\, i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\bigg|_{x=x_i} \sim \frac{u\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)}\right) - 2u\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right) + u\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)}\right)}{h_2^2} =$$
$$= u_{\bar{x}_2 x_2,\, i}.$$

В результате получим разностный оператор $L_h u_i = \left(u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}\right)_i$. Этот оператор определен на шаблоне, состоящем из пяти точек $\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right)$, $\left(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)}\right)$, $\left(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)}\right)$, $\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)}\right)$, $\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)}\right)$. Так как

$$u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2 + O(h_\alpha^2), \quad \alpha = 1, 2,$$

то оператор L_h имеет второй порядок аппроксимации по h_1 и h_2:

$$\psi(x_i) = L_h u_{i_1, i_2} - (Lu)_{i_1 i_2} = O(h_1^2 + h_2^2).$$

До сих пор мы оценивали величину погрешности аппроксимации $\psi = L_h v - Lv$ в отдельном узле $x_i \in \Omega$. Если оператор L_h аппроксимирует оператор L во всех узлах $x_i \in \Omega$, то говорят, что L_h *аппроксимирует* L *на сетке* Ω. В этом случае для оценки погрешности аппроксимации удобно пользоваться нормой C:

$$\|\psi\|_C = \max_{x \in \Omega} |\psi(x)|. \qquad (1)$$

Для оценки величины сеточной функции ψ можно использовать и другие нормы, такие как

$$\|\psi\|_{L_1} = \sum_{x \in \Omega} H |\psi(x)|, \quad \|\psi\|_{L_2} = \left(\sum_{x \in \Omega} H \psi^2(x) \right)^{1/2}, \qquad (2)$$

где $H = h$ в одномерном случае и $H = h_1 h_2$ в двумерном случае.

Пусть $\|\psi\|$ — некоторая норма для функций $\psi(x)$, заданных на сетке Ω. В дальнейшем будем говорить, что разностный оператор L_h: 1) *аппроксимирует* дифференциальный оператор L *по норме* $\|\cdot\|$, если $\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| \to 0$ при $h \to 0$; 2) *аппроксимирует с порядком* $n > 0$ (L_h имеет n-й порядок аппроксимации), если $\|\psi\| = O(h^n)$, или $\|\psi\| \leqslant Mh^n$, где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h.

Если v — достаточно гладкая функция, а Ω — равномерная сетка, то все рассмотренные выше разностные операторы имеют один и тот же порядок аппроксимации в любой из норм (1), (2).

Иначе обстоит дело в случае неравномерной сетки. Пусть

$$\bar{\omega} = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$$

— неравномерная сетка с шагами $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим оператор $Lv = v''$. Поставим ему в соответствие разностный оператор

$$L_h v_i = \frac{1}{\hbar_i} \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right], \quad \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}), \qquad (3)$$

определенный на трехточечном шаблоне (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).

Вычислим погрешность аппроксимации

$$\psi_i = L_h v_i - (Lv)_i.$$

Предполагая, что $v(x) \in C^{(4)}[0, 1]$, и пользуясь разложениями по формуле Тейлора

$$v_{i+1} = v_i + h_{i+1} v_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2} v_i'' + \frac{h_{i+1}^3}{6} v_i''' + O(h_{i+1}^4),$$

$$v_{i-1} = v_i - h_i v_i' + \frac{h_i^2}{2} v_i'' - \frac{h_i^3}{6} v_i''' + O(h_i^4),$$

находим

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(h_{i+1}^2) + O(h_i^2) = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(\hbar_i^2).$$

Отсюда видно, что $\|\psi\|_C = O(h_0)$, $\|\psi\|_{L_1} = O(h_0)$, $\|\psi\|_{L_2} = O(h_0)$, $h_0 = \max\limits_{\bar{\omega}} h_i$. Следовательно, L_h имеет первый порядок аппроксимации в нормах $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_{L_1}$, $\|\cdot\|_{L_2}$.

Покажем, что при надлежащем выборе нормы, а именно при

$$\|\psi\| = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k\right)^2\right]^{1/2}, \tag{4}$$

оператор (3) будет иметь второй порядок аппроксимации:

$$\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| = O(h_0^2).$$

Так как $v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$, то

$$(h_{i+1} - h_i) v_i''' = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2(h_i + h_{i+1})} v_i''' + O(\hbar_i^2) =$$

$$= \frac{1}{\hbar_i}(h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i''') + O(\hbar_i^2),$$

и поэтому ψ_i представима в виде

$$\psi_i = \mathring{\psi}_i + \psi_i^*,$$

где

$$\psi_i^* = O(\hbar_i^2), \quad \mathring{\psi}_i = \frac{1}{\hbar_i}(\eta_{i+1} - \eta_i) = \eta_{\hat{x},\, i},$$

$$\eta_i = \frac{1}{6} h_i^2 v_i''' = O(h_i^2).$$

Вычисляя $\sum\limits_{k=1}^{i} \hbar_k \mathring{\psi}_k = \sum\limits_{k=1}^{i} (\eta_{k+1} - \eta_k) = \eta_{i+1} - \eta_1$ и учитывая, что $|\eta| = O(h_0^2)$, получим $\|\mathring{\psi}\| = O(h_0^2)$. Отсюда следует, что $\|\psi\| \leqslant \|\mathring{\psi}\| + \|\psi^*\| \leqslant M h_0^2$, где $M = \text{const} > 0$ не зависит от сетки, т. е. оператор L_h, заданный формулой (3), имеет второй порядок аппроксимации в норме $\|\cdot\|$, определяемой соотношением (4) на любой неравномерной сетке $\bar{\omega}$. Этот результат сохраняет силу и для норм

$$\|\psi\| = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=i}^{N-1} \hbar_k \psi_k\right)^2\right]^{1/2},$$

$$\|\psi\| = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left|\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k\right|.$$

Отметим, что $\|\psi\| \leqslant \|\psi\|_{L_1} \leqslant \|\psi\|_{L_2} \leqslant \|\psi\|_C$. Обратные неравенства для произвольных сеточных функций неверны. В дальнейшем для разностных отношений на неравномерной сетке будем использовать следующие обозначения

$$v_{\bar{x},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{x,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}, \quad v_{\hat{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_i},$$
$$v_{\bar{x}\hat{x},i} = \frac{1}{h_i}(v_{x,i} - v_{\bar{x},i}) = \frac{1}{h_i}\left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}\right].$$

3. Постановка разностных задач. Аппроксимация и сходимость. До сих пор мы занимались аппроксимацией простейших дифференциальных операторов разностными. Обычно требуется решить дифференциальное уравнение $Lu = -f(x)$ с некоторыми дополнительными (например, краевыми) условиями. Поэтому, кроме построения разностного оператора, нужно аппроксимировать на сетке правую часть дифференциального уравнения и дополнительные условия, после чего можно поставить разностную задачу, т. е. написать систему разностных (алгебраических) уравнений.

Рассмотрим несколько примеров постановки разностных задач.

Пример 1. Краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка

$$Lu = u'' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1 \qquad (5)$$

на равномерной сетке $\bar{\omega}$ ставятся в соответствие разностные краевые задачи:

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = -\varphi_i h^2,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = g_0, \quad y_N = g_1, \qquad (6)$$

где $\varphi_i = f(x_i)$,

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = -\bar{\varphi}_i h^2,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = g_0, \quad y_N = g_1, \qquad (7)$$

где $\bar{\varphi}_i = f(x_i) + \frac{h^2}{12} f''(x_i)$.

Пример 2. Краевой задаче

$$u'' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = \varkappa u(0) - g_0, \quad u(1) = g_1 \qquad (8)$$

на равномерной сетке $\bar{\omega}$ поставим в соответствие две разностные задачи:

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})=-\varphi_i, \quad i=1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\frac{1}{h}(y_1-y_0)=\varkappa y_0-g_0, \; y_N=g_1, \quad (9)$$

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})=-\varphi_i, \quad i=1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\frac{1}{h}(y_1-y_0)=\varkappa y_0-\left(g_0+\frac{h}{2}f(0)\right),$$

$$y_N=g_1 \quad (10)$$

Оставляя пока в стороне вопрос о разрешимости задач (6), (7), (9), (10), выясним вопрос о погрешности аппроксимации этих задач. Разностный оператор $\tilde{\Lambda}$, определяемый соотношением

$$\tilde{\Lambda} y_i \equiv y_{i+1}-2y_i+y_{i-1} \quad (11)$$

(см. (6), (7)), не аппроксимирует дифференциальный оператор $Lu=\frac{d^2u}{dx^2}$, так как

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_i-\tilde{\Lambda}v_i=O(1).$$

Правая часть (6) также не аппроксимирует правую часть (5). Тем не менее дифференциальное уравнение (5) аппроксимируется разностным уравнением (6), так как в (6) мы имеем дело с уравнением, смысл которого не меняется от умножения его на некоторую функцию. Умножая (6) на $1/h^2$, мы в левой части получаем аппроксимацию оператора d^2/dx^2, а в правой части — аппроксимацию правой части (5). На всякой функции $v(x)\in C^{(4)}$, как это было выяснено в п. 2, разностный оператор $\Lambda_h=h^{-2}\tilde{\Lambda}$ аппроксимирует дифференциальный оператор d^2/dx^2 со вторым порядком. Правая часть (5) аппроксимируется точно. Тем самым, если бы мы погрешность аппроксимации разностного уравнения определили соотношением

$$\psi(x)=L_h v+\varphi-(Lv+f), \quad x\in\omega, \quad (12)$$

где $v(x)$ — любая достаточно гладкая функция, то получили бы, что $\psi(x)=O(h^2)$.

Разностное уравнение (7) после умножения на h^{-2} также имело бы погрешность аппроксимации $O(h^2)$ в смысле данного определения. Но, как отмечалось в п. 2, порядок погрешности аппроксимации оператора существенным образом зависит от гладкости функции, на которой осуществляется проверка. Поэтому, если в (12) функция $v(x)$ имеет гладкость, меньшую чем $C^{(4)}$, то погрешность аппроксимации уравнения (6) будет хуже, чем $O(h^2)$. В связи с этим гладкость $v(x)$ нужно задавать такую же, как гладкость решения аппроксимируемой задачи (5). Более того, при аппроксимации задачи (5) нас больше должна интересовать точность приближенного решения задачи (6) по сравнению с решением задачи (5), чем погрешность аппроксимации схемы, хотя эти вопросы и тесно связаны друг с другом.

Пусть функция $z(x)=y(x)-u(x)$ есть разность между решением задачи (6) и решением задачи (5) на сетке ω. Найдем уравнение, которому должна удовлетворять сеточная функция $z(x)$. Подставляя $y(x)=z(x)+u(x)$ в (6), находим

$$z_{i+1}-2z_i+z_{i-1}=-h^2\varphi_i-(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}). \qquad (13)$$

Умножая (13) на h^{-2}, получаем

$$L_h z=-(\varphi+L_h u), \quad \text{где} \quad L_h z=z_{\bar{x}x}. \qquad (14)$$

Сравним выражение, стоящее в скобках в правой части (14), с ранее введенным определением погрешности аппроксимации (12). Сравнение показывает, что указанное выражение из (14) совпадает с функцией $\psi(x)$ из (12), если в качестве функции $v(x)$ в (12) взять решение исходной задачи (5). Если это выражение (14) принять за определение погрешности аппроксимации, то автоматически отпадает вопрос о гладкости функции $v(x)$ в определении $\psi(x)$.

Итак, пусть имеется дифференциальное уравнение

$$Lu=-f(x), \qquad (15)$$

которое аппроксимируется разностным уравнением

$$L_h y=-\varphi(x) \qquad (16)$$

на сетке Ω. Рассмотрим невязку $\psi(x)=L_h u+\varphi(x)$, $x\in\Omega$, где u — решение уравнения (15).

Будем говорить, что функция $\psi(x)$ есть *погрешность аппроксимации уравнения* (15) разностным уравнением (16), если разностный оператор L_h аппроксимирует на достаточно гладких функциях дифференциальный оператор L.

В дальнейшем будем говорить, что разностное уравнение (16):

1) *аппроксимирует дифференциальное уравнение* (15) *по норме* $\|\cdot\|$, если $\|\psi\| = \|L_h u + \varphi\| \to 0$ при $h \to 0$,

2) *аппроксимирует дифференциальное уравнение с порядком* n $(n > 0)$, если $\|\psi\| = O(h^n)$ или $\|\psi\| \leqslant Mh^n$, где $M = \text{const} > 0$ и не зависит от h.

Исходя из нового определения погрешности аппроксимации разностных схем, проверим порядок погрешности схем (6) и (7) в предположении, что решение уравнения (5) достаточно гладкое.

Для схемы (6)

$$\psi = L_h u + \varphi = u_{\bar{x}x} + f = u'' + \frac{h^2}{12} u^{\mathrm{IV}} + f + O(h^4) = O(h^2).$$

Для схемы (7)

$$\psi = L_h u + \bar{\varphi} = u_{\bar{x}x} + f + \frac{h^2}{12} f'' = u'' + \frac{h^2}{12} u^{\mathrm{IV}} + f + \frac{h^2}{12} f'' +$$

$$+ O(h^4) = (u'' + f) + \frac{h^2}{12} (u'' + f)'' + O(h^4) = O(h^4),$$

так как $u'' + f(x) = 0$.

Тем самым, если решение задачи (5) $u(x) \in C^{(4)}$, то погрешность аппроксимации схемы (6) есть $O(h^2)$, если решение задачи (5) $u(x) \in C^{(6)}$, то погрешность аппроксимации схемы (7) есть $O(h^4)$. Повышение порядка погрешности аппроксимации схемы (7) по сравнению со схемой (6) связано с тем, что погрешность аппроксимации мы исследуем на решении задачи (5), а не на произвольной функции $v(x)$.

Очевидно, что погрешности аппроксимации задач (6) и (7) в целом (с учетом погрешности аппроксимации граничных условий) будут те же самые, так как граничные условия аппроксимируются точно.

Вычислим погрешность аппроксимации задачи (8) задачами (9) и (10). Ясно, что погрешности аппроксимации уравнений в (9) и (10) будут величинами $O(h^2)$, так как они не отличаются от аппроксимации в задаче (6). Иссле-

дуем погрешность аппроксимации граничного условия в точке $x=0$.

Для схемы (9)

$$\psi_\gamma = u_{x,0} - \varkappa u_0 + g_0 = u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \varkappa u(0) + g_0 + O(h^2) = O(h).$$

Для схемы (10)

$$\psi_\gamma = u_{x,0} - \varkappa u_0 + \left(g_0 + \frac{h}{2} f(0)\right) =$$

$$= u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \varkappa u(0) + g_0 + \frac{h}{2} f(0) + O(h^2) =$$

$$= (u'(0) - \varkappa u(0) + g_0) + \frac{h}{2}(u''(0) + f(0)) + O(h^2) = O(h^2),$$

так как

$$u'(0) = \varkappa u(0) - g_0, \quad u'' + f = 0.$$

Снова увеличение порядка погрешности аппроксимации связано с тем, что мы аппроксимируем граничное условие на решении задачи (8).

Как уже отмечалось выше, одним из основных вопросов теории разностных схем является вопрос о скорости сходимости решения разностной задачи к решению исходной задачи.

Пусть для некоторого дифференциального уравнения поставлена краевая задача

$$Lu = -f(x), \quad lu = -g(x). \tag{17}$$

Задача (17) на некоторой разностной сетке $\bar{\omega}$ аппроксимирована разностной задачей

$$L_h y = -\varphi(x), \ x \in \omega, \quad l_h y = -\nu(x), \ x \in \gamma, \tag{18}$$

где ω — множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}$, а γ — множество граничных узлов, причем $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$. Будем говорить, что решение разностной задачи (18):

1) *сходится* к решению исходной задачи на сетке ω в смысле нормы $\|\cdot\|_{(1)_h}$, если $\|y-u\|_{(1)_h} \to 0$ при $h \to 0$;

2) *сходится* к решению исходной задачи в смысле нормы $\|\cdot\|_{(1)_h}$ *со скоростью* $O(h^n)$, $n>0$, если $\|y-u\|_{(1)_h} = O(h^n)$ (или $\|y-u\|_{(1)_h} \leqslant Mh^n$, где M — положительная постоянная, не зависящая от h).

4. Устойчивость разностных схем. Выше мы познакомились с понятиями аппроксимации и сходимости схемы. Следует еще раз подчеркнуть следующее: погрешность аппроксимации рассматривается не на одной фиксированной сетке, а на последовательности сеток $\{\omega_h\}$. Поэтому можно считать, что всюду речь шла не о решении отдельной разностной задачи, а о последовательности $\{y^h\}$ решений разностной задачи, зависящей от выбора сеток. Здесь h — параметр, характеризующий сетку. Если сетка одномерна и равномерна, то h — число (шаг сетки). В общем случае h — вектор, имеющий норму $|h| > 0$.

Для оценки сходимости схемы надо исследовать сходимость последовательности $\{z^h = y^h - u^h\}$ при $|h| \to 0$, где u^h — проекция точного решения $u = u(x)$ исходной задачи на пространство сеточных функций, заданных на сетке ω_h.

Одним из основных понятий теории разностных схем является понятие устойчивости разностной схемы.

Пусть дана некоторая схема

$$L_h y^h = -\varphi^h(x), \qquad l_h y^h = -\nu^h(x).$$

и ее погрешность аппроксимации:

$$\psi^h = L_h u^h + \varphi^h, \qquad \psi^h_\nu = l_h u^h + \nu^h.$$

Предполагая, что $u = u(x)$ имеет достаточное число производных, можно получить асимптотическое разложение ψ^h и ψ^h_ν относительно $|h|$. В качестве $u = u(x)$ естественно выбрать решение исходной задачи для дифференциального уравнения. Однако знания порядка аппроксимации недостаточно для суждения о качестве схемы. Необходимо оценить точность схемы, т. е. порядок погрешности $z^h = y^h - u^h$. Эта оценка может быть получена, если схема устойчива.

Дадим определение устойчивости схемы.

Пусть y^h_1 и y^h_2 — решения задач (18) с правыми частями φ^h_1, ν^h_1 и φ^h_2, ν^h_2 соответственно. Схема (18) называется *устойчивой*, если существуют такие положительные постоянные M_1, M_2 и h_0, не зависящие от сетки ω_h (от векторного параметра h) и от выбора правых частей, что при $|h| \leqslant h_0$ справедливо неравенство

$$\|y^h_2 - y^h_1\|_{(1_h)} \leqslant M_1 \|\varphi^h_2 - \varphi^h_1\|_{(2_h)} + M_2 \|\nu^h_2 - \nu^h_1\|_{(3_h)}, \quad (19)$$

где $\|\cdot\|_{(1_h)}$, $\|\cdot\|_{(2_h)}$, $\|\cdot\|_{(3_h)}$ — некоторые нормы, введенные на

множестве сеточных функций, заданных на сетке ω_h. Устойчивость разностной схемы означает, что решение $\{y^h\}$ задачи (18) равномерно по h непрерывно зависит от правых частей (входных данных) $\{\varphi^h, \nu^h\}$ и, следовательно, малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения.

Если схема (18) разрешима при любых допустимых правых частях (входных данных) $\{\varphi^h, \nu^h\}$ и устойчива, то говорят, что разностная задача (18) поставлена *корректно* или схема (18) корректна. Если схема корректна, то она имеет единственное решение. В самом деле, предположим, что существует два решения y_1^h и y_2^h задачи (18), соответствующие одним и тем же входным данным $\{\varphi^h, \nu^h\}$, так что $\varphi_1^h = \varphi_2^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu_2^h = \nu^h$. Тогда из (19) следует:

$$\|y_2^h - y_1^h\|_{(1_h)} \leqslant M_1 \|0\|_{(2_h)} + M_2 \|0\|_{(3_h)} = 0, \quad \text{т. е. } y_1^h \equiv y_2^h.$$

При определении устойчивости (19) не предполагалось, что уравнения (18) линейны. Предположим, что схема (18) линейна. Тогда $y^h \equiv 0$ есть решение задачи при $\varphi^h = \nu^h \equiv 0$. Полагая в (19) $y_1^h = y^h$, $\varphi_1^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu^h$ и $y_2^h = \varphi_2^h = \nu_2^h = 0$, видим, что устойчивость линейной схемы означает выполнение априорной оценки

$$\|y^h\|_{(1_h)} \leqslant M_1 \|\varphi^h\|_{(2_h)} + M_2 \|\nu^h\|_{(3_h)}. \tag{20}$$

В этой книге мы рассматриваем только линейные схемы. Изучение устойчивости разностной схемы (18) фактически сводится к получению априорной оценки вида (20).

Если схема устойчива, то нетрудно получить оценку погрешности решения

$$\overset{h}{z}(x) = \overset{h}{y}(x) - u^h(x),$$

где $y^h(x)$ — решение задачи (18), а $u = u(x)$ — решение исходной задачи (17), через погрешность аппроксимации:

$$\psi^h(x) = L_h u^h + \varphi^h, \quad x \in \omega_h; \qquad \psi_\gamma^h = l_h u^h + \nu^h, \quad x \in \gamma_h.$$

В самом деле, решение $u = u(x)$ удовлетворяет условиям

$$L_h u^h = -(\varphi^h - \psi^h), \qquad l_h u^h = -(\nu^h - \psi_\gamma^h).$$

Полагая затем $y_1^h = y^h$, $\varphi_1^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu^h$, $y_2^h = u^h$, $\varphi_2^h = \varphi^h - \psi^h$, $\nu_2^h = \nu^h - \psi_\gamma^h$ и пользуясь оценкой (19), выражающей

устойчивость схемы (18), получаем

$$\|y^h - u^h\|_{(1_h)} \leqslant M_1 \|\psi^h\|_{(2_h)} + M_2 \|\psi^h_\gamma\|_{(3_h)}. \qquad (21)$$

В случае линейной схемы для погрешности z^h получаем задачу

$$L_h z^h = -\psi^h, \quad x \in \omega, \quad l_h z^h = -\psi^h_\gamma, \quad x \in \gamma,$$

являющуюся аналогом задачи (18); для нее сразу можно воспользоваться оценкой (19) и получить (21).

Из оценки (21) следует вывод: если схема (18) устойчива и аппроксимирует задачу (17), то эта схема сходится при $|h| \to 0$. В самом деле, $\|y^h - u^h\|_{(1_h)} \to 0$ при $|h| \to 0$, если $\|\psi^h\|_{(2_h)} \to 0$ и $\|\psi^h_\gamma\|_{(3_h)} \to 0$ при $|h| \to 0$.

Из оценки (21) видно, что порядок точности схемы (18) определяется порядком аппроксимации. Чтобы схема сходилась, например, со скоростью $O(|h|^m)$, $m > 0$ (имела точность $O(|h|^m)$), достаточно чтобы она имела аппроксимацию (на решении $u = u(x)$ задачи (17)) того же порядка, т. е.

$$\|\psi^h\|_{(2_h)} = O(|h|^m), \qquad \|\psi^h_\gamma\|_{(3_h)} = O(|h|^m).$$

Доказательство устойчивости схем сводится к получению априорных оценок (19) или (20). В гл. III, V и VI будут получены оценки такого типа с различными нормами $\|\cdot\|_{(\alpha_h)}$, $\alpha = 1, 2, 3$, для разностных схем, аппроксимирующих эллиптические уравнения второго и четвертого порядков. Так, например, в гл. III устойчивость изучается при помощи принципа максимума и априорные оценки содержат сеточные нормы C:

$$\|y^h\|_{(1_h)} = \max_{x \in \omega_h} |y^h(x)|, \quad \|v^h\|_{(3_h)} = \max_{x \in \gamma} |v^h(x)|,$$

$$\|\varphi^h\|_{(2_h)} = \|\varphi^h\|_{(1_h)}.$$

§ 2. Принципы построения разностных схем

1. Требования, предъявляемые к разностным схемам. В предыдущем параграфе были приведены примеры разностных аппроксимаций для дифференциальных операторов первого и второго порядков и для дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями,

содержащими первую производную. Мы рассматривали простейшие примеры.

В случае дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами задача построения разностных схем существенно усложняется. На заданном шаблоне можно построить бесчисленное множество схем, эквивалентных по порядку аппроксимации. Так, например, для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} - q(x)\,u = -f(x) \tag{1}$$

можно построить на трехточечном шаблоне $(x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1})$ однопараметрическое семейство схем

$$L_h y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - d_i y_i = -f_i, \tag{2}$$

$$d_i = \alpha q_{i-1} + (1 - 2\alpha)\,q_i + \alpha q_{i+1}, \qquad q_i = q(x_i),$$

имеющих при любом значении параметра α второй порядок аппроксимации $\psi = L_h u + f = O(h^2)$. К коэффициенту d_i при y_i в формуле (2) можно без нарушения порядка аппроксимации добавить слагаемое βh^2, где β — произвольное число. Таким образом, возникает задача выбора разностных схем из множества допустимых схем, заданных на некотором шаблоне и имеющих один и тот же порядок аппроксимации. Для этого нужно сформулировать требования, которые следует предъявлять к разностным схемам. Любой приближенный метод должен давать возможность найти численное решение задачи с заданной точностью ε за конечное число действий $Q(\varepsilon)$ (за конечное машинное время). Естественно стремиться минимизировать число действий $Q(\varepsilon)$, т. е. найти экономичный численный метод.

Численное решение задачи математической физики состоит из двух этапов: а) написания системы сеточных уравнений (разностной схемы), аппроксимирующих задачу для дифференциального уравнения, б) решения этой системы сеточных уравнений.

В этой книге мы занимаемся лишь построением разностных схем. Однако при этом мы должны иметь в виду и объем вычислительной работы, которую придется затра-

тить для нахождения сеточного решения и которая зависит как от структуры системы сеточных уравнений, так и от порядка системы.

При фиксированном методе решения системы объем вычислений тем меньше, чем ниже порядок системы (крупнее шаг сетки). Однако уменьшение числа узлов сетки приводит к уменьшению точности схемы. Поэтому желательно иметь схему с возможно более высоким порядком точности (зависящим от гладкости коэффициентов дифференциального уравнения, начальных и краевых условий). Практически это значит, что надо искать схемы с минимальным шаблоном, имеющие максимально возможный на этом шаблоне порядок аппроксимации в случае достаточно гладких решений дифференциального уравнения. Следует задать исходное семейство схем на выбранном шаблоне и в этом семействе искать «наилучшие» в некотором смысле схемы. Термин «наилучшая схема» нуждается в определении. Надо сформулировать требования к схеме, которые будут определять, как это принято говорить, качество схемы.

Необходимо указать не только количественные, но и качественные характеристики схемы:

а) Схема должна быть однородной, т. е. сеточные уравнения для любой задачи из рассматриваемого класса K и любой сетки в каждом узле должны записываться единообразно, по одному и тому же закону. Класс задач K определяется заданием дифференциального уравнения и функционального пространства, которому должны принадлежать коэффициенты уравнения.

б) Система разностных уравнений должна быть разрешима на любой допустимой сетке и для любой задачи из рассматриваемого класса K.

в) Схема должна сходиться для любой задачи из рассматриваемого класса K.

Эти требования определяют исходное семейство допустимых разностных схем.

Предъявим затем к схемам дополнительные требования:

1) определенного порядка аппроксимации (например, $\psi = O(h^2)$ на множестве $\overline{K} \subseteq K$ гладких решений),

2) максимального порядка точности на всем классе K задач,

3) экономичности, т. е. минимума операций при машинном решении системы сеточных уравнений.

Выделим из исходного семейства схем некоторое множество «наилучших схем». Поиски таких наилучших схем и являются целью теории. Остановимся далее детально на понятии однородности разностных схем.

2. Однородные разностные схемы. Рассмотрим случай функций одной переменной. Пусть

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$$

— сетка на числовой оси $-\infty < x < \infty$, $k(x)$ — вектор-функция коэффициентов дифференциального уравнения. Так, например, для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(k_1(x)\frac{du}{dx}\right) - k_2(x)\,u = -k_3(x)$$

очевидно, что вектор

$$k(x) = \{k_1(x),\ k_2(x),\ k_3(x)\}$$

имеет компоненты $k_1(x)$, $k_2(x)$ и $k_3(x)$.

Однородность схемы означает, что ее коэффициенты являются функционалами коэффициентов дифференциального уравнения, зависящими от шага h как от параметра и не зависящими от узла сетки и от выбора коэффициентов $k(x)$.

Пусть заданы целочисленный шаблон

$$Ш = \{-m_1,\ -m_1+1,\ \ldots -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ m_2\},$$

где $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$ — целые числа, на котором определяется сеточная функция $\bar{y}(j)$, $j \in Ш$, и шаблон $\Sigma = \{-m_1 \leqslant s \leqslant m_2\}$, на котором определена вектор-функция $\bar{k}(s)$ (для простоты мы считаем, что концы шаблонов $Ш$ и Σ совпадают).

Обозначим $A_j^h[\bar{k}(s)]$, $F^h[\bar{k}(s)]$, $j \in Ш$, $s \in \Sigma$ — *шаблонные функционалы.*

Рассматривается функционал

$$\Phi^h[\bar{y}(j)] = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h[\bar{k}(s)]\,\bar{y}^h(j) + F^h[\bar{k}(s)]$$

и от него совершается переход к однородной схеме.

Полагая

$$\bar{y}(j)=y^h(x_i+jh), \qquad \bar{k}(s)=k(x_i+sh)$$

и пользуясь выражением для Φ^h, получаем однородную разностную схему

$$(L_h y^h+F^h)_i=\sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h[k(x_i+sh)]\,y^h(x_i+jh)+ \\ +F^h[k(x_i+sh)]=0,$$

где $y^h(x_i)$ — сеточная функция, $k(x)$ — вектор-функция непрерывного аргумента x.

Семейство однородных схем задано, если заданы шаблонные функционалы

$$A_j^h[\bar{k}(s)] \quad \text{и} \quad F^h[\bar{k}(s)], \qquad j=-m_1,\ -m_1+1,\ \ldots,\ m_2.$$

Произвол в их выборе должен быть ограничен требованиями разрешимости, аппроксимации определенного порядка, экономичности схемы.

Проиллюстрируем понятие однородности на примере трехточечных схем для задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)\,u=-f(x), \qquad 0<x<1, \qquad (3)$$

$$u(0)=\mu_1, \qquad u(1)=\mu_2,$$

где $k(x)>0$, $q(x)\geqslant 0$.

Рассмотрим трехточечный шаблон $(x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1})$ на сетке $\bar{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ h=1/N\}$, так что шаблон $Ш=\{-1,\ 0,\ 1\}$ и $m_1=m_2=1$. Пусть коэффициентный шаблон $\Sigma=\{-1\leqslant s\leqslant 1\}$, $A^h[\bar{k}(s)]$, $B^h[\bar{k}(s)]$, $F^h[\bar{k}(s)]$, $-1\leqslant s\leqslant 1$, — шаблонные функционалы.

Рассмотрим однородную разностную схему

$$\frac{1}{h}\left[b_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]-d_i y_i= \\ =-\varphi_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \qquad (4)$$

$$y_0=\mu_1, \quad y_N=\mu_2,$$

коэффициенты которой определяются во всех узлах $x_i\in\omega$ и для любых $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ одинаково:

$$a_i=A^h[k(x_i+sh)], \qquad b_i=B^h[k(x_i+sh)], \\ d_i=F^h[q(x_i+sh)], \qquad \varphi_i=F^h[f(x_i+sh)]. \qquad (5)$$

Для простоты мы предположили (см. (5)), что каждый из коэффициентов разностного уравнения зависит только от соответствующего коэффициента, дифференциального уравнения. В общем случае A^h, B^h, F^h — нелинейные функционалы.

Пусть $u(x)$ — решение задачи (3). Погрешность аппроксимации для схемы (4) определяется как невязка

$$\psi_i = \frac{1}{h}\left[b_i \frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right] - d_i u_i + \varphi_i. \qquad (6)$$

Предполагая достаточную гладкость $u(x)$, разлагая $u_{i\pm 1}$ по степеням h и обозначая через $\rho_i(h)$ любые выражения, зависящие от x_i и стремящиеся к нулю при $h \to 0$, получим

$$u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' + h^2 \rho_i(h),$$

$$u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' + h^2 \rho_i(h),$$

$$\psi_i = \frac{b_i + a_i}{2} u_i'' + \frac{b_i - a_i}{h} u_i' - d_i u_i + \varphi_i + \rho_i(h).$$

Сравнивая с уравнением

$$ku'' + k'u' - qu + \varphi = 0,$$

видим, что

$$\psi_i = \left(\frac{b_i + a_i}{2} - k_i\right) u_i'' + \left(\frac{b_i - a_i}{h} - k_i'\right) u_i' - \\ - (d_i - q_i) u_i + \varphi_i - f_i + \rho_i(h),$$

т. е.

$$\psi_i = \rho_i(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

если выполнены условия

$$\begin{gathered} \frac{b_i + a_i}{2} = k_i + \rho_i(h), \\ \frac{b_i - a_i}{h} = k_i' + \rho_i(h), \\ d_i = q_i + \rho_i(h), \quad \varphi_i = f_i + \rho_i(h). \end{gathered} \qquad (7)$$

В дальнейшем всюду предполагаем, что шаблонные функционалы A, B, F линейны и не зависят от параметра h.

Воспользуемся разложениями

$$k(x+sh)=k(x)+shk'(x)+h\rho(h), \quad q(x+sh)=q(x)+\rho(h),$$
$$f(x+sh)=f(x)+\rho(h)$$

и найдем

$$a_i=A[1]k_i+hk_i'A[s]+h\rho(h),$$
$$b_i=B[1]k_i+hk_i'B[s]+h\rho(h),$$
$$d_i=F[1]q_i+\rho(h),\ \varphi_i=F[1]f_i+\rho(h).$$

Подставляя эти выражения в условия (7), найдем

$$A[1]=B[1]=F[1]=1, \quad B[s]-A[s]=1. \tag{8}$$

Если эти условия выполнены, то схема (4) обладает аппроксимацией, т. е. $\psi=\rho(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Требование аппроксимации второго порядка для схемы (4) приводит к условиям

$$\frac{b_i+a_i}{2}=k_i+O(h^2), \quad \frac{b_i-a_i}{h}=k_i'+O(h^2),$$
$$d_i=q_i+O(h^2), \quad \varphi_i=f_i+O(h^2). \tag{9}$$

В этом можно убедиться, если подставить

$$u_{i\pm 1}=u_i\pm hu_i'+\frac{h^2}{2}u_i''\pm\frac{h^3}{6}u_i'''+\frac{h^4}{24}u_i^{IV}+h^4\rho(h)$$

в выражение для ψ_i и потребовать, чтобы $\psi_i=O(h^2)$. По аналогии с проведенными выше рассуждениями можно показать, что из (9), кроме (8), следуют условия

$$B[s^2]=A[s^2], \quad F[s]=0. \tag{10}$$

Требование разрешимости системы разностных уравнений (4), которую мы перепишем в виде

$$a_iy_{i-1}-c_iy_i+b_iy_{i+1}=-h^2\varphi_i,\ 0<i<N,\ y_0=\mu_1,\ y_N=\mu_2, \tag{11}$$
$$c_i=a_i+b_i+h^2d_i,$$

выполнено, если

$$a_i>0, \quad b_i>0, \quad c_i-(a_i+b_i)=h^2d_i\geqslant 0 \tag{12}$$

для всех $i=1, 2, \ldots, N-1$. В этом случае, как известно, решение y_i может быть найдено методом прогонки. Так как $k(x)>0$, $q(x)\geqslant 0$, то достаточно потребовать, чтобы

функционалы A, B и F были положительными, т. е.

$$A[\bar{k}(s)]>0, \quad B[\bar{k}(s)]>0, \quad F[\bar{k}(s)]>0 \qquad \text{при } \bar{k}(s)>0.$$

В этом случае $a_i>0$, $b_i>0$ и $d_i\geqslant 0$ при любых $k(x)>0$ и $q(x)\geqslant 0$.

В простейшем случае A, B (и F) представляют собой линейные комбинации значений функций $\bar{k}(s)$ $(\bar{f}(s))$ в конечном числе точек на шаблоне $\Sigma=\{-1\leqslant s\leqslant 1\}$, например

$$\begin{aligned} A[\bar{k}(s)] &= \alpha_{-1}\bar{k}(-1)+\alpha_0\bar{k}(0)+\alpha_1\bar{k}(1), \\ B[\bar{k}(s)] &= \beta_{-1}\bar{k}(-1)+\beta_0\bar{k}(0)+\beta_1\bar{k}(1) \end{aligned} \tag{13}$$

и т. д., так что

$$a_i=\alpha_{-1}k_{i-1}+\alpha_0 k_i+\alpha_1 k_{i+1}, \quad b_i=\beta_{-1}k_{i-1}+\beta_0 k_i+\beta_i k_{i+1} \tag{14}$$

(если $k(x)$ — непрерывная функция). Условия разрешимости (12) выполнены при

$$\alpha_j\geqslant 0, \ \beta_j\geqslant 0 \quad \text{для} \quad j=-1, \ 0, \ 1. \tag{15}$$

Условия аппроксимации (8) дают

$$\alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1=1, \quad \beta_{-1}+\beta_0+\beta_1=1, \quad \beta_1-\beta_{-1}=1+\alpha_1-\alpha_{-1}. \tag{16}$$

Из условий нормировки $\alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1=1$ и $\alpha_j\geqslant 0$ следует, что $0\leqslant\alpha_j\leqslant 1$ и аналогично

$$0\leqslant\beta_j\leqslant 1, \quad j=-1, \ 0, \ 1. \tag{17}$$

Проверим теперь условия второго порядка аппроксимации (10). Так как $A[s^2]=\alpha_{-1}+\alpha_1$, $B[s^2]=\beta_{-1}+\beta_1$, то

$$\beta_1+\beta_{-1}=\alpha_1+\alpha_{-1} \quad \text{или} \quad \beta_0=\alpha_0. \tag{18}$$

Для шести параметров α_j, β_j, $j=-1, 0, 1$, мы получили 4 условия; два параметра α_1 и α_{-1} остаются произвольными, а $\alpha_0=1-(\alpha_1+\alpha_{-1})$, $\beta_{-1}=\alpha_{-1}-0{,}5$, $\beta_1=0{,}5+\alpha_1$, $\beta_0=\alpha_0$.

3. **Консервативные разностные схемы.** Помимо формальных требований разрешимости, аппроксимации определенного порядка, экономичности вычислительного алгоритма, — требований, выполнение которых проверяется непосредственно, необходимо обеспечить при выборе схемы наиболее важное требование — сходимость схемы с опре-

деленной скоростью при стремлении шага сетки к нулю. Это свойство установить не всегда столь же просто, особенно в случае уравнений с разрывными коэффициентами и нелинейных уравнений.

В § 1 было показано, что сходимость разностной схемы есть следствие устойчивости и аппроксимации: если схема устойчива и обладает аппроксимацией, то она сходится. Напомним, что устойчивость выражает свойство непрерывной (равномерно относительно выбора сеток) зависимости решения разностной задачи от правой части уравнения и граничных условий.

В случае первой краевой задачи для погрешности $z=y-u$, где u — решение исходной задачи для дифференциального уравнения, y — решение соответствующей разностной задачи, — получаем неоднородное уравнение, правая часть которого есть погрешность аппроксимации, а краевые условия однородны. Если схема устойчива, то z оценивается через ψ, и из этой оценки следует сходимость при наличии аппроксимации на последовательности сгущающихся сеток. Однако знание такого асимптотического свойства схемы, как сходимость, недостаточно для априорного суждения о величине погрешности на фиксированных сетках, используемых на практике для машинных расчетов. Эти реальные сетки в силу требования экономичности вычислительного алгоритма, не могут быть слишком мелкими. Поэтому указанные выше априорные оценки вида

$$\|z\|_{(1)} \leqslant M\|\psi\|_{(2)} \leqslant \bar{M}h^2$$

являются слишком грубыми; к тому же они содержат оценки для производных (например, четвертого порядка) искомого решения $u(x)$. Чтобы получить хорошее приближение на реальных сетках, необходимо, как показывает практика, пользоваться схемами, хорошо отражающими основные свойства дифференциальных уравнений.

Уравнения математической физики выражают, как правило, *законы сохранения* (энергии, тепла, массы, заряда и т. д.) в дифференциальной форме. Так, например, уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = -f(x), \qquad 0<x<1, \tag{19}$$

можно трактовать как уравнение для стационарного (не меняющегося во времени) распределения температуры $u=u(x)$ в стержне $0<x<1$ с коэффициентом теплопроводности $k(x)$. Интегрируя это уравнение по x от $x^{(1)}$ до $x^{(2)}$, получим закон сохранения тепла на отрезке $x^{(1)}\leqslant x\leqslant x^{(2)}$

$$W(x^{(2)})-W(x^{(1)})=\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x)\,dx, \quad W(x)=-k(x)\frac{du}{dx}. \tag{20}$$

Слева стоит разность тепловых потоков на концах отрезка, справа — количество выделившегося (поглотившегося) тепла.

Чтобы правильно описывать ход физического процесса при помощи дискретной модели, естественно стремиться к тому, чтобы эта дискретная модель правильно передавала на сетке основные свойства этого процесса, прежде всего такие, как законы сохранения. Разностные схемы, которые выражают законы сохранения на сетке, мы будем называть *консервативными* разностными схемами. Поясним смысл консервативности на примере трехточечной схемы (4) для уравнения

$$(k(x)u')'=-f(x), \quad 0<x<1, \quad u(0)=\mu_1, \quad u(1)=\mu_2.$$

Эта схема имеет вид

$$\frac{1}{h}\left(b_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)=-\varphi_i. \tag{21}$$

Переписывая ее иначе:

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)=-\varphi_i-\frac{b_i-a_{i+1}}{h}\frac{y_{i+1}-y_i}{h},$$

убеждаемся в том, что сеточным аналогом тождества (20) на отрезке $x^{(1)}=i_1h\leqslant x\leqslant x^{(2)}=i_2h$ является тождество

$$W^h_{i_2+1}-W^h_{i_1}=\sum_{i=i_1}^{i_2}h\varphi_i+\sum_{i=i_1}^{i_2}(b_i-a_{i+1})\frac{y_{i+1}-y_i}{h}, \tag{22}$$

где

$$W^h_i=-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}.$$

В правую часть входит величина дисбаланса

$$D=\sum_{i=i_1}^{i_2}(b_i-a_{i+1})\frac{y_{i+1}-y_i}{h},$$

которая обратится в нуль для любых сеточных функций y_i только при

$$b_i=a_{i+1}. \tag{23}$$

В этом случае мы получаем схему

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)=-\varphi_i \tag{24}$$

и вместо (22) сеточный закон сохранения

$$W^h_{i_2+1}-W^h_{i_1}=\sum_{i=i_1}^{i_2}h\varphi_i,$$

являющийся алгебраическим следствием разностных уравнений (24). Схема (24) является консервативной, а условие (23) — необходимым и достаточным условием консервативности. Свойство консервативности разностной схемы совпадает в данном случае со свойством самосопряженности разностного оператора

$$\Lambda y_i=\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)$$

в пространстве сеточных функций, заданных на сетке

$$\omega_h=\{x_i=ih,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N,\ h=1/N\}$$

и равных нулю на ее границе (при $i=0,\ N$).

4. Консервативность как необходимое условие сходимости однородной схемы в классе разрывных коэффициентов. Для того чтобы оправдать разумность требования консервативности, покажем, что консервативность однородной схемы из некоторого семейства является необходимым условием сходимости этой схемы в классе разрывных коэффициентов, т. е. из сходимости схемы следует ее консервативность. Заметим прежде всего, что, поскольку речь идет о необходимом условии, то можно ограничиться изучением схем для простейшей задачи, например

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)=0,\quad 0<x<1,\quad u(0)=1,\quad u(1)=0, \tag{25}$$

где $k(x)$ — кусочно-постоянная функция

$$k(x)=\begin{cases} k_1, & 0<x<\xi, \\ k_2, & \xi<x<1. \end{cases}$$

В точке разрыва $x=\xi$ выполняются обычные условия сопряжения

$$[u]=u(\xi+0)-u(\xi-0)=0,$$
$$[ku']=k_2u'(\xi+0)-k_1u'(\xi-0)=0.$$

Эта задача, очевидно, имеет решение в виде кусочно-линейной функции

$$u(x)=\begin{cases} 1-\gamma_0 x, & 0\leqslant x\leqslant\xi, \\ \delta_0(1-x), & \xi\leqslant x\leqslant 1, \end{cases} \tag{26}$$

где γ_0 и δ_0 находятся из условий сопряжения: $1-\gamma_0\xi=\delta_0(1-\xi)$, $k_1\gamma_0=k_2\delta_0$, так что

$$\delta_0=\frac{k_1}{k_2}\gamma_0,\quad \gamma_0=\frac{1}{\Delta_0},\quad \Delta_0=\xi+\frac{k_1}{k_2}(1-\xi). \tag{27}$$

Пусть $\xi=x_n+\theta h$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

Рассмотрим соответствующую однородную разностную схему

$$\frac{1}{h}\left[b_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]=0,$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\ y_0=1,\ y_N=0, \tag{28}$$

где

$$a_i=A[k(x_i+sh)],\ b_i=B[k(x_i+sh)],\ -1\leqslant s\leqslant 1.$$

Пусть схема (28) аппроксимирует задачу (25); тогда выполнены условия (8)

$$B[1]=A[1]=1,\ B[s]-A[s]=1.$$

Так как $k(x)=k_1$ при $x\leqslant x_n$ и $k(x)=k_2$ при $x\geqslant x_{n+1}$, то $a_i=b_i=k_1$ при $0<i<n$, $a_i=b_i=k_2$, при $n+1<i<N$ и разностные уравнения (28) можно записать в виде: $y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}=0$ при $0<i<n$ и $n+1<i<N$, $y_0=1$, $y_N=0$,

$$b_n(y_{n+1}-y_n)-a_n(y_n-y_{n-1})=0,$$
$$b_{n+1}(y_{n+2}-y_{n+1})-a_{n+1}(y_{n+1}-y_n)=0.$$

Из этих уравнений следует, что $y_i=1-\gamma x_i$ при $0\leqslant i\leqslant n$ и $y_i=\delta(1-x_i)$ при $n+1\leqslant i\leqslant N$, где γ и δ — коэффици-

енты, подлежащие определению из тех же уравнений при $i=n,\ n+1$.

Исключая из уравнений при $i=n$ и $i=n+1$ разность $y_{n+1}-y_n$, получаем

$$\delta=\frac{a_n a_{n+1}}{b_n b_{n+1}}\gamma.$$

Подставим это выражение в уравнение при $i=n$ и найдем

$$\gamma=\frac{1}{ha_n/b_n+x_n+(1-x_{n+1})\,a_n a_{n+1}/(b_n b_{n+1})}.$$

При помощи линейной интерполяции определим во всех точках $x\in[0,\ 1]$ функцию

$$\tilde{y}(x,\ h)=y_i+\frac{x-x_i}{h}(y_{i+1}-y_i) \quad \text{при} \quad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}.$$

Тогда будем иметь

$$\tilde{y}(x,\ h)=\begin{cases}1-\gamma x & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant \xi,\\ \delta(1-x) & \text{при} \quad \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases} \tag{29}$$

Предположим, что разностная схема сходится в C; тогда

$$|\tilde{y}(x,\ h)-u(x)|\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Сравнивая выражение для $\tilde{y}(x,\ h)$ с формулой для $u(x)$, получаем: $\gamma\to\gamma_0$ и $\delta\to\delta_0$ при $h\to 0$. Переходя в формуле для γ к пределу при $h\to 0$, видим, что $\lim\limits_{h\to 0}\gamma=\gamma_0$ только при условии

$$R_n=\frac{b_n b_{n+1}}{k_2}-\frac{a_n a_{n+1}}{k_1}\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0. \tag{30}$$

Это — необходимое условие сходимости схемы (28).

Зададим теперь исходное семейство схем, определив линейные шаблонные функционалы A и B при помощи формулы (14) из п. 2, так что

$$a_i=\alpha_{-1}k_{i-1}+\alpha_0 k_i+\alpha_1 k_{i+1}, \qquad b_i=\beta_{-1}k_{i-1}+\beta_0 k_i+\beta_1 k_{i+1}. \tag{14}$$

Из этого семейства (линейных, «дискретных») схем выделим множество схем, сходящихся в классе разрывных коэффициентов $k(x)$, и покажем, что они консервативны. Так как схема обладает аппроксимацией, то коэффициенты α_k и β_k удовлетворяют условиям (16), которые нам

удобно записать еще раз

$$\alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1=1, \quad \beta_{-1}+\beta_0+\beta_1=1, \tag{31}$$

$$\beta_1-\beta_{-1}=1+\alpha_1-\alpha_{-1}. \tag{32}$$

Вычислим a_i, b_i при $i=n$, $n+1$:

$$a_n=(\alpha_{-1}+\alpha_0)\,k_1+\alpha_1k_2=(1-\alpha_1)\,k_1+\alpha_1k_2,$$

$$b_n=(1-\beta_1)\,k_1+\beta_1k_2,$$

$$a_{n+1}=\alpha_{-1}k_1+(\alpha_0+\alpha_1)\,k_2=\alpha_{-1}k_1+(1-\alpha_{-1})\,k_2,$$

$$b_{n+1}=\beta_{-1}k_1+(1-\beta_{-1})\,k_2.$$

Рассмотрим разность R_n. Она не зависит от h, и потому условие (30) заменяется равенством $R_n=0$ при любом h. Умножая R_n на k_1/k_2^2 и обозначая $t=k_1/k_2$, получаем

$$t((1-\beta_1)\,t+\beta_1)(\beta_{-1}t+(1-\beta_{-1}))-$$

$$-((1-\alpha_1)\,t+\alpha_1)\ (\alpha_{-1}t+(1-\alpha_1))=0$$

или

$$(1-\beta_1)\,\beta_{-1}t^3+[\beta_1\beta_{-1}+(1-\beta_1)(1-\beta_{-1})-\alpha_{-1}(1-\alpha_1)]\,t^2+$$

$$+[\beta_1(1-\beta_{-1})-\alpha_1\alpha_{-1}-(1-\alpha_1)(1-\alpha_{-1})]t-\alpha_1(1-\alpha_{-1})=0.$$

В силу произвольности t все коэффициенты при степенях t равны нулю:

$$(1-\beta_1)\,\beta_{-1}=0, \quad (1-\alpha_{-1})\,\alpha_1=0,$$

$$\beta_1\beta_{-1}+(1-\beta_1)(1-\beta_{-1})-\alpha_{-1}(1-\alpha_1)=0, \tag{33}$$

$$\beta_1(1-\beta_{-1})-\alpha_1\alpha_{-1}-(1-\alpha_{-1})(1-\alpha_1)=0.$$

Последние два соотношения являются следствием условий (32) и (33). Система уравнений (31) — (33) с учетом ограничений (15) имеет однопараметрическое семейство неотрицательных решений

$$\beta_{-1}=\alpha_1=0, \quad \alpha_{-1}=\beta_0=1-\alpha_0, \quad \beta_1=\alpha_0, \quad 0\leqslant\alpha_0\leqslant 1.$$

В самом деле, пусть $\alpha_1=\beta_{-1}=0$. Тогда из (31), (32) находим: $\beta_1=1-\alpha_{-1}=\alpha_0$, $\beta_0=1-\beta_1=1-\alpha_0$.

Если положить $\beta_{-1}=0$, $\alpha_{-1}=1$, то в силу условий (15) получим частный случай предыдущего решения, соответствующий $\alpha_0=0$. Аналогично исследуются и другие решения системы (33). С учетом найденного решения

системы (31) — (33), (15) имеем

$$a_i = (1-\alpha_0)\,k_{i-1} + \alpha_0 k_i, \quad b_i = (1-\alpha_0)\,k_i + \alpha_0 k_{i+1}, \quad (34)$$

т. е. $b_i = a_{i+1}$.

Таким образом, мы показали, что *если некоторая схема из исходного семейства* (28), (14), (15) *сходится в классе кусочно-непрерывных коэффициентов, то она консервативна* и имеет вид

$$\Lambda y = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (35)$$

где

$$a_i = (1-\alpha_0)\,k_{i-1} + \alpha_0 k_i, \qquad 0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1,$$

α_0 — произвольный параметр. Эта схема, очевидно, имеет первый порядок аппроксимации при любом α_0 и второй порядок при $\alpha_0 = 0{,}5$, т. е. при $a_i = 0{,}5\,(k_{i-1} + k_i)$. Консервативность является не только необходимым, но и достаточным условием сходимости в классе разрывных коэффициентов для схемы

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \; y_0 = \mu_1, \; y_N = \mu_2,$$

соответствующей уравнению (3). На доказательстве достаточности мы не останавливаемся.

Приведем в качестве примера неконсервативную схему, которая получается в результате почленной аппроксимации со вторым порядком по h уравнения

$$Lu = (ku')' - qu = -ku'' + k'u' - qu = -f.$$

Такая естественная аппроксимация порождает схему

$$k_i\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1}-k_{i-1}}{2h}\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = -f_i, \quad (36)$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Запишем ее в виде

$$\frac{1}{h}\left[b_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$

где

$$d_i = q(x_i), \qquad \varphi_i = f(x),$$
$$a_i = k_i - \frac{1}{4}(k_{i+1}-k_{i-1}), \quad b_i = k_i + \frac{1}{4}(k_{i+1}-k_{i-1}).$$

Отсюда видно, что $b_i \neq a_{i+1}$, т. е. схема (36) неконсервативная. Сравнивая с (28), видим, что (36) соответствует значениям

$$\alpha_{-1}=\frac{1}{4},\ \alpha_0=1,\ \alpha_1=-\frac{1}{4},\ \beta_{-1}=-\frac{1}{4},\ \beta_0=1,\ \beta_1=\frac{1}{4}.$$

Эта схема, вообще говоря, не является разрешимой. Если потребовать, чтобы выполнялось условие

$$k_i > \frac{1}{4}\,|k_{i+1}-k_{i-1}|,$$

то схема будет разрешимой. В частности, для задачи (36) имеем

$$a_n>0,\ b_n>0,\ a_{n+1}>0,\ b_{n+1}>0 \text{ при } \frac{1}{5}<\frac{k_1}{k_2}<5.$$

Подставляя в соотношение

$$R_n=\frac{b_n b_{n+1}}{k_2}-\frac{a_n a_{n+1}}{k_1}=0$$

выражения

$$a_n=\frac{5k_1-k_2}{4},\quad b_n=\frac{3k_1+k_2}{4},\quad a_{n+1}=\frac{3k_2+k_1}{4},\quad b_{n+1}=\frac{5k_2-k_1}{4},$$

получаем равенство $(k_2-k_1)^3=0$, которое выполняется только при $k_1=k_2$. Таким образом, схема (36) расходится в классе кусочно-непрерывных коэффициентов.

§ 3. Методы построения разностных схем

1. Интегро-интерполяционный метод (метод баланса). Рассмотрим пример построения разностной схемы для дифференциального уравнения с переменными коэффициентами:

$$Lu \equiv (k(x)\,u')' - q(x)\,u(x) = -f(x). \tag{1}$$

Будем рассматривать уравнение (1) как уравнение стационарного распределения тепла в стержне. Для этого уравнения справедлив закон сохранения тепла (*уравнение баланса*), который на отрезке $[x^{(1)},\ x^{(2)}]$ имеет вид

$$W(x^{(1)}) - W(x^{(2)}) - \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} q(x)\,u(x)\,dx + \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x)\,dx = 0 \tag{2}$$

и может быть получен интегрированием уравнения (1) по отрезку $[x^{(1)}, x^{(2)}]$. Здесь $W(x) = -k(x)\frac{du}{dx}$ — тепловой поток, $k(x) > 0$ — коэффициент теплопроводности, а $u(x)$ — температура.

Воспользуемся уравнением баланса (2) для написания разностной схемы для уравнения (1). Пусть ω — равномерная сетка с шагом h и $x_{i-1/2} = x_i - 0{,}5h$, $x_{i+1/2} = x_i + 0{,}5h$.

Напишем уравнение баланса (2) на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$W_{i-1/2} - W_{i+1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, u(x)\, dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\, dx = 0. \quad (3)$$

Чтобы построить разностную схему, аппроксимируем W и первый интеграл в (3). Предположим, что $u = \text{const} = u_i$ при $x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2}$. Тогда

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, u(x)\, dx \approx h d_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, dx, \quad (q(x) \geqslant 0). \quad (4)$$

Проинтегрируем равенство $du/dx = -W/k$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)}\, dx.$$

Так как W входит в (3) в полуцелых точках $x_{i+1/2}$, то, полагая $W = \text{const} = W_{i-1/2}$ при $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, будем иметь

$$u_{i-1} - u_i \approx W_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)},$$

или

$$W_{i-1/2} \approx -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x},\, i}, \quad (5)$$

$$a_i = \left[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}. \quad (6)$$

Подставляя в (3) выражения (4) и (5) и обозначая искомую функцию через y_i, получим разностную схему, выражающую закон сохранения тепла на сетке

$$\frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]-d_iy_i=-\varphi_i,$$

или более коротко в безындексных обозначениях

$$(ay_{\bar{x}})_x-dy=-\varphi, \tag{7}$$

где

$$\varphi=\varphi_i=\frac{1}{h}\int\limits_{x_i-1/2}^{x_i+1/2}f(x)\,dx. \tag{8}$$

Коэффициенты разностной схемы (7) вычисляются при помощи интегралов по формулам (4), (6) и (8). Если коэффициенты уравнения — гладкие функции, то с точностью до $O(h^2)$ a, d и φ можно заменить выражениями

$$a_i=k(x_{i-1/2}),\quad d_i=q(x_i),\quad \varphi_i=f(x_i). \tag{9}$$

Уравнение баланса (2) можно использовать и для построения разностных схем на неравномерной сетке. Пусть ω — неравномерная сетка и $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, N$. Полагая

$$x_{i-1/2}=x_i-0{,}5h_i,\quad x_{i+1/2}=x_i+0{,}5h_{i+1}$$

и записывая уравнение баланса (2) для отрезка $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, получим соотношение (3). Вместо (4) на неравномерной сетке будем иметь

$$\int\limits_{x_i-1/2}^{x_i+1/2}q(x)\,u(x)\,dx\approx\hbar_id_iu_i,\qquad d_i=\frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_i-1/2}^{x_i+1/2}q(x)\,dx, \tag{4'}$$

где $\hbar_i=\frac{1}{2}(h_i+h_{i+1})$.

Аналогичные исправления нужно сделать и в (6), (8):

$$a_i=\left[\frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_i-1}^{x_i}\frac{dx}{k(x_i)}\right]^{-1}, \tag{6'}$$

$$\varphi_i=\frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_i-1/2}^{x_i+1/2}f(x)\,dx. \tag{8'}$$

Тогда разностная схема на неравномерной сетке будет иметь вид

$$\frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{a_{i+1}(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}}-\frac{a_i(y_i-y_{i-1})}{h_i}\right]-d_iy_i=-\varphi_i,$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

При достаточной гладкости функций $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ коэффициенты a, d и φ снова можно вычислять по формулам (9).

Рассмотрим еще один пример. Построим разностную аппроксимацию граничного условия третьего рода для уравнения (1). Пусть это условие задано в точке $x=0$ и имеет вид

$$u'(0)=\tilde{\varkappa}u(0)-\tilde{g}. \tag{10}$$

По предположению, коэффициент $k(x)$ в уравнении (1) больше нуля. Поэтому перепишем условие (10) в несколько более удобном виде

$$k(0)\,u'(0)=\varkappa u(0)-g, \tag{11}$$

где $\varkappa=\tilde{\varkappa}k(0)$, $g=\tilde{g}k(0)$. Запись граничного условия в виде (11) более естественна, так как теперь в левой части с точностью до знака стоит тепловой поток. Напишем уравнение баланса (2) на отрезке $[0,\ h/2]$:

$$W_0-W_{1/2}-\int_0^{h/2}q(x)\,u(x)\,dx+\int_0^{h/2}f(x)\,dx=0. \tag{12}$$

Из (11) имеем

$$W_0\equiv -k(0)\,u'(0)=-\varkappa u(0)+g.$$

Подставляя это выражение в (12), получим

$$-W_{1/2}=-\varkappa u_0+g+\int_0^{h/2}q(x)\,u(x)\,dx+\int_0^{h/2}f(x)\,dx. \tag{13}$$

Для аппроксимации $W_{1/2}$ и $\int_0^{h/2}q(x)\,u(x)\,dx$ в (13) проведем те же самые рассуждения, что при выводе соотношений (4), (5). В результате получим

$$a_1y_{x,0}=\left(\varkappa+\frac{h}{2}d_0\right)y_0-\left(g+\frac{h}{2}\varphi_0\right)=\bar{\varkappa}y_0-\bar{g}, \tag{14}$$

где

$$a_1=\left[\frac{1}{h}\int_0^h \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}, \quad d_0=\frac{2}{h}\int_0^{h/2} q(x)\,dx, \quad \varphi_0=\frac{2}{h}\int_0^{h/2} f(x)\,dx.$$

Эти интегралы тоже можно заменить теми или иными квадратурными формулами, например: $a_1=k(x_{1/2})=k_{1/2}$, $d_0=q_0$, $\varphi_0=f_0$.

Легко проверить, что сеточные уравнения (7) с коэффициентами, задаваемыми формулами (4), (6), (8) или (9), аппроксимируют уравнение (1) при достаточной гладкости его решения $u=u(x)$ с погрешностью $O(h^2)$. Сеточное граничное условие (14) также аппроксимирует условие (11) с погрешностью $O(h^2)$. Очевидно, что при $k(x)\equiv 1$, $q(x)\equiv 0$ граничное условие (14) совпадает с граничным условием в задаче (10) § 1.

2. Метод Ритца. Как уже отмечалось, при построении численных методов решения краевых задач с самосопряженным оператором желательно сохранить свойство самосопряженности и для сеточной задачи. Однако если уравнение имеет достаточно сложный вид, а граничные условия содержат производные, то написание удовлетворительной самосопряженной схемы может вызвать значительные трудности. В этом пункте будет изложен метод Ритца, который всегда приводит к самосопряженным схемам.

Напомним суть метода Ритца. Известно, что всякая самосопряженная задача для дифференциального уравнения может быть сведена к эквивалентной задаче отыскания функции, доставляющей минимум некоторому функционалу. Так, например, нахождение решения краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u=-f(x), \qquad 0<x<1, \qquad (15)$$

$$k(0)u'(0)=\varkappa_0 u(0)-g_0, \qquad -k(1)u'(1)=\varkappa_1 u(1)-g_1 \qquad (16)$$

эквивалентно задаче отыскания функции $u(x)$, доставляющей минимум функционалу

$$I(u)\equiv\frac{1}{2}[u,\ u]-\int_0^1 f(x)u(x)\,dx-g_0u(0)-g_1u(1), \qquad (17)$$

где

$$[u, v]=\int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x)+q(x)u(x)v(x)]\,dx+$$
$$+\varkappa_0 u(0)v(0)+\varkappa_1 u(1)v(1), \quad (18)$$

для которого соотношение (15) есть *уравнение Эйлера*. Известно, что если функция $q(x)$ и постоянные $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ не отрицательны и $q(x)$ не обращается тождественно в нуль, то минимум функционала (17) существует, и минимизирующий элемент $u(x)$ принадлежит пространству $W_2^1[0, 1]$, которое состоит из функций пространства $L_2[0, 1]$, имеющих на $[0, 1]$ интегрируемые с квадратом обобщенные производные.

Таким образом, если имеется эквивалентная вариационная задача и существует минимум ее функционала, то вместо того, чтобы строить численный метод приближенного решения непосредственно краевой задачи, можно воспользоваться методом Ритца для приближенного нахождения элемента u, минимизирующего функционал $I(u)$. Напомним содержание этого метода. Пусть W есть то пространство, в котором ищется минимум функционала $I(u)$, т. е. пусть функционал $I(u)$ определен на элементах $u \in W$ и элемент $\overset{\circ}{u}$, на котором достигается минимум $I(u)$, принадлежит W. Построим последовательность конечномерных подпространств $V_n \in W$ и вместо того, чтобы искать минимум на W, будем его искать на V_n. Пусть размерность подпространства V_n есть n и $\eta_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, — *базис* этого подпространства, т. е. пусть любой элемент $u_n \in V_n$ представим в виде

$$u_n=\sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}. \quad (19)$$

Подставляя это представление u_n вместо u в функционал $I(u)$, получим функцию n переменных $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Так как мы желаем получить минимум этой функции, то числа a_i должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial a_i}=0, \qquad i=0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (20)$$

Решив эту систему, мы получим определенные значения параметров $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}$, дающие функции $I(u_n)$ абсо-

лютный минимум. Подставив эти значения a_i в (19), мы получим требуемое приближенное решение

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \eta_i^{(n)}.$$

Для того чтобы при $n \to \infty$ приближенное решение u_n сходилось к точному решению u, необходимо предполагать, что конечномерные подпространства V_n в некотором смысле аппроксимируют пространство W.

Найдем вид системы (20), исходя из конкретного функционала (17). Подставляя (19) в (17), получим

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}\right] - \int_0^1 f \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}\, dx - g_0 \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}(0) - g_1 \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}(1) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_{ij} a_i a_j - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i a_i, \quad (21)$$

где

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = [\eta_i^{(n)}, \eta_j^{(n)}], \quad (22)$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x)\, \eta_i^{(n)}(x)\, dx + g_0 \eta_i^{(n)}(0) + g_1 \eta_i^{(n)}(1). \quad (23)$$

Дифференцируя выражение (21) по a_i и приравнивая производные нулю, получаем систему уравнений для определения a_i:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} a_j - \beta_i = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (24)$$

3. Построение методом Ритца разностной схемы для уравнения второго порядка. Сказанное выше относится к методу Ритца вообще. Наша же цель состоит в построении с помощью метода Ритца разностной схемы для задачи (15), (16). Это можно сделать с помощью специального выбора конечномерных подпространств V_n и координатных функций в этих подпространствах. Введем на

отрезке [0, 1] равномерную сетку $\bar{\omega}$ с шагом $h=1/(n-1)$ и узлами $x_i=ih$, $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Обозначим $N=n-1$. Система (24) будет иметь вид трехточечной разностной схемы, если матрица этой системы будет трехдиагональной, т. е. если коэффициенты α_{ij} будут равны нулю при $|i-j|>1$. При этих условиях система (24) будет классической разностной схемой, если в качестве параметров в разложении (19) будут выбраны значения функции в узлах сетки $\bar{\omega}$. Матрица системы (24) будет трехдиагональной, если координатные функции

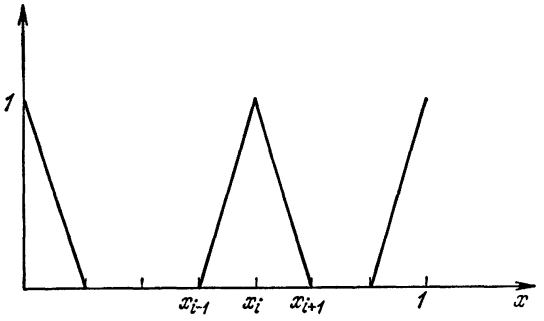


Рис. 4.

подпространства V_n при $|i-j|\geqslant 2$ будут ортогональны в смысле скалярного произведения (18). Если в качестве координатных функций $\eta_i^{(N)}(x)$ взять функции, которые отличны от нуля только при $|x-x_i|\leqslant h$, $x\in[0, 1]$, то они будут ортогональны в смысле (18) при $|i-j|\geqslant 2$.

Простейшими функциями указанного вида, принадлежащими W_2^1, являются функции

$$\eta_i^{(N+1)}(x)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\ x_{i+1}\leqslant x<1,\\ (x-x_{i-1})/h & \text{при } x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ (x_{i+1}-x)/h & \text{при } x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\end{cases} \tag{25}$$

для $i=1, 2, \ldots, N-1$,

$$\eta_0^{(N+1)}(x)=\begin{cases}(h-x)/h, & 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & h\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$
$$\eta_N^{(N+1)}(x)=\begin{cases}(x-1+h)/h, & 1-h\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1-h.\end{cases} \tag{26}$$

Вид функций $\eta_i(x)$ на участках, где они отличны от нуля, изображен на рис. 4.

Если в качестве координатных функций взять функции (25), (26), а в качестве параметров в разложении (19) значения функции в узлах сетки, то подпространства V_{N+1} будут состоять из кусочно-линейных непрерывных функций. Эти подпространства при $N=1, 2, \ldots$ аппроксимируют W_2^1. Тем самым система (24) принимает вид

$$\alpha_{i,\,i-1}y_{i-1}+\alpha_{i,\,i}y_i+\alpha_{i,\,i+1}y_{i+1}-\beta_i=0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$
$$\alpha_{0,\,0}y_0+\alpha_{0,\,1}y_1-\beta_0=0, \tag{27}$$
$$\alpha_{N,\,N-1}y_{N-1}+\alpha_{N,\,N}y_N-\beta_N=0.$$

Вычислим коэффициенты α_{ij} и β_i. Используя вид функций $\eta_i^{N+1}(x)$ и формулы (18), (22), находим

$$\alpha_{i,\,i}=h^{-2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i+1}k(x)\,dx+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}q(x)\,(x-x_{i-1})^2\,dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}q(x)\,(x-x_{i+1})^2\,dx\right],$$
$$\alpha_{0,\,0}=h^{-2}\left[\int\limits_0^h k(x)\,dx+\int\limits_0^h q(x)\,(x-h)^2\,dx\right]+\varkappa_0,$$
$$\alpha_{N,\,N}=h^{-2}\left[\int\limits_{1-h}^1 k(x)\,dx+\int\limits_{1-h}^1 q(x)\,(x-1+h)^2\,dx\right]+\varkappa_1, \tag{28}$$
$$\alpha_{i,\,i+1}=\alpha_{i+1,\,i}=h^{-2}\left[-\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}k(x)\,dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}q(x)\,(x_{i+1}-x)\,(x-x_i)\,dx\right],$$
$$\beta_i=h^{-1}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,(x-x_{i-1})\,dx+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,(x_{i+1}-x)\,dx\right],$$
$$\beta_0=h^{-1}\int\limits_0^h f(x)\,(h-x)\,dx+g_0,$$
$$\beta_N=h^{-1}\int\limits_{1-h}^1 f(x)\,(x-1+h)\,dx+g_1.$$

Введем обозначения:

$$a_i = h^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,dx - h^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x_i - x)(x - x_{i-1})\,dx,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N.$$

$$d_i = h^{-2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x_{i+1} - x)\,dx\right],$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

$$d_0 = 2h^{-2}\int\limits_0^h q(x)(h - x)\,dx,$$

$$d_N = 2h^{-2}\int\limits_{1-h}^{1} q(x)(x - 1 + h)\,dx, \qquad (29)$$

$$\varphi_i = h^{-1}\beta_i = h^{-2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x)\,dx\right],$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\varphi_0 = 2h^{-2}\int\limits_0^h f(x)(h - x)\,dx,$$

$$\varphi_N = 2h^{-2}\int\limits_{1-h}^{1} f(x)(x - 1 + h)\,dx.$$

Используя обозначения (29) и вид коэффициентов α_{ij} и β_j согласно (28), систему (27) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi(x), \quad x = h, 2h, \ldots, 1-h, \\ &a_1 y_{x,0} = (\varkappa_0 + 0{,}5hd_0)\,y_0 - (g_0 + 0{,}5h\varphi_0), \quad x = 0, \\ &-a_N y_{\bar{x},N} = (\varkappa_1 + 0{,}5hd_N)\,y_N - (g_1 + 0{,}5h\varphi_N), \quad x = 1. \end{aligned} \qquad (30)$$

Легко проверить, что если коэффициенты $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ достаточно гладкие, то a_i, d_i и φ_i отличаются от $k(x_i - 0{,}5h)$, $q(x_i)$ и $f(x_i)$ соответственно на величину $O(h^2)$. Исключение составляют d_0, d_N, φ_0 и φ_N, которые отличаются от соответствующих значений коэффициентов $q(x)$ и $f(x)$ на величину $O(h)$. При таком выборе коэффициентов аппроксимации уравнения и левого граничного условия (30) совпадают с ранее построенным методом баланса аппроксимациями (7) и (14). Тем самым разностная задача

(30) аппроксимирует задачу (15), (16) при достаточно гладких коэффициентах с погрешностью $O(h^2)$.

Если коэффициенты $k(x)$ и $q(x)$ постоянны, то a_i и d_i можно найти в явном виде

$$a_i = a = k - \frac{h^2}{6} q, \quad d_i = d = q.$$

4. Построение методом Ритца разностных схем для уравнения четвертого порядка. Рассмотрим еще один пример построения разностной схемы с использованием метода Ритца для вариационной задачи. Построим разностную схему, аппроксимирующую краевую задачу для простейшего обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с так называемыми главными граничными условиями.

Рассматривается задача:

$$u^{IV}(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{31}$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \tag{32}$$

Нахождение решения задачи (31)—(32) эквивалентно отысканию такой функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям (32), которая доставляет минимум функционалу

$$I(u) \equiv \int_0^1 (u'')^2 \, dx - 2 \int_0^1 f(x) u(x) \, dx. \tag{33}$$

Известно, что минимум функционала (33) при условиях (32) существует, и минимизирующий элемент принадлежит пространству $\mathring{W}_2^2[0, 1]$, которое состоит из функций пространства $L_2[0, 1]$, удовлетворяющих условиям (32) и имеющих на $[0, 1]$ интегрируемые с квадратом обобщенные производные первого и второго порядков. Тем самым при использовании метода Ритца для приближенного отыскания решения задачи (33) в качестве V_n следует брать конечномерные подпространства $\mathring{W}_2^2$. Если, как и раньше, $\eta_i^{(n)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, есть координатные функции в V_n и a_i — коэффициенты разложения (19), то для нахождения a_i снова получим систему (24), но на этот раз

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \int_0^1 \frac{d^2\eta_i^{(n)}}{dx^2} \cdot \frac{d^2\eta_j^{(n)}}{dx^2} \, dx,$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x) \eta_i^{(n)}(x) \, dx.$$

Снова на $[0, 1]$ введем равномерную разностную сетку. Приближенное решение задачи (31)—(32) нам нужно найти лишь во внутренних узлах сетки $\bar{\omega}$, т. е. на $\omega = \{x_i = ih \mid i = 1, 2, 3, \ldots, N-1\}$.

Для того чтобы из системы (24) можно было получить разностную схему, нужно, чтобы по крайней мере часть коэффициентов a_i в (19) была значениями сеточной функции в узлах ω. При этом координатные функции не могут быть отличными от нуля более, чем в одном узле сетки, так как в противном случае значения функции в узлах сетки не смогут быть параметрами. Более того, ограничиться параметрами, являющимися значениями функции в узлах сетки, не удается, так как подпространства V_n в этом случае не будут аппроксимировать $\mathring{W}_2^2$. Именно, при помощи таких семейств не удается равномерно приблизить производные, что необходимо для аппроксимации $\mathring{W}_2^2$.

Следовательно, число параметров (а тем самым и координатных функций) необходимо увеличить. В качестве дополнительных параметров можно взять значения производных искомой функции в узлах сетки. Тогда система (24) будет содержать в качестве неизвестных не только значения искомого решения в узлах сетки, но и значения первых производных в тех же узлах. В связи с этим (24) не будет уже разностной схемой в классическом понимании, но такая разностная схема может быть получена отсюда путем исключения дополнительных неизвестных.

Итак, положим $n = 2(N-1)$, а в качестве параметров a_i возьмем величины: $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$ и $v_1, v_2, \ldots, v_{N-1}$. Пусть первая группа параметров является значениями искомого решения в узлах сетки ω, а вторая группа — значениями первой производной в тех же узлах. В предыдущем примере в качестве подпространства V_n мы брали пространство кусочно-линейных (линейных на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$) непрерывных функций. На этот раз такое подпространство мы брать не можем, так как эти функции даже не принадлежат $W_2^2[0, 1]$ из-за наличия разрывов первых производных в узлах сетки ω. В качестве V_n можно брать пространство кусочно-полиномиальных (степени больше единицы) непрерывных и имеющих первые непрерывные производные функций. Напомним, что размерность про-

странства V_n мы уже зафиксировали равной $2(N-1)=n$. Если мы попытаемся взять в качестве V_n пространство кусочно-квадратичных (квадратичных на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$) функций, обладающих требуемой гладкостью, то это нам не удастся сделать, так как это пространство будет иметь размерность $N-2$ (N парабол второго порядка имеют $3N$ коэффициентов. Чтобы удовлетворить граничным условиям (32) и обеспечить непрерывность функций и их первых производных в узлах сетки ω, требуется $2(N+1)$

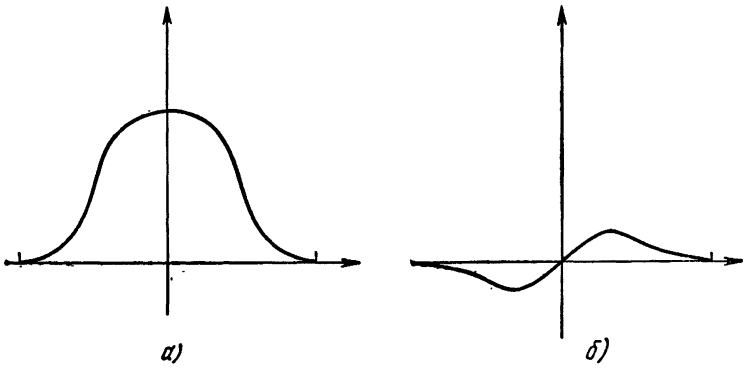


Рис. 5.

условий). Но в качестве V_n можно взять пространство кусочно-квадратичных функций из $\mathring{W}_2^2$, которые на каждом из интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ представляются двумя параболами. Размерность этого пространства будет уже $2(N-1)$. В качестве V_n можно взять также пространство кусочно-кубических (кубических на каждом из интервалов $[x_{i-1}, x_i]$) функций из $\mathring{W}_2^2$.

Смысл коэффициентов a_i в разложении (19) мы уже определили, и, следовательно, базис в V_n определяется однозначно. Он состоит из функций двух типов, которые мы обозначим через $\eta_i(x)$ и $\zeta_i(x)$. Пусть коэффициентами в разложении (19) при функциях $\eta_i(x)$ служат параметры y_i, а при $\zeta_i(x)$ — параметры v_i. Тогда координатные функции $\eta_i(x)$ должны обращаться в нуль во всех узлах сетки ω, кроме узла x_i, в котором функция $\eta_i(x)$ должна принимать значение единицы. Первые производные функций $\eta_i(x)$ должны равняться нулю во всех узлах сетки ω.

Координатные функции $\zeta_i(x)$ должны обращаться в нуль во всех узлах сетки и иметь производную, равную 1 в узле x_i. В остальных узлах ω первые производные $\zeta_i(x)$ должны обращаться в нуль. Легко проверить, что в указанном выше пространстве кусочно-кубических функций базис задается функциями

$$\eta_i(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1}, \quad x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ -2\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^3+3\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ 2\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^3+3\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}, \end{cases} \tag{34}$$

$$\zeta_i(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1}, \quad x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ h\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^3-h\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ h\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^3+h\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}. \end{cases} \tag{35}$$

В указанном выше пространстве кусочно-квадратичных функций базис есть

$$\bar{\eta}_i(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1}, \quad x_{i+1}\leqslant x<1,\\ 2\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i-0{,}5h,\\ -2\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2+1, & x_i-0{,}5h\leqslant x\leqslant x_i+0{,}5h,\\ 2\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i+0{,}5h\leqslant x\leqslant x_{i+1}, \end{cases} \tag{36}$$

$$\bar{\zeta}_i(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1}, \quad x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2h}(x-x_{i-1})^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i-0{,}5h,\\ x-x_i+\frac{3}{2h}(x-x_i)^2, & x_i-0{,}5h\leqslant x\leqslant x_i,\\ x-x_i-\frac{3}{2h}(x-x_i)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_i+0{,}5h,\\ \frac{1}{2h}(x-x_{i+1})^2, & x_i+0{,}5h\leqslant x\leqslant x_{i+1}. \end{cases} \tag{37}$$

Вид функций (34)–(37) изображен на рис. 5 *а* и *б*.

Итак, приближенное решение задачи (33) будем искать в виде

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} (y_i \eta_i(x) + x_i \zeta_i(x)). \tag{38}$$

Подставляя (38) в (33), получим

$$I(u_N) = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{N-1} (y_i \eta_i'(x) + v_i \zeta_i'(x)) \right]^2 dx -$$

$$- 2 \int_0^1 f(x) \sum_{i=1}^{N-1} (y_i \eta_i(x) + v_i \zeta_i(x))\, dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{N-1} (y_i y_j \eta_i' \eta_j' + 2 y_i v_j \eta_i' \zeta_j' + v_i v_j \zeta_i' \zeta_j')\, dx -$$

$$- 2 \int_0^1 f(x) \sum_{i=1}^{N-1} (y_i \eta_i + v_i \zeta_i)\, dx =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N-1} (\alpha_{ij} y_i y_j + 2 \bar{\alpha}_{ij} y_i v_j + \bar{\bar{\alpha}}_{ij} v_i v_j) - 2 \sum_{i=1}^{N-1} (\beta_i y_i + \bar{\beta}_i v_i), \tag{39}$$

где

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \int_0^1 \eta_i' \eta_j'\, dx, \quad \bar{\bar{\alpha}}_{ij} = \bar{\bar{\alpha}}_{ji} = \int_0^1 \zeta_i' \zeta_j'\, dx,$$

$$\bar{\alpha}_{ij} = \int_0^1 \eta_i' \zeta_j'\, dx, \qquad \beta_i = \int_0^1 f(x)\, \eta_i(x)\, dx, \tag{40}$$

$$\bar{\beta}_i = \int_0^1 f(x)\, \zeta_i(x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Дифференцируя (74) по y_i и v_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, и приравнивая полученные производные нулю, получим систему для определения y_i и v_i

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\alpha_{ij} y_j + \bar{\alpha}_{ij} v_j) - \beta_i = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\bar{\alpha}_{ji} y_j + \bar{\bar{\alpha}}_{ij} v_j) - \beta_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{41}$$

Перепишем эту систему в виде

$$AU = F,$$

где $U = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ — искомый вектор, $F = \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}$ — заданный вектор, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}' & \bar{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}$ — клеточная матрица, элементами которой являются матрицы

$$\alpha = (\alpha_{ij}), \quad \bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_{ij}), \quad \bar{\alpha}' = (\bar{\alpha}_{ji}), \quad \bar{\bar{\alpha}} = (\bar{\bar{\alpha}}_{ij}).$$

Транспонированная матрица имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}' & \bar{\bar{\alpha}} \end{pmatrix},$$

то есть матрица A является симметричной матрицей.

Вычислим значения коэффициентов α_{ij}, $\bar{\alpha}_{ij}$, $\bar{\bar{\alpha}}_{ij}$. Из (40), используя вид функций $\eta_i(x)$ и $\zeta_i(x)$, согласно (34), (35), находим:

$$\alpha_{i,i} = 24/h^2, \quad \bar{\alpha}_{ii} = 0, \quad \bar{\bar{\alpha}}_{ii} = 8/h, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$\alpha_{i,i+1} = \alpha_{i+1,i} = -12/h^3, \quad \bar{\alpha}_{i,i+1} = 6/h^2,$$
$$\bar{\alpha}_{i+1,i} = -6/h^2,$$
$$\bar{\bar{\alpha}}_{i,i+1} = \bar{\bar{\alpha}}_{i+1,i} = 2/h, \quad i = 1, 2, \ldots, N-2,$$
$$\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ij} = \bar{\bar{\alpha}}_{ij} = 0, \quad |i-j| \geqslant 2.$$

Тем самым систему (41) можно записать в следующем виде:

$$l_i(y, v) \equiv 2y_{i-1} - 4y_i + 2y_{i+1} + hv_{i-1} - hv_{i+1} = -\frac{h^3}{6}\beta_i,$$
$$m_i(y, v) \equiv 3y_{i-1} - 3y_{i+1} + hv_{i-1} + 4hv_i + hv_{i+1} = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_i,$$
$$i = 2, 3, \ldots, N-2,$$
$$l_1(y, v) \equiv -4y_1 + 2y_2 - hv_2 = -\frac{h^3}{6}\beta_1, \qquad (42)$$
$$l_{N-1}(y, v) \equiv 2y_{N-2} - 4y_{N-1} + hv_{N-2} = -\frac{h^3}{6}\beta_{N-1},$$
$$m_1(y, v) \equiv -3y_2 + 4hv_1 + hv_2 = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_1,$$
$$m_{N-1}(y, v) \equiv 3y_{N-2} + hv_{N-2} + 4hv_{N-1} = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_{N-1}.$$

Для удобства сравнения полученной схемы с обычной разностной схемой, исключим из (42) функцию v_i. Легко

проверить, что

$$l_{i-1}+4l_i+l_{i+1}-m_{i-1}+m_{i+1}\equiv -y_{i-2}+4y_{i+1}-6y_i+$$
$$+4y_{i+1}-y_{i+2}=-\frac{h^3}{6}(\beta_{i-1}+4\beta_i+\beta_{i+1})-\frac{h^2}{2}(\bar\beta_{i-1}-\bar\beta_{i+1}),$$
$$i=3,\ 4,\ \ldots,\ N-3,$$
$$l_1+4l_2+l_3-m_1+m_3\equiv 4y_1-6y_2+4y_3-y_4=$$
$$=-\frac{h^3}{6}(\beta_1+4\beta_2+\beta_3)-\frac{h^2}{2}(\bar\beta_1-\bar\beta_3),$$
$$7l_1+2l_2-m_1+2m_2\equiv -18y_1+9y_2-2y_3=$$
$$=-\frac{h^3}{6}(7\beta_1+2\beta_2)-\frac{h^2}{2}(\bar\beta_1-2\bar\beta_2), \quad (43)$$
$$l_{N-3}+4l_{N-2}+l_{N-1}-m_{N-3}+m_{N-1}\equiv -y_{N-4}+4y_{N-3}-6y_{N-2}+$$
$$+4y_{N-1}=-\frac{h^3}{6}(\beta_{N-3}+4\beta_{N-2}+\beta_{N-1})-\frac{h^2}{2}(\bar\beta_{N-3}-\bar\beta_{N-1}),$$
$$2l_{N-2}+7l_{N-1}-2m_{N-2}+m_{N-1}\equiv -2y_{N-3}+9y_{N-2}-18y_{N-1}=$$
$$=-\frac{h^3}{6}(2\beta_{N-2}+7\beta_{N-1})-\frac{1}{2}h^2(2\beta_{N-2}-\beta_{N-1}).$$

Используя введенные ранее обозначения для разностных отношений, запишем систему (43) в виде разностной схемы

$$y_{\bar x x \bar x x}=\varphi(x),\quad x=2h,\ 3h,\ \ldots,\ 1-2h,$$
$$y(0)=0,\qquad y_{\bar x}-\frac{h}{2}y_{\bar x x}+\frac{h^2}{3}y_{\bar x x x}\Big|_{x=h}=\frac{h^3}{4}\varphi(x_1), \quad (44)$$
$$y(1)=0,\qquad y_x+\frac{h}{2}y_{\bar x x}+\frac{h^2}{3}y_{\bar x x \bar x}\Big|_{x=1-h}=-\frac{h^3}{4}\varphi(x_{N-1}),$$

где

$$\varphi(x_i)=\frac{1}{6h}\left\{\int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x)\left(\frac{x-x_{i-2}}{h}\right)^3 dx+\right.$$
$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left[-3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3-6\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2+4\right]dx+$$
$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left[3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3-6\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2+4\right]dx+$$
$$\left.+\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} f(x)\left(\frac{x_{i+2}-x}{h}\right)^3 dx\right\}, \quad (45')$$

$i = 2, 3, \ldots, N-2,$

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{9h}\left\{\int_0^h f(x)\left[-11\left(\frac{x}{h}\right)^3 + 18\left(\frac{x}{h}\right)^2\right]dx + \right.$$

$$+ \int_h^{2h} f(x)\left[17\left(\frac{x-2h}{h}\right)^3 - 10\left(\frac{x-h}{h}\right)^3 + 24\left(\frac{x-2h}{h}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 12\left(\frac{x-h}{h}\right)^2\right]dx - 2\int_{2h}^{3h} f(x)\left(\frac{x-3h}{h}\right)^3 dx,$$

$$\varphi(x_{N-1}) = \frac{1}{9h}\left\{2\int_{1-3h}^{1-2h} f(x)\left(\frac{x-1+3h}{h}\right)^3 dx + \right. \tag{45''}$$

$$+ \int_{1-2h}^{1-h} f(x)\left[10\left(\frac{x-1+h}{h}\right)^3 - 17\left(\frac{x-1+2h}{h}\right)^3 + 12\left(\frac{x-1+h}{h}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\left. + 24\left(\frac{x-1+2h}{h}\right)^2\right]dx + \int_{1-h}^{1} f(x)\left[11\left(\frac{x-1}{h}\right)^3 + 18\left(\frac{x-1}{h}\right)^2\right]\right\} dx.$$

Если в методе Ритца в качестве координатных функций взять функции (36), (37), то разностная схема будет иметь вид

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \bar{\varphi}(x), \quad x = 2h, 3h, \ldots, 1-2h,$$

$$y(0) = 0, \quad y_{\bar{x}} - \frac{h}{2} y_{\bar{x}x} + \frac{5h^2}{16} y_{\bar{x}xx}\Big|_{x=h} = \frac{7h^3}{16}\bar{\varphi}(h), \tag{46}$$

$$y(1) = 0, \quad y_x + \frac{h}{2} y_{\bar{x}x} + \frac{5h^2}{16} y_{x\bar{x}\bar{x}}\Big|_{x=1-h} = -\frac{7h^3}{16}\bar{\varphi}(1-h),$$

где $\bar{\varphi}(x)$ определяется формулами, аналогичными формулам (45). Можно проверить, что при достаточной гладкости решения задачи (31), (32) разностная схема (44) имеет погрешность аппроксимации $O(h^4)$. Схема (46) имеет погрешность $O(h^2)$.

Заметим, что, в отличие от задачи (41), схемы (44) и (46) не являются самосопряженными. Этот дефект схемы появился в результате исключения неизвестных v_i из системы (42).

5. Методы аппроксимации функционала. При построении методом Ритца разностной схемы для уравнения четвертого порядка (задача (31), (32)) мы столкнулись с тем

обстоятельством, что получаемая система уравнений содержит уравнений (и неизвестных) в два раза больше, чем число узлов сетки. В приведенном примере эти «лишние» неизвестные удалось исключить, но матрица полученной системы оказалась несимметричной. От этих неудобств свободен описываемый ниже метод аппроксимации функционала. В этом методе также исходят из вариационного функционала, но аппроксимируют не пространство, в котором ищется его минимум, а сам функционал. Если аппроксимация выбрана удачно, то этим методом можно построить хорошие разностные схемы.

Рассмотрим два примера построения разностных схем методом аппроксимации функционала. В качестве первого примера построим разностную схему для задачи (15), (16). Будем исходить из эквивалентной задачи отыскания минимизирующего элемента функционала (17).

Для построения приближенного метода минимизации функционала (17) заменим интегралы, входящие в его выражение, квадратурными формулами, а производную — разностным отношением. Точнее, пусть $\bar{\omega}$ — равномерная сетка на отрезке $[0, 1]$ с шагом h. Заменим первый интеграл в выражении (17) квадратурной формулой центральных прямоугольников, а два следующих интеграла — квадратурными формулами трапеций. Значение производной, которая берется в точках $x_i - 0{,}5h$, где x_i — узлы сетки, заменим следующим разностным отношением:

$$u'(x)|_{x=x_i-0,5h} \sim u_{\bar{x},\, i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}.$$

В результате получим

$$I_h(y) = \sum_{i=1}^{N} k(x_i - 0{,}5h)\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)^2 h + \frac{h}{2}(q(0)\, y_0^2 + q(1)\, y_N^2 - 2f(0)\, y_0 - 2f(1)\, y_N) + \sum_{i=1}^{N-1} [q(x_i) y_i^2 - 2f(x_i) y_i] h + \varkappa_0 y_0^2 + \varkappa_1 y_N^2 - 2g_0 y_0 - 2g_1 y_N. \quad (47)$$

$I_h(y)$ есть функция $(N+1)$ переменных y_i, и для того чтобы найти уравнения, определяющие точку ее минимума, нужно приравнять нулю первые производные этой функции по y_i. Для $i = 1, 2, \ldots, N-1$ — имеем следующие

уравнения:

$$-\frac{2}{h}k(x_i+0{,}5h)(y_{i+1}-y_i)+\frac{2}{h}k\left(x_i-\frac{h}{2}\right)(y_i-y_{i-1})+$$
$$+2q(x_i)hy_i-2hf(x_i)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{48}$$

при $i=0$ и $i=N$ получим соответственно

$$-\frac{2}{h}k\left(\frac{h}{2}\right)(y_1-y_0)+hq(0)y_0-hf(0)+2\varkappa_0 y_0-2g_0=0,$$
$$\frac{2}{h}k\left(1-\frac{h}{2}\right)(y_N-y_{N-1})+hq(1)y_N-hf(1)+ \tag{49}$$
$$+2\varkappa_1 y_N-2g_1=0.$$

Умножая (48) на (—1) и деля на $2h$, находим, что

$$\frac{1}{h}\left[k\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-k\left(x_i-\frac{h}{2}\right)\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]-$$
$$-q(x_i)y_i=-f(x_i) \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1. \tag{50}$$

Соотношения (49) разделим на 2:

$$k\left(\frac{h}{2}\right)\frac{y_1-y_0}{h}=\left(\varkappa_0+\frac{h}{2}q(0)\right)y_0-\left(g_0+\frac{h}{2}f(0)\right),$$
$$-k\left(1-\frac{h}{2}\right)\frac{y_N-y_{N-1}}{h}=\left(\varkappa_1+\frac{h}{2}q(1)\right)y_N- \tag{51}$$
$$-\left(g_1+\frac{h}{2}f(1)\right).$$

Легко проверить, что разностная схема (50) совпадает с разностной схемой (7), построенной ранее методом баланса, если коэффициенты в (7) взять согласно (9). Аналогичное совпадение с граничным условием (14), построенным ранее методом баланса, имеет место и для первого из граничных условий (51).

Рассмотрим еще один пример построения разностной схемы, но теперь уже для простейшего обыкновенного уравнения четвертого порядка с так называемыми *естественными граничными условиями*:

$$u^{\mathrm{IV}}+qu=f(x), \quad 0<x<1, \quad q=\mathrm{const},$$
$$u''(0)=u'''(0)=u''(1)=u'''(1)=0. \tag{52}$$

Задача (52) эквивалентна задаче об отыскании элемента

$u(x)$, минимизирующего функционал

$$I(u)=\int_0^1 ((u'')^2+qu^2)\,dx-2\int_0^1 u(x)f(x)\,dx. \qquad (53)$$

На этот раз все интегралы будем аппроксимировать при помощи квадратурной формулы трапеций, причем при аппроксимации интеграла от $(u''(x))^2$ воспользуемся граничными условиями (52), т. е. условиями $u''(0)=u''(1)=0$.

Заменяя теперь u'' на второе разностное отношение u_{xx}, получим следующую аппроксимацию функционала (53):

$$I_h(y)=\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}\right)^2 h+\sum_{i=1}^{N-1}(qy_i^2-2f(x_i)y_i)h+$$
$$+\frac{h}{2}[qy_0^2+qy_N^2-2f(0)y_0-2f(1)y_N].$$

Продифференцируем $I_h(y)$ по y_i и получим разностные уравнения для отыскания y_i:

$$\frac{2}{h^3}(y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i)-\frac{4}{h^3}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})+$$
$$+\frac{2}{h^3}(y_i-2y_{i+1}+y_{i+2})+2hqy_i-2hf(x_i)=0,$$
$$i=2,\ 3,\ \ldots,\ N-2,$$
$$-\frac{4}{h^3}(y_0-2y_1+y_2)+\frac{2}{h^3}(y_1-2y_2+y_3)+2(qy_1-2f(h))=0,$$
$$\frac{2}{h^3}(y_0-2y_1+y_2)+hqy_0-hf(0)=0,$$
$$\frac{2}{h^3}(y_{N-2}-2y_{N-1}+y_N)-\frac{4}{h^3}(y_{N-2}-2y_{N-1}+y_N)+$$
$$+2(qy_{N-1}-2hf(1-h))=0,$$
$$\frac{2}{h^3}(y_{N-2}-2y_{N-1}+y_N)+hqy_N-hf(1)=0.$$

Умножая полученные соотношения на подходящие выражения и используя введенные ранее обозначения для

разностных отношений, будем иметь

$$\begin{aligned}
&y_{xx}+\frac{h^2}{2}qy=\frac{h^2}{2}f, && x=0,\\
&y_{xx\bar{x}}-\frac{1}{h}y_{\bar{x}x}+hqy=hf, && x=h,\\
&y_{\bar{x}x\bar{x}x}+qy=f, && x=2h,\ 3h,\ \ldots,\ 1-2h,\\
&-y_{\bar{x}x\bar{x}}-\frac{1}{h}y_{\bar{x}x}+hqy=hf, && x=1-h,\\
&y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{h^2}{2}qy=\frac{h^2}{2}f, && x=1.
\end{aligned} \tag{54}$$

Это и есть разностная задача, аппроксимирующая задачу (52). Для того чтобы убедиться в том, что ее погрешность аппроксимации есть величина $O(h^2)$, необходимо сначала вместо второго и предпоследнего соотношений написать линейные комбинации первого и второго уравнений и предпоследнего и последнего.

Именно, вместо второго имеем:

$$y_{xx\bar{x}}(h)+hqy(h)+\frac{h}{2}qy(0)=hf(h)+\frac{h}{2}f(0),$$

а вместо предпоследнего:

$$-y_{\bar{x}x\bar{x}}(1-h)+hqy(1-h)+\frac{h}{2}qy(1)=hf(1-h)+\frac{h}{2}f(1).$$

Используя теперь формулу Тейлора, убедимся в том, что действительно погрешность аппроксимации задачи (54) есть $O(h^2)$.

6. Метод Бубнова — Галеркина. Очень близким к изложенному в п. 2 методу Ритца, но имеющим несколько более широкую область применимости, является другой проекционный метод — метод Бубнова — Галеркина. Этот метод применим и тогда, когда задача не является самосопряженной или знакоопределенной. Рассмотрим метод Бубнова — Галеркина на примере следующей задачи:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+r(x)\frac{du}{dx}-q(x)u=-f(x), && 0<x<1,\\
&k(0)u'(0)=\varkappa_0 u(0)-g_0, && -k(1)u'(1)=\varkappa_1 u(1)-g_1.
\end{aligned} \tag{55}$$

Напомним (см. § 2 гл. I), что обобщенным решением **задачи (55) называется** функция $u(x)\in W_2^1[0,1]$, которая

при любой функции $v(x) \in W_2^1[0, 1]$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 (ku'v' - ru'v + quv - fv)\,dx + \\ + \varkappa_0 u(0)\,v(0) + \varkappa_1 u(1)\,v(1) - g_0 v(0) - g_1 v(1) = 0. \qquad (56)$$

Пусть, как и прежде, V_n есть последовательность конечномерных подпространств пространства $W_2^1[0, 1]$. Будем искать приближенное решение $u_n(x) \in V_n$ задачи (55), удовлетворяя тождеству (56) на функциях $v_n(x) \in V_n$. Пусть $\bar{\omega}$ — равномерная сетка на $[0, 1]$ с шагом $h = 1/N$, и V_n — введенное ранее пространство кусочно-линейных непрерывных функций, а $\eta_i^{(n)}(x)$ — его координатные функции, задаваемые соотношениями (25), (26). Как и раньше, приближенное решение $u_{N+1}(x)$ будем искать в виде

$$u_{N+1}(x) = \sum_{j=0}^{N} y_j \eta_j^{(N+1)}(x). \qquad (57)$$

Полагая

$$v(x) = \eta_i^{(N+1)}(x)$$

и подставляя в (56) вместо $u(x)$ выражение (57), имеем:

$$\sum_{j=0}^{N} \left\{ \int_0^1 \left[k(x)\, y_j \frac{d}{dx} \eta_j^{(N+1)} \frac{d}{dx} \eta_i^{(N+1)} - r(x)\, y_j \frac{d}{dx} \eta_j^{(N+1)} \eta_i^{(N+1)} + \right.\right. \\ \left. + q(x)\, y_j \eta_i^{(N+1)} \eta_j^{(N+1)} - f(x)\, \eta_i^{(N+1)} \right] dx + \\ + \varkappa_0 y_j \eta_j^{(N+1)}(0)\, \eta_i^{(N+1)}(0) + \varkappa_1 y_j \eta_j^{(N+1)}(1)\, \eta_i^{(N+1)}(1) - \\ \left. - g_0 \eta_j^{(N+1)}(0) - g_1 \eta_j^{(N+1)}(1) \right\} = 0.$$

Учитывая вид (25), (26) координатных функций $\eta_j(x)$, отсюда получаем систему уравнений

$$\alpha_{i, i-1} y_{i-1} + \alpha_{i, i} y_i + \alpha_{i, i+1} y_{i+1} - \beta_i = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (58)$$

$$\alpha_{0,0} y_0 + \alpha_{0,1} y_1 - \beta_1 = 0, \quad \alpha_{N, N-1} y_{N-1} + \alpha_{N, N} y_N - \beta_N = 0,$$

где

$$\alpha_{i,\,i-1}=h^{-2}\left[-\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}k(x)\,dx+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})\,r(x)\,dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,(x-x_{i-1})\,q(x)\,dx\right],$$

$$\alpha_{i,\,i}=h^{-2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}k(x)\,dx-\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})\,r(x)\,dx+\right.$$
$$+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)\,r(x)\,dx+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})^2\,q(x)\,dx+$$
$$\left.+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)^2\,q(x)\,dx\right],$$

$$\alpha_{i,\,i+1}=h^{-2}\left[-\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}k(x)\,dx-\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)\,r(x)\,dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)\,(x_{i+1}-x)\,q(x)\,dx\right],\qquad i=1,\,2,\,\ldots,\,N-1,$$

$$\alpha_{0,\,0}=$$
$$=h^{-2}\left[\int\limits_0^h k(x)\,dx+\int\limits_0^h(h-x)\,r(x)\,dx+\int\limits_0^h(h-x)^2\,q(x)\,dx\right]+\varkappa_0,$$

$$\alpha_{0,\,1}=$$
$$=h^{-2}\left[-\int\limits_0^h k(x)\,dx-\int\limits_0^h(h-x)\,r(x)\,dx+\int\limits_0^h x\,(h-x)\,q(x)\,dx\right],$$

$$\alpha_{N,\,N-1}=h^{-2}\left[-\int\limits_{1-h}^{1}k(x)\,dx+\int\limits_{1-h}^{1}(x-1+h)\,r(x)\,dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{1-h}^{1}(1-x)\,(x-1+h)\,q(x)\,dx\right],$$

$$\alpha_{N,\,N}=h^{-2}\left[\int\limits_{1-h}^{1}k(x)\,dx-\int\limits_{1-h}^{1}(1-x)\,r(x)\,dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{1-h}^{1}(1-x)^2\,q(x)\,dx\right]+\varkappa_1,$$

$$\beta_i = h^{-1}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})f(x)\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)f(x)\,dx\right],$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$\beta_0 = h^{-1}\int\limits_0^h (h-x)f(x)\,dx + g_0,$$

$$\beta_1 = h^{-1}\int\limits_{1-h}^{1}(x-1+h)f(x)\,dx + g_1.$$

Если ввести обозначения:

$$a_i = h^{-1}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,dx - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)(x-x_{i-1})q(x)\,dx\right],$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

$$d_i = h^{-2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})q(x)\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)q(x)\,dx\right],$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$b_i^- = h^{-2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})r(x)\,dx, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

$$b_i^+ = h^{-2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)r(x)\,dx, \qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1;$$

$$d_0 = 2h^{-2}\int\limits_0^h q(x)(h-x)\,dx,$$

$$d_N = 2h^{-2}\int\limits_{1-h}^{1}(x-1+h)q(x)\,dx;$$

$$\varphi_i = h^{-1}\beta_i = h^{-2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})f(x)\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)f(x)\,dx\right],$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$\varphi_0 = 2h^{-2}\int\limits_0^h (h-x)f(x)\,dx,$$

$$\varphi_N = 2h^{-2}\int\limits_{1-h}^{1}(x-1+h)f(x)\,dx,$$

то систему (58) можно переписать в виде

$$(ay_{\bar{x}})_x + b^+ y_x + b^- y_{\bar{x}} - dy = -\varphi, \quad x = h, 2h, \ldots, 1-h,$$

$$(a_1 + b_0^+ h)\, y_x = (\varkappa_0 + 0{,}5hd_0)\, y - (g_0 + 0{,}5h\varphi_0), \quad x = 0, \tag{59}$$

$$-(a_N - hb_N^-)\, y_{\bar{x}} = (\varkappa_1 + 0{,}5hd_N)\, y - (g_1 + 0{,}5h\varphi_N), \quad x = 1.$$

Если $r(x) \equiv 0$, то, очевидно, задача (59) полностью совпадает с задачей (30). Если коэффициенты $k(x)$, $g(x)$ и $r(x)$ постоянны, то a_i, d_i, b_i^- и b_i^+ можно найти в явном виде

$$a_i = a = k - \frac{h^2}{6} q, \quad d_i = d = q, \quad b_i^- = b_i^+ = \frac{r}{2}.$$

7. Метод аппроксимации интегрального тождества. Этот метод находится в таком же отношении к методу Бубнова — Галеркина, как метод аппроксимации функционала к методу Ритца.

Метод аппроксимации интегрального тождества кратко проиллюстрируем на примере построения разностной схемы для задачи (55). Интегральное тождество (56), определяющее обобщенное решение задачи (55) на равномерной сетке $\bar{\omega}$, аппроксимируем сумматорным тождеством:

$$\sum_{i=1}^{N} k\left(x_1 - \frac{h}{2}\right)\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h}\right) h +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \left[-r(x_i)\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) v_i + q(x_i)\, y_i v_i - f(x_i)\, v_i\right] h +$$

$$+ \frac{h}{2}\left[q(0)\, y_0 v_0 - f(0)\, v_0 + q(1)\, y_N v_N - f(1)\, v_N\right] +$$

$$+ \varkappa_0 y_0 v_0 + \varkappa_1 y_N v_N - g_0 v_0 - g_1 v_N = 0.$$

В этом тождестве v_i — произвольная сеточная функция. Выбирая ее равной единице в одном из узлов сетки и равной нулю в остальных узлах, получим уравнение в той точке, где v_i отлична от нуля. Перебирая таким образом все узлы, получим следующую разностную схему:

$$\left(k\left(x - \frac{h}{2}\right) y_{\bar{x}}\right)_x + r(x)\, y_{\mathring{x}} - q(x)\, y = -f(x), \qquad x \in \omega,$$

$$\left(k\left(\frac{h}{2}\right) + h\frac{r(0)}{2}\right) y_x = \left(\varkappa_0 + \frac{h}{2} q(0)\right) y - \left(g_0 + \frac{h}{2} f(0)\right), \quad x = 0,$$

$$-\left(k\left(1 - \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} r(1)\right) y_{\bar{x}} = \left(\varkappa_1 + \frac{h}{2} q(1)\right) y - \left(g_1 + \frac{h}{2} f(1)\right), \quad x = 1.$$

8. Повышение порядка погрешности аппроксимации на решениях аппроксимируемых уравнений. В § 1 были приведены примеры двух разностных схем (6) и (7) для уравнения (5), которые отличались лишь аппроксимацией правой части, но первая из них имела погрешность $O(h^2)$, а вторая $O(h^4)$. Опишем способ построения схемы (7) § 1. Для уравнения

$$Lu \equiv u'' = -f(x) \tag{60}$$

напишем сначала простейшую аппроксимацию

$$L_h y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = -\varphi_i, \qquad \varphi_i = f(x_i),$$

и вычислим ее погрешность в предположении, что $u(x) \in C^{(6)}$. По определению

$$\psi(x) = L_h u + \varphi,$$

а

$$L_h u = Lu + \frac{h^2}{12} L^2 u + O(h^4), \tag{61}$$

и, следовательно,

$$\psi(x) = \frac{h^2}{12} L^2 u + O(h^4). \tag{62}$$

Из (60) находим, что $L^2 u = -Lf$. Подставляя это значение $L^2 u$ в (62), получим, что

$$\psi(x) + \frac{h^2}{12} f''(x) = O(h^4). \tag{63}$$

Из (63) следует, что для написания разностной схемы, имеющей погрешность аппроксимации $O(h^4)$, достаточно, чтобы погрешность аппроксимации $\bar{\psi}(x)$ этой схемы представлялась в виде

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x) + \frac{h^2}{12} f''(x),$$

где $\psi(x)$ определяется соотношением (62). Написать схему с такой погрешностью просто: в качестве правой части этой схемы нужно взять функцию

$$\bar{\varphi}(x) = f(x) + \frac{h^2}{12} f''(x), \tag{64}$$

и эта схема будет иметь вид

$$L_h y = -\bar{\varphi}(x).$$

Ясно, что без уменьшения порядка погрешности аппроксимации в (64) вместо $f''(x)$ можно поставить второе разностное отношение функции $f(x)$, т. е. $f_{\bar{x}x}(x)$, $\bar{\varphi} = f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x}$.

Точно так же можно построить указанную в § 1 разностную аппроксимацию (10) граничного условия третьего рода в задаче (8) § 1. Заметим, что эта аппроксимация была уже построена методом баланса. Снова напишем простейшую аппроксимацию этого условия:

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h} = \varkappa y_0 - \nu_0, \qquad \nu_0 = g_0,$$

и вычислим ее погрешность:

$$\psi_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} - \varkappa u_0 + \nu_0 =$$

$$= u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \varkappa u(0) + g_0 + O(h^2) = \frac{h}{2} u''(0) + O(h^2).$$

Из уравнения (8) § 1 имеем $u''(0) = -f(0)$. Тем самым

$$\psi_0 + \frac{h}{2} f(0) = O(h^2). \tag{65}$$

Из (65) видно, что для написания разностной аппроксимации с погрешностью $O(h^2)$ достаточно правую часть $\bar{\nu}_0$ выбрать равной $\bar{\nu}_0 = g_0 + \frac{h}{2} \varphi_0$,

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h} = \varkappa y_0 - \bar{\nu}_0.$$

Рассмотрим еще два примера повышения порядка погрешности аппроксимации схем (для уравнений с постоянными коэффициентами). Сначала возьмем уравнение

$$u'' - qu = -f(x), \tag{66}$$

где $q = \text{const}$. Простейшая аппроксимация этого уравнения имеет вид

$$L_h y = y_{\bar{x}x} - qy = -\varphi, \qquad \varphi = f(x).$$

Ее погрешность

$$\psi(x) = L_h u + \varphi = \\ = u''(x) + \frac{h^2}{12} u^{IV}(x) + O(h^4) - qu + f = \frac{h^2}{12} u^{IV} + O(h^4).$$

Из уравнения (66) находим, что

$$u^{IV} = qu''(x) - f''(x) = q^2 u - qf - f''.$$

Подставляя это значение $u^{IV}(x)$ в выражение для $\psi(x)$, получим, что

$$\psi(x) - \frac{h^2}{12}(q^2 u - qf - f'') = O(h^4).$$

Как и раньше, отсюда следует, что для написания разностной схемы, имеющей погрешность аппроксимации $O(h^4)$, достаточно, чтобы погрешность аппроксимации этой схемы представлялась в виде

$$\overline{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{h^2}{12}(q^2 u - qf - f'').$$

Теперь уже недостаточно изменить только правую часть схемы, а нужно менять и коэффициент при y. Ясно, что разностная схема, имеющая погрешность аппроксимации $O(h^4)$, может быть взята в виде

$$y_{\bar{x}x} - q\left(1 + \frac{h^2}{12} q\right) y = -\left[f + \frac{h^2}{12}(qf + f'')\right].$$

Наконец, рассмотрим уравнение

$$u'' + ru' - qu = -f(x), \tag{67}$$

где $r = \text{const}$ и $q = \text{const}$. Весьма очевидна следующая аппроксимация этого уравнения:

$$y_{\bar{x}x} + \frac{1}{2} r(y_x + y_{\bar{x}}) - qy = -f.$$

Вычислим погрешность аппроксимации этой схемы:

$$\psi = u'' + \frac{h^2}{12} u^{IV} + ru' + \frac{h^2}{6} ru''' - qu + f + O(h^4) = \\ = \frac{h^2}{12}(u^{IV} + 2ru''') + O(h^4).$$

Из уравнения (67) находим, что

$$u''' = (r^2+q)\,u' - rqu + rf - f',$$
$$u^{IV} = -(r^3+2rq)\,u' + (r^2q+q^2)\,u + rf' - qf - f'' - r^2f.$$

Подставляя эти значения u''' и u^{IV} в выражение для ψ, получим

$$\psi = \frac{h^2}{12}[r^3u' + q(q-r^2)\,u - (q-r^2)f - rf' - f''] + O(h^4) =$$
$$= \frac{h^2}{12}\left[\frac{1}{2}r^3(u_x + u_{\bar{x}}) + q(q-r^2)\,u - (q-r^2)f - rf' - f''\right] + O(h^4).$$

Отсюда следует, что искомая схема должна иметь вид

$$y_{\bar{x}x} + \frac{1}{2}r\left(1 - \frac{h^2}{12}r^2\right)(y_x + y_{\bar{x}}) - q\left(1 + \frac{h^2}{12}(q-r^2)\right)y =$$
$$= -\left[f + \frac{h^2}{12}((q-r^2)f + rf' + f'')\right].$$

9. Схемы повышенного порядка точности для уравнения с переменными коэффициентами. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = -f(x). \tag{68}$$

Для этого уравнения различными способами была построена схема

$$(ay_{\bar{x}})_x = -\varphi(x), \tag{69}$$

коэффициенты которой $a(x)$ и $\varphi(x)$ в методе баланса, в методе Ритца и в методе аппроксимации функционала вычислялись по различным формулам. Однако при любом из указанных способов вычисления коэффициентов схема (69) имела погрешность аппроксимации $O(h^2)$.

Из п. 2 § 2 следует, что схема (69) имеет аппроксимацию второго порядка, если

$$\frac{a(x+h)+a(x)}{2} = k(x) + O(h^2), \quad \frac{a(x+h)-a(x)}{h} = k'(x) + O(h^2),$$
$$\varphi(x) = f(x) + O(h^2).$$

Для уравнения (68) можно написать точную трехточечную схему. Она имеет вид

$$\left(\mathring{a}y_{\bar{x}}\right)_x = -\mathring{\varphi}(x), \tag{70}$$

где $\mathring{a}_i = \left(\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}$,

$$\mathring{\varphi}_i = \frac{1}{h^2}\left[\mathring{a}_{i+1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_i}^{x} f(x')\,dx' + \mathring{a}_i\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x}^{x_i} f(x')\,dx'\right].$$

Любое решение дифференциального уравнения (68) является решением разностного уравнения (70), т. е.

$$y_i = u_i = u(x_i).$$

Чтобы получить точную схему, проинтегрируем уравнение (68) от x_i до x и разделим на $k(x)$:

$$u'(x) = \frac{(ku')_i}{k(x)} + \frac{1}{k(x)}\int\limits_{x_i}^{x} f(x')\,dx'. \tag{71}$$

Интегрируя затем (71) по x от x_{i-1} до x_i и от x_i до x_{i+1} и умножая на $\mathring{a}_i h^{-1}$ и $\mathring{a}_{i+1}h^{-1}$ получим:

$$\mathring{a}_i\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = (ku')_i + \mathring{a}_i\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_i}^{x} f(x')\,dx',$$

$$\mathring{a}_{i+1}\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = (ku')_i + \mathring{a}_{i+1}\frac{1}{h}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_i}^{x} f(x')\,dx'.$$

После исключения отсюда (ku') получаем: $\left(\mathring{a}u_{\bar{x}}\right)_x = -\mathring{\varphi}(x)$, где $\mathring{a}$ и $\mathring{\varphi}$ определены выше.

Конечно, практическое использование этой схемы весьма затруднено наличием интегралов для $\mathring{a}$ и $\mathring{\varphi}$, точность вычисления которых, очевидно, и определяет фактическую точность схемы.

Для уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \qquad 0 < x < 1,$$

можно построить трехточечную однородную схему, являющуюся точной на произвольной неравномерной сетке. При этом используется другой метод, основанный на том, что решение указанного уравнения второго порядка в произвольной точке может быть выражено через значения этого уравнения на концах любого интервала, содержащего выбранную точку. Беря в качестве трех точек узлы сеток, получаем трехточечную разностную схему. Она имеет вид

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi.$$

Ее коэффициенты a, d, φ являются функционалами от коэффициентов $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ дифференциального уравнения.

Остановимся на методе получения разностной схемы $O(h^4)$ для уравнения (68) путем непосредственного изучения погрешности аппроксимации консервативной схемы. Удобнее будет переписать уравнение (68) в виде

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right) = -f(x), \qquad p(x) = \frac{1}{k(x)}. \tag{72}$$

Аппроксимируем Lu трехточечным оператором

$$\Lambda y = \left(\frac{1}{a} y_{\bar{x}}\right)_x$$

второго порядка аппроксимации:

$$\psi = \Lambda u - Lu = O(h^2).$$

Как было показано в п. 2 § 2, это имеет место при выполнении условий

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a(x+h)} + \frac{1}{a(x)}\right] &= \frac{1}{p(x)} + O(h^2), \\ \frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(x+h)} - \frac{1}{a(x)}\right] &= \left(\frac{1}{p}\right)' + O(h^2). \end{aligned} \tag{73}$$

Будем предполагать, что $a(x)$ определяется при помощи линейного шаблонного функционала $A[p(s)]$, $-1 \leqslant s \leqslant 0$, так что

$$a(x) = A[p(x+sh)], \qquad -1 \leqslant s \leqslant 0.$$

Разлагая

$$p(x+sh) = p(x) + shp'(x) + \frac{h^2}{2} s^2 p''(x) + O(h^3)$$

и

$$p(x+h+sh)=p(x)+(1+s)hp'(x)+\frac{h^2}{2}(1+s)^2p''(x)+O(h^3),$$

находим

$$a(x)=p(x)A[1]+hp'(x)A[s]+\frac{h^2}{2}p''(x)A[s^2]+O(h^3),$$

$$a(x+h)=$$

$$=p(x)A[1]+hp'(x)A[1+s]+\frac{h^2}{2}p''(x)A[(1+s)^2]+O(h^3).$$

Подставим эти выражения в условия (73) второго порядка аппроксимации. Очевидно, что $A[1]=1$.

Далее имеем

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(x+h)}-\frac{1}{a(x)}\right]=$$

$$=\frac{1}{hp(x)}\left[\left(1-\frac{hp'}{p}A[1+s]-\frac{h^2}{2p}p''A[(1+s)^2]+\right.\right.$$

$$\left.+h^2\left(\frac{p'}{p}\right)^2A^2[1+s]+O(h^3)\right)-\left(1-\frac{hp'}{p}A[s]-\frac{h^2}{2p}p''A[s^2]+\right.$$

$$\left.\left.+h^2\left(\frac{p'}{p}\right)^2A^2[s]+O(h^3)\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{p}\right)'-\frac{h}{2}\left(\frac{p'}{p^2}\right)'A[1+2s]+O(h^2)=\left(\frac{1}{p}\right)'+O(h^2),$$

если $A[1+2s]=0$, т. е. $A[s]=-0{,}5$.

При этом выполняется и первое из условий (73):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a(x)}+\frac{1}{a(x+h)}\right)=\frac{1}{p(x)}-\frac{hp'}{p^2}A[s+0{,}5]+O(h^2)=$$

$$=\frac{1}{p(x)}+O(h^2).$$

Покажем, что при выполнении условий

$$A[1]=1,\quad A[s]=-1/2,\quad A[s^2]=1/3,\quad A[s^3]=-1/4 \tag{74}$$

погрешность аппроксимации $\psi=\Lambda u-Lu$ можно представить в виде

$$\psi=\Lambda u-Lu=\frac{h^2}{12}L(pLu)+O(h^4)=\frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{p}(pLu)'\right)'+O(h^4).$$

Для этого разложим $a(x)$ в окрестности точки $\bar{x}=x-0{,}5h$.

Обозначая $p(\bar{x}) = \bar{p}(x)$ и т. д., получим

$$a(x) = A[p(x+sh)] = A[p(x-0{,}5h+(s+0{,}5)h)] =$$
$$= A\left[\bar{p} + h(s+0{,}5)\bar{p}' + \frac{h^2}{2}(s+0{,}5)^2\bar{p}'' + \frac{h^3}{6}(s+0{,}5)^3\bar{p}''' + \right.$$
$$\left. + \frac{h^4}{24}(s+0{,}5)^4\bar{p}^{\mathrm{IV}} + O(h^5)\right] = \bar{p} + h\bar{p}'A\left[s+\frac{1}{2}\right] +$$
$$+ \frac{h^2}{2}\bar{p}''A[(s+0{,}5)^2] + \frac{h^3}{6}\bar{p}'''A[(s+0{,}5)^3] +$$
$$+ \frac{h^4}{24}\bar{p}^{\mathrm{IV}}A[(s+0{,}5)^4] + O(h^5).$$

Учитывая затем, что $A[s+0{,}5] = A[s] + 0{,}5 = 0$,

$$A[(s+0{,}5)^2] = A\left[s^2+s+\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$
$$A[(s+0{,}5)^3] =$$
$$= A[s^3] + \frac{3}{2}A[s^2] + \frac{3}{4}A[s] + \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = 0,$$

можно написать

$$a(x) = \bar{p} + \frac{h^2}{24}\bar{p}'' + \frac{h^4}{24}\bar{p}^{\mathrm{IV}}A[(s+0{,}5)^4] + O(h^5),$$
$$a(x+h) = p(\bar{x}+h) + \frac{h^2}{24}p''(\bar{x}+h) +$$
$$+ \frac{h^4}{24}p^{\mathrm{IV}}(\bar{x}+h)\ A\ [(s+0{,}5)^4] + O(h^5).$$

Нам понадобятся также выражения

$$u(x) = u(\bar{x}) + \frac{h}{2}u'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}u''(\bar{x}) + \frac{h^3}{48}u'''(\bar{x}) +$$
$$+ \frac{h^4}{16\cdot 24}u^{\mathrm{IV}}(\bar{x}) + \frac{h^5}{32\cdot 120}u^{\mathrm{V}}(\bar{x}) + O(h^6),$$
$$u(x-h) = u(\bar{x}) - \frac{h}{2}u'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}u''(\bar{x}) - \frac{h^3}{48}u'''(\bar{x}) +$$
$$+ \frac{h^4}{16\cdot 24}u^{\mathrm{IV}}(\bar{x}) - \frac{h^5}{32\cdot 120}u^{\mathrm{V}}(\bar{x}) + O(h^6).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{a}u_{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{p}}\left(1 - \frac{h^2}{24}\frac{p''(\bar{x})}{p(\bar{x})} + \right.$$
$$\left. + \alpha(\bar{x})h^4\right)\left(u'(\bar{x}) + \frac{h^2}{24}u'''(\bar{x}) + \beta(\bar{x})h^4\right) + O(h^5) =$$
$$= \left[\frac{u'}{p} + \frac{h^2}{24}\left(\frac{u'''}{p} - \frac{p''}{p^2}u'\right)\right]_{x=\bar{x}} + \gamma(\bar{x})h^4 + O(h^5),$$

т. е.

$$\frac{1}{a}\,u_{\bar{x}}=\left(\frac{u'}{p}\right)_{x=\bar{x}}+h^2\delta\,(\bar{x})+\gamma\,(\bar{x})\,h^4+O\,(h^5),$$

где

$$\delta\,(\bar{x})=\frac{1}{24}\left(\frac{u'''}{p}-\frac{p''}{p^2}\,u'\right)_{x=\bar{x}},$$

$$\gamma\,(\bar{x})=\frac{\beta\,(\bar{x})}{p\,(\bar{x})}+\frac{\alpha\,(\bar{x})u'\,(\bar{x})}{p\,(\bar{x})}-\frac{p''}{576p^2\,(\bar{x})}\,u'''\,(\bar{x}),$$

$$\beta\,(\bar{x})=\frac{u^{\mathrm{V}}\,(\bar{x})}{16\cdot 120},$$

$$\alpha\,(\bar{x})=-\frac{p^{\mathrm{IV}}\,(\bar{x})}{p\,(\bar{x})}\,\frac{A\,[(s+0{,}5)^4]}{24}+\frac{(p''\,(\bar{x}))^2}{576p^2\,(\bar{x})}.$$

Воспользуемся затем формулами:

$$w\,(\bar{x})=w\,(x)-0{,}5hw'\,(x)+\frac{h^2}{8}\,w''\,(x)-$$

$$-\frac{h^3}{48}\,w'''\,(x)+\frac{h^4}{16\cdot 24}\,w^{\mathrm{IV}}+O\,(h^5),$$

$$w\,(\bar{x}+h)=w\,(x)+0{,}5hw'\,(x)+\frac{h^2}{8}\,w''\,(x)+$$

$$+\frac{h^3}{48}\,w'''\,(x)+\frac{h^4}{16\cdot 24}\,w^{\mathrm{IV}}\,(x)+O\,(h^5),$$

$$(w\,(\bar{x}))_x=\frac{w\,(\bar{x}+h)-w\,(\bar{x})}{h}=w'\,(x)+\frac{h^2}{24}\,w'''\,(x)+O\,(h^4).$$

Отсюда и из формулы для $w=\frac{1}{a}\,u_{\bar{x}}$ следует:

$$\left(\frac{1}{a}\,u_{\bar{x}}\right)_x=w_x=\left(\frac{u'}{p}\right)'+\frac{h^2}{24}\left[\left(\frac{u'}{p}\right)''+\frac{u'''}{p}-\frac{p''}{p^2}\,u'\right]'+O\,(h^4).$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках, учитывая, что

$$\left(\frac{u'}{p}\right)''=\left(\frac{u''}{p}+u'\left(\frac{1}{p}\right)'\right)'=\frac{u'''}{p}+2\left(\frac{1}{p}\right)'u''+\left(\frac{1}{p}\right)''u',$$

$$\frac{u''}{p}=\left(\frac{u'}{p}\right)'-\left(\frac{1}{p}\right)'u'=\left(\frac{u'}{p}\right)'+\frac{p'}{p^2}\,u',$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)''=-\left(\frac{p'}{p^2}\right)'=-\frac{p''}{p^2}+\frac{2\,(p')^2}{p^3},$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{u'}{p}\right)'' + \frac{u'''}{p} - \frac{p''}{p^2}u' = 2\left(\frac{u'}{p}\right)'' - \frac{p''}{p^2}u' + \frac{p''}{p^2}u' -$$
$$-2\frac{(p')^2}{p^3}u' + \frac{2p'}{p^2}u'' = 2\left(\frac{u'}{p}\right)'' + 2\frac{p'}{p}\left(\frac{u'}{p}\right)' = 2\frac{1}{p}\left(p\left(\frac{u'}{p}\right)'\right)'.$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для погрешности аппроксимации:

$$\psi = \Lambda u - Lu =$$
$$= \left(\frac{1}{a}u_x\right)_x - \left(\frac{1}{p}u'\right)' = \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{p}\left(p\left(\frac{u'}{p}\right)'\right)'\right)' + O(h^4),$$

или

$$\psi = \frac{h^2}{12}L(pLu) + O(h^4).$$

Пусть $u = u(x)$ есть решения уравнения $Lu = \left(\frac{1}{p}u'\right)' = -f(x)$. Тогда

$$\psi(x) = -\frac{h^2}{12}L(pf) + O(h^4).$$

Так как

$$L(pf) = \left(\frac{1}{p}(pf)'\right)' = \Lambda(pf) + O(h^2),$$

то разностная схема

$$\Lambda y = \left(\frac{1}{a}y_{\bar{x}}\right)_x = -\varphi,\quad \varphi = f + \frac{h^2}{12}\Lambda(pf) \qquad (75)$$

имеет четвертый порядок аппроксимации на решении $u = u(x)$ уравнения $Lu = -f(x)$, так что

$$\psi = \Lambda u + \varphi = O(h^4),$$

если $f \in C^{(4)}$, $p \in C^{(5)}$ и выполнены условия (74) для линейного функционала

$$A[\bar{p}(s)],\qquad -1 \leqslant s \leqslant 0.$$

Выберем простейший функционал

$$A[\bar{p}(s)] = c_1\bar{p}(-1) + c_2 p\left(-\frac{1}{2}\right) + c_0\bar{p}(0),$$

где c_1, c_2, c_0 — постоянные. Условия (74) дают:

$$A[1]=c_1+c_2+c_0=1, \qquad c_2=1-c_0-c_1,$$

$$A[s]=-c_1-0{,}5c_2=-0{,}5, \quad c_1+0{,}5c_2=0{,}5,$$

$$A[s^2]=c_1+\frac{1}{4}c_2=\frac{1}{3}.$$

Отсюда находим

$$c_1=\frac{1}{6}, \quad c_2=\frac{2}{3}, \quad c_0=\frac{1}{6}.$$

Условие $A[s^3]=-\frac{1}{4}$ автоматически выполняется.

Таким образом, для простейшей схемы (75) четвертого порядка аппроксимации коэффициент a_i равен

$$a_i=\frac{1}{6}(p_{i-1}+4p_{i-1/2}+p_i).$$

ГЛАВА III

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Как уже отмечалось в гл. I, уравнение Пуассона (Лапласа) является одним из наиболее типичных представителей эллиптических уравнений. В этой главе будут построены разностные схемы различных порядков аппроксимации для уравнения Пуассона, записанного в декартовых, полярных, цилиндрических или сферических координатах. Затем будут указаны аппроксимации граничных условий Дирихле для уравнения Лапласа, доказан принцип максимума и с его помощью проведено исследование разрешимости и скорости сходимости построенных разностных схем.

§ 1. Построение разностных схем для уравнения Пуассона

1. Аппроксимация уравнения Пуассона в декартовых координатах. Пусть на плоскости Ox_1x_2 задано уравнение Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \qquad x = (x_1, x_2) \tag{1}$$

и введена равномерная прямоугольная разностная сетка Ω с шагом h_α по направлению Ox_α, $\alpha = 1, 2$. В § 1 гл. II была указана простейшая разностная аппроксимация оператора Лапласа на прямоугольной сетке. С помощью введенного там разностного оператора простейшая

аппроксимация уравнения (1) строится очевидным образом

$$\Lambda y \equiv y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \tag{2}$$

где правую часть $\varphi(x)$ можно выбрать, например, следующим образом:

$$\varphi(x) = f(x). \tag{3}$$

Вычислим погрешность аппроксимации уравнения (2) с правой частью (3) на решении $u = u(x)$ уравнения (1). Учитывая, что

$$\Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} + \frac{h_\alpha^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x_\alpha^6} + O(h_\alpha^6),$$
$$\Delta u = (L_1 + L_2)\, u = -f(x), \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{4}$$

находим

$$\psi(x) = \Lambda u + \varphi(x) = (\Lambda_1 + \Lambda_2)\, u + \varphi(x) =$$
$$= (L_1 + L_2)\, u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1^2 u + h_2^2 L_2^2 u) + f(x) + O(|h|^4) = O(|h|^2),$$
$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Следовательно, уравнение (2) с правой частью (3) аппроксимирует уравнение (1) со вторым порядком.

Разностный оператор, использованный при написании уравнения (2), задан на простейшем пятиточечном шаблоне типа «крест». Можно доказать, что на этом шаблоне нельзя построить разностную аппроксимацию, имеющую погрешность порядка более высокого, чем $O(|h|^2)$. Усложнение шаблона позволяет строить аппроксимации более высокого порядка. Так, на девятиточечном шаблоне типа «ящик» можно построить разностную аппроксимацию уравнения (1) $O(|h|^4)$. Если же сетка квадратная, т. е. $h_1 = h_2 = h$, то на этом же шаблоне можно построить аппроксимацию $O(|h|^6)$. Построим указанные аппроксимации. Из (4) следует, что

$$\Lambda u = (L_1 + L_2)\, u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1^2 + h_2^2 L_2^2)\, u + O(|h|^4) =$$
$$= (L_1 + L_2)\, u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1 + h_2^2 L_2)(L_1 + L_2)\, u -$$
$$- \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|)^4. \tag{5}$$

Подставляя сюда из (1) $\Delta u = (L_1 + L_2)\, u = -f(x)$, получаем

$$\Lambda u = -f(x) - \frac{1}{12}(h_1^2 L_1 + h_2^2 L_2) f - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|^4).$$

Заменим $L_1 L_2 u = \partial^4 u / \partial x_1^2 \partial x_2^2$ разностным выражением

$$L_1 L_2 u = u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + O(|h|^2) = \Lambda_1 \Lambda_2 u + O(|h|^2).$$

В результате получим

$$\Lambda u + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 u = -\left(f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha f\right) + O(|h|^4).$$

Отсюда следует, что разностное уравнение

$$\Lambda' y \equiv \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x) \tag{6}$$

с правой частью

$$\varphi(x) \equiv f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2} \tag{7}$$

аппроксимирует уравнение (1) на его решении $u = u(x)$ с погрешностью $O(|h|^4)$.

Формула (7), при помощи которой задается правая часть уравнения (6), не всегда удобна для вычислений из-за необходимости использования производных функции $f(x)$. Однако эти производные можно заменить их разностными аппроксимациями. Учитывая, что

$$\partial^2 f / \partial x_\alpha^2 = f_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + O(h_\alpha^2),$$

положим правую часть в уравнении (6) равной

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} f_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = f(x) + \frac{1}{12}(h_1^2 \Lambda_1 f + h_2^2 \Lambda_2 f). \tag{7'}$$

При этом погрешность аппроксимации схемы по-прежнему будет иметь четвертый порядок: $\psi = O(|h|^4)$.

Построим теперь схему, имеющую шестой порядок аппроксимации на квадратной сетке, т. е. при $h_1 = h_2 = h$.

Пользуясь разложением (4), получим

$$\Lambda u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u = \\ = (L_1 + L_2) u + \frac{h^2}{12} (L_1^2 + L_2^2) u + \frac{h^4}{360} (L_1^3 + L_2^3) u + O(h^6).$$

В силу уравнения $(L_1 + L_2) u = -f(x)$ и соотношений

$$(L_1^2 + L_2^2) u = (L_1 + L_2)^2 u - 2L_1 L_2 u = -(L_1 + L_2) f - 2L_1 L_2 u,$$

$$(L_1^3 + L_2^3) u = (L_1^3 - L_1 L_2 + L_2^3)(L_1 + L_2) u = -(L_1^3 - L_1 L_2 + L_2^3) f,$$

предыдущую формулу можно записать в виде

$$\Lambda u = -f(x) - \frac{h^2}{12} (L_1 + L_2) f - \frac{h^4}{360} (L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2) f - \\ - \frac{h^2}{6} L_1 L_2 u + O(h^6).$$

Чтобы заменить $L_1 L_2 u$ его разностным аналогом с точностью $O(h^6)$, учтем (4). В результате получим

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u = L_1 L_2 u + \frac{h^2}{12} L_1 L_2 (L_1 + L_2) u + O(h^4) = \\ = L_1 L_2 u - \frac{h^2}{12} L_1 L_2 f + O(h^4).$$

Поэтому можно написать

$$\Lambda' u = \Lambda u + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 u = -\varphi(x) + O(h^6),$$

где

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h^2}{12} \Delta f + \frac{h^4}{360} (\Delta^2 f + 2L_1 L_2 f). \qquad (8)$$

Отсюда видно, что схема

$$\Lambda' y = -\varphi(x) \qquad (9)$$

с правой частью $\varphi(x)$, определяемой по формуле (8), на квадратной сетке аппроксимирует уравнение (1) с погрешностью $O(h^6)$.

В качестве правой части в (9) можно взять другую функцию, которая сохраняет порядок аппроксимации схемы, но не содержит производных функции $f(x)$. Подставляя в (8) выражения

$$\Delta f = \Lambda f - \frac{h^2}{12} (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) f + O(h^4),$$

$$\Delta^2 f = (\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 f + O(h^2) = \Lambda_1^2 f + 2\Lambda_1 \Lambda_2 f + \Lambda_2^2 f + O(h^2),$$

$$L_1 L_2 f = \Lambda_1 \Lambda_2 f + O(h^2)$$

и сохраняя лишь члены $O(h^4)$, получим следующую формулу для правой части $\varphi(x)$ уравнения (9)

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12}(\Lambda_1 + \Lambda_2) f - \frac{h^4}{240}(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) f + \frac{h^4}{90}\Lambda_1\Lambda_2 f. \qquad (8')$$

Формула (8′) может оказаться более удобной для вычислений.

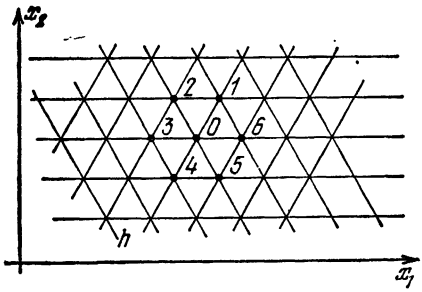


Рис. 6.

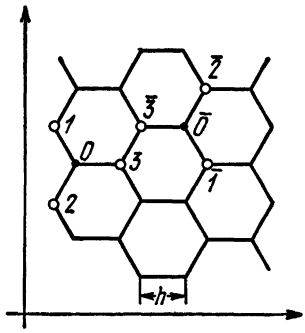


Рис. 7.

Иногда на квадратной сетке уравнение (1) аппроксимируется по пятиточечному шаблону «косой крест», состоящему из узлов

$$(x_1, x_2),\quad (x_1-h, x_2-h),\quad (x_1-h, x_2+h),$$
$$(x_1+h, x_2+h),\quad (x_1+h, x_2-h),$$

Эта аппроксимация строится следующим образом. Известно, что оператор Лапласа инвариантен относительно поворота системы координат. Повернем исходную систему координат на угол $\pi/4$, а сетку Ω оставим на месте. Тогда указанный выше шаблон в новой системе координат будет обычным шаблоном «крест», только расстояние между его соседними узлами будет не h, а $\sqrt{2}h$. Следовательно, новое уравнение на этом шаблоне можно аппроксимировать обычным образом и эта аппроксимация в старой системе координат примет вид

$$\frac{1}{2h^2}\{y(x_1-h, x_2-h) + y(x_1-h, x_2+h) + y(x_1+h, x_2-h) + y(x_1+h, x_2+h) - 4y(x_1, x_2)\} = -f(x_1, x_2), \qquad (10)$$

Переписывая уравнение (10) при помощи обозначений § 1 гл. II, получим

$$y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h^2}{2} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \frac{h^2}{2} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -f(x). \quad (11)$$

Очевидно, что погрешность аппроксимации уравнения (11) есть величина порядка $O(h^2)$.

2. **Шестиугольные и треугольные сетки.** Помимо прямоугольной и квадратной сеток, для аппроксимации уравнения Пуассона иногда используются регулярные сетки, составленные из правильных треугольников (рис. 6) или правильных шестиугольников (рис. 7) со стороной h.

Построим разностные аппроксимации уравнения (1) на этих сетках. Отметим сначала, что построение разностной аппроксимации уравнения (1) на шестиугольной сетке путем аппроксимации входящих в (1) производных невозможно, так как аппроксимация второй производной по какому-либо направлению требует наличия по крайней мере трех точек, находящихся на одной прямой, проходящей в этом направлении. Мы не будем использовать такой подход и при построении схемы на треугольной сетке.

Пусть $x^{(0)}$ — некоторый узел той или иной сетки, а $x^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, n$, — его соседние узлы. Выпустим из $x^{(0)}$ n лучей, проходящих через соседние с $x^{(0)}$ узлы $x^{(i)}$. Обозначим эти лучи через $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Угол между лучом l_i и осью x_1 обозначим через $\theta_i = \theta + 2\pi i/n$, где угол θ — начало отсчета. Введем правое разностное отношение вдоль луча l_1 при помощи соотношения

$$y_{l_i} = \frac{y(x^{(i)}) - y(x^{(0)})}{h}, \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

и построим оператор

$$\mathscr{L}y = \sum_{i=1}^{n} y_{l_i}. \quad (12)$$

Исследуем его асимптотику при $h \to 0$. Очевидно, что

$$\mathscr{L}u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial l_i} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial l_i^3} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial l_i^4} + \frac{h^4}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial l_i^5} \right) + O(h^5), \quad (13)$$

Выразим производные по направлению l_i, входящие в (13) через производные по x_1 и x_2. После несложных выкладок находим, что

$$\frac{\partial}{\partial l_i} = \cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial l_i^2} = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\cos 2\theta_i \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \sin 2\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial l_i^3} = \frac{\cos 3\theta_i}{4}\left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + \frac{\sin 3\theta_i}{4}\left(3\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\right) +$$

$$+ \frac{3}{4}\left(\cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Delta,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial l_i^4} = \frac{3}{8}\Delta^2 + \frac{\cos 4\theta_i}{8}\left(\Delta^2 - 8\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right) + \frac{\sin 4\theta_i}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3}\right) +$$

$$+ \frac{\cos 2\theta_i}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right) + \sin 2\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial^5}{\partial l_i^5} = \frac{5}{8}\left(\cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Delta^2 +$$

$$+ \frac{5\cos 3\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_1^5} - 2\frac{\partial^5}{\partial x_1^3 \partial x_2^2} - 3\frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^4}\right) -$$

$$- \frac{5\sin 3\theta_i}{16}\left(-3\frac{\partial^5}{\partial x_1^4 \partial x_2} - 2\frac{\partial^5}{\partial x_1^2 \partial x_2^3} + \frac{\partial^5}{\partial x_2^5}\right) +$$

$$+ \frac{\cos 5\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_1^5} + 5\frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^4} - 10\frac{\partial^5}{\partial x_1^3 \partial x_2^2}\right) +$$

$$+ \frac{\sin 5\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_2^5} + 5\frac{\partial^5}{\partial x_1^4 \partial x_2} - 10\frac{\partial^5}{\partial x_1^2 \partial x_2^3}\right).$$

Подставим соотношения (14) в (13) и учтем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha\theta_i = \cos\alpha\left(\theta + \frac{n+1}{n}\pi\right) \times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi/n)} & \text{при } \dfrac{\alpha}{n} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ (-1)^{\alpha(n+1)/n} n & \text{при } \dfrac{\alpha}{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases} \qquad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha\theta_i = \sin\alpha\left(\theta + \frac{n-3}{n}\pi\right) \times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi/n)} & \text{при } \dfrac{\alpha}{n} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ (-1)^{\alpha(n-1)/n} n & \text{при } \dfrac{\alpha}{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases} \qquad (16)$$

В результате получим (при $n \geqslant 3$)

$$\mathscr{L}u = \frac{nh}{4}\Delta u + \frac{nh^3}{64}\Delta^2 u + \delta_{n,3}\frac{h^2}{8}\left\{\cos 3\theta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sin 3\theta\left(3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)\right\} -$$
$$- \delta_{n,4}\frac{h^3}{48}\left\{\left(\Delta^2 u - 8\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2^2}\right)\cos 4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \right.$$
$$\left. + 16\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3}\right)\sin 4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right\} +$$
$$+ (\delta_{n,5} + \delta_{n,3})\,O(h^4) + O(h^5), \qquad (17)$$

где $\delta_{n,i}$ — символ Кронекера. Из (17) следует, что оператор $\mathscr{L}$ будет аппроксимировать оператор Лапласа при любом $n \geqslant 3$, если его домножить на величину $4/(nh)$. Введем следующее обозначение:

$$\Lambda = \frac{4}{nh}\mathscr{L}. \qquad (18)$$

Тогда на треугольной сетке ($n = 6$) разностное уравнение

$$\Lambda y = -\varphi(x), \qquad (19)$$

где

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h^2}{16}\Delta f, \qquad (20)$$

как это следует из (17), аппроксимирует уравнение (1) с погрешностью $O(h^4)$. На шестиугольной сетке уравнение

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad \varphi(x) = f(x) \qquad (21)$$

(выражение для Λy мы не выписываем) аппроксимирует уравнение (1) с погрешностью $O(h)$, причем так как на этой сетке имеется два шаблона, соответствующих $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, то

$$\psi(x^{(0)}) = \frac{h}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + O(h^2),$$
$$\psi(\bar{x}^{(0)}) = -\frac{h}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + O(h^2).$$

3. Разностный оператор Лапласа на неравномерной сетке. Рассмотрим еще один пример аппроксимации уравнения $\Delta u = -f$. Пусть Ω — произвольная неравномерная сетка на плоскости Ox_1x_2:

$$\Omega = \{(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \alpha = 1, 2\}.$$

Шаг сетки по направлению x_α равен

$$h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}$$

и зависит только от i_α; средний шаг сетки по этому направлению —

$$\hbar_\alpha = \hbar_\alpha^{(i_\alpha)} = \frac{1}{2}\left(h_\alpha + h_\alpha^+\right), \quad \text{где} \quad h_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)}, \; h_\alpha^+ = h_\alpha^{(i_\alpha+1)}.$$

Производные, входящие в уравнение (1), будем аппроксимировать соотношениями типа (3) § 1 гл. II:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \sim \frac{1}{\hbar_\alpha}\left(\frac{u^{(+1\alpha)} - u}{h_\alpha^+} - \frac{u - u^{(-1\alpha)}}{h_\alpha}\right) = u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \quad \alpha = 1, \; 2,$$

где

$$u^{(\pm 1_1)} = u\left(x_1^{(i_1 \pm 1)}, \; x_2^{(i_2)}\right), \quad u^{(\pm i_2)} = u\left(x_1^{(i_1)}, \; x_2^{(i_2 \pm 1)}\right).$$

Разностное уравнение, аппроксимирующее на неравномерной сетке Ω уравнение Пуассона $\Delta u = -f$, записывается следующим образом:

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -f(x), \qquad x \in \Omega. \tag{22}$$

Погрешность аппроксимации

$$\psi = \Lambda u + f = u_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + u_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} + f(x),$$

где u — решения уравнения $\Delta u + f = 0$, можно представить в виде

$$\psi = (\Delta u + f) + \frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O\left(\hbar_1^2 + \hbar_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O\left(\hbar_1^2 + \hbar_2^2\right).$$

В самом деле, разлагая $u^{(\mp 1\alpha)}$ по степеням h_α и $\hbar_\alpha^+$ в окрестности узла $x = \left(x_1^{(i_1)}, \; x_2^{(i_2)}\right)$, будем иметь

$$u_{x_\alpha} = \frac{u^{(+1\alpha)} - u}{h_\alpha^+} = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^+}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{(h_\alpha^+)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O\left((h_\alpha^+)^3\right),$$

$$u_{\bar{x}_\alpha} = \frac{u - u^{(-1\alpha)}}{h_\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{h_\alpha}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O\left(h_\alpha^3\right),$$

и, следовательно,

$$u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\left(u_{x_\alpha} - u_{\bar{x}_\alpha}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{6h_\alpha}\left((h_\alpha^+)^2 - h_\alpha^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O\left(h_\alpha^2\right).$$

Подставляя сюда выражение

$$(h_\alpha^+)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} = (h_\alpha^+)^2\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)^{(+1_\alpha)} + O\left(h_{\alpha+}\right)\right],$$

получаем

$$u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{6}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O\left(h_\alpha^2\right).$$

4. Аппроксимация уравнения Пуассона в полярных координатах. Если для уравнения Пуассона (1) ставится задача отыскания решения в круге, в кольце, в круговом или кольцевом секторе, то уравнение (1) естественно аппроксимировать на сетке в полярных координатах. Уравнение Пуассона в полярных координатах (r, φ) имеет вид

$$\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \varphi), \qquad (23)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = x_2/x_1$, а плоскость Ox_1x_2 отображается на полуполосу $\{0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$.

Коэффициенты уравнения (23) при $r = 0$ имеют особенность, и поэтому для выделения интересующего нас решения здесь нужно оговорить дополнительные условия. Обычно интересуются ограниченными при $r = 0$ решениями, а такие решения удовлетворяют условию

$$\lim_{r \to 0} r\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \qquad (24)$$

Итак, помимо уравнения (23), нам нужно еще аппроксимировать условие (24). Условие (24) наиболее удобно учитывать путем специального выбора сетки. Именно так мы и поступим. По переменной φ введем равномерную сетку с шагом h_φ

$$\omega_\varphi = \{\varphi_m = mh_\varphi,\ \ m = 0, 1, \ldots, M-1,\ \ h_\varphi = 2\pi/M\},$$

по переменной r — сдвинутую на полшага равномерную сетку с шагом h_r

$$\omega_r = \{r_n = (n + 0{,}5)\,h_r,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ h_r > 0\}.$$

Сетка в полуполосе будет иметь вид

$$\Omega=\omega_r\times\omega_\varphi=\{(r_n,\ \varphi_m)\mid r_n\in\omega_r,\ \varphi_m\in\omega_\varphi\}.$$

Исключая точки с координатой $r=0$ из числа точек сетки, мы избавляем себя от необходимости аппроксимировать уравнение при $r=0$, но создаем проблему аппроксимации уравнения (23) при $r=h_r/2$. Если бы по r была введена несдвинутая равномерная сетка и точки с координатой $r=0$ вошли в число узловых, то для написания уравнения при $r=0$ пришлось бы воспользоваться декартовой записью уравнения (1) и использовать оператор (18), (12) с $h=h_r$ и $n=M$. Т. е. разностное уравнение при $r=0$ содержало бы $M+1$ неизвестных, что не очень удобно при реализации схемы.

Аппроксимация уравнения (23) на сетке Ω при $r\neq 0{,}5h_r$ не вызывает труда; именно, оператор L_φ аппроксимируется очевидным образом

$$L_\varphi v=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\sim\Lambda_\varphi v=\frac{1}{r^2}v_{\bar\varphi\varphi},\qquad(25)$$

а оператор L_r аппроксимируется как оператор с переменными коэффициентами (см. § 3 гл. II)

$$L_r v=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\sim\Lambda_r v=\frac{1}{r}(\rho v_{\bar r})_r,$$

где $\rho(r)=r-h_r/2$. Тем самым аппроксимацию уравнения (23) при $r\neq h_r/2$ можно взять в следующем виде:

$$\Lambda y=\frac{1}{r}(\rho y_{\bar r})_r+\frac{1}{r^2}y_{\bar\varphi\varphi}=-f(r,\ \varphi),\quad r\neq\frac{h_r}{2},\qquad(26)$$

$\Lambda=\Lambda_r+\Lambda_\varphi$.

Для вывода разностных уравнений при $r=h_r/2$ воспользуемся методом баланса. Умножим уравнение (23) на r и проинтегрируем его по r от ε до h_r и по φ от $\varphi_m-h_\varphi/2$ до $\varphi_m+h_\varphi/2$. Учитывая условие (24), перейдем в полученном соотношении к пределу при $\varepsilon\to 0$. В результате получим

$$h_r\int\limits_{\varphi_m-h_\varphi/2}^{\varphi_m+h_\varphi/2}\frac{\partial u}{\partial r}(h_r,\ \varphi)\,d\varphi+\int\limits_0^{h_r}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(r,\ \varphi_m+\frac{h_\varphi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(r,\ \varphi_m-\frac{h_\varphi}{2}\right)\right]dr+\int\limits_0^{h_r}r\,dr\int\limits_{\varphi_m-h_\varphi/2}^{\varphi_m+h_\varphi/2}f(r,\ \varphi)\,d\varphi=0.\qquad(27)$$

Аппроксимируя теперь каждый из интегралов в (27) квадратурной формулой центральных прямоугольников, найдем, что

$$h_r h_\varphi \frac{\partial u}{\partial r}(h_r, \varphi_m) + 2\left[\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m + \frac{h_\varphi}{2}\right) - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m - \frac{h_\varphi}{2}\right)\right] + \frac{h_r^2 h_\varphi}{2} f\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m\right) \approx 0.$$

Для получения разностного уравнения в узле $(0{,}5h_r, \varphi_m)$ заменим входящее в это соотношение производные соответствующими разностными отношениями

$$h_r h_\varphi y_r(r_0, \varphi_m) + 2h_\varphi y_{\bar{\varphi}\varphi}(r_0, \varphi_m) + \frac{h_r^2 h_\varphi}{2} f(r_0, \varphi_m) = 0,$$

где $y_r(r_0, \varphi_m) = \frac{1}{h_r}[y(r_0 + h_r, \varphi_m) - y(r_0, \varphi_m)]$.

Отсюда, после деления на $0{,}5h_r^2 h_\varphi$, следует, что

$$\frac{2}{h_r} y_r(r_0, \varphi_m) + \frac{4}{h_r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi}(r_0, \varphi_m) = -f(r_0, \varphi_m) \quad \text{при } r = h_r/2.$$

Подставим сюда $h_r = 2r_0$ и учтем, что $\rho^{(+1_r)}(r_0) = r_1 - h_r/2 = h_r$. В результате получим уравнение

$$\frac{1}{rh_r}\rho^{(+1_r)} y_r + \frac{1}{r^2} y_{\varphi\varphi} = -f(r, \varphi) \quad \text{при } r = r_0 = h_r/2. \tag{28}$$

Аппроксимация уравнения (23) во всех узлах сетки Ω построена. Следует отметить, что на самом деле уравнение (28) следует из (26), если в последнем положить $r = h_r/2$.

Действительно, так как

$$\Lambda_r y = \frac{1}{r}(\rho y_{\bar{r}})_r = \frac{1}{rh_r}(\rho^{(+1_r)} y_r - \rho y_{\bar{r}})\big|_{r = h_r/2},$$

а $\rho(h_r/2) = 0$, то во всех узлах (r_n, φ_m) сетки Ω при $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant m \leqslant M - 1$ можно считать заданным уравнение (26). Введем следующее обозначение:

$$\tilde{\Lambda}_r v = \begin{cases} \frac{1}{r}(\rho v_{\bar{r}})_r & \text{при } r \neq h_r/2, \\ \frac{1}{rh_r}\rho^{(+1_r)} v_r & \text{при } r = h_r/2 \ (n = 0). \end{cases} \tag{29}$$

Тогда аппроксимация уравнения (23) на всей сетке Ω с учетом формул (26), (28), (29) примет вид

$$\Lambda y = \Lambda_r y + \Lambda_\varphi y = -f(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega. \qquad (30)$$

Вычислим погрешность аппроксимации разностного уравнения (30). Очевидно, что

$$\Lambda_\varphi u \equiv \frac{1}{r^2} u_{\bar{\varphi}\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_m} + \frac{h_\varphi^2}{12 r^2} \frac{\widehat{\partial^4 u}}{\partial \varphi^4},$$

где

$$\frac{\widehat{\partial^4 u}}{\partial \varphi^4} = \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} u(\tilde{\varphi}, r), \quad \tilde{\varphi} \in [\varphi_{m-1}, \varphi_{m+1}].$$

Погрешность аппроксимации оператора Λ_r вычислим более подробно. Раскладывая $u^{(\pm 1 r)}$ по степеням h_r, получим, что

$$u(r_n + h_r, \varphi_m) = u(r_{n+1}, \varphi_m) =$$
$$= \left(u + h_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^4}{24} \frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4},$$

$$u(r_n - h_r, \varphi_m) = u(r_{n-1}, \varphi_m) =$$
$$= \left(u - h_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{h_r^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^4}{24} \frac{\overline{\overline{\partial^4 u}}}{\partial r^4},$$

где

$$\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(\bar{r}_n, \varphi_m), \quad \bar{r}_n \in [r_n, r_{n+1}],$$

$$\frac{\overline{\overline{\partial^4 u}}}{\partial r^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(\bar{\bar{r}}_n, \varphi_m), \quad \bar{\bar{r}}_n \in [r_{n-1}, r_n].$$

Отсюда следует, что

$$u_r = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} h_r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{6} h_r^2 \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^3}{24} \frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4},$$

$$u_{\bar{r}} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2} h_r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{6} h_r^2 \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right) - \frac{h_r^3}{24} \frac{\overline{\overline{\partial^4 u}}}{\partial r^4}.$$

Учитывая затем, что $\rho(r_n) = r_n - 0{,}5h_r$, $\rho^{(+1 r)} = \rho(r_{n+1}) = r_n + 0{,}5h_r$, получаем

$$\Lambda_r u = \frac{1}{r}(\rho u_{\bar{r}})_r = \frac{1}{r h_r}\left(\rho^{(+1 r)} u_r - \rho u_{\bar{r}}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) +$$
$$+ \frac{h_r^2}{6r}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}(r + 0{,}5h_r) \frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4} + \frac{1}{4}(r - 0{,}5h_r) \frac{\overline{\overline{\partial^4 u}}}{\partial r^4}\right],$$

так что

$$\psi(r_n, \varphi_m) = (\Delta_{r,\varphi} u + f)_{r=r_n,\ \varphi=\varphi_m} + \\ + \frac{h_r^2}{6r}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{r+0{,}5h_r}{4}\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4} + \frac{r-0{,}5h_r}{4}\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4}\right]_{r=r_n} + \\ + \frac{h_\varphi^2}{12r^2}\frac{\widehat{\partial^4 u}}{\partial \varphi^4}. \qquad (31)$$

При $r = r_0 = 0{,}5h_r$ имеем

$$\Lambda_r u = \frac{1}{rh_r}\rho^{(+1,r)} u_r = \frac{h_r}{rh_r} u_r, \quad \text{так как } \rho^{(+1,r)} = h_r.$$

Подставляя сюда

$$u_r|_{r=0,5h_r} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0,5h_r} + \frac{h_r^3}{24}\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4} = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0,5h_r} + \frac{h_r^3}{24}\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4},$$

получаем:

$$\Lambda_r u = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{h_r^2}{6r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0,5h_r} + \frac{h_r^2}{24r}\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4}.$$

Следует заметить, что при написании разложения (31) мы нигде не использовали условие (24), так что (31) остается справедливым и в том случае, когда условие (24) не выполнено. Более того, если рассматривать уравнения (30) как данные и отвлечься от способа построения уравнений при $r = 0{,}5h_r$, то условие (24) снова не используется явно. Поэтому может сложиться впечатление, что (30) аппроксимирует уравнение (23) без предположения (24). Однако это, конечно, не так. Если отказаться от условия (24), то решение уравнения (23) при $r = 0$ будет иметь особенность в лучшем случае типа $\ln(1/r)$. Подставляя такое решение в (31), найдем, что при $r = O(h_r)$

$$\psi(r, \varphi) = O(1/h_r^2),$$

т. е. на самом деле аппроксимация отсутствует. Если же предполагать выполнение условия (24), то оно гарантирует не только ограниченность решения при $r = 0$, но и его достаточную гладкость (при надлежащей гладкости правой части $f(r, \varphi)$).

Исследуем погрешность аппроксимации (31) в предположении, что решение уравнения (1) имеет четвертые ограниченные производные по декартовым переменным x_1 и x_2. Это возможно лишь при выполнении условия ограниченности (24). Убедимся в том, что производные по r и φ являются линейными комбинациями с ограниченными коэффициентами производных по x_1 и x_2. Для этого выразим производные по r и φ через производные по x_1 и x_2. Учитывая, что $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $\frac{\partial x_1}{\partial r} = \cos\varphi$, $\frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin\varphi$, а

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi = -x_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = r\cos\varphi = x_1,$$

находим

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\sin 2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\sin^2\varphi.$$

Отсюда видно, что производные $\partial^3 u/\partial r^3$ и $\partial^4 u/\partial r^4$ линейно выражаются через производные по x_1 и x_2 того же порядка с ограниченными коэффициентами. Поэтому эти производные ограничены:

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right| \leqslant M, \quad M = \text{const} > 0. \tag{32}$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -x_2\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial u}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = x_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2x_1x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \text{и т. д.}$$

Очевидно, что $\partial^k u/\partial\varphi^k$, $k \geqslant 1$ представляет собой полином степени k по переменным x_1 и x_2, причем коэффициентами при членах степени $n \leqslant k$ стоят производные по x_1, x_2 или по x_1 и x_2 того же порядка n, а член нулевой степени отсутствует. Из сказанного следует, что

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3}\right| \leqslant rM, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}\right| \leqslant rM, \tag{33}$$

где M — некоторые положительные постоянные. Подставляя в (31) оценки (32) и (33), получим

$$\psi(r, \varphi) = O\left(\frac{h_r^2 + h_\varphi^2}{r}\right). \tag{34}$$

Таким образом, разностное уравнение (30) аппроксимирует

дифференциальное уравнение (23) лишь при выполнении условия (24).

5. Аппроксимация уравнения Пуассона в цилиндрических координатах. Если для уравнения Пуассона ставится задача отыскания решения в конечном круговом цилиндре или в трубе, то уравнение естественно аппроксимировать на сетке в цилиндрических координатах. Уравнение Пуассона, будучи записанным в цилиндрических координатах, примет вид

$$\Delta_{r\varphi z}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,\ \varphi,\ z), \quad (35)$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=x_2/x_1$, $z=x_3$, или

$$\Delta_{r\varphi}u+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,\ \varphi,\ z).$$

Уравнение Пуассона в цилиндрических координатах (35) отличается от уравнения Пуассона в полярных координатах лишь присутствием в (35) дополнительного слагаемого $\partial^2 u/\partial z^2$. По переменным r и φ снова можно использовать введенные сетки ω_r и ω_φ, а по переменной z введем равномерную сетку с шагом h_z $\omega_z=\{z_k=kh_z \mid k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ h_z>0\}$. Сетка Ω, на которой предстоит аппроксимировать уравнение (35), примет вид

$$\Omega=\omega_r\times\omega_\varphi\times\omega_z=\{(r_n,\ \varphi_m,\ z_k)\mid\varphi_m\in\omega_\varphi,\ r_n\in\omega_r,\ z_k\in\omega_z\}.$$

Запишем оператор Лапласа $\Delta_{r\varphi z}u$ в виде суммы

$$\Delta_{r\varphi z}u=L_r u+L_\varphi u+L_z u,$$

$$L_r u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad L_\varphi u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},\quad L_z u=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

На сетке Ω операторы L_r и L_φ можно аппроксимировать так же, как и в полярной системе координат (см. (29) и (25)), а оператор L_z аппроксимируем простейшим разностным оператором

$$\Lambda_z v=v_{\bar z z}\sim L_z v=\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Разностную аппроксимацию уравнения (35) тогда можно записать в виде

$$\Lambda y=\Lambda_r y+\Lambda_\varphi y+\Lambda_z y=-f(r,\ \varphi,\ z),\quad (r,\ \varphi,\ z)\in\Omega, \quad (36)$$

где Λ_r и Λ_φ определяются формулами (29) и (25).

Погрешность аппроксимации схемы (36) равна

$$\psi = \bar{\Lambda} u + f = \psi_{r,\varphi} + \Lambda_z u,$$

где $\psi_{r,\varphi} = \bar{\Lambda}_r u + \Lambda_\varphi u + f$ представляется в виде (31), а $\Lambda_z u = L_z u + O(h_z^2)$.

Полученные в предыдущем пункте оценки производных по r и φ справедливы и в данном случае. Поэтому для погрешности аппроксимации имеет место оценка

$$\psi = O\left(\frac{h_\varphi^2 + h_r^2}{r} + h_z^2\right). \tag{37}$$

6. Аппроксимация уравнения Пуассона в сферических координатах. Если для уравнения Пуассона ставится задача отыскания решения в шаре, шаровом кольце, шаровом секторе или в другой области, которая при переходе к сферическим координатам отображается на параллелепипед, то уравнение естественно аппроксимировать в сферических координатах. Уравнение Пуассона, будучи записано в сферических координах, примет вид

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -f(r, \varphi, \theta), \tag{38}$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arccos\frac{x_3}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2}{x_1},$$

а пространство $Ox_1x_2x_3$ при переходе к сферическим координатам отобразится на полубесконечный параллелепипед

$$\{0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}.$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначения

$$L_r u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad L_\varphi u = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

$$L_\theta u = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right), \quad \Delta_{r,\varphi,\theta} = L_r + L_\varphi + L_\theta$$

и переписать (38) в виде

$$L_r u + L_\varphi u + L_z u = -f(r, \varphi, \theta). \tag{38'}$$

В качестве сетки по переменной φ снова можно использовать введенную ранее сетку ω_φ. По переменной r на этот раз целесообразно использовать равномерную сетку

с шагом h_r, сдвинутую на шаг вправо:

$$\omega_r = \{r_n = (n+1)\,h_r, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ h_r > 0\}.$$

По переменной θ удобно взять равномерную сетку, сдвинутую на полшага вправо от левого конца отрезка $[0, \pi]$ и на полшага влево от правого конца этого отрезка:

$$\omega_\theta = \{\theta_i = (i+0{,}5)\,h_\theta,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ I-1,\ h_\theta = \pi/I\}.$$

В результате получим сетку в параллелепипеде

$$\Omega = \omega_r \times \omega_\varphi + \omega_\theta = \{(r_n,\ \varphi_m,\ \theta_i),\ r_n \in \omega_r,\ \varphi_m \in \omega_\varphi,\ \theta_i \in \omega_\theta\}.$$

Оператор L_φ аппроксимируется очевидным образом (в узле $(r_n, \varphi_m, \theta_i)$)

$$\Lambda_\varphi u = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\, v_{\bar\varphi\varphi} \sim L_\varphi v = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}. \tag{39}$$

Оператор L_r как оператор с переменными коэффициентами можно аппроксимировать методом баланса (см. § 3 гл. II) с использованием соотношения (6) § 3 гл. II. Учитывая это, получим, что

$$\Lambda_r v = \frac{1}{r^2}\,(\rho v_{\bar r})_r \sim L_r v = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right), \tag{40}$$

где $\rho = \rho(r) = r r^{(-1}{}_r) = r(r - h_r)$, $r \geqslant h_r$. Выражение (40) при $r = h_r$ принимает вид

$$\Lambda_r v = \frac{1}{r^2 h_r}\,\rho^{(+1}{}_r) v_r, \qquad \rho^{(+1}{}_r) = r(r + h_r) = 2h_r^2, \tag{40'}$$

так как $\rho(h_r) = 0$. Будем формально считать это выражение аппроксимацией оператора $L_r v$ при $r = h_r$.

Оператор $L_\theta v$ есть также оператор с переменными коэффициентами, и применение метода баланса при $\theta \neq \neq 0{,}5h_\theta$ и $\theta \neq \pi - 0{,}5h_\theta$ с использованием соотношения (9) из § 3 гл. II приводит к оператору Λ_θ, аппроксимирующему оператор L_θ:

$$\Lambda_\theta v = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,(\sin\bar\theta\, y_{\bar\theta})_\theta \sim L_\theta v = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial v}{\partial\theta}\right), \tag{41}$$

где $\bar\theta = \bar\theta_i = \theta_i - 0{,}5h_\theta = ih_\theta$.

Учитывая, что

$\bar\theta = 0$ при $\theta = 0{,}5h_\theta$ $(i = 0)$, $\bar\theta^{(+1)} = (\theta - 0{,}5h_\theta) + h_\theta = \pi$

при $\theta=\pi-0{,}5h_\theta$, напишем указанные выше выражения для Λ_θ при $\theta=0{,}5h_\theta$ и $\theta=\pi-0{,}5h_\theta$:

$$\Lambda_\theta v=\frac{\sin\bar\theta^{(+1)}}{h_\theta r^2\sin\theta}y_\theta \quad \text{при} \quad \theta=0{,}5h_\theta,\ (\bar\theta^{(+1)}=h_\theta),$$

$$\Lambda_\theta v=-\frac{\sin\bar\theta}{h_\theta r^2\sin\theta}y_{\bar\theta} \quad \text{при} \quad \theta=\pi-0{,}5h_\theta,\quad (\bar\theta=\pi-h_\theta).$$

Эти выражения примем в качестве разностной аппроксимации оператора L_θ при $\theta=0{,}5h_\theta$ и $\theta=\pi-0{,}5h_\theta$, т. е. будем пользоваться формулой (41) во всех узлах сетки ω_θ ($и\ \Omega$).

Таким образом, мы получили следующую разностную аппроксимацию на сетке Ω уравнения (38)

$$\Lambda y=\Lambda_r y+\Lambda_\varphi y+\Lambda_\theta y=-f(r,\varphi,\theta),\quad (r,\varphi,\theta)\in\Omega, \tag{42}$$

где операторы Λ_r, Λ_φ, Λ_z определяются формулами (40), (40'), (39) и (41).

Перейдем к вычислению погрешности аппроксимации для разностной схемы (42):

$$\psi=\Lambda u+f=\Lambda_r u+\Lambda_\varphi u+\Lambda_\theta u+f(r,\varphi,\theta), \tag{43}$$

где u — решение дифференциального уравнения (38). Проведем разложение по степеням h_r выражения $\Lambda_r u$, затем $\Lambda_\varphi u$ — по степеням h_φ и $\Lambda_\theta u$ — по степеням h_θ.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} u_r&=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n}+\frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}},\\ u_{\bar r}&=\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n}-\frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}, \end{aligned} \tag{44}$$

где

$$\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}=\left.\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right|_{r=\bar r_n},\qquad \bar r_n\in[r_n,\ r_{n+1}],$$

$$\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}=\left.\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right|_{r=\bar{\bar r}_n},\qquad \bar{\bar r}_n\in[r_{n-1},\ r_n],$$

а $\rho=r(r-h_r)$, $\rho^{(+1_r)}=(r+h_r)r$, получаем

$$\Lambda_r u=\frac{1}{r^2}(\rho u_{\bar r})_r=\frac{1}{h_r r^2}\left(\rho^{(+1_r)}u_r-\rho u_{\bar r}\right)=$$

$$=L_r u+\frac{h_r^2}{3r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}+\frac{h_r^2}{24}\left\{\left(1+\frac{h_r}{r}\right)\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}+\left(1-\frac{h_r}{r}\right)\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\right\}. \tag{45}$$

Для $\Lambda_\varphi u$ очевидно следующее представление:

$$\Lambda_\varphi u = L_\varphi u + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{h_\varphi^2}{12}\frac{\widetilde{\partial^4 u}}{\partial\varphi^4}, \tag{46}$$

где $\dfrac{\widetilde{\partial^4 u}}{\partial\varphi^4} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}\Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}_m}$, $\tilde{\varphi}_m \in [\varphi_{m-1}, \varphi_{m+1}]$.

Рассмотрим теперь выражение

$$\Lambda_\theta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\bar{\theta} u_{\bar{\theta}})_\theta = \frac{1}{h_\theta r^2 \sin\theta}[\sin\bar{\theta}^{(+1)} u_\theta - \sin\bar{\theta} u_{\bar{\theta}}].$$

Подставляя сюда выражения для u_θ и $u_{\bar{\theta}}$, найденные по формулам типа (44), после очевидных преобразований находим

$$\Lambda_\theta u = L_\theta u + \left\{-\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\left(1 - \frac{2\sin(h_\theta/2)}{h_\theta}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta} - \right.$$
$$- \frac{2\sin^2(h_\theta/4)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{h_\theta^2}{3}\frac{\sin(h_\theta/2)}{h_\theta}\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} +$$
$$\left. + \frac{h_\theta^3}{24 r^2\sin\theta}\left[\sin(\theta + 0{,}5h_\theta)\frac{\widetilde{\partial^4 u}}{\partial\theta^4} + \sin(\theta - 0{,}5h_\theta)\frac{\widetilde{\partial^4 u}}{\partial\theta^4}\right]\right\}. \tag{47}$$

После подстановки (45) — (47) в (43) получим разложение погрешности аппроксимации ψ по степеням h_r, h_φ и h_θ. Для оценки порядка ψ относительно h_r, h_φ и h_θ необходимо оценить входящие в выражение для ψ производные по r, φ и θ.

Предположим, что решение уравнения (1) (или (38)) имеет четвертые ограниченные производные по декартовым переменным x_1, x_2, x_3. Учитывая, что $x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = r\cos\theta$, найдем производные

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial x_3}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial r^k} = 0,$$
$$k > 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Производные $\partial^k u/\partial r^k$, $k = 1, 2, 3, 4$, представляются в виде линейных комбинаций производных от u по x_1, x_2 и x_3 порядка $j \leqslant k$ с коэффициентами, зависящими от $\partial x_i/\partial r$, $i = 1, 2, 3$, и потому ограничены:

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial r^k}\right| \leqslant M, \qquad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right| \leqslant M',$$

где M и M' — положительные постоянные.

Далее имеем

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi = -x_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = r\sin\theta\cos\varphi = x_1,$$
$$\frac{\partial x_3}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} = -x_1, \quad \frac{\partial^3 x_1}{\partial \varphi^3} = x_2, \quad \frac{\partial^4 x_1}{\partial \varphi^4} = x_1,$$
$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} = -x_2, \quad \frac{\partial^3 x_2}{\partial \varphi^3} = -x_1, \quad \frac{\partial^4 x_2}{\partial \varphi^4} = x_2.$$

Вычисляя последовательно производные

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial \varphi},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \sum_{l,\,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l\,\partial x_j}\frac{\partial x_l}{\partial \varphi}\frac{\partial x_j}{\partial \varphi} + \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial^2 x_l}{\partial \varphi^2} \text{ и т. д.},$$

видим, что

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} = \sum_{j=1}^{4} P_j(x_1, x_2; u),$$

где $P_j(x_1, x_2; u)$ — однородный многочлен переменных x_1, x_2 степени $j \geqslant 1$ с коэффициентами, пропорциональными j-м производным функции u по переменным x_1 и x_2. Поэтому производная $\partial^4 u/\partial\varphi^4$ пропорциональна $r\sin\theta$. В силу ограниченности производных $\partial^k u/\partial x_l^s\,\partial x_{l'}^{k-s}$, $s \leqslant k$, $l, l' = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3, 4$, будем иметь

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial \varphi^4}\right| \leqslant Mr\sin\theta, \qquad M = \text{const} > 0.$$

Перейдем к оценке производных $\partial^k u/\partial\theta^k$, $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial \theta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \sum_{l,\,j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l\,\partial x_j}\frac{\partial x_l}{\partial \theta}\frac{\partial x_j}{\partial \theta} + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial^2 x_l}{\partial \theta^2} \text{ и т. д.}$$

Так как

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta^2} = -r\sin\theta\cos\varphi = -x_1,$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta^2} = -x_2, \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial \theta^2} = -x_3, \quad \frac{\partial^3 x_1}{\partial \theta^3} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta}$$

и т. д., то имеет место представление

$$\frac{\partial^k u}{\partial \theta^k} = \sum_{j=1}^{k} P_j(r;\ \varphi,\ \theta;\ u), \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

где $P_j(r;\ \varphi,\ \theta;\ u)$ — однородный многочлен степени j от переменной r с ограниченными коэффициентами, зависящими от φ, θ и j-х производных функции u по переменным x_1, x_2, x_3. Таким образом, производные $\partial^k u/\partial r^k$ при любом $k \geqslant 1$ пропорциональны r и

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial \theta^k}\right| \leqslant Mr, \quad M = \text{const} > 0, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

В результате мы приходим к следующей оценке погрешности аппроксимации (43):

$$\psi = O\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\theta^2 + h_\varphi^2}{r\sin\theta}\right) \quad \text{или} \quad |\psi| \leqslant M\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\theta^2 + h_\varphi^2}{r\sin\theta}\right),$$

где $M = \text{const} > 0$.

§ 2. Постановка сеточных краевых задач для уравнения Пуассона в случае граничных условий Дирихле

В § 1 мы рассматривали простейшие разностные аппроксимации уравнения Пуассона в декартовых, полярных, цилиндрических и сферических системах координат.

Перейдем теперь к формулировке соответствующих разностных задач Дирихле. Для этого надо поставить краевые условия в граничных узлах сетки, а в случае криволинейной границы написать разностные уравнения в приграничных узлах сетки. Постановке разностных краевых задач и посвящен данный параграф.

1. Разностная задача Дирихле для прямоугольника. Пусть на плоскости Ox_1x_2 задана ограниченная область G

с границей Γ. В $\bar{G}=G\cup\Gamma$ рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона: требуется найти непрерывное в $\bar{G}$ решение $u(x)$ уравнения

$$\Delta u=-f(x),\quad x=(x_1,\ x_2)\in G, \tag{1}$$

которое удовлетворяет граничным условиям

$$u=g(x),\quad x=(x_1,\ x_2)\in\Gamma, \tag{2}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные функции.

Прежде чем аппроксимировать задачу (1), (2) разностной задачей, в области G нужно ввести сетку. При построении сетки в $\bar{G}$ следует учитывать специфику ее границы. Нужно стараться вводить такую сетку, на которой наиболее удобно аппроксимировать задачу (1), (2). Так, например, если область G является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям

$$G=\{x=(x_1,\ x_2)\mid a_\alpha<x_\alpha<b_\alpha,\ \alpha=1,\ 2\},$$

то величины шагов h_1 и h_2 прямоугольной равномерной сетки следует согласовывать с длинами сторон прямоугольника (b_1-a_1) и (b_2-a_2). Именно, целесообразно считать, что

$$h_1=(b_1-a_1)/N_1,\qquad h_2=(b_2-a_2)/N_2, \tag{3}$$

где $N_1>0$ и $N_2>0$ — целые числа. Тогда в качестве сетки в $\bar{G}$ можно взять следующее множество точек:

$$\bar{\omega}=\left\{x_i=\left(x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2)}\right)\Big|\, x_\alpha^{(i_\alpha)}=\right.$$
$$\left.=a_\alpha+i_\alpha h_\alpha,\ 0\leqslant i_\alpha\leqslant N_\alpha,\ \alpha=1,\ 2\right\}. \tag{4}$$

Множество

$$\omega=\{x_i\mid 0<i_1<N_1,\quad 0<i_2<N_2\}$$

есть множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}$, а

$$\gamma=\bar{\omega}\setminus\omega=\left\{x_i=\left(x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2)}\right)\mid i_1=0,\ N_1,\right.$$
$$\left.0<i_2<N_2\ \text{ и }\ 0<i_1<N_1,\ i_2=0,\ N_2\right\}$$

— множество граничных узлов этой сетки.

Построенная сетка $\bar{\omega}$ обладает той особенностью, что она является равномерной по каждому из направлений x_1 и x_2 и ее граница γ расположена на границе Γ прямоугольника G. Если бы мы отказались от специального

выбора шагов (3), то нам пришлось бы мириться либо с неравномерностью сетки в G, либо с тем, что граница γ сетки или ее часть не принадлежит границе Γ прямоугольника G. Первое обстоятельство менее удобно при аппроксимации уравнения (1), а второе — при аппроксимации граничного условия (2).

Итак, сетка в $\bar{G}$ построена. На этой сетке задачу (1), (2) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\Lambda y = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \omega, \tag{5}$$

$$y = g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \gamma, \tag{6}$$

где Λ — пятиточечный сеточный оператор:

$$\Lambda y = y_{x_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = \\ = \frac{1}{h_1^2}\left(y^{(+1_1)} - 2y + y^{(-1_1)}\right) + \frac{1}{h_2^2}\left(y^{(+1_2)} - 2y + y^{(-1_2)}\right). \tag{7}$$

На сетке $\bar{\omega}$ возможна и другая аппроксимация задачи (1), (2). Именно,

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \tag{8}$$

$$y = g(x), \quad x \in \gamma, \tag{9}$$

где Λ' — девятиточечный оператор, определяемый формулой (6) из § 1, т. е.

$$\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y \tag{10}$$

или

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},$$

где $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, а $\varphi(x)$ задается формулой (7) или (7′) из § 1.

Если стороны $(b_1 - a_1)$ и $(b_2 - a_2)$ прямоугольника соизмеримы, то в $\bar{G}$ можно ввести квадратную сетку с шагом h, так что ее граница γ снова будет принадлежать Γ. На такой сетке задачу (1), (2) можно аппроксимировать задачей

$$\left.\begin{aligned} \Lambda' y = \Lambda y + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x), \quad & x \in \omega, \\ y = g(x), \quad & x \in \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где Λ' определяется формулой (10) при $h_1 = h_2 = h$, а $\varphi(x)$ — выражением (8) из § 1.

2. Области с криволинейной границей. Однако выбор прямоугольной сетки нецелесообразен, если область G есть круг. В этом случае естественнее перейти к полярным координатам и ввести в G полярную сетку. Пусть G есть круг радиуса R с центром в начале координат

$$G=\{x=(x_1,\ x_2)\mid x_1^2+x_2^2<R^2\}.$$

Уравнение (1) в полярных координатах имеет вид

$$\Delta_{r,\varphi}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=L_r u+L_\varphi u=-f(r,\ \varphi). \quad (12)$$

В предыдущем параграфе обсуждался целесообразный выбор сетки для аппроксимации уравнения (12). Оказалось удобным точку $r=0$ не включать в число узлов, а ближайшие к этой точке узлы сетки расположить на расстоянии $0{,}5h_r$, где h_r — шаг сетки по r. Чтобы облегчить аппроксимацию граничных условий при $r=R$, сетку в $\bar{G}$ возьмем в следующем виде:

$$\bar{\omega}=\{(r_n,\ \varphi_m)\mid r_n=(n+0{,}5)\,h_r,\ \ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\ N,$$
$$h_r=R/(N+0{,}5),\ \ \varphi_m=mh_\varphi,$$
$$m=0,\ 1,\ \ldots,\ M-1,\ \ h_\varphi=2\pi/M\}.$$

Множество внутренних узлов сетки ω есть

$$\omega=\{(r_n,\ \varphi_m)\in G,\ \ n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$
$$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1\},$$

а граничные узлы принадлежат множеству $\gamma=\bar{\omega}\setminus\omega$ и имеют координаты $(R,\ \varphi_m)$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1$. На этой сетке задача (1), (2) аппроксимируется следующей задачей:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\Lambda}y=\bar{\Lambda}_r y+\Lambda_\varphi y=-f(r,\ \varphi),\quad (r,\ \varphi)\in\omega,\\ y(r,\ \varphi)=y(r,\ \varphi+2\pi),\ (r,\ \varphi)\in\omega;\\ y=g(\varphi),\ \ (r,\ \varphi)\in\gamma,\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

где оператор $\bar{\Lambda}$ определяется формулами (29), (30) из § 1.

Рассмотрим еще два примера областей, в которых сетку следует выбирать специальным образом.

Пусть G — прямоугольный треугольник с катетами, лежащими на координатных осях:

$$G=\left\{x=(x_1,\ x_2)\mid 0<x_1<a_1,\ \ 0<x_2<-\frac{a_2}{a_1}x_1+a_2\right\},$$

где $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ — длины катетов; обозначим Γ — границу треугольника.

Каждый катет разделим на одно и то же число частей N, положив

$$h_1 = \frac{a_1}{N}, \quad h_2 = \frac{a_2}{N},$$

где N — целое число. Сетку ω в области G образуем из точек пересечения прямых $x_1 = i_1 h_1$, $x_2 = i_2 h_2$, где i_1, $i_2 = 0, 1, 2 \ldots$ При таком выборе h_1 и h_2 прямые $x_1 = i_1 h_1$ и $x_2 = i_2 h_2$ пересекаются с гипотенузой в одних и тех же точках, являющихся граничными узлами сетки. Полученная сетка называется *согласованной*. Она равномерна по каждому из направлений. Обозначим через $\bar{\omega}$ — множество всех узлов сетки в области $\bar{G} = G \cup \Gamma$

$$\bar{\omega} = \{x_i = (i_1 h_1,\ i_2 h_2) \in \bar{G} \mid 0 \leqslant i_1 \leqslant N,$$
$$i_2 \leqslant N - i_1,\ i_1,\ i_2 = 0,\ 1,\ \ldots,\ N\};$$

пусть $\omega = \{x_i = (i_1 h_1,\ i_2 h_2) \in G \mid 0 < i_1 < N,\ i_2 < N - i_1\}$ — множество внутренних узлов, а

$$\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega = \{x_i = (i_1 h_1,\ i_2 h_2) \in \Gamma,\ i_1 = 0,\ N,\ i_2 = N - i_1\}$$

— множество граничных узлов.

Во всех внутренних узлах этой сетки можно писать пятиточечную схему $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x)$, где Λ определяется формулой (7), а на границе задавать функцию $g(x)$, полагая $y = g(x)$ при $x \in \gamma$. В результате мы придем к задаче вида (5), (6).

Пусть область G есть криволинейный треугольник

$$G = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha > 0,\ \alpha = 1, 2,\ x_2 < F(x_1)\},$$

где $F(x_1)$ — непрерывная, монотонно убывающая функция и

$$-\infty < F'(x_1) < 0.$$

Ясно, что прямолинейные стороны этого треугольника имеют длины $a_1 = F^{-1}(0)$, где $F^{-1}(x_2)$ — функция, обратная к $F(x_1)$, и $a_2 = F(0)$ соответственно. Если в G пытаться ввести равномерную сетку по каждой из осей, полагая, например, $h_1 = F^{-1}(0)/N_1 = a_1/N_1$, $h_2 = F(0)/N_2 = a_2/N_2$, то может случиться так, что прямые $x_1 = i_1 h_1$ пересекут кривую $x_2 = F(x_1)$ в одних точках, а прямые $x_2 = i_2 h_2$ —

в совсем других точках, т. е. возможна ситуация, изображенная на рис. 8.

Если сетку в G считать равномерной, то ее граница γ не будет полностью принадлежать границе Г исходной области, а это затрудняет аппроксимацию граничных условий. Если же в качестве границы γ взять точки пересечения указанных выше прямых с границей Г, то сетка ω в окрестности криволинейного участка границы Г не будет равномерной.

Для областей указанного вида иногда бывает удобным вводить так называемую согласованную неравномерную сетку. Задаваясь, например, равномерной сеткой с шагом

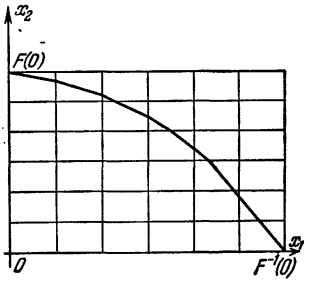


Рис. 8.

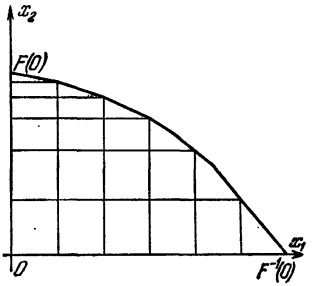


Рис. 9.

$h_1 = F^{-1}(0)/N$ вдоль оси x_1, сетку вдоль оси x_2 выберем. полагая

$$x_2^{(i_2)} = F(x_1^{(N-i_1)}),\ x_1^{(N-i_1)} = (N-i_1)\,h_1,\ i_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Построенная сетка изображена на рис. 9. Все граничные узлы сетки лежат на границе криволинейного треугольника. Сетка является согласованной. Ее шаги по x_2 задаются соотношением

$$h_2^{(i_2)} = x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = F\left(x_1^{(N-i_2)}\right) - F\left(x_1^{(N-i_2+1)}\right) =$$
$$= F'\left(x_1^{(N-i_2)} + \theta h_1\right) h_1 = O(h_1),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1,\ \text{т. е. } h_2 = O(h_1).$$

На полученной сетке задачу (1), (2) можно аппроксимировать схемой (5), (6), где Λ — обычный пятиточечный оператор, определяемый формулой (22) § 1.

3. Область произвольной формы. Пусть теперь граница Г области G есть кусочно-гладкая кривая достаточно общего вида. В этом случае трудно высказать какие-либо

общие рекомендации по выбору специальной сетки. Для получения сетки $\bar{\omega}(\bar{G})$ в области $\bar{G}=G\cup\Gamma$ зададим на плоскости Ox_1x_2 прямоугольную равномерную сетку Ω, образованную точками пересечения двух семейств параллельных прямых $x_1=i_1h_1$; $x_2=i_2h_2$, i_1, $i_2=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; точки $x_i=(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})=(i_1h_1, i_2h_2)$ суть узлы сетки Ω. Имея в виду аппроксимацию уравнения (1) на пятиточечном шаблоне, узлы $x=(x_1, x_2)$ и $x'=(x_1', x_2')$ будем называть соседними *), если

$$\left|\frac{x_1-x_1'}{h_1}\right|+\left|\frac{x_2-x_2'}{h_2}\right|=1 \text{ или } |i_1-i_1'|+|i_2-i_2'|=1,$$

где $x_\alpha=i_\alpha h_\alpha$, $x_\alpha'=i_\alpha' h_\alpha$, $\alpha=1, 2$, так что $|i_\alpha-i_\alpha'|=1$ либо 0. Обозначим $\omega=\{x=(i_1h_1, i_2h_2)\in G\}$ множество всех тех узлов $x=(i_1h_1, i_2h_2)$, которые лежат внутри области G; такие узлы назовем внутренними узлами сетки $\bar{\omega}(\bar{G})$. Назовем внутренний узел $x_i\in\omega$ регулярным узлом, если все его четыре соседних узла, образующих вместе с x_i пятиточечный шаблон «крест», принадлежат $\bar{G}$. Множество регулярных внутренних узлов обозначим через $\mathring{\omega}$. Если хотя бы один из этих четырех соседних с x_i узлов не принадлежит $\bar{G}$ (т. е. либо G, либо Γ), то такой узел x_i назовем нерегулярным внутренним узлом сетки $\bar{\omega}$. Множество всех нерегулярных внутренних узлов обозначим через $\overset{*}{\omega}$, так что $\mathring{\omega}\cup\overset{*}{\omega}=\omega$. Точки пересечения прямых $x_1=i_1h_1$, $x_2=i_2h_2$, i_1, $i_2=0, \pm 1, \pm 2\ldots$ с границей Γ области G назовем граничными узлами и множество всех граничных узлов обозначим γ. Итак, в $\bar{G}$ построена сетка $\bar{\omega}=\omega\cup\gamma$, состоящая из внутренних узлов ω и граничных узлов γ (рис. 10).

Поставим разностную задачу, аппроксимирующую задачу (1), (2), на сетке $\bar{\omega}$. Для этого необходимо аппроксимировать на $\bar{\omega}$ уравнение (1) и граничное условие (2). Уравнение (1) на множестве внутренних регулярных узлов $\mathring{\omega}$ будем аппроксимировать по пятиточечному шаблону

*) Понятие соседнего узла существенным образом зависит от вида уравнения, которое будем аппроксимировать, точнее, от вида шаблона, на котором аппроксимируется уравнение. Приводимое здесь определение соседних узлов связано с аппроксимацией уравнения (1) на пятиточечном шаблоне «крест», состоящем из узлов (x_1, x_2), (x_1-h_1, x_2), (x_1+h_1, x_2), $(x_1x_2-h_2)$, (x_1, x_2+h_2),

«крест» уравнением (5). В граничных узлах γ зададим значение искомой функции

$$y = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \gamma.$$

Осталось написать аппроксимацию в нерегулярных узлах $\overset{*}{\omega}$.

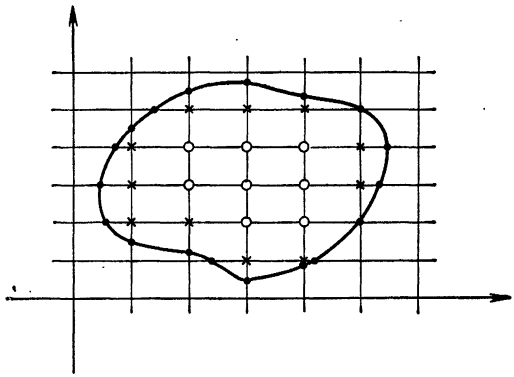


Рис. 10

Здесь возможны различные варианты:

1. Простой снос или интерполяция нулевого порядка. В сеточной краевой задаче узлы $\overset{*}{\omega}$ рассматриваются как граничные и условие на $\overset{*}{\omega}$ задается соотношением

$$y(x) = g(\bar{x}), \qquad x \in \overset{*}{\omega}, \tag{14}$$

где $\bar{x} \in \gamma$ — ближайший к x узел границы γ. Соотношение (14) можно трактовать как интерполяцию нулевого порядка. Легко видеть, что погрешность, с которой задается искомое решение в узлах $\overset{*}{\omega}$ есть величина $O(|h|)$.

2. Интерполяция первого порядка. Множество узлов $\overset{*}{\omega}$ снова рассматривается как граничное, но краевое условие для сеточной задачи задается интерполяцией первого порядка вдоль одной из осей (x_1 или x_2). Например, для случая, изображенного на рис. 11, значение искомого решения в узле 0 определяется путем линейной интерполяции вдоль оси x_1 по узлам 3 и 1, т. е.

$$y_0 = \frac{h_1^- y_1 + h_1 y_3}{h_1^- + h_1} \tag{15}$$

(можно проверить, что погрешность аппроксимации соотношения (15) есть $O(|h|^2)$).

Замечание. При некоторых рассмотрениях узлы $\overset{*}{\omega}$ целесообразно рассматривать как внутренние. В этом случае соотношение (15), переписанное в виде

$$\Lambda_1 y_0 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) = 0, \qquad (16)$$

следует рассматривать как аппроксимацию уравнения (1). Очевидно, что погрешность аппроксимации уравнения (1) соотношением (16) есть $O(1)$. При такой трактовке узлов $\overset{*}{\omega}$ вместо (16) естественнее писать соотношение

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) + \frac{y_2 - 2y_0 + y_4}{h_2^2} = -f_0, \qquad (17)$$

погрешность аппроксимации которого также есть $O(1)$ (ср. (20)). В настоящее время простой снос и интерполяция первого порядка практически не используются.

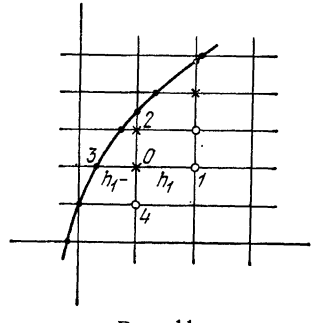


Рис. 11.

3. Аппроксимация уравнения на неравномерной сетке. Узлы $\overset{*}{\omega}$ рассматриваются как внутренние, а уравнение (1) аппроксимируется по пятиточечному шаблону «крест» на неравномерной сетке. Один из возможных типов нерегулярных шаблонов изображен на рис. 11. Узел *3* является граничным, узлы *1*, *2*, *4* являются внутренними. Тогда

$$\Lambda^* y_0 = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) + \frac{1}{h_2^2}(y_2 - 2y_0 + y_4) = -f_0, \qquad (18)$$

$$\hbar_1 = 0{,}5\,(h_1 + h_1^-).$$

В общем случае может оказаться, что граничными являются узлы $x^{(-1_1)}$ (или $x^{(+1_1)}$), $x^{(+1_2)}$ (или $x^{(-1_2)}$). Тогда уравнение Пуассона аппроксимируется на пятиточечном нерегулярном шаблоне «крест» согласно

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y \quad \text{при} \quad x \in \overset{*}{\omega},$$

где

$$\Lambda_\alpha^* y = y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1\alpha)}-y}{h_\alpha} - \dfrac{y-y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & \text{если } x^{(-1\alpha)} \in \gamma, \\ \dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1\alpha)}-y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y-y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha}\right), & \text{если } x^{(+1\alpha)} \in \gamma, \end{cases} \tag{19}$$

$\hbar_\alpha = 0{,}5\,(h_\alpha + h_\alpha^*)$, h_α^* — расстояние от x до граничного узла $x^{(-1\alpha)} \in \gamma$ или $x^{(+1\alpha)} \in \gamma$. Погрешность аппроксимации в нерегулярном узле $\psi^* = \Lambda^* u - Lu$, очевидно, имеет первый порядок относительно $|h|$, так как

$$\Lambda_\alpha^* u - L_\alpha u = O(\hbar_\alpha) = O(h_\alpha).$$

4. Второй способ аппроксимации уравнения в нерегулярном узле на неравномерной сетке (консервативная схема). Изучение разностного оператора, совпадающего с $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$ в регулярных узлах $x \in \mathring{\omega}$ и с $\Lambda^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}$ в нерегулярных узлах $x \in \overset{*}{\omega}$, как оператора в пространстве сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}$ и равных нулю на γ, показывает, что в некоторых случаях этот оператор теряет ряд важных свойств, присущих дифференциальному оператору $Lu = \Delta u$: самосопряженность и знакоопределенность. Этот факт связан со способом аппроксимации оператора Лапласа в нерегулярных узлах. Меняя эту аппроксимацию, получим самосопряженный и знакоопределенный оператор разностной задачи Дирихле на сетке $\bar{\omega}$. Достаточно положить

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y, \quad \Lambda^* y = -f(x) \text{ при } x \in \overset{*}{\omega},$$

где

$$\Lambda_\alpha^* y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1\alpha)}-y}{h_\alpha} - \dfrac{y-y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & x^{(-1\alpha)} \in \gamma, \\ \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1\alpha)}-y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y-y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha}\right), & x^{(+1\alpha)} \in \gamma. \end{cases} \tag{20}$$

Формальное различие между оператором в (19) и (20)

состоит в замене множителя $1/\hbar_\alpha$ в формуле (19) множителем $1/h_\alpha$ в формуле (20). Пространство H сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль на γ, снабжено скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y(x) v(x) h_1 h_2.$$

Свойство самосопряженности разностного оператора, о котором мы говорили выше, означает, что матрица системы линейных алгебраических уравнений (разностных уравнений) относительно искомого вектора Y (сеточной функции $y(x)$, $x \in \omega$) является симметричной. Это позволяет использовать для нахождения $y = y(x)$ быстросходящиеся итерационные методы, развитые для уравнений $Ay = f$ с симметричной матрицей A. Поэтому последний способ (20) аппроксимации уравнения $\Delta u = -f$ в нерегулярных внутренних узлах $x \in \overset{*}{\omega}$ заслуживает предпочтения.

Итак, разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона ставится следующим образом:

$$\left.\begin{array}{ll} \Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{x_2 \bar{x}_2} = -f(x) & \text{в регулярных узлах } x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ \Lambda^* y = -f(x) & \text{в нерегулярных узлах } x \in \overset{*}{\omega}, \\ y = g(x) & \text{в граничных узлах } x \in \gamma, \end{array}\right\} \quad (21)$$

где Λ^* определяется выражением (20).

Если Λ^* определяется формулой (19), то соответствующую задачу обозначим как задачу (21′).

Если y — решение задачи (21), u — решение задачи (1), (2), то для погрешности $z(x) = y(x) - u(x)$ выполняются условия

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda z = -\psi(x) \text{ при } x \in \overset{\circ}{\omega}, \quad \Lambda^* z = -\psi^*(x) \text{ при } x \in \overset{*}{\omega}, \\ z(x) = 0 \quad \text{при } x \in \gamma, \end{array}\right\} \quad (22)$$

где $\psi(x) = \Lambda u + f$, $\psi^* = \Lambda^* u + f$.

Если функция $u=u(x)$ имеет в $\bar{G}$ ограниченные производные до четвертого порядка, т. е. $u \in C^4(\bar{G})$, то погрешность аппроксимации самосопряженной консервативной схемы (21) есть $\psi(x)=O(|h|^2)$, $\psi^*(x)=O(1)$. Несмотря на понижение порядка аппроксимации (по сравнению со схемой (19)) в нерегулярных внутренних узлах, консервативная схема (21) имеет, как будет показано в § 4 этой главы, второй порядок точности в равномерной метрике. Исследование вопроса о сходимости и порядке точности разностной схемы (21) сводится к оценке решения z задачи (22) через правые части ψ и ψ^*. Оценки для решения задачи (22) будут получены в § 4. Они основаны на принципе максимума для сеточных уравнений.

§ 3. Принцип максимума

В этом параграфе изучается некоторый класс сеточных уравнений, для которых имеет место так называемый принцип максимума. В рассматриваемый класс вкладывается большинство основных сеточных аппроксимаций краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка без смешанных производных. Принцип максимума позволяет установить разрешимость сеточной задачи, а в ряде случаев и получить априорную оценку ее решения.

1. Сеточные уравнения общего вида. Пусть Ω — некоторое конечное множество точек (узлов) $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ p-мерного евклидова пространства (сетка). Пусть в каждой точке $x \in \Omega$ задан шаблон $Ш(x) \subset \Omega$, т. е. некоторое подмножество точек x из Ω. Обозначим через $Ш' \equiv Ш(x) \setminus \{x\}$ окрестность точки x, т. е. множество всех узлов шаблона $Ш(x)$ за исключением самого узла x. Рассмотрим уравнение

$$Sy(x)=F(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

где $y(x)$ — искомая, $F(x)$ — заданная сеточная функция (правая часть уравнения), а S — линейный оператор, определяемый формулой

$$Sv(x) \equiv A(x)v(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x, \xi)v(\xi), \tag{2}$$

коэффициенты $A(x)$ и $B(x, \xi)$ которого — заданные сеточные функции $x \in \Omega$ и $\xi \in \Omega$.

Будем предполагать, что коэффициенты A и B удовлетворяют условиям

$$A(x)>0,\ B(x,\ \xi)>0,\ \forall x\in\Omega \text{ и } \forall\xi\in Ш'(x),$$
$$D(x)\equiv A(x)-\sum_{\xi\in Ш'(x)}B(x,\ \xi)\geqslant 0. \tag{3}$$

Пусть x — произвольный узел сетки Ω. Возможны два случая: а) либо окрестность $Ш'(x)$ этого узла есть пустое множество, б) либо $Ш'(x)$ содержит по крайней мере один узел $\xi\in\Omega$.

Если окрестность $Ш'(\bar{x})$ узла $\bar{x}$ есть пустое множество, то уравнение (1) при $x=\bar{x}$ имеет вид

$$A(\bar{x})\,y(\bar{x})=F(\bar{x}) \quad \text{или} \quad y(\bar{x})=g(\bar{x}) \qquad (g=F/A).$$

Такую точку $\bar{x}$ будем называть граничным узлом, а остальные узлы, окрестность которых состоит по крайней мере из одной точки — внутренними узлами*). Обозначим γ — множество всех граничных узлов, а ω — множество всех внутренних узлов сетки Ω, так что $\omega\cup\gamma=\Omega$.

Задача (1) при наличии граничных точек формулируется следующим образом: найти решение уравнения

$$Sy(x)=F(x) \quad \text{при} \quad x\in\omega, \tag{4}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$y(x)=g(x) \quad \text{при} \quad x\in\gamma, \tag{5}$$

где $F(x)$ и $g(x)$ — заданные функции. Это — первая краевая задача на сетке Ω.

В качестве примера рассмотрим задачу (5), (6) из § 2 в прямоугольнике. Нетрудно переписать разностное уравнение $\Lambda y=y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}=-f(x)$ так:

$$2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)y(x)-\frac{1}{h_1^2}\left(y^{(-1_1)}+y^{(+1_1)}\right)-\frac{1}{h_2^2}\left(y^{(-1_2)}+y^{(+1_2)}\right)=$$
$$=f(x),\quad x\in\omega,\ y(x)=g(x),\quad x\in\gamma.$$

Сравнение с (4) показывает, что здесь $A(x)=2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)>0$, $B(x,\ \xi)=1/h_1^2$ или $1/h_2^2$, $F(x)=f(x)$, $D(x)\equiv 0$.

Если говорить о второй и третьей краевых задачах для разностных эллиптических уравнений (в простейшем

*) Очевидно, что введенные понятия внутреннего и граничного узлов связаны с видом оператора S, т. е. зависят от шаблонов $Ш(x)$, $x\in\Omega$.

случае для разностного уравнения Пуассона), то граница в смысле данного выше определения отсутствует. Узлы, лежащие на границе Γ области G, выделяются лишь тем, что шаблон в этих узлах меньше, чем шаблон во внутренних узлах сетки. В случае, например, третьей краевой задачи для уравнения Пуассона имеем $D(x)>0$ в узлах $x\in\Gamma$ и $D(x)=0$ в остальных узлах.

Введем понятие связной сетки. Пусть $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ — любые два узла сетки, не являющиеся одновременно граничными; для определенности будем считать, что $\bar{x}$ не принадлежит границе γ, т. е. $\bar{x}\in\omega$. Сетка Ω называется *связной*, если для любых $\bar{x}\in\omega$, $\bar{\bar{x}}\in\Omega$, можно указать такую последовательность узлов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, что каждый последующий узел принадлежит окрестности предыдущего, точнее

$$x_1\in Ш'(\bar{x}),\quad x_2\in Ш'(x_1),\ \ldots,\ x_m\in Ш'(x_{m-1}),\quad \bar{\bar{x}}\in Ш'(x_m). \tag{6}$$

В дальнейшем всюду рассматриваются только связные сеточные области Ω и подобласти Ω'.

Замечание 1. Очевидно, что для связных сеток Ω множество внутренних узлов ω также образует связную сетку, причем имеет место соотношение

$$\Omega=\bigcup_{x\in\omega} Ш(x).$$

Для всякой связной сеточной подобласти $\Omega'\subseteq\Omega$ обозначим через

$$\overline{\Omega'}=\bigcup_{x\in\Omega'} Ш(x).$$

2. Принцип максимума.

Теорема 1 (принцип максимума). *Пусть Ω — сеточная область, а S — оператор, заданный на Ω при помощи соотношения* (2). *Пусть Ω — связная область, а $\Omega'\subseteq\Omega$ — связная подобласть Ω, на которой коэффициенты оператора S удовлетворяют условиям* (3). *Тогда, если сеточная функция $y(x)$, заданная на Ω, не является постоянной на*

$$\overline{\Omega'}=\bigcup_{x\in\Omega'} Ш(x)\subseteq\Omega \text{ и } Sy(x)\leqslant 0\ (Sy(x)\geqslant 0)$$

при $x\in\Omega'$, то $y(x)$ не может принимать положительного максимального (отрицательного минимального) значения на Ω'.

Доказательство. 1. Пусть

$$Sy(x) \leqslant 0. \tag{7}$$

Предположим, что существует узел $\bar{x} \in \Omega'$, в котором $y(x)$ принимает наибольшее положительное значение:

$$y(\bar{x}) = \max_{x \in \Omega'} y(x) > 0. \tag{8}$$

Тогда в этом узле

$$Sy(\bar{x}) \equiv A(\bar{x})\, y(\bar{x}) - \sum_{\xi \in Ш'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)\, y(\xi) =$$

$$= D(\bar{x})\, y(\bar{x}) + \sum_{\xi \in Ш'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)\,(y(\bar{x}) - y(\xi)). \tag{9}$$

Так как согласно условиям (3) $D(\bar{x}) \geqslant 0$, а на основании допущения (8) $y(\bar{x}) > 0$, то первое слагаемое правой части (9) неотрицательно. На основании того же допущения $y(\bar{x}) \geqslant y(\xi)$, а согласно одному из условий (3) $B(x, \xi) > 0$. Тем самым, и последующие слагаемые правой части (9) не могут быть отрицательными. Следовательно,

$$Sy(\bar{x}) \geqslant 0.$$

В этом утверждении содержатся две возможности: либо

$$Sy(\bar{x}) > 0, \tag{10}$$

либо

$$Sy(\bar{x}) = 0. \tag{11}$$

Утверждение (10) верным быть не может, так как оно противоречит условию (7) теоремы. Отсюда следует, что либо неверно допущение (8) и теорема доказана, либо из (10) и (11) верно последнее. Рассмотрим вторую возможность. Из соотношений (8), (9) и условия (3) следует, что при $D(\bar{x}) > 0$ утверждение (11) верным быть не может и, следовательно, либо допущение (8) неверно и теорема доказана, либо $D(\bar{x}) = 0$. Пусть $D(\bar{x}) = 0$. Тогда из соотношений (8), (9) находим, что

$$y(\xi) = y(\bar{x}), \quad \xi \in Ш'(\bar{x}). \tag{12}$$

Так как по условию $y(x) \not\equiv \text{const}$ при $x \in \bar{\Omega}'$, то существует такой узел $\bar{\bar{x}} \in \bar{\Omega}'$, что $y(\bar{\bar{x}}) < y(\bar{x})$. В силу связности $\bar{\Omega}'$ можно указать последовательность узлов

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(x_i \in \Omega')$, которая удовлетворяет условиям (6). На основании (12) $y(x_1) = y(\bar{x})$. Без ограничения общности можно считать, что

$$y(x_1) = y(x_2) = \ldots = y(x_m) = y(\bar{x}),$$

так как если бы эту цепочку равенств можно было бы продолжить лишь до некоторого m_0, $1 < m_0 < m$, то в качестве $\overline{\overline{x}}$ можно было бы взять x_{m_0+1}.

Вычислим

$$Sy(x_m) = D(x_m)\, y(x_m) + \sum_{\xi \in Ш'(x_m)} B(x_m, \xi)\,(y(x_m) - y(\xi)) \geqslant$$

$$\geqslant B(x_m, \overline{\overline{x}})\,(y(x_m) - y(\overline{\overline{x}})) = B(x_m, \overline{\overline{x}})\,(y(\bar{x}) - y(\overline{\overline{x}})) > 0.$$

Это утверждение противоречит условию (7) теоремы и, следовательно, допущение (8) неверно. Первое утверждение теоремы доказано.

2. Если $Sy(x) \geqslant 0$, то достаточно заменить $y(x)$ на $(-y(x))$, для которой $S(-y) \leqslant 0$ и воспользоваться проведенными выше рассуждениями. Теорема 1 доказана.

3. Следствия из принципа максимума.

Следствие 1. *Если* $Sy(x) \leqslant 0$ $(Sy(x) \geqslant 0)$ *на* Ω *и существует по крайней мере один узел* x_0 *сетки* Ω, *в котором*

$$D(x_0) > 0, \qquad x_0 \in \Omega, \tag{13}$$

то $y(x) \leqslant 0$ $(y(x) \geqslant 0)$ *на* Ω.

Доказательство. Пусть $Sy(x) \leqslant 0$. Если $y(x) \equiv \equiv \text{const}$ при $x \in \Omega$, то, вычисляя значение $Sy(x)$ в узле $x = x_0$, получим, что

$$Sy(x_0) = D(x_0)\, y(x_0) - \sum_{\xi \in Ш'(x_0)} B(x_0, \xi)\,(y(x_0) - y(\xi)) =$$

$$= D(x_0)\, y(x_0) \leqslant 0.$$

Отсюда на основании (13) следует, что $y(x) \equiv y(x_0) \leqslant 0$. Если же $y(x) \not\equiv \text{const}$ при $x \in \Omega$, то $y(x) \leqslant 0$ на основании принципа максимума (при $\Omega' = \Omega$).

Второе утверждение доказывается аналогично.

Замечание 2. Если сетка Ω содержит граничные узлы γ, то условие (13) выполняется автоматически для $x \in \gamma$.

Следствие 2. *Пусть оператор* S *на* Ω *удовлетворяет условиям* (3), (13). *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное решение*,

Для доказательства существования и единственности решения задачи (1), (2) при сделанных предположениях достаточно убедиться в том, что однородная задача $Sy(x)=0$ на Ω (в случае первой краевой задачи $Sy(x)=0$ на ω и $y(x)=0$ на γ) имеет только тривиальное решение. Применяя следствие 1, заключаем, что либо $y(x)\leqslant 0$, либо $y(x)\geqslant 0$ на Ω, так как равенство $Sy(x)=0$ в обоих случаях допустимо. Эти два условия совместимы лишь при $y(x)\equiv 0$ на Ω.

4. Теорема сравнения и априорные оценки. Пользуясь следствием 1 из принципа максимума, убедимся в том, что верна важная

Теорема 2 (теорема сравнения). *Пусть $y(x)$ — решение задачи (1) — (3), (13), а $\bar{y}(x)$ — решение той же задачи с правой частью $\bar{F}(x)$. Тогда из условия $|F(x)|\leqslant\bar{F}(x)$ на Ω следует, что*

$$|y(x)|\leqslant\bar{y}(x) \text{ на } \Omega.$$

Доказательство. В силу следствия 1 функция $\bar{y}(x)\geqslant 0$ на Ω. Сложим и вычтем уравнения $Sy=F$ и $S\bar{y}=\bar{F}$:

$$S(\bar{y}+y)=\bar{F}(x)+F(x)\geqslant 0, \qquad S(\bar{y}-y)=\bar{F}(x)-F(x)\geqslant 0.$$

Применяя следствие 1, заключаем, что $\bar{y}(x)+y(x)\geqslant 0$ и $\bar{y}(x)-y(x)\geqslant 0$ или $-\bar{y}(x)\leqslant y(x)\leqslant\bar{y}(x)$, $|y(x)|\leqslant\bar{y}(x)$ на Ω, что и требовалось доказать.

Замечание 3. В случае первой краевой задачи (4) теорема сравнения означает, что из условий

$$|F(x)|\leqslant\bar{F}(x) \text{ на } \omega, \quad |g(x)|\leqslant\bar{g}(x) \text{ на } \gamma$$

следует, что $|y(x)|\leqslant\bar{y}(x)$ на Ω, где $\bar{y}(x)$ — решение задачи $S\bar{y}=\bar{F}$ на ω, $\bar{y}=\bar{g}$ на γ.

Таким образом, решение задачи (1), (2) можно оценить с помощью *мажорантной функции* $\bar{y}(x)$, которая удовлетворяет уравнению $S\bar{y}=\bar{F}(x)$ с правой частью $\bar{F}(x)\geqslant|F(x)|$, например, $\bar{F}(x)=|F(x)|$ или $\bar{F}(x)=\|F(x)\|_C$ и др. В следующем параграфе будет найдена мажорантная функция $\bar{y}(x)$ для разностной задачи Дирихле.

Теорема сравнения позволяет сразу получить оценку решения первой краевой задачи (4), (5) в случае однородного уравнения.

Следствие 3. *Для решения задачи*

$$Sy=0 \text{ на } \omega,\ y=g(x) \text{ на } \gamma$$

имеет место априорная оценка

$$\max_{\omega} |y(x)| \leqslant \max_{\gamma} |g(x)|. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\bar{y}(x)$ — решение задачи $S\bar{y}=0$ на ω, $\bar{y}=\bar{g}=|g(x)|$ на γ.

На основании теоремы сравнения $|y(x)| \leqslant y(x)$. Если $\bar{g}(x) \equiv \text{const}$ на γ, а $\bar{y} \equiv \text{const}$ на Ω, то $\max \bar{y}(x) = \max \bar{g}$, и неравенство (14) справедливо. Если же $\bar{y}(x) \not\equiv \text{const}$ на Ω, то из принципа максимума при $\Omega' = \omega$ следует, что максимум функции $\bar{y}(x) \geqslant 0$ на ω достигаться не может, и поэтому $\bar{y}(x) \leqslant \max |\bar{g}|$, откуда и вытекает неравенство (14).

Теорема 3. *Если* $D(x) > 0$ *на* Ω, *то для решения* $y(x)$ *задачи* (1) — (3) *верна априорная оценка*

$$\max_{\Omega} |y(x)| \leqslant \max_{\Omega} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $\bar{y}(x)$ — решение задачи $S\bar{y}=|F(x)|$ на Ω и, следовательно, $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$. Функция $\bar{y}(x) \geqslant 0$ до тигает наибольшего значения в некотором узле $\bar{x}$: $\bar{y}(\bar{x}) = \max_{\Omega} \bar{y}(x) > 0$. В этом узле уравнение (1) запишем в виде

$$D(\bar{x})\,\bar{y}(\bar{x}) + \sum_{\xi \in Ш'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)\,(\bar{y}(\bar{x}) - \bar{y}(\xi)) = |F(\bar{x})|.$$

Так как $\bar{y}(\bar{x}) \geqslant \bar{y}(\xi)$, то $D(\bar{x})\,\bar{y}(\bar{x}) \leqslant |F(\bar{x})|$ и

$$\bar{y}(\bar{x}) \leqslant \frac{|F(\bar{x})|}{D(\bar{x})} \leqslant \max_{\Omega} \frac{|F(x)|}{D(x)}.$$

Отсюда и из условия $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ следует утверждение теоремы.

Теорема 4. *Пусть сетка* Ω *разбита на два непересекающихся не пустых подмножества* Ω' *и* Ω'', *причем* Ω' — *связная сетка. Если* $F(x) \equiv 0$ *на* Ω', *а на* Ω'' *имеем* $F(x) \not\equiv 0$, $D(x) > 0$, *то для решения* $y(x)$ *задачи* (1) — (3) *справедлива оценка*

$$\max_{x \in \Omega} |y(x)| \leqslant \max_{x \in \Omega''} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \tag{16}$$

Доказательство. Введем мажорантную функцию $\bar{y}(x)$, которая является решением того же уравнения (1) с правой частью $\bar{F}(x)=|F(x)|\geqslant 0$ ($S\bar{y}=0$ на Ω', $S\bar{y}=\bar{F}(x)$ на Ω''). Так как $\Omega''\neq\emptyset$ и $D(x)>0$ на Ω'', то на основании следствия 2 функции $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ существуют и единственны. В силу следствия 1 $\bar{y}(x)\geqslant 0$ на Ω, а в силу теоремы сравнения $y(x)\leqslant\bar{y}(x)$ на Ω.

Оценим $\bar{y}(x)$. Из уравнений для $\bar{y}(x)$ следует, что либо $\bar{y}(x)=\mathrm{const}>0$ на $\overline{\Omega}'$, либо (в силу принципа максимума) $\bar{y}(x)$ не может принимать наибольшее значение на Ω'. Во втором случае

$$\max_{\Omega'}\bar{y}(x)\leqslant\max_{\Omega''}\bar{y}(x). \tag{17}$$

Так как Ω' и Ω'' — непустые множества, а Ω' и Ω — связные сетки, то $\overline{\Omega}'\cap\Omega''\neq\emptyset$, откуда следует, что неравенство (17) имеет место и в первом случае.

Оценим правую часть соотношения (17). Пусть $\max\bar{y}(x)$ достигается в узле $x_0\in\Omega''$. Тогда в этом узле имеем

$$\bar{F}(x_0)=D(x_0)\bar{y}(x_0)+\sum_{\xi\in\Sigma'(x_0)}B(x_0,\xi)(\bar{y}(x_0)-\bar{y}(\xi))\geqslant$$
$$\geqslant D(x_0)\bar{y}(x_0),$$

так как $\bar{y}(x_0)\geqslant\bar{y}(\xi)$. Отсюда следует, что

$$\max_{\Omega}\bar{y}(x)=\bar{y}(x_0)\leqslant\bar{F}(x_0)/D(x_0),$$
$$\max_{\Omega}|y(x)|\leqslant\max_{\Omega''}(|F(x)|/D(x)),$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Априорные оценки и оценки скорости сходимости разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

В этом параграфе принцип максимума используется для получения априорных оценок решения разностных схем, рассмотренных в § 2, и оценки скорости сходимости этих схем.

1. Априорные оценки для первой краевой задачи. Рассмотрим первую краевую задачу общего типа:

$$\begin{aligned} Sy(x) &= F(x) \quad \text{при } x \in \omega, \\ y(x) &= g(x) \quad \text{при } x \in \gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$Sy(x) = A(x)\, y(x) - \sum_{\xi \in \Sh'(x)} B(x, \xi)\, y(\xi), \tag{2}$$

и

$$A(x) > 0,\ B(x, \xi) > 0,\ D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \Sh'(x)} B(x, \xi) \geqslant 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* $\omega = \mathring{\omega} \cup \overset{*}{\omega}$, *где* $\mathring{\omega}$ — *связная сетка, и* $D(x) \geqslant 0$ *на* $\mathring{\omega}$, $D(x) > 0$ *на* $\overset{*}{\omega}$. *Тогда решение задачи* (1), (2) *существует, единственно и для него справедлива следующая оценка*:

$$\max_{\bar{\omega}} |y(x)| \leqslant \max_{\gamma} |g(x)| + \max_{\bar{\omega}} |U(x)| + \max_{\overset{*}{\omega}} \left| \frac{F(x)}{D(x)} \right|, \tag{4}$$

где $U(x)$ — *мажорантная функция, являющаяся решением задачи*

$$\left.\begin{aligned} &SU(x) = \bar{F}(x),\ x \in \mathring{\omega},\ U(x) \geqslant 0,\ x \in \gamma, \\ &\bar{F}(x) \geqslant |F(x)| \ \textit{при}\ x \in \mathring{\omega}\ \textit{и}\ \bar{F}(x) \geqslant 0 \ \textit{при}\ x \in \overset{*}{\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Доказательство 1. Однородная задача $Sy = 0$ при $x \in \omega$, $y(x) = 0$ при $x \in \gamma$, в силу принципа максимума имеет только тривиальное решение (см. следствие 2). Поэтому задача (1), (2) имеет единственное решение.

2. Представим решение задачи (1) в виде суммы трех слагаемых $y(x) = \overset{1}{y}(x) + \overset{2}{y}(x) + \overset{3}{y}(x)$, где $\overset{i}{y}(x)$, $i = 1, 2, 3$, определяются условиями:

$$S\overset{1}{y} = 0,\ x \in \omega, \quad \overset{1}{y}(x) = g(x) \text{ при } x \in \gamma,$$

$$S\overset{2}{y} = F(x),\ x \in \mathring{\omega},\ S\overset{2}{y} = 0,\ x \in \overset{*}{\omega} \text{ и } \overset{2}{y} = 0 \text{ при } x \in \gamma,$$

$$S\overset{3}{y} = 0,\ x \in \mathring{\omega}, \quad S\overset{3}{y} = F(x),\ x \in \overset{*}{\omega} \text{ и } \overset{3}{y} = 0 \text{ при } x \in \gamma.$$

В силу следствия 3 из § 3 имеем

$$\max_{x \in \bar{\omega}} \left| \overset{1}{y}(x) \right| \leqslant \max_{x \in \gamma} |g(x)|. \tag{6}$$

Функцию $\overset{2}{y}(x)$ оценим с помощью мажорантной функции $U(x)$, определяемой условиями (5). В силу теоремы 2 § 3 имеем

$$\left|\overset{2}{y}(x)\right| \leqslant |U(x)| \text{ и } \max_{x\in\bar{\omega}}\left|\overset{2}{y}(x)\right| \leqslant \max_{x\in\bar{\omega}}|U(x)|. \tag{7}$$

Так как $\overset{\circ}{\omega}$ — связная область и $D(x)>0$ при $x\in\overset{*}{\omega}$, то можно применить теорему 4 из § 3 для оценки $\overset{3}{y}(x)$

$$\max_{x\in\omega}\left|\overset{3}{y}(x)\right| \leqslant \max_{x\in\overset{*}{\omega}}\left|\frac{F(x)}{D(x)}\right|. \tag{8}$$

3. Учитывая неравенство $|y(x)| \leqslant \left|\overset{1}{y}(x)\right| + \left|\overset{2}{y}(x)\right| + \left|\overset{3}{y}(x)\right|$ и пользуясь оценками (6), (7) и (8), получаем неравенство (4).

Из (4) видно, что построение мажорантной функции является самостоятельной проблемой. В п. 3 функция $U(x)$ будет построена для уравнения Пуассона.

2. Запись разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в канонической форме. Чтобы воспользоваться предыдущей теоремой, надо разностные уравнения для задачи Дирихле записать в форме (1).

В § 2 в случае области общего вида разностная задача Дирихле формулировалась так:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} &= -f(x) \text{ при } x\in\overset{\circ}{\omega}, \\ \Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y &= -f(x) \text{ при } x\in\overset{*}{\omega}, \\ y &= g(x) \text{ при } x\in\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\Lambda_\alpha^* y$ определялись по формуле (20) из § 2:

$$\Lambda_\alpha^* y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1\alpha)}-y}{h_\alpha} - \dfrac{y-y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & x^{(-1\alpha)}\in\gamma, \\ \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1\alpha)}-y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y-y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha}\right), & x^{(+1\alpha)}\in\gamma, \end{cases}$$

где h_α^* — расстояние от $x\in\overset{*}{\omega}$ до $x^{(+1\alpha)}$ или $x^{(-1\alpha)}$.

Кроме того, рассматривалась и другая схема:

$$\Lambda y = y_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2} = -f(x), \quad x \in \overset{\circ}{\omega},$$
$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y = -f(x), \quad x \in \overset{*}{\omega}, \qquad (10)$$
$$y(x) = g(x), \quad x \in \gamma,$$
$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{\hbar_\alpha}\left(y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha}\right) = y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \quad \hbar_\alpha = 0{,}5\,(h_\alpha + h_\alpha^*).$$

В регулярных узлах $x \in \overset{\circ}{\omega}$ уравнение $\Lambda y = -f$ запишем так (рис. 12):

$$2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y(x) = \frac{1}{h_1^2}\left(y^{(+1_1)} + y^{(-1_1)}\right) + \frac{1}{h_2^2}\left(y^{(+1_2)} + y^{(-1_2)}\right) + f(x), \quad x \in \overset{\circ}{\omega}. \qquad (11)$$

В нерегулярных узлах $x \in \overset{*}{\omega}$ для схемы (9) имеем (рис. 13):

$$\left(\frac{h_1 + h_1^*}{h_1 h_1^*} + \frac{h_2 + h_2^*}{h_2 h_2^*}\right) y(x) =$$
$$= \frac{1}{h_1^2} y^{(+1_1)} + \frac{1}{h_2^2} y^{(-1_2)} + f(x) + \frac{1}{h_1 h_1^*} g^{(-1_1)} + \frac{1}{h_2 h_2^*} g^{(+1_2)}, \qquad (12)$$

если $x^{(-1_1)} \in \gamma$ и $x^{(+1_2)} \in \gamma$.

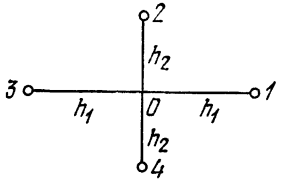


Рис. 12.

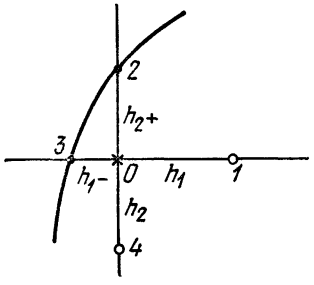


Рис. 13.

Если, например, $x^{(-1_1)} \in \gamma$, а $x^{(+1_2)} \notin \gamma$, то вместо (12) получим (рис. 14, *а*)

$$\left(\frac{h_1 + h_1^*}{h_1 h_1^*} + \frac{2}{h_2^2}\right) y(x) =$$
$$= \frac{1}{h_1^2} y^{(+1_1)} + \frac{1}{h_2^2}\left(y^{(+1_2)} + y^{(-1_2)}\right) + f(x) + \frac{1}{h_2 h_2^*} g^{(+1_2)}.$$

Отсюда $A(x) > 0$, $B(x, \xi) > 0$, а $D(x) = \frac{1}{h_1 h_1^*} + \frac{1}{h_2 h_2^*}$

при $x^{(-1_1)} \in \gamma$, $x^{(+1_2)} \in \gamma$, $D(x) = \frac{1}{h_1 h_1^*}$, $x^{(-1_1)} \in \gamma$.

Аналогичные выражения для $D(x)$ получаются и для других случаев, когда $x^{(-1_1)} \in \gamma$, $x^{(+1_2)} \in \gamma$ (рис. 14, б)

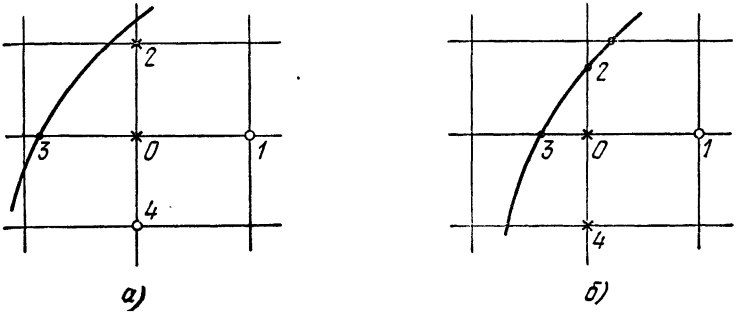


Рис. 14.

и т. д., а также при рассмотрении схемы (10). Нетрудно заметить, что во всех случаях для $D(x)$ верна оценка:

$$D(x) \geqslant 1/h^2, \text{ где } h = \max(h_1, h_2), \quad \text{при} \quad x \in \overset{*}{\omega}. \qquad (13)$$

Если $x \in \omega$ и все узлы $\xi \in Ш'(x)$ являются внутренними, то $D(x) = 0$. Если же $x \in \omega$ является регулярным внутренним узлом, но по крайней мере один из его соседних узлов попадает на границу, т. е. $x^{(\pm 1_1)} \in \gamma$ или $x^{(\pm 1_2)} \in \gamma$, тогда $D(x) > 0$. Таким образом,

$$D(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathring{\omega}. \qquad (14)$$

3. Оценка для погрешности задачи. Мажорантная функция. Пусть $y = y(x)$ — решение задачи (9) или (10), а $u = u(x)$ — решение исходной задачи (1) из § 2. Обозначим $z(x) = y - u$ погрешность решения. Подставляя $y = z + u$ в (9), получаем для z следующие условия:

$$\Lambda z = -\psi(x), \; x \in \mathring{\omega}, \quad \Lambda^* z = -\psi^*(x), \; x \in \overset{*}{\omega},$$
$$z = 0, \; x \in \gamma. \qquad (15)$$

Эта задача может быть записана в виде

$$Sz = \psi \text{ при } x \in \mathring{\omega}, \quad Sz = \psi^* \text{ при } x \in \overset{*}{\omega},$$
$$z = 0 \text{ при } x \in \gamma. \qquad (15')$$

Построим мажорантную функцию $U(x)$ для задачи

$$\left.\begin{array}{l} S^2 z = \psi \text{ при } x \in \overset{\circ}{\omega},\ \overset{2}{Sz} = 0 \text{ при } x \in \overset{*}{\omega}, \\ \overset{2}{z} = 0 \text{ при } x \in \gamma. \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Пусть начало координат (0, 0) находится внутри области G, а R — радиус наименьшего круга с центром в начале координат, содержащего область G. Положим

$$U(x) = \frac{K}{4}(R^2 - x_1^2 - x_2^2), \qquad (17)$$

где K — положительная постоянная, которую мы выберем позже. Если $x = (x_1, x_2) \in G$, то $U(x) \geqslant 0$. Так как $(x_\alpha + h_\alpha)^2 - x_\alpha^2 = 2(x_\alpha + 0{,}5h_\alpha)h_\alpha$, то $(x_1^2)_{\bar{x}_1 x_1} = 2$, $(x_1^2)_{x_2 x_2} = 0$ и $(\Lambda_1 + \Lambda_2)(x_1^2 + x_2^2) = 4$, т. е. $\Lambda U = -K$ при $x \in \overset{\circ}{\omega}$.

В нерегулярных узлах $x \in \overset{*}{\omega}$ для схемы (9) имеем

$$\Lambda^* U = -K\left(\frac{h_1 + h_1^*}{4h_1} + \frac{h_2 + h_2^*}{4h_2}\right) = -\varkappa K, \quad \varkappa > \frac{1}{2}$$

при $x^{(-1_1)}, x^{(+1_2)} \in \gamma$

либо $x^{(+1_1)}, x^{(-1_2)} \in \gamma$ и т. д. Если же лишь $x^{(-1_1)} \in \gamma$, то

$$\Lambda^* U = -K\left(\frac{h_1 + h_1^*}{4h_1} + \frac{1}{2}\right), \quad \varkappa = \frac{h_1 + h_1^*}{4h_1} + \frac{1}{2} > \frac{3}{4}.$$

Таким образом, $\Lambda^* U = -\varkappa K$, $\varkappa > \frac{1}{2}$ при $x \in \overset{*}{\omega}$. Сравнивая уравнения

$SU = K$, $x \in \overset{\circ}{\omega}$; $SU = \varkappa K$, $\varkappa > \frac{1}{2}$, $x \in \overset{*}{\omega}$; $U(x) \geqslant 0$, $x \in \gamma$

с уравнениями (16), видим, что

$$U(x) \geqslant \left|\overset{2}{z}(x)\right|,$$

если положить, например, $K = \max\limits_{x \in \overset{\circ}{\omega}} |\psi(x)|$.

Таким образом, имеем

$$0 \leqslant U(x) \leqslant \frac{R^2}{4} K = \frac{R^2}{4} \max_{x \in \overset{\circ}{\omega}} |\psi(x)|.$$

Учитывая, что $D(x) \geqslant 0$ при $x \in \mathring{\omega}$ и $D(x) \geqslant 1/h^2$ при $x \in \overset{*}{\omega}$ и пользуясь теоремой 1, для решения задачи (15) получаем оценку

$$\max_{\omega} |z(x)| = \max_{\omega} |y(x) - u(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R^2}{4} \max_{\mathring{\omega}} |\psi(x)| + h^2 \max_{\overset{*}{\omega}} |\psi^*(x)|. \qquad (18)$$

Отсюда следует

Теорема 2. *Если решение задачи* (1), (2) *из* § 2 $u(x) \in C^4(\bar{G})$, *то решения разностных задач* (9) *и* (10) *равномерно сходятся со скоростью* $O(|h|^2)$:

$$\max_{x \in \omega} |y(x) - u(x)| \leqslant M \cdot |h|^2,$$

где $M = \text{const} > 0$ *не зависит от* h_1, h_2, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

4. Схемы повышенного порядка точности. Рассмотрим схему (8), (9) из § 2 с погрешностью $O(|h|^4)$. Она определена на девятиточечном шаблоне «ящик», изображенном на рис 15, и имеет вид

$$\Lambda' y = (\Lambda_1 + \Lambda_2) y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x), \qquad x \in \omega,$$

$$y = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \gamma, \quad \varphi(x) = f + \frac{1}{12}(h_1^2 \Lambda_1 f + h_2^2 \Lambda_2 f), \qquad (19)$$

где ω — сетка в прямоугольнике $\{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \ \alpha = 1, 2\}$, $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ (в этом случае все внутренние узлы являются регулярными).

Запишем уравнение $\Lambda' y = -\varphi$ в каноническом виде $Sy = \varphi(x)$, где $Sy = -\Lambda' y$. Подставляя вместо $\Lambda_1 y$ и $\Lambda_2 y$ их выражения, получим. (см рис. 15)*)

$$\frac{5}{3}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y(0) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)(y(1) + y(3)) +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right)(y(2) + y(4)) +$$

$$+ \frac{1}{12}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)(y(5) + y(6) + y(7) + y(8)).$$

*) При $h_1 = \sqrt{5}\, h_2$ и при $h_2 = \sqrt{5}\, h_1$ шаблон содержит лишь семь узлов.

Сравнивая с (1), видим, что

$$A(x)=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)>0;$$

$$B(x,\ \xi)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)\geqslant 0,\ \xi=1,3;$$

$$B(x,\ \xi)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)\geqslant 0,\ \xi=2,4;$$

$$B(x,\ \zeta)=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)>0,\ \zeta=5,\ 6,\ 7,\ 8;$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\leqslant\frac{h_2}{h_1}\leqslant\sqrt{5}. \tag{20}$$

При условии (20) принцип максимума применим к схеме (19): очевидно, что $D(x)\equiv 0$ при $x\in\omega$ и $D(x)=A(x)=1$ при $x\in\gamma$. Мажорантную функцию $U(x)$, очевидно, можно выбрать следующим образом:

$$U(x)=\frac{K}{4}(l_1^2+l_2^2-x_1^2-x_2^2),\quad 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\quad \alpha=1,\ 2.$$

Так как $\Lambda_1\Lambda_2 U=0$, то $\Lambda' U=\Lambda U=-K$. Поэтому можно положить $K=\max\limits_{\omega}|\psi(x)|$. Так как область G — прямоугольник и сетка $\bar{\omega}$ равномерна по x_1 и x_2, то все внутренние узлы являются регулярными. Для $U(x)$ имеет место оценка

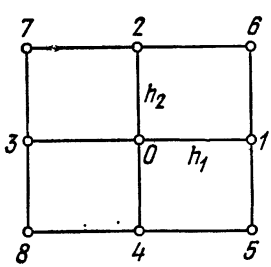


Рис. 15.

$$0\leqslant U(x)\leqslant\frac{l_1^2+l_2^2}{4}\max_{\omega}|\psi(x)|.$$

В результате убеждаемся в том, что для погрешности $z(x)=y(x)-u(x)$ схемы (19) выполняется оценка

$$\max_{\omega}|y(x)-u(x)|\leqslant\frac{l_1^2+l_2^2}{4}\max_{\omega}|\psi(x)|. \tag{21}$$

Если решение исходной задачи $u(x)\in C^{(6)}(\bar{G})$, то при условии (20) схема (19) равномерно сходится со скоростью $O(|h|^4)$ (имеет четвертый порядок точности).

На квадратной сетке $h_1=h_2=h$ условие (20) автоматически выполнено. Поэтому оценкой (21) можно воспользоваться для схемы (8), (9) из § 1, которая отличается

от (19) только выражением для $\varphi(x)$. Из (21) следует, что эта схема равномерно сходится со скоростью $O(h^6)$ (имеет шестой порядок точности), если $u(x) \in C^{(8)}(\bar{G})$.

5. Схемы для уравнения в полярной и цилиндрической системах координат. Обратимся теперь к задаче (13) из § 2.

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y = -f(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \omega, \\ &y(r, \varphi) = y(r, \varphi + 2\pi), \quad (r, \varphi) \in \omega, \quad y = g(\varphi), \\ &\qquad\qquad (r, \varphi) \in \gamma, \\ &\bar{\Lambda}_r y = \frac{1}{r}(\rho y_{\bar{r}})_r, \quad \rho = r - 0{,}5h_r, \quad \Lambda_\varphi y = \frac{1}{r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(граница γ состоит из узлов (R, φ_m).

Схема (22) аппроксимирует задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге $0 \leqslant r \leqslant R$ радиуса R:

$$\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \varphi),$$
$$0 < r < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{23}$$
$$r\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad u = g(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R,$$
$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi) \qquad (0 < r < R, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Запишем уравнение (22) в форме (1). Очевидно, что $x = (r_n, \varphi_m)$, шаблон $Ш(x) = \{(r_{n-1}, \varphi_m), (r_{n+1}, \varphi_m), (r_n, \varphi_{m-1}), (r_n, \varphi_{m+1}), (r_n, \varphi_m)\}$ при $r \neq 0{,}5h_r$ и $r \neq R$, $Ш(x) = \{(r_1, \varphi_m), (r_0, \varphi_{m-1}), (r_0, \varphi_{m+1}), (r_0, \varphi_m)\}$ при $r = 0{,}5h_r$.

Из вида $\bar{\Lambda}_r$ и Λ_φ следует, что для задачи (22) условия (2) выполнены, причем $D(x) = 0$ во всех внутренних узлах $x = (r_n, \varphi_m)$, $n < N$ $(r_n < R)$. Сетка состоит только из регулярных внутренних узлов. В каждом из этих узлов для погрешности аппроксимации схемы (22) имеет место полученная в § 1 оценка

$$\psi = \bar{\Lambda}_r u + \Lambda_\varphi u + f(r, \varphi) = O\left(\frac{h_r^2 + h_\varphi^2}{r}\right), \tag{24}$$

если $u \in C^{(4)}(\bar{G})$.

Для оценки решения задачи (22) при $y|_\gamma = 0$ построим мажорантную функцию

$$U(r, \varphi) = K(R - r), \qquad K = \text{const} > 0.$$

Применим к U оператор $\Lambda = \bar{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi$. Учитывая, что U

не зависит от φ и $\Lambda_\varphi U=0$, а также

$$\frac{1}{r}(\rho U_{\bar{r}})_r=-\frac{K}{h_r r}((r+0{,}5h_r)-(r-0{,}5h_r))=-\frac{K}{r},$$

получаем $\Lambda U=-\frac{K}{r}$ при $x=(r,\ \varphi)\in\omega,\ U(R,\ \varphi)=0$. Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $K\geqslant r|f(r,\varphi)|$ для всех $x=(r,\ \varphi)\in\omega$. Это будет иметь место, если положить $K=\max\limits_{\omega}|rf(r,\ \varphi)|$. Отсюда и из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Решение задачи* (22) *существует и единственно; для него верна оценка*

$$\max_{\bar{\omega}}|y(x)|\leqslant\max_{\omega_\varphi}|g(\varphi)|+R\max_{\omega}|rf(r,\ \varphi)|. \qquad (25)$$

Если решение дифференциального уравнения $u(r,\varphi)$ *имеет четыре ограниченные производные по* x_1 *и* x_2, *то схема* (22) *равномерно сходится со вторым порядком* (*имеет второй порядок точности*).

Доказательство. 1. Условия теоремы 1 выполнены. Поэтому можно воспользоваться оценкой (4) и подставить в нее

$$\max_{\omega}|U|\leqslant KR=R\max_{\omega}|rf(r,\ \varphi)|.$$

2. Для погрешности $z=y-u$ имеем задачу

$$\Lambda_r z+\Lambda_\varphi z=-\psi,\ (r,\ \varphi)\in\omega,\ z=0 \text{ при } r=R \qquad (26)$$

с однородным граничным условием. В силу априорной оценки (25)

$$\max_{\omega}|z(r,\ \varphi)|\leqslant R\max_{\omega}|r\psi(r,\ \varphi)|. \qquad (27)$$

Подставляя сюда оценку (24) или $|r\psi|=O(h_r^2+h_\varphi^2)$, получаем $\max|z|\leqslant M(h_r^2+h_\varphi^2)$, где $M=\text{const}>0$ не зависит от h_r и h_φ. Теорема доказана.

Пусть в круговом цилиндре (см. §§ 1 и 2)

$$\bar{G}=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\,|\,x_1^2+x_2^2\leqslant R^2,\ 0\leqslant x_3=z\leqslant l\}$$

требуется найти решение уравнения Пуассона, принимающее на поверхности цилиндра заданные значения. В цилиндрических координатах указанная задача ставится следующим образом: найти ограниченное в $\bar{G}$ решение

уравнения

$$\Delta_{r,\varphi,z}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,\ \varphi,\ z),\quad (28)$$

удовлетворяющее условию периодичности по φ и краевому условию $u(r,\ \varphi,\ z)=g(r,\ \varphi,\ z)$ при $r=R$, $0\leqslant z\leqslant l$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ и при $z=0,l$, $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. В цилиндре вводим описанную в § 1 сетку

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_r\times\omega_\varphi\times\bar{\omega}_z=\{(r,\ \varphi,\ z)\mid r\in\bar{\omega}_r,\ \varphi\in\omega_\varphi,\ z\in\bar{\omega}_z\},$$
$$\bar{\omega}_r=\{r_i=(i+0{,}5)h_r,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N,\ h_r=R/(N+0{,}5)\},$$
$$\bar{\omega}_\varphi=\{\varphi_m=mh_\varphi,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1,\ h_\varphi=2\pi/M\},$$
$$\bar{\omega}_z=\{z_k=kh_z,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ I,\ h_z=l/I\}.$$

Граница γ состоит из узлов $(R,\ \varphi_m,\ z_k)$, $(r_n,\ \varphi_m,\ 0)$ и $(r_n,\ \varphi_m,\ l)$. Множество внутренних узлов $\omega=\bar{\omega}\setminus\gamma$. Все узлы являются регулярными, т. е. $\mathring{\omega}=\omega$. На сетке $\bar{\omega}=\Omega$ разностная схема для задачи (28) имеет вид

$$\Lambda y=\Lambda_r y+\Lambda_\varphi y+\Lambda_z y=-f(r,\ \varphi,\ z),\ x=(r,\ \varphi,\ z)\in\omega,\ (29)$$
$$y=g(r,\ \varphi,\ z)\ \text{при}\ x\in\gamma,$$

где $\Lambda_z y=y_{\bar{z}z}$, $(\Lambda_r+\Lambda_\varphi)$ — оператор задачи (22). Записывая (29) в каноническом виде (1), убеждаемся в том, что все условия (2) выполнены, причем $\bar{\omega}=\Omega$, а $D(x)\equiv 0$ при $x\in\omega$. Чтобы воспользоваться теоремой 1, достаточно построить мажорантную функцию $U=U(r,\ \varphi,\ z)$.

Нетрудно заметить, что функция $U=K(R-r)$ может служить мажорантой и для задачи (29) с однородными граничными условиями. Поэтому теорема 3 сохраняет силу и для разностной задачи Дирихле в цилиндре (29). В этом случае погрешность аппроксимации $\psi=\left(\frac{1}{r}(h_r^2+h_\varphi^2)+h_z^2\right)$, и для погрешности $z=y-u$ верна оценка

$$\max_{\omega}|y-u|\leqslant M(h_r^2+h_\varphi^2+h_z^2),$$

где $M=\text{const}>0$ не зависит от шагов сетки. Таким образом, схема (29) имеет второй порядок точности.

6. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона в сферических координатах. Пусть в шаре $\bar{G}=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant R^2\}$ требуется найти решение уравнения Пуассона, принимающее на поверхности шара заданные

значения. В сферических координатах задача ставится следующим образом: найти непрерывное в $\bar{G}$ решение уравнения

$$\Delta_{r,\varphi,\theta}u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=$$
$$=-f(r,\varphi,\theta)\text{ при }0<r<R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$
$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad (30)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(r,\varphi,\theta)=g(\varphi,\theta)\quad\text{при}\quad r=R,\qquad (30')$$

условиям ограниченности

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r}=0\quad\text{при}\quad r=0;\qquad \sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}=0\quad\text{при}\quad\theta=0,\ \pi\qquad (30'')$$

и условию периодичности по φ

$$u(r,\varphi,\theta)=u(r,\varphi+2\pi,\theta),\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.\qquad (30''')$$

Разностная схема для этой задачи была получена в §§ 1, 2. Вводится сетка

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_r\times\omega_\varphi\times\omega_\theta=\{(r,\varphi,\theta)\mid r\in\bar{\omega}_r,\ \varphi\in\omega_\varphi,\ \theta\in\omega_\theta\},$$

где ω_φ определены выше, а

$$\bar{\omega}_r=\{r_n=(n+1)h_r,\ n=0,1,2,\ldots,N-1,\ h_r=R/N\},$$
$$\bar{\omega}_\theta=\{\theta_i=(i+0{,}5)h_\theta,\ i=0,1,\ldots,I-1,\ h_\theta=\pi/I\}.$$

Граница γ сетки состоит из узлов (R,φ_m,θ_i)

$$\gamma=\{(R,\varphi_m,\theta_i)\mid(\varphi_m,\theta_i)\in\omega_\varphi\times\omega_\theta\}.$$

Множество внутренних узлов

$$\omega=\bar{\omega}\setminus\gamma=\{(r,\varphi,\theta)\mid r<R_1(\varphi,\theta)\in\omega_\varphi\times\omega_\theta\}.$$

На сетке $\bar{\omega}=\Omega$ разностная схема для задачи (30) записывается так:

$$\left.\begin{array}{l}\Lambda y=\Lambda_r y+\Lambda_\varphi y+\Lambda_\theta y=-f(r,\varphi,\theta),\ x=(r,\varphi,\theta)\in\omega,\\ y=g(\varphi,\theta)\text{ при }r=R,\ y(r,\varphi,\theta)=y(r,\varphi+2\pi,\theta),\end{array}\right\}\quad (31)$$

где $\Lambda = \Lambda_r + \Lambda_\varphi + \Lambda_\theta$ определяется формулами (39) — (41) из § 1. Перепишем их:

$$\Lambda_r y = \frac{1}{r^2}(\rho y_{\bar r})_r, \quad \rho = r(r - h_r), \quad r = (n+1)h_r,$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\Lambda_\varphi y = \frac{1}{r^2 \sin\theta} y_{\bar\varphi\varphi}, \quad \Lambda_\theta y = \frac{1}{r^2 \sin\theta}(\sin\bar\theta y_{\bar\theta})_\theta,$$

$$\bar\theta_i = \theta_i - \frac{1}{2}h_\theta = ih_\theta,$$

так что $\rho_n = 0$ при $n = 0$, $\bar\theta_i = 0$ при $i = 0$, $\bar\theta_i = \pi$ при $i = I$.

Записывая схему (31) в канонической форме (1) при $\Omega = \bar\omega$, видим, что условия (2) для нее выполнены и $D(x) \equiv 0$ для всех $x = (r_n, \varphi_m, \theta_i) \in \omega$. Для задачи (31) с однородным граничным условием $y = 0$ при $r = R$ построим мажорантную функцию

$$U(r, \varphi, \theta) = K(R - r\sin\theta), \tag{32}$$

где $K = \text{const} > 0$.

Вычислим $(\Lambda_r + \Lambda_\varphi + \Lambda_\theta)U = \Lambda_r U + \Lambda_\theta U$.

Замечая, что

$$\Lambda_r r = \frac{1}{r^2}(\rho r_{\bar r})_r = \frac{1}{r^2 h_r}(\rho^{(+1_r)} - \rho) =$$

$$= \frac{1}{r^2 h_r}(r(r + h_r) - r(r - h_r)) = \frac{2}{r},$$

$$(\sin\bar\theta\,(\sin\theta)_{\bar\theta})_{\theta,\,i} = \frac{1}{h_\theta^2}(\sin\theta_{i+0,5}(\sin\theta_{i+1} - \sin\theta_i) -$$

$$- \sin\theta_{i-0,5}(\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1})) = \frac{1}{h_\theta^2}\sin\frac{h_\theta}{2}(\sin 2\theta_{i+0,5} - \sin 2\theta_{i-0,5}) =$$

$$= \frac{2}{h_\theta^2}\sin\frac{h_\theta}{2}\sin h_\theta \cos 2\theta_i,$$

находим

$$\Lambda U = -F, \quad x \in \omega; \qquad U = KR(1 - \sin\theta) \geqslant 0, \quad x \in \gamma, \tag{33}$$

где

$$F = \frac{K}{r\sin\theta}(2\sin^2\theta + \varkappa\cos 2\theta) > 0, \quad \varkappa = \frac{\sin h_\theta}{h_\theta} \cdot \frac{\sin 0{,}5h_\theta}{0{,}5h_\theta}.$$

Так как функция $\varphi(\alpha) = (\sin\alpha)/\alpha$ при $0 < \alpha < \pi/2$ монотонно убывающая, то для $\varkappa$ справедливы двухсторонние

оценки $4\sqrt{2}/\pi^2 \leqslant \varkappa < 1$ при любых $h_\theta \leqslant \pi/2$. Функция U, в силу теоремы сравнения из § 3, является мажорантной для решения задачи (31) с однородным условием $y=0$ при $x=(R, \varphi, \theta) \in \gamma$, если $\bar{F}(x) \geqslant |f(x)|$. Это неравенство будет выполнено при $r\sin\theta\, \bar{F}(x) = K(2\sin^2\theta + \varkappa(1-2\sin^2\theta)) \geqslant \geqslant \varkappa K > r\sin\theta\,|f(x)|$.

Для этого достаточно положить

$$\varkappa K = \max_{\omega} |r\sin\theta f(r, \varphi, \theta)|.$$

Отсюда находим условие на K:

$$K = \frac{1}{\varkappa}\max_{\omega}|r\sin\theta f(r, \varphi, \theta)| \leqslant \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}\max_{\omega}|r\sin\theta f(r, \varphi, \theta)|.$$

Для $U(x)$ справедлива оценка

$$U(x) = U(r, \varphi, \theta) \leqslant KR < 2R\max_{\omega}|r\sin\theta f(r, \varphi, \theta)|.$$

Применяя теорему 1 к задаче (31), убеждаемся в том, что:

1) задача (31) имеет единственное решение; для него верна априорная оценка

$$\max_{\omega}|y(r, \varphi, \theta)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\omega_\varphi \times \omega_\theta}|g(\varphi, \theta)| + 2R\max_{\omega}|r\sin\theta f(r, \varphi, \theta)|, \quad (34)$$

2) схема (31) имеет второй порядок точности, если решение u задачи (30) как функция декартовых переменных x_1, x_2, x_3 имеет в $\bar{G}$ ограниченные четвертые производные:

$$\max_{\omega}|y(r, \varphi, \theta) - u(r, \varphi, \theta)| \leqslant M(h_r^2 + h_\varphi^2 + h_\theta^2),$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h_r, h_φ, h_θ.

Первое утверждение сразу следует из теоремы 1. Для оценки порядка точности рассматриваем задачу для погрешности

$$\bar{\Lambda}z = \bar{\Lambda}_r z + \Lambda_\varphi z + \bar{\Lambda}_\theta z = -\psi(r, \varphi, \theta), \quad x=(r, \varphi, \theta) \in \omega,$$
$$z = 0 \quad \text{при} \quad x \in \gamma.$$

Погрешность аппроксимации ψ исследована в § 1; для нее верна оценка

$$\psi(r, \varphi, \theta) = O\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\varphi^2 + h_\theta^2}{r \sin \theta}\right). \tag{35}$$

Пользуясь оценкой (34), имеем

$$\max_{\omega} |y - u| \leqslant 2R \max_{\omega} |r \sin \theta \cdot \psi(r, \varphi, \theta)|, \tag{36}$$

и, следовательно,

$$\max_{\omega} |y(r, \varphi, \theta) - u(r, \varphi, \theta)| = O(h_r^2 + h_\varphi^2 + h_\theta^2).$$

ГЛАВА IV

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В этой главе строятся сеточные аппроксимации наиболее характерных краевых задач для основных уравнений математической физики. Рассматриваются постановки краевых задач для уравнений второго порядка, для системы уравнений Ляме, для бигармонического уравнения.

§ 1. Краевые задачи для уравнений второго порядка

В этом параграфе мы дадим постановки основных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка и укажем некоторые виды условий сопряжения.

1. Уравнения второго порядка. Как уже неоднократно отмечалось, простейшим эллиптическим уравнением второго порядка является уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, которое в двумерном случае имеет вид

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \qquad (1)$$

В § 1 гл. I было показано, что уравнением Лапласа описывается, например, закон стационарного распределения температуры в однородной изотропной среде, не содержащей внутренних источников, установившаяся диффузия и ряд других физических процессов.

Если среда содержит внутренние источники, то указанные процессы описываются уравнением Пуассона

$$\Delta u = -f(x), \qquad x = (x_1, x_2, x_3),$$

где функция $f(x)$ является плотностью распределения источников.

Если плотность распределения источников не зависит от переменной x_3, то, как отмечалось в § 1 гл. I, в ряде случаев искомое решение также не зависит от x_3, и тогда уравнение Пуассона можно записать в виде

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \qquad x=(x_1, x_2). \tag{2}$$

Будем всюду в дальнейшем предполагать, что искомое решение зависит только от двух переменных x_1, x_2 и не зависит от x_3, т. е. $u \equiv u(x_1, x_2)$. Это означает, что описываемый процесс протекает в теле, ограниченном цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Ox_3. При этом мы можем считать, что задача рассматривается в области, образованной сечением указанного цилиндра плоскостью $x_3 = \text{const}$.

Для описания процессов, протекающих в неоднородной среде, требуются уравнения, отличные от уравнения (2). Так, например, распределение температуры в среде, коэффициент теплопроводности k которой меняется от точки к точке, т. е. $k=k(x)$, будет описываться уравнением

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \quad x=(x_1, x_2). \tag{3}$$

Если к тому же процесс распространения тепла зависит от направления, т. е. среда анизотропна, то при надлежащем выборе независимых переменных уравнение принимает вид

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \tag{4}$$

где $k_1(x)$ — коэффициент теплопроводности вдоль оси Ox_1, а $k_2(x)$ — коэффициент теплопроводности вдоль оси Ox_2.

Плотность источников может быть заданной функцией точки x, а может зависеть и от искомого решения $u(x)$. Если плотность источников линейно зависит от температуры, то в (4) к правой части следует добавить величину $q(x)u$. Если плотность источников зависит еще и от теплового потока, то правая часть в (4) принимает следующий вид:

$$-\left(b_1(x)k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x)k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q(x)u + f(x)\right).$$

Подставляя это выражение в (4), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+r_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+r_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}-$$
$$-q(x)u+f(x)=0, \qquad (5)$$

где $r_1=b_1k_1$, $r_2=b_2k_2$.

Уравнения (1) — (4) можно рассматривать как частные случаи уравнения (5).

Иногда при решении задач бывает целесообразным сделать замену независимых переменных так, чтобы в новых переменных область, в которой ищется решение, была по возможности проще. Эта замена может привести к появлению в уравнении (5) смешанных производных. В новых переменных (для них мы сохраним прежние обозначения) уравнение (5) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{21}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+r_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+r_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}-q(x)u+f(x)=0. \qquad (6)$$

Так как уравнение (6) эллиптическое, то его коэффициенты $k_{\alpha\beta}(x)$ должны образовывать знакоопределенную квадратичную форму, т. е.

$$|k_{11}(x)\xi_1^2+(k_{12}(x)+k_{21}(x))\xi_1\xi_2+k_{22}(x)\xi_2^2|\neq 0$$
при $\xi_1^2+\xi_2^2\neq 0$.

А это будет так, если

$$4k_{11}(x)k_{22}(x)>(k_{12}(x)+k_{21}(x))^2. \qquad (7)$$

Соотношение (6) есть наиболее общее линейное эллиптическое уравнение второго порядка на плоскости.

2. Условия сопряжения для уравнений второго порядка. Рассмотрим задачу о стационарном распределении тепла в двух соприкасающихся изотропных телах. Уравнения, описывающие распределение температуры в каждом из этих тел, имеют вид (3). Пусть $k_1(x)$ и $u_1(x)$ — коэффициент теплопроводности и температура первого тела, а $k_2(x)$ и $u_2(x)$ — коэффициент теплопроводности и температура второго тела. Пусть контакт первого и второго тела происходит по цилиндрической поверхности S с направ-

ляющей C, задаваемой уравнением $\varphi(x_1, x_2)=0$, и значения коэффициентов теплопроводности $k_1(x)$ и $k_2(x)$ на этой кривой различны. Предположим, что контакт между телами идеальный, т. е. температуры и тепловые потоки на контактирующих поверхностях в обоих телах совпадают. Это означает, что на кривой $\varphi(x_1, x_2)=0$ должны выполняться условия вида:

$$u_2(x)-u_1(x)=0, \quad k_2\frac{\partial u_2}{\partial n}(x)-k_1\frac{\partial u_1}{\partial n}(x)=0, \quad x\in C,$$

где n — нормаль к C. Эти условия называются *условиями сопряжения.*

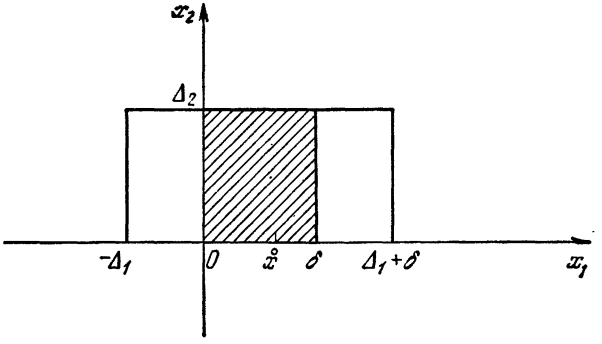


Рис. 16.

Если поверхность контакта есть плоскость, задаваемая уравнением $x_1=\mathring{x}_1$, то условия сопряжения принимают вид

$$u_2(\mathring{x}_1, x_2)-u_1(\mathring{x}_1, x_2)=0,$$

$$k_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, x_2)-k_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, x_2)=0. \tag{8}$$

В дальнейшем значения температуры в обоих телах будем обозначать одной буквой u, а коэффициенты теплопроводности одной буквой k. Тогда совокупность двух тел можно рассматривать как одно тело, но с разрывным коэффициентом теплопроводности. Условия сопряжения (8) удобно

переписать в виде

$$u(\mathring{x}_1+0,\ x_2)-u(\mathring{x}_1-0,\ x_2)=[u]_{x=\mathring{x}}=0,$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1+0,\ x_2)-k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1-0,\ x_2)=\left[k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]_{x=\mathring{x}}=0, \tag{9}$$

где $\mathring{x}=(\mathring{x}_1,\ x_2)$.

Условия сопряжения (9) не являются единственно возможными условиями на поверхности контакта тел. Рассмотрим другую модель контакта. Пусть между двумя плоскими изотропными телами с коэффициентом теплопроводности $k(x)$ помещена тонкая слабопроводящая прослойка. Контакт между телами и прослойкой считаем идеальным. Пусть для простоты поверхности контакта плоские и имеют уравнения $x_1=0$ и $x_1=\delta$. Мысленно вырежем из полученного тела призму с сечением (рис. 16)

$$\Pi=\{-\Delta_1<x_1<\delta+\Delta_1,\ 0<x_2<\Delta_2\}.$$

На основании (3) и (9) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f \quad \text{при} \quad -\Delta_1<x_1<0,$$
$$\delta<x_1<\delta+\Delta_1,\quad 0<x_2<\Delta_2,$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=-f \quad \text{при} \quad 0<x_1<\delta, \tag{10}$$
$$0<x_2<\Delta_2,$$

$$[u]|_{x_1=0}=0,\quad \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}-k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}=0,$$

$$[u]|_{x_1=\delta}=0,\quad k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\delta+0}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\delta-0}=0, \tag{11}$$

где $\varepsilon=\text{const}$ — коэффициент теплопроводности прослойкн. Проинтегрируем первое уравнение по области $-\Delta_1<x_1<0$, $0<x_2<\Delta_2$, второе по области $0<x_1<\mathring{x}_1$, $0<x_2<\Delta_2$, где $\mathring{x}_1\in(0,\ \delta)$, и сложим полученные соотношения. Вос-

пользовавшись условиями (11), в результате получим

$$\int_0^{\Delta_2}\left[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, x_2)-k\frac{\partial u}{\partial x_1}(-\Delta_1, x_2)\right]dx_2+$$

$$+\int_0^{\Delta_2}dx_2\left[\int_{-\Delta_1}^{0}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)dx_1+\int_0^{\mathring{x}_1}\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)\,dx_1+\right.$$

$$\left.+\int_{-\Delta_1}^{\mathring{x}_1}f(x_1, x_2)\,dx_1\right]=0.$$

Поделим это равенство на Δ_2 и устремим Δ_1 и Δ_2 к нулю:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, 0)-k(0, 0)\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, 0)+$$

$$+\int_0^{\mathring{x}_1}(\delta-x_1)\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, 0)+f(x_1, 0)\right]dx_1=0.$$

Полученное соотношение проинтегрируем по $\mathring{x}_1$ от 0 до δ:

$$\varepsilon[u(\delta, 0)-u(0, 0)]-\delta k(0, 0)\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, 0)+$$

$$+\int_0^{\delta}(\delta-x_1)\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, 0)+f(x_1, 0)\right]dx_1=0,$$

а затем поделим на δ и устремим ε и δ к нулю так, чтобы $\varepsilon/\delta=\varkappa=\text{const}$. В результате получим

$$\varkappa[u]|_{x_1=0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}. \tag{12}$$

Аналогично находится второе условие сопряжения

$$\varkappa[u]|_{x_1=0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}. \tag{13}$$

Из (12) и (13), в частности, следует, что тепловой поток на линии контакта непрерывен

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0},$$

а температура, вообще говоря, разрывна.

Условия сопряжения (12), (13) можно трактовать как условия неидеального контакта. Контактирующие тела на поверхности контакта имеют различную температуру, скачок которой пропорционален тепловому потоку.

Для уравнения (3) возможны и другие варианты условий сопряжения, из которых отметим лишь следующий:

$$[u]=0, \quad \left[k\frac{\partial u}{\partial n}\right]=-\alpha(x), \qquad x\in C. \tag{14}$$

Из этих условий следует, что на поверхности контакта температура непрерывна, а тепловой поток претерпевает заданный скачок. Это означает, что на поверхности S распределены сосредоточенные источники с плотностью $\alpha(x)$.

3. **Основные краевые задачи для уравнений второго порядка.** Перейдем к обсуждению краевых условий для уравнений второго порядка. Простейшими краевыми условиями являются условия первого рода, т. е. условия вида

$$u(x)=g(x) \quad \text{при} \quad x\in\Gamma, \tag{15}$$

где Γ — граница области G, в которой задано, скажем, уравнение (6). Если иметь в виду тепловую задачу, то условия (15) задают температуру тела на его поверхности.

Если на границе задан (тепловой) поток, то мы имеем вторую краевую задачу. Если тело изотропно, т. е. процесс описывается уравнением (3), то условия второго рода, в соответствии с § 1 гл. I, имеют вид

$$k\frac{\partial u}{\partial n}=-g(x), \qquad x\in\Gamma. \tag{16}$$

Здесь n — внутренняя нормаль к границе Γ.

На границе Γ часто задается условие третьего рода, т. е. условие вида

$$k\frac{\partial u}{\partial n}=\varkappa(u-u_0)=\varkappa u-g(x), \qquad x\in\Gamma, \tag{17}$$

где $\varkappa(x)$ и $u_0(x)$ — некоторые заданные функции, а $g(x)=\varkappa(u)\,u_0(x)$. Условия (17) выражают теплообмен тела с окружающей средой по закону Ньютона, при этом $\varkappa(x)$ — коэффициент теплообмена, а $u_0(x)$ — температура окружающей среды. Граничные условия второго рода (16) являются частным случаем граничных условий третьего рода (17) при $\varkappa\equiv 0$.

Для уравнения (6) аналогом условия (17) является следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{2} k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \cos(n, x_\alpha) = \varkappa u - g(x), \qquad x \in \Gamma, \quad (18)$$

где n — внутренняя нормаль к границе Γ, а $\partial u/\partial N$ — так называемая производная по конормали. При $k_{12}=k_{21}=0$ и $k_{11}=k_{22}=k$ условие (18) переходит в условие (17).

Для уравнения (6) или любого его частного случая может быть поставлена задача с косой производной, т. е. задача отыскания решения уравнения (6), удовлетворяющего на границе краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \varkappa u - g(x), \qquad x \in \Gamma, \quad (19)$$

где $l \equiv l(x)$ — некоторое заданное поле направлений, при котором, вообще говоря, $\partial u/\partial l$ не совпадает с $\partial u/\partial N$.

Помимо классических граничных условий первого, второго и третьего рода на границе Γ могут быть заданы и другие условия. Мы сейчас получим граничное условие, которое описывает теплообмен тела с окружающей средой по закону Ньютона при наличии на поверхности тела тонкой хорошо проводящей пленки. Для простоты будем предполагать, что тело изотропно, а его поверхность плоская. Пусть пленка расположена на левой части поверхности теплопроводящего тела, ее левая поверхность задана уравнением $x_1 = -\delta$, а правая поверхность пленки и левая поверхность тела — уравнением $x_1 = 0$. Выделим в окрестности границы призму с прямоугольным сечением $-\delta < x_1 < \Delta_1$, $0 < x_2 < \Delta_2$. Будем предполагать, что между пленкой и телом имеется идеальный контакт. Тогда на основании (3), (9) и (17) будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = -f(x), \quad -\delta < x_1, < 0, \quad 0 < x_2 < \Delta_2, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \quad 0 < x_1 < \Delta_1, \quad 0 < x_2 < \Delta_2,$$

$$[u] = 0 \text{ при } x_1 = 0, \quad k \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=+0} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \varkappa u - g(x) \quad \text{при} \quad x_1 = -\delta, \quad (22)$$

где $1/\varepsilon$ — коэффициент теплопроводности пленки.

Проинтегрируем каждое из уравнений (20) по своей области задания, сложим полученные соотношения и воспользуемся условиями сопряжения (21) и граничным условием (22). В результате получим

$$\int_0^{\Delta_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1, x_2)-\varkappa(x_2)\,u(-\delta, x_2)+g(x_2)\right]dx_2+$$

$$+\int_0^{\Delta_2}\left[\int_{-\delta}^{0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)\,dx_1+\int_0^{\Delta_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)dx_1+\right.$$

$$\left.+\int_{-\delta}^{\Delta_1} f(x_1, x_2)\,x_1\right]dx_2=0.$$

Поделим это соотношение на Δ_2 и перейдем к пределу при Δ_1 и Δ_2, стремящихся к нулю:

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, 0)-\varkappa(0)\,u(-\delta, 0)+g(0)+$$

$$+\int_{-\delta}^{0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, 0)+f(x_1, 0)\right]dx_1=0.$$

Устремим теперь ε и δ к нулю так, чтобы $\delta/\varepsilon=\sigma=\text{const}$. В результате получим искомое граничное условие

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\varkappa u-g, \qquad x_1=0. \tag{23}$$

Выясним, какое условие нужно поставить в угловой точке, если на примыкающих к ней сторонах тела имеются тонкие пленки, быть может, разной толщины. Пусть угол прямой, его вершина расположена в начале координат, стороны параллельны осям, а тело расположено в первом квадранте. Выделим в окрестности угловой точки прямоугольник $-\delta_1<x_1<\Delta_1$, $-\delta_2<x_2<\Delta_2$ (рис. 17). Напишем уравнение, условия сопряжения и граничные условия:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f \text{ при } 0<x_1<\Delta_1,\ 0<x_2<\Delta_2,$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=-f, \quad -\delta_1<x_1<0, \quad -\delta_2<x_2<\Delta_2,$$

$$0\leqslant x_1<\Delta_1, \quad -\delta_2<x_2<0, \tag{24}$$

$$[u]=0, \quad k\frac{\partial u}{\partial x_1}(+0, x_2)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}(-0, x_2)=0, \quad 0<x_2<\Delta_2, \tag{25}$$

$$[u]=0, \quad k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x, +0)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, -0)=0, \quad 0<x_1<\Delta_1,$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}=\varkappa_1 u-g, \quad x_1=-\delta_1,$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\varkappa_2 u-g_2 \quad \text{при} \quad x_2=-\delta_2. \tag{26}$$

Проинтегрируем каждое из уравнений (24) по своей области

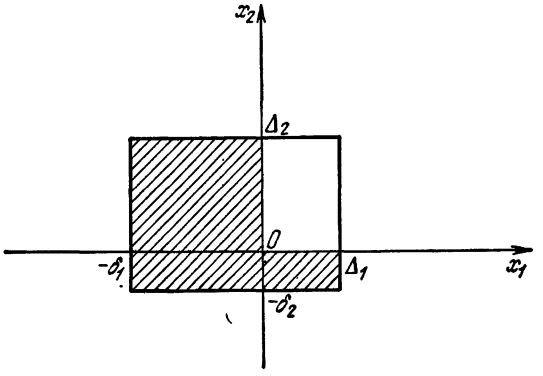


Рис. 17

задания, воспользуемся условиями сопряжения (25) и граничными условиями (26):

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\delta_2}^{0}\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1, x_2)\,dx_2+\int_{0}^{\Delta_2}k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1, x_2)\,dx_2+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\delta_1}^{0}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \Delta_2)\,dx_1+\int_{0}^{\Delta_1}k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \Delta_2)\,dx_1-$$

$$-\int_{-\delta_2}^{\Delta_2}(\varkappa_1 u-g_1)\,dx_2-\int_{-\delta_1}^{\Delta_1}(\varkappa_2 u-g_2)\,dx_1+$$

$$+\int_{-\delta_1}^{\Delta_1}dx_1\int_{-\delta_2}^{\Delta_2}f(x_1, x_2)\,dx_2=0.$$

Устремим теперь Δ_1 и Δ_2 к нулю; ε, δ_1 и δ_2 также устремим к нулю, но при условии $\delta_1/\varepsilon=\sigma_1=\text{const}$, $\delta_2/\varepsilon=\sigma_2=\text{const}$. В результате получим

$$\sigma_1\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_2\frac{\partial u}{\partial x_1}=0, \quad x_1=0, \quad x_2=0. \tag{27}$$

§ 2. Сеточные аппроксимации уравнений второго порядка

В этом параграфе будут пос роены сеточные аппроксимации дифференциальных уравнений второго порядка, приведенных в § 1.

1. Разностные аппроксимации уравнений с переменными коэффициентами без смешанных производных. В предыдущей главе был построен ряд схем для уравнения Пуассона. Здесь мы рассмотрим несколько более общее эллиптическое уравнение второго порядка, например, уравнение (4) § 1:

$$Lu\equiv\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x). \tag{1}$$

Пусть Ω — прямоугольная равномерная сетка на плоскости Ox_1x_2. В гл. II был указан способ аппроксимации обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка с переменными коэффициентами. Так как оператор L является суммой двух операторов такого типа, то аппроксимацию уравнения (1) можно написать сразу. Именно

$$\Lambda y=(a_1y_{\bar{x}_1})_{x_1}+(a_2y_{\bar{x}_2})_{x_2}=-\varphi(x), \tag{2}$$

где коэффициенты $a_\alpha(x)$, $\alpha=1, 2$, и $\varphi(x)$ можно выбрать, например, так

$$a_1(x)=k_1\left(x_1-\frac{h_1}{2}, x_2\right), \quad a_2(x)=k_2\left(x_1, x_2-\frac{h_2}{2}\right), \tag{3}$$
$$\varphi(x)=f(x), \quad x=(x_1, x_2), \quad x_1=i_1h_1, \quad x_2=i_2h_2.$$

При таком выборе коэффициентов разностное уравнение (2) будет аппроксимировать уравнение (1) с погрешностью $O(|h|^2)$, где $|h|^2=h_1^2+h_2^2$. Порядок погрешности аппроксимации не изменится, если коэффициенты $a_\alpha(x)$ выбрать следующим образом:

$$a_1(x)=\frac{k_1(x_1, x_2)+k_1(x_1-h_1, x_2)}{2},$$
$$a_2(x)=\frac{k_2(x_1, x_2)+k_2(x_1, x_2-h_2)}{2}. \tag{4}$$

Возможны и другие способы выбора a_α и φ. Отметим, что при написании разностного уравнения (2) используется пятиточечный шаблон «крест».

Пусть теперь Ω — произвольная неравномерная прямоугольная сетка и

$$h_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}, \quad \hbar_\alpha = \frac{h_\alpha + h_\alpha^+}{2},$$

$$h_\alpha^+ = h_\alpha^{(i_\alpha + 1)} = x_\alpha^{(i_\alpha + 1)} - x_\alpha^{(i_\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2.$$

На этой сетке уравнение (1) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\Lambda y = (a_1 y_{\bar{x}_1})_{\hat{x}_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{\hat{x}_2} = -\varphi(x), \tag{5}$$

где a_α, $\alpha = 1, 2$, и $\varphi(x)$ — вычисляются по формулам (3) или (4). Напомним, что

$$v_{\hat{x}_\alpha} = \frac{v^{(+1_\alpha)} - v}{\hbar_\alpha}.$$

Уравнение (5) может быть построено, например, методом баланса с последующей аппроксимацией коэффициентов, как это было сделано в § 2 гл. II для обыкновенного дифференциального уравнения.

Вычислим погрешность аппроксимации уравнения (5) с коэффициентами (3) $\psi = \Lambda u + \varphi$. В силу (1) погрешность аппроксимации можно преобразовать к виду

$$\psi = \Lambda u + \varphi - Lu - f = \sum_{\alpha=1}^{2} \psi_\alpha + (\varphi - f),$$

где

$$\psi_\alpha = \left(a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha}\right)_{\hat{x}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right). \tag{6}$$

Вычислим ψ_α. Имеют место формулы

$$w^{(+0,5_\alpha)} = w + \frac{h_\alpha^+}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{(h_\alpha^+)^2}{8}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + O((h_\alpha^+)^3),$$

$$w^{(-0,5_\alpha)} = w - \frac{h_\alpha}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + O(h_\alpha^3),$$

из которых следует, что

$$\frac{1}{\hbar_\alpha}\left\{w^{(+0,5_\alpha)} - w^{(-0,5_\alpha)}\right\} = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{8\hbar_\alpha}\left[(h_\alpha^+)^2 - h_\alpha^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + O(\hbar_\alpha^2).$$

Так как $\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(+1_\alpha)} + O(h_\alpha^2)$, то последнее тождество позволяет представить $\partial w/\partial x_\alpha$ в виде

$$\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = (w^{(-0,5_\alpha)})_{\hat{x}_\alpha} - \frac{1}{8}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2).$$

Полагая здесь $w = k_\alpha \partial u/\partial x_\alpha$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = \left\{\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} - \frac{1}{8} h_\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right\}_{\hat{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2).$$

Тем самым

$$\psi_\alpha = (\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2), \tag{7}$$

где

$$\eta_\alpha = a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} - \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} + \frac{h_\alpha^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right).$$

Оценим η_α. Так как

$$u = \left(u + 0{,}5 h_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(-0,5_\alpha)} + O(h_\alpha^3),$$

$$u^{(-1_\alpha)} = \left(u - 0{,}5 h_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(-0,5_\alpha)} + O(h_\alpha^3),$$

то

$$u_{\bar{x}_\alpha} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} + O(h_\alpha^2)$$

и, следовательно,

$$\eta_\alpha = (a_\alpha - k_\alpha^{(-0,5_\alpha)})\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} + O(h_\alpha^2). \tag{8}$$

Если теперь учесть (3), то для η_α будем иметь оценку

$$\eta_\alpha = O(h_\alpha^2).$$

Таким образом, если решение уравнения (1) $u(x_1, x_2)$ имеет непрерывные производные по x_1 и x_2 до четвертого порядка включительно, то погрешность аппроксимации ψ уравнения (5) с коэффициентами и правой частью (3) может быть представлена в виде

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{2} (\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi^*, \quad \psi^* = O(h_1^2 + h_2^2), \quad \eta_\alpha = O(h_\alpha^2). \tag{9}$$

2. Разностные схемы для уравнения со смешанными производными и переменными коэффициентами. Обратимся к уравнению

$$Lu \equiv \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = -f(x). \qquad (10)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (6) § 1. Оно будет эллиптическим, если его коэффициенты удовлетворяют условию (7) § 1.

Построение разностной аппроксимации уравнения (10) на равномерной сетке не представляет большого труда. Легко проверить, что уравнение

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2}\left[\left(k_{\alpha\beta}(x)\,y_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta}(x)\,y_{x_\beta}\right)_{\bar{x}_\alpha}\right] = -f(x) \qquad (11)$$

аппроксимирует уравнение (10) с погрешностью $O(|h|^2)$. Укажем еще одну аппроксимацию уравнения (10) с той же погрешностью

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha}\right)_{\bar{x}_\alpha}\right] + \frac{1}{4}\sum_{\alpha\neq\beta}\left[\left(k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta}y_{x_\beta}\right)_{\bar{x}_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta}y_{x_\beta}\right)_{x_\alpha}\right] = -f(x). \qquad (12)$$

В случае постоянных коэффициентов $k_{\alpha\beta}$ уравнение (12) принимает вид

$$\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (k_{12}+k_{21})\,y_{\mathring{x}_1\mathring{x}_2} = -f(x), \qquad (13)$$

где

$$v_{\mathring{x}_\alpha} = \left(v^{(+1_\alpha)} - v^{(-1_\alpha)}\right)/(2h_\alpha).$$

Построим теперь разностную аппроксимацию уравнения (10) на неравномерной сетке. Построение проведем с помощью метода Бубнова — Галеркина (см. § 3, гл. II).

Напомним (см. гл. I), что обобщенным из $W_2^1(G)$ решением уравнения (10) называется такая функция $u(x)\in W_2^1(G)$,

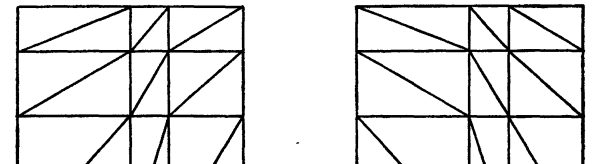
которая при любой функции

$$v(x) \in \mathring{W}_2^1(G)$$

удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_G \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} dx_1 dx_2 = \iint_G f(x) v(x) dx_1 dx_2. \quad (14)$$

Назовем приближенным решением уравнения (10) функцию $\bar{u}(x) \in V$, которая при любой $v(x) \in \mathring{V}$ удовлетворяет интегральному тождеству (14). Здесь V — некоторое конечномерное подпространство пространства $W_2^1(G)$, а $\mathring{V} = V \cap \mathring{W}_2^1(G)$.



а) б)

Рис. 18.

Зададим пространство V. Пусть Ω — произвольная неравномерная прямоугольная сетка на плоскости Ox_1x_2, образованная точками пересечения двух семейств прямых $x_1 = x_1^{(i_1)}$, $x_2 = x_2^{(i_2)}$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\alpha = 1, 2, \ldots$ Эти прямые разбивают плоскость Ox_1x_2 на прямоугольные ячейки $G[i] = \left\{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)}\right\}$. Разобьем каждую из этих ячеек прямой, проходящей через ее противоположные вершины $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2+1)})$, на два треугольника (рис. 18, *а*). Обозначим левый верхний треугольник через $\Delta^+[i]$, а правый нижний треугольник через $\Delta^-[i]$. Пусть $\bar{G}_h$ есть объединение всех таких треугольников $\Delta^\pm[i]$, пересечение которых с областью G не пусто, т. е. $\bar{G}_h = \{x \mid x \in \Delta^\pm[i],\ \Delta^\pm[i] \cap G \neq \emptyset\}$. Тогда в качестве подпространства V пространства $W_2^1(G)$ возьмем пространство непрерывных на $\bar{G}_h$ и линейных над каждым треугольником $\Delta^\pm[i] \in \bar{G}_h$ функций.

Обозначим через $\bar{\omega} = \bar{G}_h \cap \Omega$ множество узлов сетки Ω, расположенных в $\bar{G}_h$, а через $\mathfrak{M} = \{i = (i_1, i_2) \mid x_i \in \bar{\omega}\}$ — множество номеров узлов сетки $\bar{\omega}$. Тогда приближенное решение уравнения (10) можно искать в виде

$$\bar{u}(x) = \sum_{i \in \mathfrak{M}} y_j \eta_j(x), \qquad j = (j_1, j_2), \tag{15}$$

где $\{\eta_j\}$ — базис пространства V.

Зададим базис в V. Пусть $D[i]$ есть шестиугольник, образованный объединением шести треугольников $\Delta^{\pm}[i]$, одна из вершин каждого из которых совпадает с узлом x_i

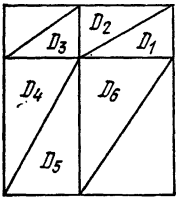


Рис. 19.

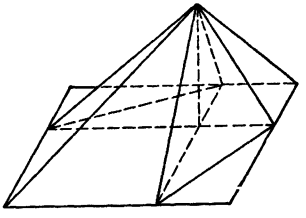


Рис. 20.

(рис. 19). В качестве базиса в V возьмем совокупность непрерывных, кусочно-линейных функций, каждая из которых отлична от нуля лишь в одном узле сетки $\bar{\omega}$. Будем считать, что это отличное от нуля значение равно единице. Тем самым каждая из базисных функций $\eta_i(x)$ будет отлична от нуля лишь на $D[i]$ и задаваться следующим соотношением:

$$\eta_{i_1 i_2}(x) = \begin{cases} (x_1^{(i_1+1)} - x_1)/h_1^+, & x \in D_1[i], \\ (x_2^{(i_2+1)} - x_2)/h_2^+, & x \in D_2[i], \\ (x_1 - x_1^{(i_1)})/h_1 + (x_2^{(i_2+1)} - x_2)/h_2^+, & x \in D_3[i], \\ (x_1 - x_1^{(i_1-1)})/h_1, & x \in D_4[i], \\ (x_2 - x_2^{(i_2-1)})/h_2, & x \in D_5[i], \\ (x_1^{(i_1+1)} - x_1)/h_1^+ + (x_2 - x_2^{(i_2)})/h_2, & x \in D_6[i], \\ 0 & x \notin D_\mu[i], \\ & \mu = 1, \ldots, 6. \end{cases} \tag{16}$$

Вид функций (16) изображен на рис. 20. При выбранном базисе коэффициенты y_j в (15) имеют смысл значений приближенного решения в узлах сетки $\bar{\omega}$.

Найдем те уравнения, которым должны удовлетворять неизвестные параметры y_j из (15). Для этого подставим в (14)

$$u(x) \equiv \bar{u}(x) \quad \text{и} \quad v(x) \equiv \eta_i(x).$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j \in \mathfrak{M}} A_i^j y_j = \Phi_i, \qquad i \in \mathfrak{M}, \tag{17}$$

где

$$A_i^j = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} \iint\limits_{G \cap D[i]} k_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\beta} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_\alpha} dx_1 dx_2, \tag{18}$$

$$\Phi_i = \iint\limits_{G \cap D[i]} f \eta_i dx_1 dx_2, \quad i = (i_1, i_2), \quad j = (j, j_2). \tag{19}$$

Предполагая сначала, что коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ постоянны, и используя вид функций $\eta_i(x)$, вычислим коэффициенты A_i^j для тех значений i, при которых $D[i] \subset G$.

Из (16) находим, что

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} = \begin{cases} -1/h_1^+, & x \in D_1, \\ 0, & x \in D_2, \\ 1/h_1, & x \in D_3, \\ 1/h_1, & x \in D_4, \\ 0, & x \in D_5, \\ -1/h_1^+, & x \in D_6, \\ 0, & x \overline{\in} D_\mu, \\ \mu = 1, \ldots, 6, \end{cases} \qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} = \begin{cases} 0, & x \in D_1, \\ -1/h_2^+, & x \in D_2, \\ -1/h_2^+, & x \in D_3, \\ 0, & x \in D_4, \\ 1/h_2, & x \in D_5, \\ 1/h_2, & x \in D_6, \\ 0, & x \overline{\in} D_\mu, \\ \mu = 1, \ldots, 6. \end{cases} \tag{20}$$

Из (18) и (20) следует, что отличными от нуля могут быть лишь следующие коэффициенты:

$$A_{i_1 i_2}^{i_1 i_2}, \quad A_{i_1 i_2}^{i_1+1, i_2}, \quad A_{i_1 i_2}^{i_1-1, i_2}, \quad A_{i_1 i_2}^{i_1, i_2-1}, \quad A_{i_1 i_2}^{i_1, i_2+1}, \quad A_{i_1 i_2}^{i_1+1, i_2+1},$$

$$A_{i_1 i_2}^{i_1-1, i_2-1}.$$

Вычисления показывают, что

$$A^{i_1 i_2}_{i_1 i_2} = \frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1^+} + \frac{h_2}{h_1} + \frac{h_2^+}{h_1} + \frac{h_2}{h_1^+}\right) + \frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2^+} + \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1}{h_2^+} + \frac{h_1^+}{h_2}\right) - \\ - (k_{12} + k_{21}),$$

$$A^{i_1+1,\, i_2}_{i_1 i_2} = -\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1^+} + \frac{h_2}{h_1^+}\right) + \frac{k_{12}+k_{21}}{2},$$

$$A^{i_1-1,\, i_2}_{i_1 i_2} = -\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1} + \frac{h_2}{h_1}\right) + \frac{k_{12}+k_{21}}{2},$$

$$A^{i_1,\, i_2+1}_{i_1 i_2} = -\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2^+} + \frac{h_1}{h_2^+}\right) + \frac{k_{12}+k_{21}}{2}, \qquad (21)$$

$$A^{i_1,\, i_2-1}_{i_1 i_2} = -\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2} + \frac{h_1}{h_2}\right) + \frac{k_{12}+k_{21}}{2},$$

$$A^{i_1+1,\, i_2+1}_{i_1 i_2} = A^{i_1-1,\, i_2-1}_{i_1 i_2} = -\frac{k_{12}+k_{21}}{2}.$$

Подставляя (21) в (17) и преобразовывая, получим

$$\Lambda^+ y \equiv k_{11} y_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} + k_{22} y_{\overset{\vee}{x}_2 \overset{\vee}{x}_2} + \frac{k_{12}+k_{21}}{2}\left(y_{\hat{x}_1 \hat{x}_2} + y_{\overset{\vee}{x}_1 \overset{\vee}{x}_2}\right) = \frac{-1}{\hbar_1 \hbar_2}\Phi.$$

Пусть теперь $k_{\alpha\beta}$ — переменные. Разностную аппроксимацию уравнения (10) в этом случае напишем по аналогии с только что построенной аппроксимацией

$$\Lambda^+ y \equiv \frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(k_{\alpha\alpha} y_{\overset{-}{x}_\alpha}\right)_{\hat{x}_\alpha} + \left(k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha}\right)_{\overset{\vee}{x}_\alpha}\right] + \sum_{\substack{\alpha,\,\beta=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{2}\left[\left(k_{\alpha\beta} y_{\hat{x}_\beta}\right)_{\hat{x}_\alpha} + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(k_{\alpha\beta} y_{\overset{\vee}{x}_\beta}\right)_{\overset{\vee}{x}_\alpha}\right]\right\} = -f(x). \qquad (22)$$

Вычислим погрешность аппроксимации уравнения (22) $\psi^+ = \Lambda^+ u + f$. Сначала преобразуем ψ^+, заменяя в силу (10) f на $-Lu$ и записывая ее в виде суммы

$$\psi^+ = \Lambda^+ u - Lu = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} \psi^+_{\alpha\beta},$$

где

$$\psi^+_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\left[\left(k_{\alpha\alpha} u_{x_\alpha}\right)_{\hat{x}_\alpha} + \left(k_{\alpha\alpha} u_{x_\alpha}\right)_{\overset{\vee}{x}_\alpha}\right] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

а

$$\psi^+_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\left(k_{\alpha\beta} u_{\hat{x}_\beta}\right)_{\hat{x}_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta} u_{\overset{\vee}{x}_\beta}\right)_{\overset{\vee}{x}_\alpha}\right] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right), \qquad \alpha \neq \beta.$$

Замечая, что

$$\frac{1}{2}\left[\left(k_{\alpha\alpha}u_{\bar{x}_\alpha}\right)_{\hat{x}_\alpha}+\left(k_{\alpha\alpha}u_{x_\alpha}\right)_{\check{x}_\alpha}\right]=\frac{1}{2}\left(\left(k_{\alpha\alpha}+k_{\alpha\alpha}^{(-1\alpha)}\right)u_{\bar{x}_\alpha}\right)_{\hat{x}_\alpha},$$

и принимая во внимание (6), (7), находим, что

$$\psi_{\alpha\alpha}^{+}=\left(\eta_{\alpha\alpha}^{+}\right)_{\hat{x}_\alpha}+O\left(h_\alpha^2\right),$$

а так как

$$k_{\alpha\alpha}+k_{\alpha\alpha}^{(-1\alpha)}-2k_{\alpha\alpha}^{(-0{,}5\alpha)}=O\left(h_\alpha^2\right),$$

то на основании (8)

$$\eta_{\alpha\alpha}^{+}=O\left(h_\alpha^2\right).$$

Далее

$$\left(k_{\alpha\beta}u_{\hat{x}_\beta}\right)_{\hat{x}_\alpha}+\left(k_{\alpha\beta}u_{\check{x}_\beta}\right)_{\check{x}_\alpha}=\frac{h_1^{+}h_2^{+}}{\hbar_1\hbar_2}\left(k_{\alpha\beta}u_{x_\beta}\right)_{x_\alpha}+\frac{h_1h_2}{\hbar_1\hbar_2}\left(k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}_\beta}\right)_{\bar{x}_\alpha}=$$
$$=\frac{h_1^{+}h_2^{+}+h_1h_2}{\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+\frac{\left(h_\alpha^{+}\right)^2h_\beta^{+}-h_\alpha^2h_\beta}{2\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+$$
$$+\frac{h_\alpha^{+}\left(h_\beta^{+}\right)^2-h_\alpha h_\beta^2}{2\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2u}{\partial x_\beta^2}\right)+O\left(\hbar_1^2+\hbar_2^2\right),$$

и, следовательно,

$$\psi_{\alpha\beta}^{+}=\frac{\left(h_1^{+}-h_1\right)\left(h_2^{+}-h_2\right)}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+\frac{\left(h_\alpha^{+}\right)^2h_\beta^{+}-h_\alpha^2h_\beta}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+$$
$$+\frac{h_\alpha^{+}\left(h_\beta^{+}\right)^2-h_\alpha h_\beta^2}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2u}{\partial x_\beta^2}\right)+O\left(\hbar_1^2+\hbar_2^2\right),\quad\alpha\neq\beta.$$

Подставляя $\psi_{\alpha\beta}^{+}$ в выражение для ψ^{+}, находим, что $\psi^{+}=O(1)$, т. е. аппроксимации в точке нет.

Построим другую аппроксимацию уравнения (10). Для этого воспользуемся тем же самым методом, но разбиение плоскости на треугольники возьмем иное, изображенное на рис. 18, *б*). Проводя аналогичные рассуждения, получим уравнение

$$\Lambda^{-}y=\frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{\hat{x}_\alpha}+\left(k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha}\right)_{\check{x}_\alpha}\right]+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\left[\left(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta}\right)_{\hat{x}_\alpha}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta}\right)_{\check{x}_\alpha}\right]\right\}=-f,$$

погрешность аппроксимации $\psi^- = \Lambda^- u + f$ которого имеет вид

$$\psi^- = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} \psi^-_{\alpha\beta},$$

где $\psi^-_{\alpha\alpha} = \psi^+_{\alpha\alpha}$, а

$$\psi^-_{\alpha\beta} = -\frac{(h_1^+ - h_1)(h_2^+ - h_2)}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + \\ + \frac{(h_\alpha^+)^2 h_\beta - h_\alpha^2 h_\beta^+}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + \frac{h_\alpha (h_\beta^+)^2 - h_\alpha^+ h_\beta^2}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2}\right) + \\ + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2), \quad \alpha \neq \beta,$$

и, следовательно, $\psi^- = O(1)$.

Используя операторы Λ^+ и Λ^-, построим новый оператор $\Lambda = {}^1/_2(\Lambda^+ + \Lambda^-)$ и с его помощью напишем новую аппроксимацию уравнения (10)

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2}(\Lambda^+ + \Lambda^-) y = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(k_{\alpha\alpha} y_{\mathring{x}_\alpha}\right)_{\hat{x}_\alpha} + \left(k_{\alpha\alpha} y_{\hat{x}_\alpha}\right)_{\mathring{x}_\alpha}\right] + \\ + \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha,\,\beta=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{2}\left[\left(k_{\alpha\beta} y_{\mathring{x}_\beta}\right)_{\hat{x}_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta} y_{\hat{x}_\beta}\right)_{\mathring{x}_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta} y_{\hat{x}_\beta}\right)_{\hat{x}_\alpha} + \right. \\ \left. + \left(k_{\alpha\beta} y_{\mathring{x}_\beta}\right)_{\mathring{x}_\alpha}\right] = -f(x). \qquad (23)$$

Вычислим погрешность аппроксимации уравнения (23). Используя представления для $\psi^\pm_{\alpha\beta}$, находим, что

$$\psi = \Lambda u + f = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\eta_\alpha\right)_{\hat{x}_\alpha} + \psi^*, \quad \eta_\alpha = O(h_\alpha^2), \quad \psi^* = O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2). \qquad (24)$$

Замечание. На равномерной сетке уравнение (23) совпадает с ранее построенным уравнением (12).

3. Схема повышенного порядка аппроксимации для уравнения со смешанными производными и постоянными коэффициентами. Построим разностную схему, аппроксимирующую уравнение (10) в случае постоянных коэффициентов с погрешностью $O(|h|^4)$. Для написания разностного уравнения будем использовать девятиточечный шаблон типа «ящик». Этот шаблон уже использовался нами в гл. II при построении схем повышенного порядка аппроксимации для уравнения Пуассона. Оказывается, однако, что урав-

нение (10) на указанном шаблоне можно аппроксимировать с погрешностью $O(|h|^4)$ лишь при условии, что шаги сетки h_1 и h_2 определенным образом связаны с коэффициентами k_{11} и k_{22}. Будем считать, что $k_{11}=k_{22}=1$, $k_{12}=k_{21}=\varkappa$. Тогда сетка Ω должна быть квадратной.

Изучим сначала разностный оператор

$$\Lambda v = v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa\sigma\left(v_{\bar{x}_1 x_2} + v_{x_1 \bar{x}_2}\right) + \varkappa(1-\sigma)\left(v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + v_{x_1 x_2}\right),$$

где σ — некоторый произвольный параметр. Разложим функцию Λv по степеням h

$$\Lambda v = Lv + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x_2^4}\right) + \frac{\varkappa h^2}{3}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^3 \partial x_2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x_1 \partial x_2^3}\right) + \\ + \frac{\varkappa(1-2\sigma)}{2} h^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + O(h^4) = \\ = Lv + \frac{h^2}{12} L^2 v - \frac{h^2}{6}\left[1 - 3(1-2\sigma)\varkappa + 2\varkappa^2\right] \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + O(h^4).$$

Отсюда следует, что разностное уравнение

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa\left[\sigma\left(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}\right) + (1-\sigma)\left(y_{x_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}\right)\right] + \\ + \frac{h^2}{6}\left(1 - 3(1-2\sigma)\varkappa + 2\varkappa^2\right) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi', \quad (25)$$

где

$$\varphi' = f + \frac{h^2}{12} Lf, \quad 26)$$

аппроксимирует уравнение (10) с погрешностью $O(h^4)$ при любом значении параметра σ.

Покажем, что на самом деле уравнение (25) от параметра σ не зависит. Легко проверить, что

$$y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = y_{x_1 \bar{x}_2} - h y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2}, \qquad y_{x_1 x_2} = y_{\bar{x}_1 x_2} + h y_{\bar{x}_1 x_1 x_2},$$

и, следовательно,

$$y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2} = y_{x_1 \bar{x}_2} + y_{\bar{x}_1 x_2} + h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}.$$

Подставляя это соотношение в $\Lambda' y$, получим, что

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa\left[\sigma\left(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}\right) + y_{x_1 \bar{x}_2} + y_{\bar{x}_1 x_2} + \right. \\ \left. + h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} - \sigma\left(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2} + h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}\right)\right] + \\ + h^2\left(\frac{1}{6} - \frac{\varkappa}{2} + \varkappa\sigma + \frac{\varkappa^2}{3}\right) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \\ + \varkappa\left(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}\right) + \frac{h^2}{6}\left(1 + 3\varkappa + 2\varkappa^2\right) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}.$$

Тем самым разностное уравнение (25) принимает вид

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + \\ + \frac{h^2}{6} (1 + 3\varkappa + 2\varkappa^2) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi'. \quad (27)$$

4. Разностные схемы для уравнений с младшими членами. Рассмотрим уравнение

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha (x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha (x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] = -f(x) \quad (28)$$

и построим для него разностную схему на равномерной сетке Ω.

Простейшей схемой второго порядка аппроксимации для уравнения (28) является следующая:

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\left(a_\alpha (x) y_{\bar{x}_\alpha} \right)_{x_\alpha} + r_\alpha (x) y_{\mathring{x}_\alpha} \right] = -f(x), \\ x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (29)$$

где $a_\alpha (x)$ вычисляется, например, по формулам (3). Запишем уравнение (29) в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)} + a_\alpha}{h_\alpha^2} y = \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ \left(\frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)}}{h_\alpha^2} + \frac{r_\alpha}{2h_\alpha} \right) y^{(+1_\alpha)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{a_\alpha}{h_\alpha^2} - \frac{r_\alpha}{2h_\alpha} \right) y^{(-1_\alpha)} \right\} + f(x).$$

Отсюда видно, что в случае, когда коэффициенты $r_\alpha (x)$ существенно больше коэффициентов $k_\alpha (x)$, принцип максимума (см. гл. III) для схемы (29) верен лишь при достаточно малых h_α. Чтобы избавиться от этого ограничения, построим другую схему для уравнения (28).

Перепишем уравнение (28) в виде

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha (x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{r_\alpha (x)}{k_\alpha (x)} \cdot k_\alpha (x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] = -f(x)$$

и будем аппроксимировать потоки

$$- k_\alpha (x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$$

в старших и в младших членах одинаково; тогда получим

$$\Lambda y=\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha}{2k_\alpha}\left(a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha}+a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\right)\right]=-f(x). \tag{30}$$

Очевидно, что погрешность аппроксимации оператора есть $O(|h|^2)$. Преобразуем младшие члены так:

$$\begin{gathered}\frac{r_\alpha}{2k_\alpha}a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha}=\frac{r_\alpha+|r_\alpha|}{2k_\alpha}a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha}-\frac{|r_\alpha|}{2k_\alpha}a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha},\\ \frac{r_\alpha}{2k_\alpha}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}=\frac{r_\alpha-|r_\alpha|}{2k_\alpha}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}+\frac{|r_\alpha|}{2k_\alpha}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha},\end{gathered} \tag{31}$$

и обозначим $\frac{r_\alpha+|r_\alpha|}{2}=r_\alpha^+\geqslant 0$, $\frac{r_\alpha-|r_\alpha|}{2}=r_\alpha^-\leqslant 0$, $r_\alpha^+=0$ при $r_\alpha\leqslant 0$, $r_\alpha^-=0$ при $r_\alpha\geqslant 0$. Тогда подставляя (31) в (30), будем иметь

$$\Lambda y=\sum_{\alpha=1}^{2}\left(1-\frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}\right)\left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}.$$

Но

$$1-\frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}=\frac{1}{1+\frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}}+O(h_\alpha^2).$$

Поэтому можно взять разностную схему:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{1}{1+\frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}}\left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}=-f(x). \tag{32}$$

Погрешность аппроксимации этой схемы есть $O(|h|^2)$ и, как легко проверить, принцип максимума для нее имеет место при любых h_α.

§ 3. Аппроксимация условий сопряжения и граничных условий для уравнений второго порядка

В этом параграфе строятся разностные аппроксимации условий сопряжения и граничных условий, отмеченных в § 1. Наибольшее внимание уделяется построению различных аппроксимаций граничных условий второго и третьего рода.

1. Аппроксимация условий сопряжения. Пусть коэффициент теплопроводности $k_1(x)$ в уравнении (4) § 1

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x_1, x_2) \quad (1)$$

имеет разрыв первого рода на прямой $x_1=0$ и требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям сопряжения (9) § 1

$$u(+0, x_2)-u(-0, x_2)=0,$$
$$k_1(+0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}-k_1(-0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}=0. \quad (2)$$

Будем для простоты предполагать, что коэффициент $k_2(x)$ и правая часть $f(x)$ уравнения (1) непрерывны при $x_1=0$. Построим аппроксимацию условий сопряжения (2). Пусть сетка такова, что линия разрыва $x_1=0$ проходит через ее узлы. На основании первого из условий (2) искомое решение непрерывно при $x_1=0$, поэтому значения сеточной функции при $x_1=0$ и будут его аппроксимировать.

Напишем простейшую аппроксимацию второго из условий (2)

$$a_1(h_1, x_2)\,y_{x_1}-a_1(0, x_2)\,y_{\bar{x}_1}=0,$$

где коэффициент $a_1(x)$ задается, например, соотношением (3) § 2, т. е.

$$a_1(x)=k_1\left(x_1-\frac{h_1}{2}, x_2\right),$$

и вычислим ее погрешность

$$\psi=a_1(h_1, x_2)\,u_{x_1}-a_1(0, x_2)\,u_{\bar{x}_1}=$$
$$=k_1(+0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}(+0, x_2)-k_1(-0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}(-0, x_2)+$$
$$+\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=+0}+\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=-0}+O(h_1^2). \quad (3)$$

Используя уравнение (1), выразим $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$ через

$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ и $f(x)$ и подставим в (3):

$$\psi = -h_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - h_1 f(x) + O(h_1^2) = \\ = -h_1 (a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} - h_1 f(x) + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Отсюда видно, что погрешность аппроксимации есть величина $O(h_1)$, но если второе из условий сопряжения (2) аппроксимировать соотношениями

$$a_1(h_1, x_2)\, y_{x_1} - a_1(0, x_2)\, y_{\bar{x}_1} + h_1 (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + h_1 f(x) = 0, \quad (4)$$

то погрешность нового уравнения будет уже $O(h_1^2 + h_2^2)$. Если уравнение (4) разделить на h_1 и преобразовать, то оно примет вид

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(x),$$

т. е. будет полностью совпадать с разностными уравнениями (2) § 2 для других узлов, где разрыва нет.

Пусть теперь требуется найти решение уравнения (1) с разрывным на прямой $x_1 = 0$ коэффициентом $k_1(x)$ при выполнении условий сопряжения (12) § 1, (13) § 1, т. е.

$$\varkappa [u]\Big|_{x_1=0} = k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}, \quad \varkappa [u]\Big|_{x_1=0} = k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}. \quad (5)$$

Сетку выберем так же, как и в предыдущем случае. На этот раз решение уравнения (1) при $x_1 = 0$ имеет разрыв первого рода и, следовательно, сеточная функция $y(x)$, аппроксимирующая решение уравнения (1) при $x_1 = 0$, должна иметь два значения. Обозначим эти значения через $y^+(0, x_2)$ и $y^-(0, x_2)$. Напишем простейшие аппроксимации условий (5)

$$\varkappa (y^+ - y^-) = a_1(0, x_2)\, y_{\bar{x}_1}, \quad \varkappa (y^+ - y^-) = a_1(h_1, x_2)\, y_{x_1},$$

где

$$y_{\bar{x}_1} = \frac{1}{h_1}[y^-(0, x_2) - y(-h_1, x_2)],$$
$$y_{x_1} = \frac{1}{h_1}[y(h_1, x_2) - y^+(0, x_2)],$$

и вычислим погрешности аппроксимации этих уравнений.

Для первого уравнения погрешность аппроксимации равна

$$\psi_1 = \varkappa[u] - a_1(0,\ x_2)\, u_{\bar{x}_1} =$$
$$= \varkappa[u] - k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=-0} + O(h_1^2) =$$
$$= -\frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + f\right)_{x_1=-0} + O(h_1^2) =$$
$$= -\frac{h_1}{2}\left[(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} + f\right]_{x_1=-0} + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Аналогично вычисляется погрешность аппроксимации второго уравнения

$$\psi_2 = \varkappa[u] - a_1(h_1,\ x_2)\, u_{x_1} = \frac{h_1}{2}\left[(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} + f\right]_{x_1=+0} + O(h_1^2 + h_2^2)$$

Из приведенных разложений следует, что погрешности аппроксимации обоих уравнений суть величины $O(h_1)$, но для уравнений

$$\varkappa(y^+ - y^-) - a_1 y_{\bar{x}_1} + \frac{h_1}{2}(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + \frac{h_1}{2} f = 0,$$
$$\varkappa(y^+ - y^-) - a_1^{(+1_1)} y_{x_1} - \frac{h_1}{2}(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} - \frac{h_1}{2} f = 0$$

погрешности аппроксимации будут $O(h_1^2 + h_2^2)$. Поделим каждое из этих уравнений на $h_1/2$:

$$\begin{aligned} &\frac{\varkappa(y^+ - y^-) - a_1 y_{\bar{x}_1}}{0{,}5h_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f, \\ &\frac{a_1^{(+1_1)} y_{x_1} - \varkappa(y^+ - y^-)}{0{,}5h_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f. \end{aligned} \tag{6}$$

В этом виде уравнения (6) напоминают уравнения (2) § 2 для других узлов сетки.

Если для уравнения (1) при $x_1 = 0$ заданы условия сопряжения (14) § 1, то так же, как и в случае условий сопряжения (2), строится их сеточная аппроксимация

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(0,\ x_2) - \frac{\alpha(x_2)}{h_1}. \tag{7}$$

2. Аппроксимация граничных условий для уравнения без смешанных производных. Перейдем к рассмотрению аппроксимаций граничных условий. Начнем рассмотрение с граничных условий для уравнения (1). Сначала построим **разностные аппроксимации для граничных условий**

второго (16) § 1 и третьего (17) § 1 рода. Будем пока предполагать, что решение уравнения (1) ищется в прямоугольнике $G=\{x=(x_1,\ x_2)\,|\,0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,\ 2\}$, на границе Γ которого оно удовлетворяет граничным условиям третьего рода (17) § 1. В подробной записи рассматриваемая задача выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x), \tag{1}$$

$$\begin{gathered}k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\varkappa_{-\alpha}u-g_{-\alpha}(x_\beta),\ x_\alpha=0,\\ -k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\varkappa_{+\alpha}u-g_{+\alpha}(x_\beta),\ x_\alpha=l_\alpha,\ \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \alpha\neq\beta.\end{gathered} \tag{8}$$

Как отмечалось в гл. I, отыскание решения задачи (1), (8) эквивалентно нахождению элемента, доставляющего минимум следующему функционалу:

$$J(v)\equiv\int\limits_G\left[k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2-2f(x)\,v\right]dx+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_0^{l_\beta}\left\{\left[\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v\right]|_{x_\alpha=0}+\left[\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v\right]|_{x_\alpha=l_\alpha}\right\}dx_\beta. \tag{9}$$

Разностную схему для задачи (1), (8) построим методом аппроксимации функционала (9) (см. § 3 гл. II). В замкнутой области $\bar G=G\cup\Gamma$ введем прямоугольную равномерную сетку $\bar\omega=\bar\omega_1\times\bar\omega_2=\{x=(x_1,\ x_2)\,|\,x_\alpha\in\bar\omega_\alpha,\ \alpha=1,\ 2\}$, где $\bar\omega_\alpha=\{x_\alpha\,|\,x_\alpha=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ N_\alpha,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha\}$ — сетка на отрезке $[0,\ l_\alpha]$. Множество внутренних узлов сетки $\bar\omega$ обозначим через $\omega=\{x=(x_1,\ x_2)\,|\,x_\alpha\in\omega_\alpha,\ \alpha=1,\ 2\}$, где $\omega_\alpha=\left\{x_\alpha^{(i_\alpha)}\,\middle|\,i_\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ N_\alpha-1\right\}$, а множество граничных узлов — через $\gamma=\bar\omega\setminus\omega$. Пусть, кроме того, $\omega_\alpha^+=\left\{x_\alpha^{(i_\alpha)}\right|,\ i_\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ N_\alpha\}$, ${}^+\omega_\alpha=\left\{x_\alpha^{(i_\alpha)}\right|$, $i_\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ N_\alpha-1\}$. Будем также использовать обозначение

$$\hbar_\alpha=\begin{cases}h_\alpha, & x_\alpha\in\omega_\alpha,\\ h_\alpha/2, & x_\alpha=0,\ l_\alpha.\end{cases}$$

Заменим квадратурными формулами все интегралы, входящие в функционал (9). Для разных интегралов

будем использовать, вообще говоря, разные квадратурные формулы. В двойном интеграле

$$\int\limits_G k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 dx = \int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2} k_1(x_1, x_2)\left(\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\, dx_2$$

заменим интеграл по x_1 квадратурной формулой центральных прямоугольников, а интеграл по x_2 — квадратурной формулой трапеций

$$\int\limits_G k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 dx \sim$$

$$\sim \sum_{x_1\in\omega_1^+}\sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} k_1\left(x_1-\frac{h_1}{2}, x_2\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(x_1-\frac{h_1}{2}, x_2\right)\right)^2 h_1\hbar_2. \quad (10)$$

В интеграле $\int\limits_G k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 dx$ формулой трапеций заменим интеграл по x_1, а формулой центральных прямоугольников интеграл по x_2:

$$\int\limits_G k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 dx \sim$$

$$\sim \sum_{x_1\in\bar{\omega}_1}\sum_{x_2\in\omega_2^+} k_2\left(x_1, x_2-\frac{h_2}{2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\left(x_1, x_2-\frac{h_2}{2}\right)\right)^2 \hbar_1 h_2. \quad (11)$$

В последнем двукратном интеграле в (9) формулу трапеций используем как для замены интеграла по x_1, так и для замены интеграла по x_2:

$$\int\limits_G [-2f(x)v]\, dx \sim -2\sum_{x_1\in\bar{\omega}_1}\sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} f(x_1, x_2)\, v(x_1, x_2)\, \hbar_1\hbar_2. \quad (12)$$

Все интегралы по границе заменим квадратурной формулой трапеций:

$$\int\limits_0^{l_\beta} [(\varkappa_{-\alpha}v^2 - 2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0} + (\varkappa_{+\alpha}v^2 - 2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\, dx_\beta \sim$$

$$\sim \sum_{\bar{\omega}_\beta} [(\varkappa_{-\alpha}v^2 - 2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0} + (\varkappa_{+\alpha}v^2 - 2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\, \hbar_\beta. \quad (13)$$

Аппроксимируем в формулах (10) и (11) производные разностными отношениями:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right)\sim v_{\bar{x}_1},\quad \frac{\partial v}{\partial x_2}\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right)\sim v_{\bar{x}_2}. \qquad (14)$$

Подставим теперь аппроксимации (10) — (14) в (9). В результате получим следующую аппроксимацию функционала (9):

$$J_h(v)\equiv$$
$$\equiv \sum_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2} a_1 v_{\bar{x}_1}^2 h_1 h_2+\sum_{\bar{\omega}_1\times\omega_2^+} a_2 v_{\bar{x}_2}^2 h_1 h_2-2\sum_{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2} f v h_1 h_2+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\bar{\omega}_\beta}\left[(\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)\,|_{x_\alpha=0}+(\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v)\,|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]h_\beta, \qquad (15)$$

где $a_\alpha=k_\alpha^{(-0{,}5\alpha)}$.

Итак, задача минимизации функционала (9) сведена к задаче минимизации аппроксимирующего функционала (15). Но $J_h(v)$ есть не что иное, как функция многих переменных $v(x_l)$, $x_l\in\bar{\omega}$. Минимум этой функции достигается в точке $v(x)=y(x)$, где ее первые производные обращаются в нуль.

Пусть $x\in\omega$. Вычисляя производную $J_n(v)$ по $v(x)$ и приравнивая ее нулю, после деления полученного уравнения на $2h_1h_2$ будем иметь

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1}+(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2}=-f(x),\qquad x\in\omega. \qquad (16)$$

Мы построили разностную аппроксимацию уравнения (1). Эта аппроксимация совпадает с ранее построенной аппроксимацией (2) — (3) § 2.

Пусть $x\in\gamma$, $x_1=0$, $x_2\neq 0$, l_2; мы выбрали точку, расположенную на левой границе прямоугольника и не совпадающую ни с одним из его углов. Производя описанные выше вычисления и деля полученное уравнение на $2h_2$, получим

$$a_1^{(+1_1)}y_{x_1}+\frac{h_1}{2}(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2}=\varkappa_{-1}y-g_{-1}-\frac{h_1}{2}f,$$
$$x_1=0,\ x_2\neq 0,\ l_2. \qquad (17)$$

Это есть аппроксимация одного из граничных условий (8). Граничные условия на других сторонах прямоугольника аппроксимируются аналогично.

Пусть, наконец, $x \in \gamma$, $x_1 = x_2 = 0$. После вычислений найдем, что

$$\frac{h_2}{h_1+h_2} a_1^{(+1_1)} y_{x_1} + \frac{h_1}{h_1+h_2} a_2^{(+1_2)} y_{x_2} = \\ = \frac{h_2 \varkappa_{-1} + h_1 \varkappa_{-2}}{h_1+h_2} y - \frac{h_2 g_{-1} + h_1 g_{-2}}{h_1+h_2} - \frac{h_1 h_2}{2(h_1+h_2)} f, \quad x_1 = x_2 = 0. \tag{18}$$

Аналогичные уравнения записываются и в остальных углах прямоугольника. Уравнение (18) можно рассматривать как разностную аппроксимацию линейной комбинации граничных условий (8) при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Уравнения типа (18) необходимы для замыкания систем уравнений (16), (17).

Оценим погрешность аппроксимации уравнения (17)

$$\psi = \left[a_1(h_1, x_2) u_{x_1} + \frac{h_1}{2} (a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} - \varkappa_{-1} u + g_{-1} + \frac{h_1}{2} f \right]\Big|_{x_1=0} = \\ = \left[k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \varkappa_{-1} u + \right. \\ \left. + g_{-1} + \frac{h_1}{2} f + C (h_1^2 + h_1 h_2^2) \right].$$

Принимая во внимание уравнение (1) и граничное условие (8), отсюда находим, что $\psi(0, x_2) = O(|h|^2)$. Аналогично доказывается, что уравнение (18) тоже имеет погрешность аппроксимации $O(|h|^2)$.

Рассмотрим другие граничные условия для уравнения (1). Пусть в прямоугольнике G ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее на границе прямоугольника граничным условиям типа (23) § 1 (27) § 1.

Более подробно, пусть

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = -f(x), \qquad x \in G, \tag{1}$$

$$k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{-\alpha}(x_\beta) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = \varkappa_{-\alpha} u - g_{-\alpha}(x_\beta), \quad x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{+\alpha}(x_\beta) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = \varkappa_{+\alpha} u - g_{+\alpha}(x_\beta), \quad x_\alpha = l_\alpha, \\ \alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta, \tag{19}$$

$$\left[\sigma_{-1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_{-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=0,\quad \left[\sigma_{+1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_{+2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=l_1\\x_2=l_2}}=0,$$
$$\left[\sigma_{-1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\sigma_{+2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=l_2}}=0,\quad \left[\sigma_{+1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\sigma_{-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=l_1\\x_2=0}}=0. \tag{20}$$

Отыскание решения задачи (1), (19), (20) эквивалентно нахождению элемента $u(x_1, x_2)$, минимизирующего функционал

$$J(v)=\int_G\left[k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2-2f(x)\,v\right]dx+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^{l_\beta}\left\{\left[\sigma_{-\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2+\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v\right]\Big|_{x_\alpha=0}+\right.$$
$$\left.+\left[\sigma_{+\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2+\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v\right]\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right\}dx_\beta. \tag{21}$$

Этот функционал отличается от функционала (9) лишь наличием дополнительных слагаемых $\sigma_{\pm\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2$ в интегралах по границе.

Как и при построении разностной схемы для задачи (1), (8), аппроксимируем функционал (21) на сетке $\bar\omega$ путем замены интегралов подходящими квадратурными формулами, а производных — разностными отношениями. Подставляя в (21) аппроксимации

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^{l_\beta}\left[\sigma_{-\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2\Big|_{x_\alpha=0}+\sigma_{+\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]\sim$$
$$\sim\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_\beta^+}\left[\bar\sigma_{-\alpha}v_{\bar x_\beta}^2\Big|_{x_\alpha=0}+\bar\sigma_{+\alpha}v_{\bar x_\beta}^2\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]h_\beta,$$

где $\bar\sigma_{\pm\alpha}=\sigma_{\pm\alpha}(x_\beta-h_\beta/2)$, из (10)—(14), получим,

$$J_h(v)=\sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2}a_1v_{\bar x_1}^2h_1\hbar_2+\sum_{\bar\omega_1\times\omega_2^+}a_2v_{\bar x_2}^2\hbar_1h_2-2\sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2}fv\hbar_1\hbar_2+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\sum_{\bar\omega_\beta}\left[(\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)\big|_{x_\alpha=0}+(\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)\big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]\hbar_\beta+\right.$$
$$\left.+\sum_{\omega_\beta^+}\left[\bar\sigma_{-\alpha}v_{\bar x_\beta}^2\Big|_{x_\alpha=0}+\bar\sigma_{+\alpha}v_{\bar x_\beta}^2\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]h_\beta\right\}.$$

Аппроксимации уравнения (1) и граничных условий (19), (20) получаются путем приравнивания нулю производных $J_h(v)$ по $v(x)$.

Напишем аппроксимации граничных условий (19), (20). Пусть $x \in \gamma$, $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, l_2. Тогда

$$a_1^{(+1_1)} y_{x_1} + \left[\left(\tilde{\sigma}_{-1} + \frac{h_1}{2} a_2\right) y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2} = \\ = \varkappa_{-1} y - g_{-1} - \frac{h_1}{2} f, \quad x_1 = 0, \quad x_2 \neq 0, \quad l_2. \tag{22}$$

Если $x_1 = x_2 = 0$, то

$$\left(\tilde{\sigma}_{-2}^{(+1_1)} + \frac{h_2}{2} a_1^{(+1_1)}\right) y_{x_1} + \left(\tilde{\sigma}_{-1}^{(+1_2)} + \frac{h_1}{2} a_2^{(+1_2)}\right) y_{x_2} = \\ = \frac{h_2}{2} \varkappa_{-1} y + \frac{h_1}{2} \varkappa_{-2} y - \frac{h_2}{2} g_{-1} - \frac{h_1}{2} g_{-2} - \frac{h_1 h_2}{4} f, \quad x_1 = x_2 = 0. \tag{23}$$

Аналогично записываются граничные условия и на остальных частях границы γ.

Используя разложение по формуле Тейлора, легко проверить, что при достаточной гладкости решения и коэффициентов задачи (1), (19), (20) граничные условия (20) и (23) имеют погрешность аппроксимации $O(|h|^2)$.

3. Аппроксимация граничных условий третьего рода для уравнения со смешанными производными. Обратимся к аппроксимации граничных условий для уравнения (10) § 2. Будем считать, что решение уравнения (10) § 2 ищется в прямоугольнике $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, на границе которого поставлены граничные условия (18) § 1. В подробной записи рассматриваемая задача выглядит так:

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = -f(x), \qquad x \in G, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} k_{\alpha\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} &= \varkappa_{-\alpha} u - g_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ -k_{\alpha\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} &= \varkappa_{+\alpha} u - g_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned} \tag{25}$$

Будем предполагать, что уравнение (24) эллиптическое, и, следовательно, его коэффициенты удовлетворяют условию (7) § 1. Самосопряженность задачи (24), (25) предполагать не будем, т. е. будем считать, что, вообще говоря, $k_{12}(x) \not\equiv k_{21}(x)$.

Разностную схему для задачи (24), (25) построим методом аппроксимации интегрального тождества (см. § 3 гл. II).

Напомним, что обобщенным решением задачи (24), (25) называется такая функция $u(x) \in W_2^1(G)$, которая при любой функции $v(x) \in W_2^1(G)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} - fv\right]dx_1\,dx_2 +$$

$$+\int_0^{l_1}\left[\varkappa_{-2}uv\,|_{x_2=0} + \varkappa_{+2}uv\,|_{x_2=l_2} - g_{-2}v\,|_{x_2=0} - g_{+2}v\,|_{x_2=l_2}\right]dx_1 +$$

$$+\int_0^{l_2}\left[\varkappa_{-1}uv\,|_{x_1=0} + \varkappa_{+1}uv\,|_{x_1=l_1} - g_{-1}v\,|_{x_1=0} - g_{+1}v\,|_{x_1=l_1}\right]dx_2 = 0. \qquad (26)$$

Интегральное тождество (26) аппроксимируем сумматорным тождеством путем замены интегралов квадратурными формулами и производных — разностными отношениями. Интегралы по границе заменим квадратурными формулами трапеций, интегралы от функции fv — формулами трапеций, интегралы от функций $k_{\alpha\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta}\dfrac{\partial v}{\partial x_\alpha}$ — линейными комбинациями всевозможных формул правых и левых прямоугольников, точнее

$$\iint_G k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\,dx_1\,dx_2 \sim$$

$$\sim \frac{1}{4}\left\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2 + \sum_{+\omega_1\times+\omega_2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{+\omega_1\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2 + \sum_{\omega_1^+\times+\omega_2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2\right\}.$$

Производные в этом соотношении заменим соответствующими разностными отношениями.

После указанных аппроксимаций интегральное тождество (26) превратится в сумматорное тождество

следующего вида:

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2}\left[\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}_\beta}v_{\bar{x}_\alpha}+\sum_{+\omega_1\times+\omega_2}k_{\alpha\beta}u_{x_\beta}v_{x_\alpha}\right]h_1h_2+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{+\omega_1\times\omega_2^+}\left[k_{11}u_{x_1}v_{x_1}+k_{12}u_{\bar{x}_2}v_{x_1}+k_{21}u_{x_1}v_{\bar{x}_2}+k_{22}u_{\bar{x}_2}v_{\bar{x}_2}\right]h_1h_2+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\omega_1^+\times+\omega_2}\left[k_{11}u_{\bar{x}_1}v_{\bar{x}_1}+k_{12}u_{x_2}v_{\bar{x}_1}+k_{21}u_{\bar{x}_1}v_{x_2}+k_{22}u_{x_2}v_{x_2}\right]h_1h_2-$$

$$-\sum_{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2}fv\hbar_1\hbar_2+\sum_{\bar{\omega}_1}\left[(\varkappa_{-2}u-g_{-2})\,v\,|_{x_2=0}+\right.$$

$$\left.+(\varkappa_{+2}u-g_{+2})\,v\,|_{x_2=l_2}\right]\hbar_1+\sum_{\bar{\omega}_2}\left[(\varkappa_{-1}u-g_{-1})\,v\,|_{x_1=0}+\right.$$

$$\left.+(\varkappa_{+1}u-g_{+1})\,v\,|_{x_1=l_1}\right]\hbar_2=0. \quad (27)$$

Приближенным решением задачи (24), (25) будем называть такую сеточную функцию $y(x)$, заданную на $\bar{\omega}$, которая при любой сеточной функции $v(x)$, заданной на той же сетке $\bar{\omega}$, удовлетворяет сумматорному тождеству (27). Выбирая сеточную функцию v равной единице в каком-либо одном узле сетки $\bar{\omega}$ и нулю в остальных узлах, получим разностное уравнение в том узле, где v отлична от нуля. Перебирая таким способом все узлы сетки $\bar{\omega}$, мы получим сеточную задачу, аппроксимирующую задачу (24), (25). При этом во внутренних узлах сетки ω мы получаем аппроксимацию (24), совпадающую с ранее построенной аппроксимацией этого уравнения (12) § 2. В граничных узлах γ получим аппроксимацию граничных условий (25). Так, например, при $x_1=0$, $x_2\neq 0$, l_2 разностные уравнения имеют вид

$$\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2}y_{x_1}+k_{12}y^{\circ}_{x_2}+\frac{h_1}{2}\left\{\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(-1_2)}}{2}y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}+\right.$$

$$\left.+\left[(k_{21}y_{x_1})^{\circ}_{x_2}+(k_{12}y^{\circ}_{x_2})_{x_1}\right]\right\}=$$

$$=\varkappa_{-1}y-g_{-1}-\frac{h_1}{2}f,\quad x_1=0;\ x_2\neq 0,\ l_2, \quad (28)$$

а при $x_1 = x_2 = 0$ —

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2}\,y_{x_1} + k_{12}y_{x_2} - \varkappa_{-1}y + g_{-1}\right) +$$
$$+ \frac{h_1}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+1_2)}}{2}\,y_{x_2} + k_{21}y_{x_1} - \varkappa_{-2}y + g_{-2}\right) +$$
$$+ \frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}\left[(k_{12}y_{x_2})_{x_1} + (k_{21}y_{x_1})_{x_2} + f\right] = 0,\quad x_1 = x_2 = 0. \qquad (29)$$

В остальных узлах границы γ уравнения пишутся аналогично.

Отметим, что при $k_{12} \equiv k_{21} \equiv 0$, с точностью до способа вычисления коэффициентов уравнения (28) совпадают с уравнениями (17), а уравнения (29) — с уравнениями (18).

Легко проверить, что если решение и коэффициенты задачи (24), (25) достаточно гладкие, то уравнения (28) аппроксимируют граничные условия (25) с погрешностью $O(h_1^2+h_2^2)$, а уравнение (29) аппроксимирует линейную комбинацию граничных условий в угловой точке лишь с погрешностью $O(h_1+h_2)$.

Исследуем более подробно погрешность аппроксимации уравнения (29). С помощью формулы Тейлора находим, что

$$\psi(0,\,0) = \frac{h_2}{h_1+h_2}\left[k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2} +\right.$$
$$\left. + \frac{h_2}{2}k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \varkappa_{-1}u + g_{-1}\right] + \frac{h_1}{h_1+h_2}\left[k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2} +\right.$$
$$\left. + \frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}k_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \varkappa_{-2}u + g_{-2}\right] +$$
$$+ \frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + f\right] + O\left(h_1^2+h_2^2\right).$$

Примем во внимание, что u есть решение задачи (24), (25). Тогда

$$\psi(0,\,0) =$$
$$= \frac{h_2^2}{2(h_1+h_2)}k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h_1^2}{2(h_1+h_2)}k_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + O(h_1^2+h_2^2). \qquad (30)$$

Отсюда следует, что если хотя бы одно из чисел $k_{12}(0,\,0)$ и $k_{21}(0,\,0)$ отлично от нуля, то погрешность аппроксимации в точке $(0,\,0)$ есть $O(h_1+h_2)$.

Покажем, как с помощью изменения коэффициентов при $y(0,\,0)$ в (29) можно построить уравнение, погреш-

ность аппроксимации которого есть $O(h_1^2+h_2^2)$. Будем при этом дополнительно предполагать, что

$$k_{12}(0,\ 0)+k_{21}(0,\ 0)\neq 0. \tag{31}$$

Преобразуем выражение погрешности аппроксимации (30) путем исключения из него производных $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(0,\ 0)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(0,\ 0)$. На основании (25) граничные условия при $x_1=x_2=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}+k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}&=\varkappa_{-1}u-g_{-1},\\ k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}+k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}&=\varkappa_{-2}u-g_{-2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Отсюда находим, что при $x_1=x_2=0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_2}&=[k_{11}(\varkappa_{-2}u-g_{-2})-k_{21}(\varkappa_{-1}u-g_1)]/(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}),\\ \frac{\partial u}{\partial x_1}&=[k_{22}(\varkappa_{-1}u-g_{-1})-k_{12}(\varkappa_{-2}u-g_{-2})/(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}). \end{aligned} \tag{33}$$

Знаменатель в этих формулах в нуль не обращается, так как на основании условия эллиптичности (7) § 1 уравнения (24)

$$k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}>(k_{12}-k_{21})^2/4. \tag{34}$$

Продифференцируем первое из условий (25) по x_2 при $\alpha=1$ и по x_1 при $\alpha=2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)&=\frac{\partial}{\partial x_2}(\varkappa_{-1}u-g_{-1}),\\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)&=\frac{\partial}{\partial x_1}(\varkappa_{-2}u-g_{-2}). \end{aligned}$$

Присоединяя к этим уравнениям при $x_1=x_2=0$ уравнение (24), получим систему уравнений относительно вторых производных $\partial^2u/\partial x_1^2$, $\partial^2u/\partial x_1\partial x_2$ и $\partial^2u/\partial x_2^2$ в точке (0, 0). Определитель системы равен

$$-(k_{12}+k_{21})(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})\,|_{x_1=x_2=0},$$

и на основании (31), (34) отличен от нуля. Это позволяет выразить вторые производные искомого решения в точке (0, 0) через само решение и его первые производные в этой же точке. Но на основании (33) первые производные

в точке (0, 0) выражаются через само решение и, следовательно, вторые производные можно представить в виде

$$k_{\beta\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}(0,\ 0)=\mu_\alpha u(0,\ 0)-\nu_\alpha,\qquad \beta\neq\alpha.$$

Подставим эти значения производных в (30)

$$\psi(0,\ 0)=\frac{h_2^2}{2(h_1+h_2)}(\mu_2 u(0,\ 0)-\nu_2)+$$
$$+\frac{h_1^2}{2(h_1+h_2)}(\mu_1 u(0,\ 0)-\nu_1)+O(h_1^2+h_2^2).$$

Отсюда следует, что разностное уравнение

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2}y_{x_1}+k_{12}y_{x_2}-\varkappa_1^* y+g_{-1}^*\right)+$$
$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+1_2)}}{2}y_{x_2}+k_{21}y_{x_1}-\varkappa_{-2}^* y+g_{-2}^*\right)+$$
$$+\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1}+(k_{21}y_{x_1})_{x_2}+f]=0,$$

где

$$\varkappa_{-\alpha}^*=\varkappa_{-\alpha}+\frac{h_\beta}{2}\mu_\beta,\qquad g_{-\alpha}^*=g_{-\alpha}+\frac{h_\beta}{2}\nu_\beta,\qquad \beta\neq\alpha,$$

имеет погрешность аппроксимации $O(h_1^2+h_2^2)$.

Если сетка $\bar{\omega}$ неравномерная, то этим же методом аппроксимации интегрального тождества можно построить следующие аналоги условий (28) и (29):

$$\frac{k_{\alpha\alpha}+k_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}}{2}y_{x_\alpha}+k_{\alpha\beta}\frac{y_{\hat{x}_\beta}+y_{\check{x}_\beta}}{2}+\frac{h_\alpha^+}{4}\Big[\big(k_{\beta\beta}y_{x_\beta}\big)_{\hat{x}_\beta}+$$
$$+\big(k_{\beta\beta}y_{x_\beta}\big)_{\check{x}_\beta}+\big(k_{\beta\alpha}y_{x_\alpha}\big)_{\hat{x}_\beta}+\big(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta}\big)_{x_\alpha}+\big(k_{\beta\alpha}y_{x_\alpha}\big)_{\check{x}_\beta}+$$
$$+\big(k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta}\big)_{x_\alpha}\Big]=\varkappa_{-\alpha}y-g_{-\alpha}-\frac{h_\alpha^+}{2}f,\ x_\alpha=0,\ x_\beta\neq 0,\ l_\beta,\qquad (35)$$

$$\frac{h_2^+}{h_1^++h_2^+}\left(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2}y_{x_1}+k_{12}y_{x_2}-\varkappa_{-1}y+g_{-1}\right)+$$
$$+\frac{h_1^+}{h_1^++h_2^+}\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+1_2)}}{2}y_{x_2}+k_{21}y_{x_1}-\varkappa_{-2}y+g_{-2}\right)+$$
$$+\frac{h_1^+h_2^+}{2(h_1^++h_2^+)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1}+(k_{21}y_{x_1})_{x_2}+f]=0,\ x_1=x_2=0\qquad (36)$$

и т. д.

4. Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для задачи Неймана. В прямоугольнике $G = \{x=(x_1, x_2) \mid 0<x_\alpha<l_\alpha, \ \alpha=1, 2\}$ рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения Пуассона (задачу Неймана):

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x \in G, \tag{37}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha} = -g_{-\alpha}(x_\beta), \qquad x_\alpha = 0,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha} = -g_{+\alpha}(x_\beta), \qquad x_\alpha = l_\alpha, \ \beta \neq \alpha. \tag{38}$$

Задача (37), (38) является частным случаем уже рассмотренной нами задачи (1), (8) и получается из последней при $k_1 \equiv k_2 \equiv 1$, $\varkappa_{\pm\alpha} = 0$.

Перепишем разностную схему (16)—(18), аппроксимирующую задачу (1), (8) применительно к рассматриваемой задаче (37), (38).

Введем обозначение

$$\Lambda_\alpha v = \begin{cases} \dfrac{2}{h_\alpha} v_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, & x_\alpha \neq 0, \ l_\alpha, \\ -\dfrac{2}{h_\alpha} v_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases} \tag{39}$$

Тогда разностная схема, аппроксимирующая задачу (37), (38), запишется так:

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2) y = -\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \omega, \\ f(x) + \dfrac{2}{h_\alpha} g_{\mp\alpha}(x_\beta), & x \in \bar{\omega}, \ x_\alpha = 0, \ l_\alpha, \ x_\beta \neq 0, l_\beta, \\ f(x) + \dfrac{2}{h_1} g_{\mp 1} + \dfrac{2}{h_2} g_{\mp 2}, & x \in \bar{\omega}, \ x_1 = 0, l_1, \ x_2 = 0, l_2. \end{cases}$$

В § 1 гл. III было построено разностное уравнение (6), (7)

$$\Lambda' y \equiv \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi'(x), \quad x \in \omega, \tag{40}$$

где

$$\Lambda_\alpha v = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \varphi' = f + \frac{1}{12}\left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right),$$

которое аппроксимирует уравнение Пуассона (37) с погрешностью $O(h_1^4 + h_2^4)$.

Построим разностную схему, аппроксимирующую с погрешностью $O(h_1^4 + h_2^4)$ задачу (37), (38). По аналогии с (40) разностную схему будем искать в виде

$$\bar{\Lambda}' y \equiv \bar{\Lambda}_1 y + \bar{\Lambda}_2 y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2 y = -\Phi'(x), \quad x \in \bar{\omega}, \quad (41)$$

где правую часть $\Phi'(x)$ при $x \in \bar{\omega}$ следует определить так, чтобы погрешность аппроксимации была величиной требуемого порядка малости.

Если при $x \in \omega$ положить $\Phi' = \varphi'$, то уравнение (41) совпадает с уравнением (40) и, следовательно, будет аппроксимировать (37) с погрешностью $O(h_1^4 + h_2^4)$.

Тем самым осталось задать Φ' на границе γ. Рассмотрим сначала уравнение (41) при $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0, l_2$. Учитывая (39), перепишем уравнение (41) в следующем виде:

$$y_{x_1} + \frac{h_1}{2} y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1}{2} \Phi' = 0. \quad (42)$$

Вычислим погрешность аппроксимации ψ этого уравнения

$$\psi = u_{x_1} + \frac{h_1}{2} u_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} u_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1}{2} \Phi' =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2} \Delta u + \frac{h_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\Delta u + \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u +$$
$$+ \frac{h_2^2 - h_1^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}\Phi' + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Используя уравнение (37) и граничное условие (38), отсюда находим, что

$$\psi = -g_{-1} - \frac{h_1}{2} f - \frac{h_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1} -$$
$$- \frac{h_2^2 - h_1^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2} + \frac{h_1}{2}\Phi' + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Тем самым, для того чтобы погрешность аппроксимации

уравнения (42) была $O(h_1^4+h_2^4)$, достаточно положить

$$\Phi'=f+\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\frac{2}{h_1}\left(g_{-1}+\frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{h_2^2-h_1^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right)=$$
$$=\varphi'+\frac{2}{h_1}\left(g_{-1}+\frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{h_2^2-h_1^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right)$$

при $x_1=0$, $x_2\neq 0$, l_2.

Определим теперь Φ' при $x_1=x_2=0$. Учитывая (39), перепишем (41) в следующем виде:

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}y_{x_1}+\frac{h_1}{h_1+h_2}y_{x_2}+\frac{1}{6}\frac{h_1^2+h_2^2}{h_1+h_2}y_{x_1x_2}+\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}\Phi'=0.$$

Вычислим погрешность аппроксимации этого уравнения

$$\psi(0,\ 0)=\frac{h_2}{h_1+h_2}u_{x_1}+\frac{h_1}{h_1+h_2}u_{x_2}+\frac{1}{6}\frac{h_1^2+h_2^2}{h_1+h_2}u_{x_1x_2}+$$
$$+\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}\Phi'=\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}\left\{\frac{2}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{2}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\Delta u+\right.$$
$$+\left(\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\Delta u+\frac{h_1}{3}\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u+\frac{h_2^2-h_1^2}{6h_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial u}{\partial x_1}+$$
$$+\frac{h_2}{3}\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta u+\frac{h_1^2-h_2^2}{6h_2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{h_1(h_1^2+h_2^2)}{18h_2}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\frac{\partial u}{\partial x_2}+$$
$$+\frac{h_2(h_1^2+h_2^2)}{18h_1}\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{h_1^2+h_2^2}{3h_1h_2}\left(\sigma\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\right.$$
$$\left.\left.+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\Phi'+O(h_1^4+h_2^4)\right\}.$$

Для преобразования выражения погрешности аппроксимации воспользуемся уравнением (37) и граничными условиями (38):

$$\psi(0,\ 0)=-\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}\left\{\varphi'+\frac{2}{h_1}\left(g_{-1}+\frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{h_2^2-h_1^2}{6}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right)+\right.$$
$$+\frac{2}{h_2}\left(g_{-2}+\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{h_1^2-h_2^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial x_1^2}\right)+$$
$$+\frac{4}{h_1h_2}\left(\frac{h_2^2(h_1^2+h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-1}}{\partial x_2^3}+\frac{h_1^2(h_1^2+h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-2}}{\partial x_1^3}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\sigma\frac{\partial g_{-1}}{\partial x_2}+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}(1-\sigma)\frac{\partial g_{-2}}{\partial x_1}\right)-\Phi'+O(h_1^4+h_2^4)\right\}.$$

Из вида погрешности аппроксимации следует, что она

будет величиной порядка $O(h_1^4+h_2^4)$, если положить

$$\Phi'(0,\ 0)=\varphi'(0,\ 0)+\frac{2}{h_1}\left[g_{-1}+\frac{h_1}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{h_2^2-h_1^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right]+$$
$$+\frac{2}{h_2}\left[g_{-2}+\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{h_1^2-h_2^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial x_1^2}\right]+$$
$$+\frac{4}{h_1h_2}\left[\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\sigma\frac{\partial g_{-1}}{\partial x_2}+\frac{h_2^2(h_1^2+h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-1}}{\partial x_2^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}(1-\sigma)\frac{\partial g_{-2}}{\partial x_1}+\frac{h_1^2(h_1^2+h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-2}}{\partial x_1^3}\right]\quad\text{при}\quad x_1=0,\quad x_2=0,$$

где σ — произвольный параметр, целесообразный выбор которого становится ясным при исследовании скорости сходимости схемы (41).

Для остальных участков границы γ правая часть Φ' определяется аналогично.

5. Аппроксимация граничного условия третьего рода на криволинейной границе (согласованная сетка). До сих пор мы строили аппроксимации граничных условий, содержащих производные, когда участок границы, на котором рассматривалось граничное условие, был прямолинейным и параллельным одной из координатных осей. В этом и следующем пунктах мы рассмотрим более общую ситуацию, когда участок границы либо криволинеен, либо прямолинеен, но не параллелен ни одной из осей координат.

Пусть в некоторой области G требуется найти решение уравнения (37), которое на участке Γ_0 границы G удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\varkappa u-g(x),\qquad x\in\Gamma_0, \tag{43}$$

где n — направление внутренней нормали к Γ_0. Пусть Γ_0 задается уравнениями

$$x_\alpha=\mu_\alpha(t),\qquad t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ \alpha=1,\ 2. \tag{44}$$

Будем для определенности предполагать, что производные $\mu'_\alpha(t)$ функций $\mu_\alpha(t)$ положительны и удовлетворяют условиям

$$0<m\mu_1'(t)\leqslant\mu_2'(t)\leqslant M\mu_1'(t)<\infty, \tag{45}$$

а область расположена правее границы (рис. 21).

Будем говорить, что в области G введена *согласованная сетка* (сетка, согласованная с участком границы Γ_0), если для значений x_α, связанных условиями (44), ее узлы

задаются точками пересечения прямых

$$x_\alpha = \mu_\alpha(t_i), \qquad \alpha = 1, 2, \quad i = 0, \pm 1, \ldots$$

(рис. 21).

Построим аппроксимацию граничного условия (43) на согласованной сетке. Перепишем его в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(n, x_2) = \varkappa u - g(x)$$

и построим простейшую аппроксимацию этого условия

$$y_{\overline{x}_1}\cos(n, x_1) + y_{\overline{x}_2}\cos(n, x_2) = \varkappa y - g.$$

Вычислим погрешность аппроксимации написанного уравнения

$$\begin{aligned}\psi = u_{\overline{x}_1}\cos(n, x_1) + u_{\overline{x}_2}\cos(n, x_2) - \varkappa u + g = \\ = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1^+}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + O((h_1^+)^2)\right]\cos(n, x_1) + \\ + \left[\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{h_2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + O(h_2^2)\right]\cos(n, x_2) - \varkappa u + g = \\ = \frac{h_1^+}{2}\cos(n, x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{h_2}{2}\cos(n, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + O((h_1^+)^2 + h_2^2).\end{aligned}$$

Преобразуем выражение погрешности аппроксимации. Будем считать, что шаг h_1^+ задан, а шаг h_2 определим из условия

$$\frac{h_1^+}{2}\cos(n, x_1) = -\frac{h_2}{2}\cos(n, x_2) + O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

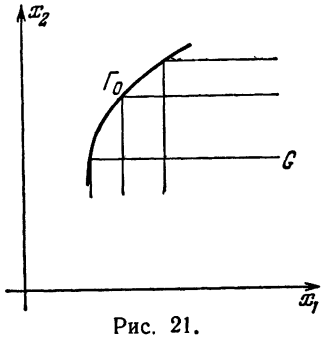


Рис. 21.

Замечая, что в рассматриваемом случае

$$\cos(n, x_1) = \frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}},$$

$$\cos(n, x_2) = -\frac{\mu_1'}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}},$$

условие на выбор h_2 можно записать следующим образом:

$$(h_1^+\mu_2' - h_2\mu_1')/\left(2\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}\right) = O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

Учитывая (45), находим, что это условие будет выполнено,

если положить

$$h_2 = h_1^+ \frac{\mu_2'}{\mu_1'} + O((h_1^+)^2). \tag{46}$$

Пусть (46) выполнено. Тогда с учетом (37) погрешность аппроксимации преобразуется к виду

$$\psi = \frac{h_1^+}{2} \frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}} \Delta u + O((h_1^+)^2 + h_2^2) =$$

$$= -\frac{h_1^+}{2} \frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}} f + O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

Отсюда следует, что разностное граничное условие

$$y_{x_1} \cos(n, x_1) + y_{\bar{x}_2} \cos(n, x_2) = \varkappa y - \left(g + \frac{h_1^+ \mu_2'}{2\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}}\right) \tag{47}$$

аппроксимирует условие (43) с погрешностью $O((h_1^+)^2 + h_2^2)$.

§ 4. Краевые задачи для системы уравнений теории упругости

В этом параграфе будут указаны постановки основных задач теории упругости изотропного тела в случае плоской деформации. Будут построены разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения равновесия и граничные условия для них. Все рассмотрения будут проведены для прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям.

1. Основные плоские задачи теории упругости. В § 1 гл. I было показано, что система уравнений равновесия однородного изотропного упругого твердого тела в случае плоской деформации имеет вид (31). Если тело не является однородным, а деформация остается плоской, то на основании (30) § 1 гл. I уравнения равновесия в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left((2\mu+\lambda)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + F_1 = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_2}\left((2\mu+\lambda)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + F_2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Напомним, что в системе (1) неизвестные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ имеют смысл перемещений точки по направлениям осей Ox_1 и Ox_2 соответственно, а $\lambda(x)>0$ и $\mu(x)>0$ — коэффициенты Ляме, характеризующие упругие свойства тела.

Для системы уравнений (1) может быть поставлена задача отыскания вектора $u=(u_1, u_2)$ при условии, что на границе Г области вектор u задан (*первая краевая задача*)

$$u_1=g_1, \quad u_2=g_2 \quad \text{при} \quad x\in\Gamma. \tag{2}$$

Если на границе области заданы напряжения, то мы имеем *вторую краевую задачу*. Граничные условия в этом случае, согласно (28), (29) и (32) § 1 гл. I, будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right]\cos(n, x_1)+\\
&\qquad+\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos(n, x_2)=-f_1,\\
&\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos(n, x_1)+\\
&\qquad+\left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\cos(n, x_2)=-f_2,
\end{aligned} \tag{3}$$

где n — направление внутренней нормали к границе Г.

Если на границе области заданы нормальная составляющая вектора перемещения и касательная составляющая вектора напряжения, то имеем *третью краевую задачу*

$$\begin{aligned}
&u_1\cos(n, x_1)+u_2\cos(n, x_2)=g,\\
&\mu\left[2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\cos(n, x_1)\cos(n, x_2)+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)(\cos^2(n, x_1)-\cos^2(n, x_2))\right]=-f.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для системы (1) часто ставится смешанная задача, когда на одних участках границы задаются условия одного типа, а на других — другого.

Выпишем условия (3) и (4) в том случае, когда граница параллельна оси Ox_1 и область расположена выше нее:

$$\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-f_1(x,\ 0),$$

$$\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=-f_2(x_1,\ 0), \qquad (5)$$

$$u_2=g(x_1,\ 0),\quad \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-f(x_1,\ 0). \qquad (6)$$

2. Разностная аппроксимация задачи (1), (3). Построим разностную схему, аппроксимирующую систему уравнений (1) с граничными условиями (3) в том случае, когда область является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям. Построение схемы проведем методом Ритца.

Пусть $G=\{x=(x_1,\ x_2)\mid 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,\ 2\}$ и Γ — граница G. Легко проверить, что решение задачи (1), (3) в области G, если оно существует, доставляет минимум следующему функционалу:

$$J(u)=W(u)-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}(F_1u_1+F_2u_2)\,dx_1\,dx_2-$$

$$-\int_0^{l_1}[f_1(x_1,\ 0)\,u_1+f_1(x_1,\ l_2)\,u_1+f_2(x_1,\ 0)\,u_2+$$

$$+f_2(x_1,\ l_2)\,u_2]\,dx_1-\int_0^{l_2}[f_1(0,\ x_2)\,u_1+f_1(l_1,\ x_2)\,u_1+$$

$$+f_2(0,\ x_2)\,u_2+f_2(l_1,\ x_2)\,u_2]\,dx_2, \qquad (7)$$

где

$$W(u)=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{2\mu\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2\right\}dx_1\,dx_2 \qquad (8)$$

есть энергия упругой деформации тела.

Будем называть решением задачи (1), (3) вектор $u=(u_1,\ u_2)$, $u_\alpha\in W_2^1(G)$, который минимизирует функционал (7).

Согласно методу Ритца аппроксимируем пространство $W_2^1(G)$ конечномерным подпространством V и назовем при-

ближенным решением задачи (1), (3) вектор $\bar{u}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $\bar{u}_\alpha \in V$, который минимизирует функционал (7) на подпространстве V.

Аппроксимирующее конечномерное подпространство построим таким же способом, как это мы делали в п. 2 § 2 при использовании метода Бубнова — Галеркина. Именно, пусть $\bar{\omega}=\left\{x=x_i=(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha,\ i_\alpha=\right.$ $\left.=0, 1, \ldots, N_\alpha;\ \alpha=1, 2\right\}$ — прямоугольная равномерная

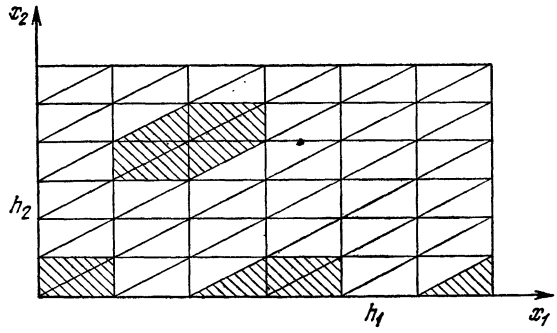


Рис. 22.

сетка в области $\bar{G}$. Разобьем область $\bar{G}$ на прямоугольные ячейки со сторонами h_1 и h_2 и вершинами в узлах сетки $\bar{\omega}$. Пусть $G[i]=\left\{x=(x_1, x_2) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)}\right\}$. Каждую ячейку $G[i]$ в свою очередь разобьем прямой, проходящей через ее противоположные вершины $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2+1)})$, на два треугольника. Обозначим левые верхние треугольники через $\Delta^+[i]$, а правые нижние — через $\Delta^-[i]$. (Разбиение области $\bar{G}$ на треугольники изображено на рис. 22.) В качестве подпространства V пространства $W_2^1(G)$ возьмем пространство непрерывных в $\bar{G}$ и линейных над каждым треугольником $\Delta^\pm[i]$ функций.

Приближенное решение задачи (1), (3) будем искать в виде

$$\bar{u}(x)=(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)),$$

$$\bar{u}_\alpha(x)=\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2} y_{\alpha j_1 j_2}\eta_{j_1 j_2}(x),\ \alpha=1, 2,\ x\in\bar{G}, \qquad (9)$$

где $\{\eta_j(x)\}$, $j=(j_1, j_2)$ — базис пространства V.

Чтобы воспользоваться (9), зададим базис в V. Очевидно, что в качестве базиса в V можно взять совокупность непрерывных в G, линейных над каждым треугольником $\Delta^{\pm}[i]$ функций, каждая из которых отлична от нуля лишь в одном узле сетки $\bar{\omega}$. Будем считать, что $\eta_i(x_l)=1$. При выбранном базисе коэффициенты $y_{\alpha j}$ в (9) имеют смысл значений приближенного решения в узлах сетки $\bar{\omega}$.

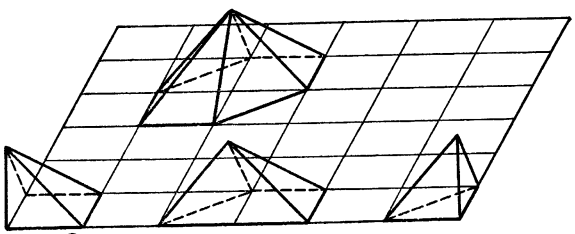


Рис. 23.

Очевидно, что каждая из базисных функций $\eta_i(x)$ отлична от нуля лишь в одной из областей, заштрихованных на рис. 22. Формула, задающая координатную функцию $\eta_i(x)$ для $0<i_\alpha<N_\alpha$, $\alpha=1, 2$ (функцию, соответствующую внутреннему узлу сетки $\bar{\omega}$), имеет вид (16) § 2, где в силу равномерности сетки $\bar{\omega}$ следует положить $h_\alpha^+=h_\alpha$. Если один или оба индекса функции $\eta_{i_1 i_2}$ принимают значения 0 или N_α, то формула для нее может быть легко написана, исходя из (16) § 2. На рис. 23 изображены функции $\eta_i(x)$ в областях, где они отличны от нуля.

Найдем те уравнения, которым должны удовлетворять неизвестные параметры $y_{\alpha j}$ из (9). Для этого подставим $\bar{u}(x)$ из (9) в (7), (8). В результате получим функцию $J(\bar{u})$, зависящую от $2(N_1+1)(N_2+1)$ переменных $y_{\alpha l}$.

Дифференцируя $J(\bar{u})$ по этим переменным и приравнивая первые производные нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения параметров $y_{\alpha i_1 i_2}$. Эта система имеет вид

$$\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{\beta=1}^{2} A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} y_{\beta j_1 j_2} = \varphi_{\alpha i_1 i_2},$$

$$i_\alpha=0, \ldots, N_\alpha, \quad \alpha=1, 2, \qquad (10)$$

где

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha j_1 j_2} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\alpha}+\mu\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\beta}\right]dx_1\,dx_2,$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[\lambda\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\alpha}+\mu\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\beta}\right]dx_1\,dx_2, \tag{11}$$

$$\alpha,\ \beta=1,\ 2,\quad \alpha\neq\beta,$$

$$\varphi_{\alpha i_1 i_2} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} F_\alpha\eta_{i_1 i_2}\,dx_1\,dx_2+\int_\Gamma f_\alpha\eta_{i_1 i_2}\,ds. \tag{12}$$

Вычислим коэффициенты $A_{\alpha i}^{\beta j}$, исходя из вида производных $\partial\eta_i/\partial x_\alpha$, которые задаются соотношениями (20) § 2 при $h_\alpha^+=h_\alpha$. Из (11) и (20) § 2 следует, что $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2}=0$ при $|i_1-j_1|>1$ или $|i_2-j_2|>1$. Более того, $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,\ i_2+1}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,\ i_2-1}=0$. Тем самым отличными от нуля могут быть лишь следующие коэффициенты:

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 i_2},\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,\ i_2},\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\ i_2+1},$$
$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\ i_2-1},\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,\ i_2-1},\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,\ i_2+1}.$$

Предположим, что коэффициенты Ляме λ и μ постоянны. Сначала вычислим $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2}$ при $i_\alpha\neq 0,\ N_\alpha$, $\alpha=1,\ 2$.

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1 i_2}=2\left[\frac{h_\beta}{h_\alpha}(\lambda+2\mu)+\frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu\right],\quad \alpha\neq\beta,$$
$$A_{1\,i_1 i_2}^{1\,i_1-1,\ i_2}=A_{1\,i_1 i_2}^{1\,i_1+1,\ i_2}=-\frac{h_2}{h_1}(\lambda+2\mu),$$
$$A_{1\,i_1 i_2}^{1\,i_1,\ i_2+1}=A_{1\,i_1 i_2}^{1\,i_1,\ i_2-1}=-\frac{h_1}{h_2}\mu,$$
$$A_{2\,i_1 i_2}^{2\,i_1-1,\ i_2}=A_{2\,i_1 i_2}^{2\,i_1+1,\ i_2}=-\frac{h_2}{h_1}\mu,$$
$$A_{2\,i_1 i_2}^{2\,i_1,\ i_2-1}=A_{2\,i_1 i_2}^{2\,i_1,\ i_2+1}=-\frac{h_1}{h_2}(\lambda+2\mu), \tag{13}$$
$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1+1,\ i_2+1}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1-1,\ i_2-1}=0,\quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 i_2}=-(\lambda+\mu),$$
$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,\ i_2}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,\ i_2}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\ i_2-1}=$$
$$=A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\ i_2+1}=\frac{\lambda+\mu}{2},$$
$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,\ i_2+1}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,\ i_2-1}=-\frac{(\lambda+\mu)}{2},$$

Вычислим теперь $A_{\alpha i_1 0}^{\beta j_1 j_2}$ при $i_1 \neq 0, N_1$. В силу сделанного ранее замечания отличными от нуля могут быть лишь следующие коэффициенты:

$$A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 0}, \quad A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 1}, \quad A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1+1,\,0}, \quad A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1-1,\,0}, \quad A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1+1,\,1},$$

которые, соответственно, равны

$$\begin{aligned}
A_{\alpha i_1 0}^{\alpha i_1 0} &= \frac{h_\beta}{h_\alpha}(\lambda+2\mu)+\frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu, \quad \alpha \neq \beta,\\
A_{1 i_1 0}^{1 i_1 1} &= -\frac{h_1}{h_2}\mu,\\
A_{1 i_1 0}^{1 i_1+1,\,0} &= A_{1 i_1 0}^{1 i_1-1,\,0} = -\frac{h_2}{2h_1}(\lambda+2\mu),\\
A_{2 i_1 0}^{2 i_1 1} &= -\frac{h_1}{h_2}(\lambda+2\mu),\\
A_{2 i_1 0}^{2 i_1+1,\,0} &= A_{2 i_1 0}^{2 i_1-1,\,0} = -\frac{h_2}{2h_1}\mu,\\
A_{\alpha i_1 0}^{\alpha i_1+1,\,1} &= 0,\\
A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 0} &= A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1+1,\,1} = -\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta,\\
A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 1} &= \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta,\\
A_{1 i_1 0}^{2 i_1+1,\,0} &= A_{2 i_1,\,0}^{1 i_1-1,\,0} = \frac{\lambda}{2},\\
A_{1 i_1 0}^{2 i_1-1,\,0} &= A_{2 i_1 0}^{1 i_1+1,\,0} = \frac{\mu}{2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Наконец, вычислим коэффициенты $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2}$, входящие в уравнения, соответствующие нижним левому и правому уголкам.

Для точки (0, 0) имеем

$$\begin{aligned}
A_{\alpha 00}^{\alpha 00} &= \frac{1}{2}\left(\frac{h_\beta}{h_\alpha}(2\mu+\lambda)+\frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu\right), \quad \alpha \neq \beta,\\
A_{100}^{110} &= -\frac{h_2}{h_1}\frac{\lambda+2\mu}{2},\\
A_{100}^{101} &= -\frac{h_1}{h_2}\frac{\mu}{2}, \quad A_{200}^{210} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{\mu}{2},\\
A_{200}^{201} &= -\frac{h_1}{h_2}\frac{\lambda+2\mu}{2}, \quad A_{\alpha 11}^{\alpha 11} = 0, \quad A_{\alpha 0 0}^{\beta 00} = 0, \quad \alpha \neq \beta,\\
A_{100}^{210} &= A_{200}^{101} = \frac{\lambda}{2}, \quad A_{100}^{201} = A_{200}^{110} = \frac{\mu}{2},\\
A_{\alpha 00}^{\beta 11} &= -\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для точки $(l_1, 0)$ имеем

$$
\begin{aligned}
A^{\alpha N_1 0}_{\alpha N_1 0} &= \frac{h_\beta}{h_\alpha}\frac{\lambda+2\mu}{2} + \frac{h_\alpha}{h_\beta}\frac{\mu}{2},\\
A^{1N_1-1,0}_{1N_1 0} &= -\frac{h_2}{h_1}\frac{\lambda+2\mu}{2},\\
A^{1N_1 1}_{1N_1 0} &= -\frac{h_1}{h_2}\mu,\\
A^{2N_1-1,0}_{2N_1 0} &= -\frac{h_2}{h_1}\frac{\mu}{2},\\
A^{2N_1 1}_{2N_1 0} &= -\frac{h_1}{h_2}\frac{\lambda+2\mu}{2},\\
A^{\beta N_1 0}_{\alpha N_1 0} &= -\frac{\lambda+\mu}{2},\quad \alpha \neq \beta,\\
A^{2N_1-1,0}_{1N_1 0} &= A^{1N_1,1}_{2N_1 0} = \frac{\mu}{2},\\
A^{2N_1 1}_{1N_1 0} &= A^{1N_1-1,0}_{2N_1 0} = \frac{\lambda}{2}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Подставляя теперь (13) — (16) в (11) и проводя преобразования, получим:

аппроксимации уравнений

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1 x_1} + \mu (y_1)_{x_2\bar{x}_2} + \frac{\lambda+\mu}{2}\left[(y_2)_{x_1 x_2} + (y_2)_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\right] =\\
&\qquad = -\frac{1}{h_1 h_2}\varphi_1, \qquad (x_1, x_2) \in \omega,\\
&\frac{\lambda+\mu}{2}\left[(y_1)_{x_1 x_2} + (y_1)_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\right] + \mu (y_2)_{\bar{x}_1 x_1} + (\lambda+2\mu)(y_2)_{\bar{x}_2 x_2} =\\
&\qquad = -\frac{1}{h_1 h_2}\varphi_2, \qquad (x_1, x_2) \in \omega,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

аппроксимации граничных условий

$$
\begin{aligned}
&\mu\left[(y_1)_{x_2} + (y_2)_{\mathring{x}_1}\right] +\\
&\quad + \frac{h_2}{2}\left[(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1 x_1} + (\lambda+\mu)(y_2)_{x_1 x_2}\right] = -\frac{\varphi_1}{h_1},\\
&\lambda (y_1)_{x_1} + (\lambda+2\mu)(y_2)_{x_2} +\\
&\quad + \frac{h_2}{2}\left[(\lambda+\mu)(y_1)_{x_1 x_2} + \mu (y_2)_{\bar{x}_1 x_1}\right] = -\frac{\varphi_2}{h_1}\\
&\qquad \text{при } x \in \bar{\omega},\ x_2 = 0,\ x_1 \neq 0,\ l_1,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

аппроксимации граничных условий в углах

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}[(\lambda+2\mu)(y_1)_{x_1}+\lambda(y_2)_{x_2}]+$$
$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{x_1}]+\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}(\lambda+\mu)(y_2)_{x_1x_2}=$$
$$=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_1,$$

$$\frac{h_1}{h_1+h_2}[\lambda(y_1)_{x_1}+(\lambda+2\mu)(y_2)_{x_2}]+ \qquad (19)$$
$$+\frac{h_2}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{x_1}]+\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}(\lambda+\mu)(y_1)_{x_1x_2}=$$
$$=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_2 \quad \text{при } x_1=x_2=0,$$

$$-\frac{h_2}{h_1+h_2}[(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1}+\lambda(y_2)_{x_2}]+$$
$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1}]=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_1,$$
$$\frac{h_1}{h_1+h_2}[(\lambda+2\mu)(y_2)_{x_2}+\lambda(y_1)_{\bar{x}_1}]- \qquad (20)$$
$$-\frac{h_2}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1}]=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi$$

при $x_1=l_1$, $x_2=0$.

На остальных участках границы уравнения записываются аналогично (18) — (20).

Вычислим погрешность аппроксимации построенных уравнений (17) — (20). Легко проверить, что погрешности аппроксимаций уравнений (17) имеют вид

$$\psi_\alpha(x)=\left(\frac{1}{h_1h_2}\varphi_\alpha-F_\alpha(x)\right)+O(h_1^2+h_2^2), \qquad x\in\omega.$$

Но из (12) следует, что при $x_i\in\omega$

$$\varphi_\alpha=\iint\limits_G \eta_i(x)F_\alpha(x)\,dx_1\,dx_2,$$

а

$$\iint\limits_G \eta_i(x)\,dx_1\,dx_2=h_1h_2, \quad \iint\limits_G \eta_i(x)(x_\alpha-x_\alpha^{(i\alpha)})\,dx_1\,dx_2=0.$$

Тем самым при достаточно гладких $F_\alpha(x)$

$$\frac{1}{h_1h_2}\varphi_\alpha-F_\alpha(x)=O(h_1^2+h_2^2)$$

и, следовательно,

$$\psi_\alpha(x) = O(h_1^2 + h_2^2).$$

Для уравнений (18) находим

$$\psi_\alpha(x_1, 0) = -f_\alpha(x, 0) - \frac{h_2}{2} F_\alpha(x_1, 0) + \frac{\varphi_\alpha}{h_1} + O(h_1^2 + h_2^2), \qquad x_1 \neq 0, \ l_1.$$

На основании (12)

$$\varphi_\alpha(x, 0) = \iint_G F_\alpha(x)\, \eta_{i_1 0}(x)\, dx + \int_0^{l_1} \eta_{i_1 0}(x_1, 0)\, f_\alpha(x_1, 0)\, dx_1.$$

Так как

$$\iint_G \eta_{i_1 0}(x)\, dx = \frac{h_1 h_2}{2}, \quad \int_0^{l_1} \eta_{i_1 0}(x_1, 0)\, dx_1 = h_1,$$

$$\int_0^{l_1} \eta_{i_1 0}(x_1, 0)\, (x_1 - x^{(i_1)})\, dx_1 = 0,$$

то для достаточно гладких $F_\alpha(x)$ и $f_\alpha(x_1, 0)$

$$\varphi_\alpha(x_1, 0) = \frac{h_1 h_2}{2} F_\alpha(x_1, 0) + h_1 f_\alpha(x_1, 0) + O(h_1 (h_1^2 + h_2^2))$$

и, следовательно,

$$\psi_\alpha(x_1, 0) = O(h_1^2 + h_2^2), \qquad x \neq 0, \ l_1.$$

Погрешность аппроксимации уравнений (19) представляется в виде

$$\psi_\alpha(0, 0) = -f_\alpha(0, 0) - \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)} F_\alpha(0, 0) + \frac{2}{h_1 + h_2} \varphi_\alpha(0, 0) +$$
$$+ \frac{1}{2(h_1 + h_2)} \left[h_1^2 \lambda \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + h_1 h_2 (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2^2 \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] u_\beta +$$
$$+ O(h_1^2 + h_2^2), \qquad \alpha \neq \beta,$$

причем на основании (12)

$$\varphi_\alpha(0, 0) = \iint_G \eta_{00}(x)\, F_\alpha(x)\, dx + \int_0^{l_1} \eta_{00}(x_1, 0)\, f_\alpha(x, 0)\, dx_1 +$$
$$+ \int_0^{l_2} \eta_{00}(0, x_2)\, f_\alpha(0, x_2)\, dx_2 = \frac{h_1 + h_2}{2} f_\alpha(0, 0) + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Поэтому

$$\psi_\alpha(0,\ 0) = O(h_1 + h_2).$$

Аналогично доказывается, что

$$\psi_\alpha(l_1,\ 0) = O(h_1 + h_2).$$

§ 5. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка

В этом параграфе мы приводим основные дифференциальные уравнения четвертого порядка, встречающиеся в теории изгиба тонких упругих пластинок. На примере бигармонического уравнения формулируются условия сопряжения для уравнений четвертого порядка и всевозможные граничные условия. Условия сопряжения и граничные условия моделируются сначала на примере обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.

1. Уравнения четвертого порядка. В § 1 гл. I было показано, что равновесие тонкой однородной изотропной поперечно нагруженной пластинки (плиты) в случае малых прогибов может быть приближенно описано уравнением

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}, \qquad (1)$$

где w — прогиб срединной поверхности пластинки, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ — коэффициент цилиндрической жесткости пластинки, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластинки, q — интенсивность поперечной нагрузки.

Если коэффициент цилиндрической жесткости D пластинки не является постоянным, а это возможно, например, в случае переменной толщины $h(x)$, то уравнение равновесия на основании (15) § 1 гл. I и (19) § 1 гл. I принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = q. \qquad (2)$$

Если материал пластинки не является изотропным и в отношении своих упругих свойств обладает тремя взаимно ортогональными плоскостями симметрии, то пластинка

называется ортотропной. Если эти плоскости принять в качестве координатных, то закон Гука для ортотропного материала будет иметь вид

$$\tau_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{11}+\nu_2\varepsilon_{22}),\ \tau_{12}=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{22}+\nu_1 E_{11}),\ \tau_{12}=G\varepsilon_{12},$$

где E_1 и E_2 — модули Юнга, ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона ($E_1\nu_2=E_2\nu_1$), G — модуль сдвига (в изотропном случае $G=E/2(1+\nu)$).

Уравнение равновесия однородной ортотропной пластинки выглядит так:

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}=q, \tag{3}$$

где

$$D_1=\frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},\quad D_2=\frac{E_2h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},$$
$$D_3=D_1\nu_2+2D_{\text{кр}},\ D_{\text{кр}}=Gh^3/12.$$

(D_1 и D_2 — коэффициенты жесткости изгиба, а $D_{\text{кр}}$ — коэффициент жесткости кручения).

Если ортотропная пластинка к тому же не является однородной, то уравнение равновесия записывается так:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right]+$$
$$+4\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}D_{\text{кр}}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}=q. \tag{4}$$

Можно выписать еще целый ряд уравнений четвертого порядка, описывающих равновесие тонкой пластинки при учете более общей анизотропии, при учете сил в ее срединной плоскости и других обстоятельств, но мы этого делать не будем.

2. Условия сопряжения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Прежде чем формулировать условия сопряжения для уравнений (1), (2), рассмотрим одномерную модель уравнения (1). Такой моделью является уравнение равновесия однородного стержня под действием поперечной нагрузки,

$$Bw^{\text{IV}}(x)=q(x). \tag{5}$$

Здесь $B=EJ$ — коэффициент жесткости изгиба, E — модуль Юнга, J — момент инерции сечения стержня, q — интенсивность внешней нагрузки. Принято называть: w —

прогибом, w' — углом поворота, $-Bw''$ — изгибающим моментом, $-Bw'''$ — перерезывающей силой. Рассмотрим стержень длины l, левый конец которого имеет координату $x=0$, а правый — $x=l$. Величина

$$W=\frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx \tag{6}$$

называется энергией упругой деформации стержня при изгибе. Легко проверить, что нахождение решений уравнения (5) эквивалентно отысканию функций $w(x)$, обращающих в нуль первую вариацию функционала

$$I(w)=W-\int_0^l w(x)\,q(x)\,dx.$$

Рассмотрим систему двух стержней, один из которых расположен на отрезке $[-l, 0]$ оси x, а другой — на отрезке $[0, l]$. Будем считать, что коэффициент жесткости левого стержня равен B^-, а правого стержня — B^+. Пусть оба стержня находятся под действием внешней нагрузки интенсивности $q(x)$. Согласно (6) энергия левого (правого) из рассмотренных стержней имеет вид

$$W^-=\frac{B^-}{2}\int_{-l}^0 (w'')^2\,dx \quad \left(W^+=\frac{B^+}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx\right).$$

Введем в рассмотрение функционал

$$I(w)=W^-+W^+-\int_{-l}^l w(x)\,q(x)\,dx. \tag{7}$$

Приравнивая его первую вариацию нулю, выясним, каким условиям сопряжения должна удовлетворять функция $w(x)$ при $x=0$. Имеем

$$\delta I=\frac{d}{dt}I(w+t\delta w)\Big|_{t=0}=$$
$$=B^-\int_{-l}^0 w''\delta w''\,dx+B^+\int_0^l w''\delta w''\,dx-\int_{-l}^l q\delta w\,dx.$$

Производя интегрирование по частям и полагая $\delta I = 0$, находим

$$B^- \int_{-l}^{0} w^{IV}\delta w\,dx + B^+ \int_{0}^{l} w^{IV}\delta w\,dx - \int_{-l}^{l} q\delta w\,dx + \\ + B^- (w''\delta w' - w'''\delta w)\,|_{-l}^{0} + B^+ (w''\delta w' - w'''\delta w)\,|_{0}^{l} = 0.$$

Отсюда, воспользовавшись произвольностью функции δw, при $x = 0$ будем иметь

$$B^- (w''\delta w' - w'''\delta w)\,|_{x=-0} - B^+ (w''\delta w' - w'''\delta w)\,|_{x=+0} = 0. \quad (8)$$

Условия сопряжения при $x = 0$ зависят от способа соединения взаимодействующих стержней в этой точке. Будем считать, что стержни соединены так, что их прогибы в точке $x = 0$ одинаковы, т. е.

$$w(-0) = w(+0). \quad (9)$$

Очевидно, что этому же условию должна удовлетворять функция δw, т. е. $\delta w(-0) = \delta w(+0)$.

Если теперь предположить, что стержни соединены жестко, т. е., помимо прогибов, совпадают и их углы поворота

$$w'(-0) = w'(+0), \quad (10)$$

то уравнение (8) примет вид

$$(B^+ w'''\,|_{x=+0} - B^- w'''\,|_{x=-0})\,\delta w(0) - \\ - (B^+ w''\,|_{x=+0} - B^- w''\,|_{x=-0})\,\delta w'(0) = 0, \quad (11)$$

так как в этом случае функция $\delta w'$ тоже непрерывна.

Снова используя произвольность функции $\delta w(x)$ и полагая в (11) сначала $\delta w'(0) = 0$, а затем $\delta w(0) = 0$, получим

$$B^+ w''\,|_{x=+0} = B^- w''\,|_{x=-0}, \quad B^+ w'''\,|_{x=+0} = B^- w'''\,|_{x=-0}. \quad (12)$$

Пусть

$$B = B(x) = \begin{cases} B^-, & x < 0, \\ B^+, & x > 0. \end{cases}$$

Вспоминая введенные нами ранее обозначения

$$[v]\,|_{x=0} = v(+0) - v(-0) = v_{\text{п}} - v_{\text{л}}$$

и собирая (9), (10), (12), получим полный набор условий сопряжения в точке жесткого соединения двух стержней

$$[w]=[w']=[Bw'']=[Bw''']=0, \qquad x=0. \tag{13}$$

Рассмотрим другие способы соединения стержней в точке $x=0$. Предположим, например, что в этой точке они соединены шарниром, не препятствующим их взаимному повороту (*идеальный шарнир*). В этом случае мы уже не можем считать выполненным условие (10) и, следовательно, не можем требовать непрерывности функции $\delta w'$ в точке $x=0$. Уравнение (8) в рассматриваемом случае принимает вид

$$(B^{+}w'''|_{x=+0}-B^{-}w'''|_{x=-0})\,\delta w(0)- \\ -B^{+}w''\delta w'|_{x=+0}+B^{-}w''\delta w'|_{x=-0}=0. \tag{14}$$

Используя произвольность функции $\delta w(x)$ и полагая в (14) последовательно равными нулю $\delta w'(-0)$ и $\delta w'(+0)$, $\delta w'(-0)$ и $\delta w(0)$, $\delta w'(+0)$ и $\delta w(0)$, получим следующие условия:

$$[Bw''']_{x=0}=0, \quad B^{+}w''|_{x=+0}=B^{-}w''|_{x=-0}=0.$$

Присоединяя к этим условиям уравнение (9), будем иметь полный набор *условий сопряжения в точке соединения стержней идеальным шарниром*

$$[w]=w'(-0)=w'(+0)=[Bw''']=0, \qquad x=0. \tag{15}$$

Рассмотрим несколько более общий, чем (7), функционал

$$I(w)=\frac{B^{-}}{2}\int_{-l}^{0}(w'')^2\,dx+\frac{B^{+}}{2}\int_{0}^{l}(w'')^2\,dx+ \\ +\left(\frac{\alpha}{2}[w']^2+\frac{\beta}{2}w^2\right)_{x=0}-\int_{-l}^{l}qw\,dx. \tag{16}$$

Здесь α и β — некоторые неотрицательные постоянные, смысл которых будет выяснен несколько позже. Наличие в функционале члена $\frac{\beta}{2}w^2(0)$ заставляет нас предполагать непрерывность $w(x)$ в точке $x=0$, а член $\frac{\alpha}{2}[w']^2=$

$= \frac{\alpha}{2}\{w'(+0) - w'(-0)\}^2$ имеет смысл лишь в случае разрывности функции $w'(x)$ при $x=0$.

Напишем вариацию функционала (16) и преобразуем ее при помощи интегрирования по частям

$$\delta I = B^- \int_{-l}^{0} w^{IV}\delta w\,dx + B^+ \int_{0}^{l} w^{IV}\delta w\,dx - \\ - \int_{-l}^{l} q\delta w\,dx + B^-(w''\delta w' - w'''\delta w)\,|_{-l}^{0} + \\ + B^+(w''\delta w' - w'''\delta w)\,|_{0}^{l} + \alpha[w']\,[\delta w']\,|_{x-0} + \beta w\delta w\,|_{x-0}.$$

Приравнивая вариацию нулю и используя произвольность функции δw, имеем при $x=0$:

$$\{[Bw'''] + \beta w\}\,\delta w\,|_{x-0} + \{-\alpha[w'] + Bw''\}\,\delta w'\,|_{x-0} + \\ + \{\alpha[w'] - Bw''\}\,\delta w'\,|_{x+0} = 0.$$

Используя произвол в выборе δw и приравнивая последовательно нулю $\delta w'(-0)$ и $\delta w'(+0)$, $\delta w(0)$ и $\delta w'(+0)$, $\delta w(0)$ и $\delta w'(-0)$, получим следующие условия сопряжения для функции w:

$$[Bw'''] = -\beta w\,|_{x-0}, \quad \alpha[w'] = Bw''\,|_{x-0}, \quad \alpha[w'] = Bw''\,|_{x+0}.$$

Вычитая и складывая последние два условия и вспоминая, что w непрерывна в точке $x=0$, получим полный набор условий сопряжения

$$[w]=0,\ \alpha[w']=Bw'',\ [Bw'']=0,\ [Bw''']=-\beta w \quad (17)$$

при $x=0$.

Выясним механический смысл параметров α и β. Если положить $\alpha=0$, то первые три условия (17) совпадут с первыми тремя условиями (15); последние же описывают идеальный шарнир. Учитывая эту аналогию, будем называть α коэффициентом жесткости шарнира. При $\alpha\to\infty$ второе из условий (17) переходит в условие $[w']=0$, а поэтому первые три условия (17) совпадают с первыми тремя условиями (13). Но условия (13) описывают жесткое соединение стержней, что естественно считать бесконечно жестким шарниром, т. е. шарниром с коэффициентом жесткости $\alpha=\infty$. Но именно это мы и получили.

При $\beta \to \infty$ последнее из условий (17) принимает вид $w(0)=0$. Но это условие означает, что в точке $x=0$ стержни поддерживаются жесткой опорой, так что β можно называть коэффициентом жесткости опоры.

Рассмотрим теперь все возможные частные случаи условий (17).

1. $\alpha=\beta=0$.

$$[w]=0,\ w''_л=w''_п=0,\ [Bw''']=0.$$

Условие $\alpha=0$ означает, что шарнир идеальный, а условие $\beta=0$, — что опоры в точке $x=0$ нет. Эти условия совпадают с условиями (15). Здесь $w_л=w(-0)$, $w_п=w(+0)$.

2. $\alpha=\text{const}$, $\beta=0$.

$$[w]=0,\ \alpha[w']=Bw'',\ [Bw'']=[Bw''']=0.$$

Это есть условия шарнира, который обладает конечной жесткостью.

3. $\alpha=\infty$, $\beta=0$.

Условие $\alpha=\infty$ означает, что производная w' непрерывна в точке $x=0$, и поэтому соответствующий член в выражении (16) отсутствует. Отсюда, в частности, следует, что в (16) вместо двух интегралов можно писать один с пределами $-l$ и l. Условия сопряжения имеют вид

$$[w]=[w']=[Bw'']=[Bw''']=0.$$

Это условие означает, что соединение стержней абсолютно жесткое, и их можно рассматривать как один стержень. Условия совпадают с условиями (13).

4. $\alpha=0$, $\beta=\text{const}$.

$$[w]=0,\ w''_л=w''_п=0,\ [Bw''']=-\beta w.$$

Первые три условия указывают на идеальный шарнир, а четвертое условие свидетельствует о наличии в точке сочленения стержней упругой опоры.

5. $\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$.

$$[w]=0,\ \alpha[w']=Bw'',\ [Bw'']=0,\ [Bw''']=-\beta w.$$

Первые три условия свидетельствуют о шарнире с конечной жесткостью, а четвертое — об упругом опирании.

6. $\alpha=\infty$, $\beta=\text{const}$.

$$[w]=[w']=[Bw'']=0,\ [Bw''']=-\beta w.$$

Первые три условия говорят о том, что сочленение стержней абсолютно жесткое, т. е. имеется один стержень, а четвертое условие говорит о наличии упругой опоры.

7. $\alpha=0$, $\beta=\infty$.

$$w_л=w_п=w'_л=w'_п=0.$$

Первое и третье условия свидетельствуют о шарнирном опирании в точке $x=0$ левого стержня, а второе и четвертое — о шарнирном опирании правого стержня. В этом случае стержни ничем друг с другом не связаны и могут рассматриваться раздельно.

8. $\alpha=\text{const}$, $\beta=\infty$.

$$w_л=w_п=0,\ \alpha[w']=Bw'',\ [Bw'']=0.$$

Здесь мы имеем шарнир с конечной жесткостью, подпертый абсолютной жесткой опорой.

9. $\alpha=\infty$, $\beta=\infty$.

$$w_л=w_п=0,\ [w']=[Bw'']=0.$$

Стержень в точке $x=0$ подперт абсолютно жесткой опорой.

3. Условия сопряжения для уравнений четвертого порядка с частными производными. Обратимся теперь к уравнению равновесия пластины (2). Рассмотрим прямоугольную изотропную пластинку, которая на плоскости Ox_1x_2 занимает область $G_+=\{x=(x_1, x_2) \mid 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\ \alpha=1, 2\}$. Как уже отмечалось в гл. I, энергия упругой деформации пластинки при изгибе имеет вид

$$W=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} D\left\{(\Delta w)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]\right\}dx_1\,dx_2. \tag{18}$$

Пусть рассматриваемая пластинка по краю $x_1=0$ жестко скреплена с поддерживающим ее стержнем, коэффициент изгибной жесткости которого есть B^+, а коэффициент крутильной жесткости — C^+. Мы уже отмечали, что энергия упругой деформации стержня при изгибе есть

$$\frac{1}{2}\int_0^{l_2} B^+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 dx_2; \tag{19}$$

энергией упругой деформации стержня при кручении называется величина

$$\frac{1}{2}\int_0^{l_2} C^+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 dx_2. \tag{20}$$

Прибавляя эти выражения к (18), мы получим выражение энергии пластинки, подкрепленной стержнем

$$W^+=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} D\left\{(\Delta w)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]\right\}dx_1\,dx_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left[B^+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+C^+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]_{x_1=0} dx_2. \tag{21}$$

Рассмотрим еще одну пластинку, занимающую область

$$G_-=\{x=(x_1,\ x_2),\quad -l_1\leqslant x_1\leqslant 0,\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2\}$$

и также подкрепленную по краю $x_1=0$ стержнем с жесткостями B^- и C^-. Энергия этой пластинки есть

$$W^-=\frac{1}{2}\int_{-l_1}^{0}\int_0^{l_2} D\left\{(\Delta w)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]\right\}dx_1\,dx_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left[B^-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+C^-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]_{x_1=0} dx_2. \tag{22}$$

Соединим эти две пластинки некоторым шарниром и будем считать, что энергия полученной системы есть

$$W=W^++W^-+\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2+\beta w^2\right\}_{x_1=0} dx_2. \tag{23}$$

Здесь, как и в выражении энергии для системы стержней, α есть коэффициент жесткости шарнира, а β — коэффициент жесткости опоры, которая, быть может, имеется под шарниром.

Напишем функционал

$$I(w)=W-\int_{-l_1}^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w\,dx_1\,dx_2. \tag{24}$$

Найдем его первую вариацию и приравняем ее нулю. Преобразовывая полученное соотношение с помощью формул интегрирования по частям и вводя обозначения

$$M_1(x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),$$

$$Q_1(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) - 2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu) D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{25}$$

будем иметь

$$\delta I = \int_0^{l_2} \Big\{ M_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=+0} - Q_1\delta w\Big|_{x_1=+0} - M_1\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=-0} +$$
$$+ Q_1\delta w\Big|_{x_1=-0} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\delta w\Big|_{x_1=+0} +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\delta w\Big|_{x_1=-0} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=+0} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=-0} +$$
$$+ \alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0} - \frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=+0} - \frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=-0}\right] +$$
$$+ \beta w\,\delta w\,|_{x_1=0}\Big\}\,dx_2 + \ldots,$$

где точками обозначены члены, не относящиеся к шарниру. Из (23) следует, что функция $w(x)$ должна быть непрерывна при $x_1=0$, а следовательно, должна быть непрерывна и ее вариация δw.

Приравнивая теперь последовательно нулю коэффициенты при δw, $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=+0}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\Big|_{x_1=-0}$, получим

$$[Q_1]|_{x_1=0} = \beta w + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{(B^+ + B^-)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}\Big|_{x_1=0},$$
$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0} = -M_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0},$$
$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0} = -M_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{x_1=-0}.$$

Условия сопряжения будут выглядеть более симметрично, если вместо двух последних соотношений написать их

полусумму и разность. Добавляя сюда условие непрерывности w при $x_1=0$, будем иметь $[w]=0$,

$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\frac{1}{2}\left\{D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\Big|_{x_1=+0}+D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\Big|_{x_1=-0}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0}-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=-0}\right\}, \tag{26}$$

$$\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right]=-\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=-0}\right\},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]=$$
$$=-\beta w-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(B^++B^-)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$$

при $x_1=0$.

Используя для сокращения записи обозначения (25), выпишем наиболее интересные частные случаи условий (26).

1. $\alpha=\infty$, $\beta=B^\pm=C^\pm=0$.

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=[M_1]=[Q_1]=0 \quad \text{при} \quad x_1=0.$$

Эти условия выражают тот факт, что пластинки жестко соединены. Выписанные условия можно еще переписать так:

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x_1}D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]=0 \quad \text{при } x_1=0.$$

2. $\alpha=\beta=0$, $B^+=B^-=B$, $C^+=C^-=C$.

$$[w]=M_1\mp\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=\pm 0}=0, \quad [Q_1]=2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}.$$

Здесь мы имеем дело с двумя одинаковыми пластинками, соединенными с помощью идеального шарнира, причем их края, примыкающие к шарниру, подкреплены ребрами жесткости, которые работают как на изгиб, так и на кручение.

3. $\alpha=\infty$, $\beta=0$, $B^+=B^-=B$, $C^+=C^-=C$.

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=0, \quad [M_1]=2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right),$$
$$[Q_1]=-2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).$$

Эти условия отвечают целой пластинке, подкрепленной ребром жесткости.

4. $\alpha=\beta=C^-=C^+=0,\ B^+=B^-=B.$

$$[w]|_{x_1=0}=M_1|_{x_1=\pm 0}=0,\quad [Q_1]=2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\quad \text{при}\quad x_1=0.$$

Эти условия отличаются от условий 2 тем, что подкрепляющие ребра не работают на кручение. В этом случае пластинки можно рассматривать не как жестко соединенные с подкрепляющими их стержнями, а как опирающиеся на них.

5. $\alpha=\infty,\ \beta=C^-=C^+=0,\ B^+=B^-=B.$

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]=0,\quad [Q_1]=2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).$$

Стержень служит опорой для жестко соединенных пластинок (целой пластинки).

4. Граничные условия для уравнения равновесия стержня. Выпишем граничные условия для уравнения (5) в точке $x=0$. К выражению для энергии стержня (6) добавим два слагаемых

$$\frac{\alpha}{2}(w'(0))^2\quad \text{и}\quad \frac{\beta}{2}w^2(0)$$

и будем считать, что в результате того или иного способа закрепления стержня в точке $x=0$, его энергия приобретает вид

$$W=\frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx+\frac{\alpha}{2}(w'(0))^2+\frac{\beta}{2}w^2(0). \qquad (27)$$

Напишем теперь функционал

$$I(w)=W-\int_0^l q(x)\,w(x)\,dx,$$

вычислим его первую вариацию и приравняем ее к нулю. После преобразований при помощи формулы интегрирования по частям, имеем

$$\delta I=B\int_0^l w^{IV}\delta w\,dx+B(w''\delta w'-w'''\delta w)\Big|_0^l+$$
$$+(\alpha w'\delta w'+\beta w\delta w)|_{x=0}=0.$$

Отсюда обычным способом находим граничные условия

$$-Bw''+\alpha w'=0, \quad Bw'''+\beta w=0. \tag{28}$$

Рассмотрим частные случаи граничных условий (28).

1. $\alpha=\beta=\infty$. В нуль обращаются и прогиб и угол поворота. Это условие жесткой заделки (жесткого защепления)

$$w=w'=0.$$

2. $\alpha=0$, $\beta=\infty$. В нуль обращаются прогиб и момент. Имеем условие шарнирного опирания

$$w=w''=0.$$

3. $\alpha=\beta=0$. В этом случае обращаются в нуль изгибающий момент и перерезывающая сила. Мы имеем условия свободного конца

$$w''=w'''=0.$$

4. $\alpha=\infty$, $\beta=0$. В нуль обращаются угол поворота и перерезывающая сила. Это есть условия симметрии

$$w'=w'''=0.$$

5. $\alpha=\text{const}$, $\beta=\infty$. Прогиб равен нулю, а момент пропорционален углу поворота. Это есть условие упругого защемления,

$$w=0, \quad -Bw''+\alpha w'=0.$$

6. $\alpha=0$, $\beta=\text{const}$. Момент равен нулю, а перерезывающая сила пропорциональна прогибу. Это есть условие упругого опирания

$$w''=0, \quad Bw'''+\beta w=0.$$

Приведенные частные случаи граничных условий (28) дают повод называть α коэффициентом жесткости защемления, а β коэффициентом жесткости опоры.

5. Граничные условия для уравнения равновесия изотропной пластинки. Обратимся теперь к уравнению равновесия изотропной пластинки (2) и выведем для него граничные условия. Рассмотрим прямоугольную пластинку, которая на плоскости Ox_1x_2 занимает область $G=\{x=$

$= (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$. Будем считать, что ее край при $x_1 = 0$ подкреплен ребром жесткости, коэффициент изгибной жесткости которого равен B, а коэффициент крутильной жесткости C.

Напишем граничные условия для уравнения (2) при $x_1 = 0$. Энергия пластинки без учета ребра жесткости и способа закрепления границы выражается соотношением (18), энергия изгиба и кручения ребра жесткости — соотношениями (19) и (20) соответственно. Закрепляя тем или иным способом пластинку по краю $x_1 = 0$, примем, что ее энергия есть

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{D(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]\right\}dx_1\,dx_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + C\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\}_{x_1=0} dx_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \beta w^2\right\}_{x_1=0} dx_2. \quad (29)$$

Напишем теперь функционал

$$I(w) = W - \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\, w(x)\, dx_1\, dx_2,$$

вычислим его первую вариацию и приравняем ее нулю. Производя обычные преобразования и выписывая лишь члены, относящиеся к краю $x_1 = 0$, будем иметь

$$\delta I = \int_0^{l_2}\left\{-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w + \left(\frac{\partial}{\partial x_1}D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\delta w + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\delta w -$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w + \alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w + \beta w\,\delta w\right\}_{x_1=0} dx_2 + \ldots \quad (30)$$

Приравнивая последовательно нулю коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w$ и δw, получим искомые граничные условия

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right), \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = -\beta w - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} B \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$$

при $x_1 = 0$.

Выпишем наиболее важные частные случаи условий (31).

1. $\alpha = \beta = \infty$. Имеем случай жестко защемленного края

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0. \tag{32}$$

2. $\alpha = C = 0$, $\beta = \infty$. Это случай шарнирного опирания

$$w = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0. \tag{33}$$

Или

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0. \tag{34}$$

3. $\alpha = \beta = B = C = 0$. Край пластинки свободен

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

4. $\alpha = \infty$, $\beta = B = 0$. В этом случае условия (31) переходят в условия симметрии

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} = 0. \tag{36}$$

5. $\alpha = \beta = 0$. Пластинка имеет свободный край, подкрепленный ребром жесткости.

Остановимся еще на условиях согласования в углах пластинки. Для этого выпишем выражение энергии для прямоугольной пластинки, подкрепленной ребрами жесткости по сторонам $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ и некоторым образом закрепленной по этим краям. Обозначим параметры, относящиеся к краю $x_1 = 0$, индексом -1 (например, α_{-1}), а относящиеся к краю $x_2 = 0$, индексом -2 (например, B_{-2}).

Энергия пластинки будет иметь следующий вид:

$$W=\mathring{W}+\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B_{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+C_{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\alpha_{-1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\beta_{-1}w^2\right\}_{x_1=0}dx_2+\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\left\{B_{-2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+C_{-2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\alpha_{-2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+\beta_{-2}w^2\right\}_{x_2=0}dx_1,$$

где $\mathring{W}$ определяется соотношением (8). Напишем, как обычно, функционал $I(w)$ и вычислим его первую вариацию. Приравнивая нулю те слагаемые выражения вариации, которые относятся к точке $x_1=x_2=0$, будем иметь

$$2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\delta w-B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w+\frac{\partial}{\partial x_2}B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\delta w-$$

$$-C_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w-B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_1}B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\delta w-C_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w=0. \qquad (37)$$

Приравнивая теперь нулю коэффициенты при δw, $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w$ и $\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w$, получим условия согласования при $x_1=x_2=0$

$$2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_2}B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0,$$

$$B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+C_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=0,\quad C_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}+B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0. \qquad (38)$$

Эти условия ставятся лишь в том случае, если δw, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta w$ сами в нуль не обращаются. Если, например, $\delta w=0$, то первое из условий согласования (38) отсутствует. При $B_{-\alpha}=C_{-\alpha}=0$, $\alpha=1$, 2, имеем единственное условие согласования

$$2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=0. \qquad (39)$$

Замечание. Так как мы нигде не учитывали работу внешних сил на линии закрепления, все выписанные граничные условия оказались однородными. Учет указанных сил приводит к неоднородным условиям.

§ 6. Аппроксимация краевых задач для уравнений четвертого порядка

В этом параграфе мы построим сеточные аппроксимации уравнений равновесия, условий сопряжения и граничных условий, рассмотренных в предыдущем параграфе. Построение сеточных аппроксимаций проведем методом аппроксимации функционала (см. § 3 гл. II).

1. Аппроксимация уравнений равновесия пластинки. Рассмотрим наиболее общее из выписанных в предыдущем параграфе уравнений равновесия — уравнение (4) § 5 для неоднородной ортотропной пластинки. Будем считать пластинку прямоугольной и на плоскости Ox_1x_2, занимающей область $\bar{G}=\{x=(x_1,\ x_2)\mid 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha\}$. Энергия упругой деформации ортотропной пластинки, находящейся под действием поперечной нагрузки, задается соотношением

$$W(w)=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\right.$$
$$\left.+(D_1\nu_2+D_2\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+4D_{\text{кр}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\}dx_1\,dx_2. \qquad (1)$$

Рассмотрим функционал

$$I(w)=W(w)-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}q(x)\,w(x)\,dx_1\,dx_2. \qquad (2)$$

Легко проверить, что всякое решение уравнения (4) § 5 обращает первую вариацию функционала $I(w)$ в нуль.

Введем в области $\bar{G}$ прямоугольную равномерную сетку $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2$, где $\bar{\omega}_\alpha=\{x_\alpha=x_\alpha^{(i_\alpha)}\}$, $x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha$, $i_\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ N_\alpha\}$, и аппроксимируем на этой сетке функционал (2), (1). Так как нас сейчас интересует лишь аппроксимация уравнения (4) § 5, то будем для простоты предполагать, что пластинка шарнирно оперта по контуру, т. е. удовлетворяет граничным условиям (34) § 5.

Заменим интегралы от первых трех слагаемых в (1) и от последнего слагаемого в (2) квадратурными формулами трапеций, а интеграл от последнего слагаемого в (1) — линейной комбинацией всевозможных квадратурных формул прямоугольников. Учитывая граничные

условия (34) § 5, будем иметь

$$W \sim \frac{1}{2}\sum_{\omega}\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + (D_1\nu_2 + D_2\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}h_1h_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} D_{\text{кр}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \sum_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2} D_{\text{кр}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{{}^+\omega_1\times\omega_2^+} D_{\text{кр}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \sum_{{}^+\omega_1\times{}^+\omega_2} D_{\text{кр}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2\right\},$$

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w(x)\,dx_1\,dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2.$$

Аппроксимируем теперь производные разностными отношениями. Пусть

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} \sim w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},$$

а смешанные производные в каждой сумме будем аппроксимировать таким образом, чтобы соответствующее суммирование можно было осуществить для функций, заданных на $\bar{\omega}$. Подставляя указанные аппроксимации в (2), получим следующую аппроксимацию функционала $I(w)$:

$$I_h(y) = W_h(y) - \sum_{\omega} q(x)\,y(x)\,h_1h_2,$$

$$W_h(y) = \frac{1}{2}\sum_{\omega}\left\{D_1(y_{\bar{x}_1x_1})^2 + D_2(y_{\bar{x}_2x_2})^2 + \right.$$

$$\left. + (D_1\nu_2 + D_2\nu_1)\,y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\right\}h_1h_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} D_{\text{кр}}(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2 h_1h_2 + \sum_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2} D_{\text{кр}}(y_{\bar{x}_1x_2})^2 h_1h_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{{}^+\omega_1\times\omega_2^+} D_{\text{кр}}(y_{x_1\bar{x}_2})^2 h_1h_2 + \sum_{{}^+\omega_1\times{}^+\omega_2} D_{\text{кр}}(y_{x_1x_2})^2 h_1h_2\right\}.$$

$I_h(y)$ есть функция переменных $y(x)$ при $x = x_i \in \omega$. Вычисляя ее первые производные и приравнивая их к нулю в точках x при $i_\alpha = 2, 3, \ldots, N_\alpha - 2$, получим аппроксимации уравнения (4) § 5:

$$(D_1(y_{\bar{x}_1x_1} + \nu_2 y_{\bar{x}_2x_2}))_{\bar{x}_1x_1} + (D_2(y_{\bar{x}_2x_2} + \nu_1 y_{\bar{x}_1x_1}))_{\bar{x}_2x_2} +$$

$$+ (D_{\text{кр}}y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})_{x_1x_2} + (D_{\text{кр}}y_{\bar{x}_1x_2})_{x_1\bar{x}_2} +$$

$$+ (D_{\text{кр}}y_{x_1\bar{x}_2})_{\bar{x}_1x_2} + (D_{\text{кр}}y_{x_1x_2})_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = q. \qquad (3)$$

Если пластинка является однородной, то уравнение несколько упрощается:

$$D_1 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + D_2 y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + 2D_3 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = q, \qquad (4)$$

где

$$D_3 = D_1 \nu + 2D_{\text{кр}}.$$

Если к тому же пластинка изотропна, $D_1 = D_2 = D_3 = D$, то имеем следующее уравнение:

$$\Delta_h^2 y = y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + 2y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} = q/D. \qquad (5)$$

Легко проверить, что погрешность аппроксимации уравнения (3) при достаточной гладкости коэффициентов и аппроксимируемого решения есть $O(h_1^2 + h_2^2)$.

2. Аппроксимация условий сопряжения для обыкновенного уравнения четвертого порядка. Как и в п. 2 § 5 рассмотрим систему двух стержней, первый из которых в недеформированном состоянии занимает отрезок $[-l, 0]$ оси Ox, а второй — отрезок $[0, l]$ той же оси. Пусть коэффициент жесткости первого из них есть B^-, а второго B^+, и оба стержня находятся под действием поперечной нагрузки интенсивности $q(x)$. Форма в положении равновесия рассматриваемых стержней описывается уравнением (5) § 5, в котором следует положить $B = B^-$ для первого стержня и $B = B^+$ — для второго. Будем считать, что в точке соединения стержней $x = 0$ функция прогиба стержней $w(x)$ удовлетворяет условиям сопряжения (17) § 5:

$$[w] = 0,\ \alpha[w'] = Bw'',\ [Bw''] = 0,\ [Bw'''] = -\beta w \text{ при } x = 0. \qquad (6)$$

Наша задача состоит в построении сеточных аппроксимаций этих условий. Для этого введем на отрезке $[-l, l]$ равномерную сетку $\bar{\omega} = \{x = x_i = ih \mid i = 0, \pm 1, \ldots, \pm N\}$ и аппроксимируем на ней функционал (16) § 5:

$$I(w) = \frac{B^-}{2} \int_{-l}^{0} (w'')^2\, dx + \frac{B^+}{2} \int_{0}^{l} (w'')^2\, dx + \left(\frac{\alpha}{2}[w']^2 + \frac{\beta}{2} w^2\right)_{x=0} - \int_{-l}^{l} qw\, dx, \qquad (7)$$

из которого и были получены условия (1). Обозначим через $\omega = \{x_i \mid i = 0, \pm 1, \ldots, \pm(N-1)\}$ множество внут-

ренних узлов сетки $\bar{\omega}$, через $\omega_л = \{x_i \mid i = -1, -2, \ldots, -(N-1)\}$ — множество внутренних узлов сетки на отрезке $[-l, 0]$, через $\omega_п = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, N-1\}$ — множество внутренних узлов сетки на отрезке $[0, l]$. Так как нас интересует лишь аппроксимация условий сопряжения, будем для простоты предполагать, что при $x = \pm l$ выполняются условия шарнирного опирания

$$w = w'' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l.$$

Будем аппроксимировать интегралы, входящие в (7), с помощью формулы трапеций. Учитывая граничные условия, будем иметь

$$\int_{-l}^{l} qw\,dx \sim \sum_{\omega} q(x)\,w(x)\,h,$$

$$\int_{-l}^{0} (w'')^2\,dx \sim \sum_{\omega_л} (w'')^2\,h + (w''_л)^2\,\frac{h}{2},$$

$$\int_{0}^{l} (w'')^2\,dx \sim \sum_{\omega_п} (w'')^2\,h + (w''_п)^2\,\frac{h}{2},$$

где

$$w''_л = w''(-0), \qquad w''_п = w''(+0).$$

Подставляя эти аппроксимации в (7), получим

$$I(w) \sim \frac{1}{2}\left\{B^- \sum_{\omega_л} (w'')^2\,h + B^+ \sum_{\omega_п} (w'')^2\,h - 2\sum_{\omega} q(x)\,w(x)\,h\right\} + I_0 + \frac{\beta}{2}\,w^2(0), \tag{8}$$

где

$$I_0 = \frac{1}{2}\left\{\frac{hB^-}{2}(w''_л)^2 + \frac{hB^+}{2}(w''_п)^2 + \alpha[w']^2|_{x=0}\right\}. \tag{9}$$

При $x \in \omega_л$ и при $x \in \omega_п$ производные w'' заменим вторыми разностными отношениями

$$w'' \sim w_{\bar{x}x}. \qquad x \in \omega_л,\ \omega_п,$$

а способ аппроксимации производных в точке $x = 0$ изучим особо.

Сначала рассмотрим случай, когда α конечно и не равно нулю. На основании (6)

$$B^-(w''_л)^2+B^+(w''_п)^2=\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)(B^-w''_л)^2=$$
$$=\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\alpha^2[w']^2\Big|_{x=0}.$$

Подставляя это соотношение в (9), получим

$$I_0=\frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{h\alpha}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}[w']^2. \qquad (10)$$

Напишем простейшую аппроксимацию скачка производной и исследуем ее погрешность

$$(w_x-w_{\bar{x}})\big|_{x=0}=[w']\big|_{x=0}+\frac{h}{2}(w''_п+w''_л)+O(h^2).$$

Используя второе и третье условия (6), будем иметь

$$(w_x-w_{\bar{x}})\Big|_{x=0}=\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}[w']\Big|_{x=0}+O(h^2)$$

или

$$[w']\Big|_{x=0}=\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(w_x-w_{\bar{x}})\Big|_{x=0}+O(h^2).$$

Подставляя это соотношение в (10), найдем, что

$$I_0=\frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)[w']^2\right\}\Big|_{x=0}=$$
$$=\frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(w_x-w_{\bar{x}})^2+O(h^2).$$

Отбрасывая величину $O(h^2)$, получим аппроксимацию выражения (10)

$$I_0\sim\frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(w_x-w_{\bar{x}})^2. \qquad (11)$$

Рассмотрим теперь предельные случаи $\alpha=0$ и $\alpha=\infty$. Если $\alpha=0$, то, согласно (6),

$$w''_л=w''_п=0$$

и следовательно, I_0 обращается в нуль. Формально полагая $\alpha=0$ в (11), мы получаем аппроксимацию $I_0\sim 0$. Если $\alpha=\infty$, то, согласно (6), $[w']\big|_{x=0}=0$ и соотношение (9) принимает вид

$$I_0=\frac{h}{4}\{B^+(w''_п)^2+B^-(w''_л)^2\}. \qquad (12)$$

Переходя в (11) к пределу по $\alpha \to \infty$, получим

$$I_0 \sim \frac{B^+B^-}{h(B^+ + B^-)}(w_x - w_{\bar{x}})^2.$$

Проводя разложение по формуле Тейлора, найдем, что

$$\frac{B^+B^-}{h(B^+ + B^-)}(w_x - w_{\bar{x}})^2 = \frac{hB^+B^-}{4(B^+ + B^-)}(w''_{\text{п}} + w''_{\text{л}})^2 + O(h^3). \quad (13)$$

В силу третьего из условий (6) $B^+w''_{\text{п}} = B^-w''_{\text{л}}$ и, следовательно,

$$B^+B^-(w''_{\text{п}} + w''_{\text{л}})^2 = B^+B^-(w''_{\text{п}})^2 + B^+B^-(w''_{\text{л}})^2 + (B^+w''_{\text{п}})^2 + (B^-w''_{\text{л}})^2 = (B^+ + B^-)\{B^+(w''_{\text{п}})^2 + B^-(w''_{\text{л}})^2\}.$$

Подставляя это соотношение в (13), находим, что

$$\frac{B^+B^-}{h(B^+ + B^-)}(w_x - w_{\bar{x}})^2 = \frac{h}{4}\{B^+(w''_{\text{п}})^2 + B^-(w''_{\text{л}})^2\} + O(h^3).$$

Сравнивая это соотношение с (12), убеждаемся в том, что аппроксимация (11) при $\alpha = \infty$ имеет погрешность $O(h^3)$.

Подставим теперь все аппроксимации в (8) и получим сеточную аппроксимацию функционала (7):

$$I_h(y) = \frac{1}{2}\left\{B^- \sum_{\omega_{\text{л}}} (y_{\bar{x}x})^2 h + \sum_{\omega_{\text{п}}} (y_{\bar{x}x})^2 h - 2\sum_{\omega} qyh\right\} + \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_x - y_{\bar{x}})^2 + \frac{\beta}{2}y^2(0). \quad (14)$$

Преобразуем в (14) те слагаемые, которые относятся к точке $x = 0$:

$$\frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_x - y_{\bar{x}})^2 = \frac{\alpha h^2}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_{\bar{x}x})^2 = h\frac{B^-B^+}{B^- + B^+}\left\{1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)}\right\}(y_{\bar{x}x})^2.$$

Обозначим

$$\hat{B} = \begin{cases} B^-, & x \in \omega_{\text{л}}, \\ B^+, & x \in \omega_{\text{п}}, \\ \dfrac{2B^-B^+}{B^- + B^+}\left\{1 - \dfrac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)}\right\}, & x = 0. \end{cases}$$

С учетом этого обозначения (14) примет вид

$$I_h(y)=\frac{1}{2}\sum_{\omega}\tilde{B}(x)(y_{\bar{x}x})^2+\frac{\beta}{2}y^2(0)-\sum_{\omega}q(x)y(x)h. \quad (15)$$

Аппроксимация функционала (7) построена. $I_h(y)$ есть функция переменных $y(x)$, $x\in\omega$. Дифференцируя ее по $y(x)$ и приравнивая первые производные нулю, для x_i при $i=0, \pm 1, \ldots, \pm(N-2)$ получим следующие уравнения:

$$\left(\tilde{B}y_{\bar{x}x}\right)_{\bar{x}x}-\beta\delta(x)y=q(x), \quad (16)$$

$\delta(x)$ — сеточный аналог дельта-функции.

При $x=\pm 2h, \pm 3h, \ldots, \pm(1-2h)$ из (16) получается обычная аппроксимация уравнения (5) § 5

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x}=\frac{q(x)}{B^{\pm}},$$

а при $x=0, \pm h$ мы имеем аппроксимацию условий сопряжения (6). Исследуем эти уравнения. Будем для простоты предполагать, что $B^-=B^+=B$. После некоторых преобразований из (16) при $x=0, \pm h$ находим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&B\left(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}x}(0)-\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}x}(0)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}}(0)\right)=q(-h),\\
&B\left(y_{\bar{x}x\bar{x}x}(0)+\frac{2}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}x}(0)\right)+\frac{\beta}{h}y(0)=q(0), \quad (17)\\
&B\left(y_{\bar{x}xxx}(0)+\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}xx}(0)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{xx}(0)\right)=q(h).
\end{aligned}$$

Покажем, что уравнения (17) в самом деле аппроксимируют условия сопряжения (6). Для этого запишем

сначала уравнения (17) следующим образом:

$$B\left(\frac{y_{xxx}-y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}}{h}-\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}x}-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}}\right)=$$
$$=q(-h),$$
$$B\left(\frac{y_{xx\bar{x}}-y_{x\bar{x}\bar{x}}}{h}+\frac{2}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}}\right)+\frac{\beta}{h}y=q(0), \qquad (18)$$
$$B\left(\frac{y_{xxx}-y_{xx\bar{x}}}{h}+\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}xx}-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{xx}\right)=q(h).$$

Здесь всюду, если иные указания отсутствуют, аргумент равен нулю. Сложим полученные соотношения и сумму умножим на h.

После упрощения получим аппроксимацию последнего из условий (6)

$$B(y_{xxx}-y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})=-\beta y+3hq(0)+h^3q_{\bar{x}\bar{x}}. \qquad (19)$$

Первое и третье уравнения (18) запишем в следующем виде

$$\frac{\alpha}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}x}-B\left(\frac{1}{h^2}y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{1}{h}y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right)=q(-h),$$
$$B\left(\frac{1}{h}y_{xxx}-\frac{1}{h^2}y_{xx}\right)+\frac{\alpha}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}x}=q(h). \qquad (20)$$

Вычтем из первого уравнения (20) второе и разность умножим на h^2:

$$B(y_{xx}-y_{\bar{x}\bar{x}})=hB(y_{xxx}+y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})-h^2(q(h)-q(-h)). \qquad (21)$$

Это есть аппроксимация третьего из условий (6).

Наконец, перепишем уравнения (20) в виде:

$$\frac{\alpha}{h^2(1+\alpha h/B)}(y_x-y_{\bar{x}})-B\left(\frac{1}{h^2}y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{1}{h}y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right)=q(-h),$$
$$B\left(\frac{1}{h}y_{xxx}-\frac{1}{h}y_{xx}\right)+\frac{\alpha}{h^2(1+\alpha h/B)}(y_x-y_{\bar{x}})=q(h).$$

Складывая эти соотношения и умножая сумму на $h^2/2$, получим аппроксимацию второго условия из (6):

$$\frac{\alpha}{1+\alpha h/B}(y_x - y_{\bar{x}}) = \\ = \frac{B}{2}(y_{xx} + y_{\bar{x}\bar{x}}) - \frac{Bh}{2}(y_{xxx} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) + h^2 q + \frac{h^4}{2} q_{\bar{x}x}. \qquad (22)$$

С помощью непосредственной проверки легко убедиться, что соотношения (19), (21), 22) аппроксимируют условия (6) по крайней мере с погрешностью $O(h^2)$.

3. Аппроксимация условий сопряжения для уравнений четвертого порядка с частными производными. Построим аппроксимацию условий сопряжения (26) § 5 для уравнения (1) § 5. Чтобы несколько упростить выкладки, будем считать, что в условиях сопряжения $C^+ = C^- = 0$, $B^+ = B^- = \frac{B}{2}$, а в уравнении (1) $D_л = D_п$, где, как и выше, $v_л = v(-0, x_2)$, $v_п = v(+0, x_2)$. После сделанных допущений условия (26) § 5 принимают вид

$$[w] = 0, \quad \alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right] = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),$$

$$D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right] = 0, \qquad (23)$$

$$D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right] = -\beta w - B\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}, \quad x_1 = 0.$$

Сеточные аналоги условий (23) снова будем строить методом аппроксимации функционала. Для этого обратимся к функционалу (24) § 5, (23) § 5, из которого были получены условия (26) § 5, и перепишем его с учетом сделанных нами допущений в следующем виде

$$I(w) = W - \int_{-l_1}^{l_1}\int_{0}^{l_2} q(x)\, w\, dx_1\, dx_2, \qquad (24)$$

где

$$W = W^+ + W^- + \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2 + \beta w^2 + B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2}\right)\right\}_{x_1=0} dx_2, \qquad (25)$$

а

$$W^+ = \frac{D}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\} dx_1\,dx_2, \quad (26)$$

$$W^- = \frac{D}{2}\int_{-l_1}^{0}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\} dx_1\,dx_2. \quad (27)$$

В области $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2) \mid -l_1 \leqslant x_1 \leqslant l_1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2\}$ введем прямоугольную равномерную сетку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$, где $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ — сетки на отрезках $[-l_1, l_1]$ и $[0, l_2]$ соответственно, причем $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{1,л} \cup \bar{\omega}_{1,п}$ а

$$\bar{\omega}_{1,л} = \{x_1 \mid x_1 = i_1 h_1,\ i_1 = 0, -1, \ldots, -N_1\},$$
$$\bar{\omega}_{1,п} = \{x_1 \mid x_1 = i_1 h_1,\ i_1 = 0, 1, \ldots, N_1\}.$$

Пусть ω_α — множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_\alpha$, а $\omega_{1,л}$ ($\omega_{1,п}$) — множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_{1,л}$ ($\bar{\omega}_{1,п}$).

Обозначим

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2,\ \omega_л = \omega_{1,л} \times \omega_2,\ \omega_п = \omega_{1,п} \times \omega_2,\ \dot{\gamma} = \omega \setminus \{\omega_л \cup \omega_п\}.$$

Пусть, кроме того,

$$\omega^+_{1,л} = \omega_1 \setminus \omega_{1,п},\ \omega^+_{1,п} = \bar{\omega}_1 \setminus \bar{\omega}_{1,л},\ {}^+\omega_{1,л} = \bar{\omega}_1 \setminus \bar{\omega}_{1,п},$$
$${}^+\omega_{1,п} = \omega_1 \setminus \omega_{1,л}.$$

Так как в данный момент нас интересует лишь аппроксимация условий сопряжения (23), то будем для простоты предполагать, что на границе области G функция $w(x)$ удовлетворяет условиям (34) § 5, т. е.

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0.$$

Аппроксимируем квадратурными формулами интегралы в (24) — (27). Формулы трапеций используем для замены интеграла от последнего слагаемого в (24) и интегралов от трех первых слагаемых в (26), (27); линейные комбинации формул односторонних прямоугольников используем для аппроксимации последнего интеграла в (26) и в (27).

Учитывая граничные условия для функции $w(x)$, положим

$$\int_{-l_1}^{l_1}\int_{0}^{l_2} qw\,dx_1\,dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2,$$

$$W^-(w) \sim \frac{D}{2}\sum_{\omega_л}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}h_1h_2+$$

$$+\frac{(1-\nu)D}{4}\left\{\sum_{\omega_{1,л}^+\times\omega_2^+}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\sum_{{}^+\omega_{1,л}\times\omega_2^+}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\right.$$

$$\left.+\sum_{\omega_{1,л}^+\times{}^+\omega_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\sum_{{}^+\omega_{1,л}\times{}^+\omega_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2\right\}+$$

$$+\frac{D}{2}\sum_{\mathring{\gamma}}\frac{h_1h_2}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\},$$

$$W^+(w) \sim \frac{D}{2}\sum_{\omega_п}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}h_1h_2+$$

$$+\frac{(1-\nu)D}{4}\left\{\sum_{\omega_{1,п}^+\times\omega_2^+}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\sum_{{}^+\omega_{1,п}\times\omega_2^+}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\right.$$

$$\left.+\sum_{\omega_{1,п}^+\times{}^+\omega_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\sum_{{}^+\omega_{1,п}\times{}^+\omega_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2\right\}+$$

$$+\frac{D}{2}\sum_{\mathring{\gamma}}\frac{h_1h_2}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}.$$

Пусть, кроме того,

$$\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2+\beta w^2\right\}dx_2 \sim$$

$$\sim\frac{1}{2}\sum_{\mathring{\gamma}}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2+\beta w^2\right\}h_2.$$

Заменим вторые производные, входящие в суммы по $\omega_л$ и $\omega_п$, вторыми разностными отношениями

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\sim w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Смешанные производные в каждой сумме запишем по-своему. Пусть

$$W_h^-(y)=\frac{D}{2}\sum_{\omega_л}\left\{(y_{\bar{x}_1x_1})^2+(y_{\bar{x}_2x_2})^2+2\nu y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\right\}h_1h_2+$$
$$+\frac{D(1-\nu)}{4}\left\{\sum_{\omega_{1,л}^+\times\omega_2^+}(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2h_1h_2+\sum_{{}^+\omega_{1,л}\times\omega_2^+}(y_{x_1\bar{x}_2})^2h_1h_2+\right.$$
$$\left.+\sum_{\omega_{1,л}^+\times{}^+\omega_2}(y_{\bar{x}_1x_2})^2h_1h_2+\sum_{{}^+\omega_{1,л}\times{}^+\omega_2}(y_{x_1x_2})^2h_1h_2\right\},\qquad(28)$$

$$W_h^+(y)=\frac{D}{2}\sum_{\omega_п}\left\{(y_{\bar{x}_1x_1})^2+(y_{\bar{x}_2x_2})^2+2\nu y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\right\}h_1h_2+$$
$$+\frac{D(1-\nu)}{4}\left\{\sum_{\omega_{1,п}^+\times\omega_2^+}(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2h_1h_2+\sum_{{}^+\omega_{1,п}\times\omega_2^+}(y_{x_1\bar{x}_2})^2h_1h_2+\right.$$
$$\left.+\sum_{\omega_{1,п}^+\times{}^+\omega_2}(y_{\bar{x}_1x_2})^2h_1h_2+\sum_{{}^+\omega_{1,п}\times{}^+\omega_2}(y_{x_1x_2})^2h_1h_2\right\}.\qquad(29)$$

Нам осталось аппроксимировать производные в сумме $\sum_{\mathring{\nu}}A(w)h_2$, где

$$A(w)=\frac{Dh_1}{4}\left\{\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_1^2}\right)_л^2+\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_2^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_1^2}\right)_л\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_2^2}+\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_1^2}\right)_п^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_2^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_1^2}\right)_п\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_2^2}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial\bar{x}_1}\right]^2+B\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_2}\right)^2+\beta w^2\right\}.\qquad(30)$$

Пусть α конечно и не равно нулю. Тогда из (23) находим, что

$$\frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_1^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_2^2}\right)_л^2+\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_1^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_2^2}\right)_п^2\right\}=\frac{\alpha^2}{D}\left[\frac{\partial w}{\partial\bar{x}_1}\right]^2.$$

Подставляя это соотношение в (30), будем иметь

$$A(w)=\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{\alpha h_1}{D}\right)\left[\frac{\partial w}{\partial\bar{x}_1}\right]^2+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{B+h_1D(1-\nu^2)\right\}\left(\frac{\partial^2w}{\partial\bar{x}_2}\right)^2+\frac{\beta}{2}w^2.\qquad(31)$$

Напишем простейшую аппроксимацию скачка производной $[\partial w/\partial x_1]_{x_1=0}$ и исследуем ее погрешность

$$(w_{x_1}-w_{\bar{x}_1})\big|_{x_1=0}=\left[\frac{\partial w}{\partial \bar{x}_1}\right]\Big|_{x_1=0}+\frac{h_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{п}}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{л}}\right\}+O(h_1^2)=$$
$$=\left[\frac{\partial w}{\partial \bar{x}_1}\right]\Big|_{x_1=0}+\frac{h_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{п}}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{л}}\right\}-$$
$$-h_1\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0}+O(h^2).$$

Из (23) находим, что

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{п}}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{л}}=\frac{2\alpha}{D}\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0},$$

и, следовательно,

$$(w_{x_1}-w_{\bar{x}_1})\big|_{x_1=0}=\left(1+\frac{\alpha h_1}{D}\right)\left[\frac{\partial w}{\partial \bar{x}_1}\right]_{x_1=0}-h_1\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0}+O(h_1^2).$$

Тем самым

$$\left[\frac{\partial w}{\partial \bar{x}_1}\right]\Big|_{x_1=0}=\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\left\{(w_{x_1}-w_{\bar{x}_1})\big|_{x_1=0}+h_1\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0}+O(h_1^2)\right\}.$$

Подставляя это выражение в (31) и заменяя $\partial^2 w/\partial x_2^2$ вторым разностным отношением, получим

$$A(w)=\frac{\alpha}{2}\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\left\{(w_{x_1}-w_{\bar{x}_1})+h_1\nu w_{\bar{x}_2x_2}+O(h_1^2+h_2^2)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\{B+h_1D(1-\nu^2)\}(w_{\bar{x}_2x_2})^2+\frac{\beta}{2}w^2+O(h_2^2). \qquad (32)$$

Рассмотрим предельные случаи $\alpha=0$ и $\alpha=\infty$. Полагая в (30) $\alpha=0$ и учитывая (23), найдем, что

$$A(w)=\frac{1}{2}\{B+h_1D(1-\nu^2)\}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+\frac{\beta}{2}w^2.$$

Но выписанные главные члены в (32) при $\alpha=0$ как раз и аппроксимируют это выражение с погрешностью $O(h_2^2)$. Перейдем теперь в (30) к пределу при $\alpha\to\infty$. Снова учитывая (23), находим, что

$$A(w)=\frac{Dh_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\left(B+\frac{Dh_1}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2}\right)^2+\beta w^2\right\}.$$

Соотношение (32) при $\alpha \to \infty$ принимает вид

$$A(w) = \frac{Dh_1}{2}\left\{w_{\bar{x}_1 x_1} + \nu w_{\bar{x}_2 x_2} + O(h_1 + h_2^2/h_1)\right\}^2 + \\ + \frac{1}{2}\left\{B + h_1 D(1-\nu^2)\right\}(w_{\bar{x}_2 x_2})^2 + \frac{\beta}{2} w^2 + O(h_2^2),$$

и, следовательно, его главные члены аппроксимируют (30) с погрешностью $O(h_1^2 + h_2^2)$.

Итак,

$$W_h^0(y) = \frac{1}{2}\sum_{\mathring{\nu}} h_2 \left\{\frac{\alpha}{1+\alpha h_1/D}(y_{x_1} - y_{\bar{x}_1})^2 + \right. \\ + \left[B + h_1 D\left(1 - \frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D}\right)\right](y_{x_2 x_2})^2 + \\ \left. + \frac{2h_1 \alpha \nu}{1+\alpha h_1/D}(w_{x_1} - w_{\bar{x}_1}) w_{x_2 x_2}\right\}. \qquad (33)$$

Тогда сеточная аппроксимация функционала $I(w)$ из (24) будет иметь вид

$$I_h(y) = W_h(y) - \sum_{\omega} q y h_1 h_2, \qquad (34)$$

где

$$W_h(y) = W_h^-(y) + W_h^+(y) + W_h^0(y),$$

а $W_h^-(y)$, $W_h^+(y)$ и $W_h^0(y)$ определяются соотношениями (28), (29), (33).

Преобразуем несколько $W_h^0(y)$. Замечая, что

$$(y_{x_1} - y_{\bar{x}_1})^2 = h_1^2 (y_{\bar{x}_1 x_1})^2, \quad \frac{\alpha h_1}{1+\alpha h_1/D} = D\left(1 - \frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right),$$

для $W_h^0(y)$ получим представление

$$W_h^0(y) = \frac{h_1}{2}\sum_{\mathring{\nu}} h_2 D\left\{\left(1 - \frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right)(y_{x_1 x_1})^2 + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D} + \frac{B}{Dh_1}\right)(y_{\bar{x}_2 x_2})^2 + 2\left(1 - \frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right)\nu y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2}\right\}.$$

Сравним выражения, стоящие под знаком суммы в $W_h^0(y)$ и под знаками сумм по $\omega_{л(п)}$ в $W_h^{\mp}(y)$; они отличаются лишь коэффициентами при разностных отношениях.

Введем обозначения

$$D_1 = D\left(1 - \frac{h_1}{1+\alpha h_1/D}\,\delta(x_1)\right),$$
$$D_2 = D\left(1 - \left(\frac{\nu^2 h_1}{1+\alpha h_1/D} - \frac{B}{D}\right)\delta(x_1)\right),\quad D_{\text{кр}} = D\frac{1-\nu}{2}, \tag{35}$$

где $\delta(x_1)$ — сеточный аналог дельта-функции

$$\delta(x_1) = \begin{cases} h_1^{-1}, & x_1 = 0, \\ 0, & x_1 \in \omega_1,\ x_1 \neq 0. \end{cases}$$

В новых обозначениях $W_h(y)$ примет вид

$$W_h\ y) = \frac{1}{2}\sum_{\omega} h_1 h_2 \left\{D_1 (y_{\bar{x}_1 x_1})^2 + D_2 (y_{\bar{x}_2 x_2})^2 + 2D_1 \nu y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2}\right\} +$$
$$+ \frac{D_{\text{кр}}}{2}\left\{\sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})^2 + \sum_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+} h_1 h_2 (y_{x_1 \bar{x}_2})^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{\omega_1^- \times {}^+\omega_2} h_1 h_2 (y_{\bar{x}_1 x_2})^2 + \sum_{{}^+\omega_1 \times {}^+\omega_2} h_1 h_2 (y_{x_1 x_2})^2\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\omega} h_1 h_2 \beta\delta(x_1)\, y^2. \tag{36}$$

$I_h(y)$ в (34) есть функция переменных $y(x)$ при $x \in \omega$. Дифференцируя ее по $y(x)$ при $x_1 \neq \pm(l_1 - h_1)$, $x_2 \neq h_2$, $l_2 - h_2$ и приравнивая производные нулю, получим следующие уравнения:

$$(D_1 y_{x_1 x_1})_{\bar{x}_1 x_1} + (D_2 y_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_2 x_2} + (D_1 \nu y_{\bar{x}_1 x_1})_{\bar{x}_2 x_2} +$$
$$+ (D_1 \nu y_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_1 x_1} + 4D_{\text{кр}} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + \beta\delta(x_1)\, y = q(x),$$
$$x_1 \neq \pm(l_1 - h_1),\quad x_2 \neq h_2,\quad l_2 - h_2. \tag{37}$$

Полагая в (37) $x_1 = 0,\ \pm h_1$, получим сеточные аппроксимации условий сопряжения (23). После некоторых

преобразований указанные уравнения принимают вид:

$$D\left\{y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1}-\frac{1}{h_1(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1x_1x_1}-\frac{1}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\right.$$
$$\left.+2y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}-\frac{\nu}{h_1(1+\alpha h_1/D)}y_{x_1\bar{x}_2x_2}-\frac{\nu}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_2x_2}\right\}=q,$$
$$x=(-h_1,\ x_2),$$
$$D\left\{y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1}+\frac{2}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1x_1}+\left(1-\frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D}+\frac{B}{Dh_1}\right)y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\right.$$
$$+\left(2-\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right)y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}+\frac{2\nu y_{\bar{x}_2x_2}}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}+\frac{B}{h_1}y=q,\ x=(0,x_2),$$
$$D\left\{y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1}+\frac{1}{h_1(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1x_1x_1}-\frac{1}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{\bar{x}_1x_1}+\right.$$
$$+y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+2y_{x_1\bar{x}_1\bar{x}_2x_2}+\frac{\nu}{h_1(1+\alpha h_1/D)}y_{x_1\bar{x}_2x_2}-$$
$$\left.-\frac{\nu}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}y_{x_2x_2}\right\}=q,\quad x=(h_1,\ x_2).$$

Так же как и в случае уравнений (18), эти уравнения можно преобразовать к виду, из которого будет следовать, что построенные уравнения аппроксимируют условия (23) с погрешностью $O(h_1^2+h_2^2)$.

4. Аппроксимация граничных условий для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Будем аппроксимировать граничные условия (28) § 5 для уравнения (5) § 5, только вместо однородных условий будем рассматривать неоднородные:

$$-Bw''+\alpha(w'-w_0')=M_0,\quad Bw'''+\beta(w-w_0)=Q_0,\quad x=0. \tag{38}$$

Здесь w_0, w_0', M_0 и Q_0 — заданные постоянные; (величины w_0 и w_0' введены для удобства).

Пусть уравнение (5) § 5 рассматривается на отрезке $[0,\ l]$, причем при $x=l$ его решение удовлетворяет условиям $w(l)=w''(l)=0$, а при $x=0$ — условиям (38). Рассмотрим функционал

$$I(w)=W(w)-\int_0^l qw\,dx-Q(\beta)\,w(0)-M(\alpha)\,w'(0), \tag{39}$$

где

$$W(w)=\frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx+\frac{\alpha}{2}(w'(0))^2+\frac{\beta}{2}w^2(0), \qquad (40)$$

$$Q(\beta)=Q_0+\beta w_0, \quad M(\alpha)=M_0+\alpha w_0'.$$

Легко проверить, что граничные условия (38) и уравнение (5) § 5 являются необходимыми условиями для того, чтобы первая вариация функционала (39) обратилась в нуль.

Разностные аналоги граничных условий (38) построим методом аппроксимации функционала (39). Пусть $\bar{\omega}$ — равномерная сетка на отрезке $[0, l]$. Аппроксимируем интегралы, входящие в (39), (40), квадратурными формулами трапеций и учтем граничные условия при $x=l$:

$$\int_0^l qw\,dx \sim \sum_{\omega} qwh+\frac{q(0)w(0)}{2}h,$$

$$\frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx \sim \frac{B}{2}\sum_{\omega}(w'')^2 h+\frac{B}{2}(w''(0))^2\frac{h}{2}.$$

Вторые производные в сумме по ω заменим вторыми разностными отношениями

$$w'' \sim w_{\bar{x}x}.$$

Тогда будем иметь

$$I(w) \sim \frac{B}{2}\sum_{\omega}(w_{\bar{x}x})^2 h-\sum_{\omega} qwh+\frac{1}{2}\left(\frac{Bh}{2}(w''(0))^2+\alpha(w'(0))^2-\right.$$

$$\left.-2M(\alpha)w'(0)\right)+\frac{1}{2}(\beta w^2(0)-qhw(0)-2Q(\beta)w(0)).$$

Построим аппроксимацию выражения

$$A(w)=\frac{1}{2}\left\{\frac{Bh}{2}(w''(0))^2+\alpha(w'(0))^2-2M(\alpha)w'(0)\right\}.$$

На основании (38) имеем

$$w''(0)=\frac{\alpha w'(0)-M(\alpha)}{B},$$

и, следовательно,

$$A(w)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha h}{2B}\right)[\alpha(w'(0))^2-2M(\alpha)w'(0)]+hM^2(\alpha)/(4B). \qquad (41)$$

Аппроксимируем в (41) первую производную правым разностным отношением

$$w_x = w' + \frac{h}{2} w'' + O(h^2).$$

Учитывая первое из граничных условий (38), находим, что

$$w_x = \left(1 + \frac{\alpha h}{2B}\right) w' - \frac{h}{2B} M(\alpha) + O(h^2),$$

или

$$w'(0) = \frac{1}{1 + \alpha h/(2B)} \left(w_x + \frac{h}{2B} M(\alpha)\right) + O(h^2).$$

Подставляя это соотношение в (41) и отбрасывая величины $O(h^2)$, получим требуемую аппроксимацию $A(w)$:

$$A_h(w) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \alpha h/(2B)} (\alpha (w_x)^2 - 2M(\alpha) w_x) - \frac{hM^2(\alpha)}{4B(1 + \alpha h/(2B))}.$$

Итак, сеточную аппроксимацию функционала $I(w)$ возьмем в виде

$$I_h(y) = \frac{B}{2} \sum_{\omega} (y_{\bar{x}x})^2 h -$$

$$- \sum_{\omega} qyh + \frac{1}{2(1 + \alpha h/(2B))} (\alpha (y_x)^2 - 2M(\alpha) y_x)\Big|_{x=0} +$$

$$+ \frac{1}{2} (\beta y^2(0) - qhy(0) - 2Q(\beta) y(0)) - \frac{hM^2(\alpha)}{4B(1 + \alpha h/(2B))}. \qquad (42)$$

Дифференцируя теперь (42) по $y(0)$ и $y(h)$ и приравнивая производные нулю, получим следующие аппроксимации граничных условий (38):

$$- \frac{\alpha}{h(1 + \alpha h/(2B))} y_x + \frac{1}{h} B y_{xx} + \beta y + \frac{M(\alpha)}{h(1 + \alpha h/(2B))} -$$

$$- Q(\beta) - \frac{q(0) h}{2} = 0, \qquad (43)$$

$$- \frac{B}{h} y_{xx} + B y_{xxx} + \frac{\alpha y_x}{h(1 + \alpha h/(2B))} - \frac{M(\alpha)}{h(1 + \alpha h/(2B))} - hq(h) = 0.$$

Складывая эти соотношения, получим аппроксимацию второго из условий (38); умножая первое соотношение на $-h$,

получим аппроксимацию первого из условий (38)

$$-By_{xx}+\frac{\alpha}{1+\alpha h/(2B)}(y_x-w_0')-h\beta(y-w_0)=$$
$$=\frac{M_0}{1+\alpha h/(2B)}-hQ_0-\frac{h^2q(0)}{2}, \qquad (44)$$
$$By_{xxx}+\beta(y-w_0)=Q_0+h\left(\frac{q(0)}{2}+q(h)\right), \quad x=0.$$

Легко проверить, что при конечном β и любых α условия (44) аппроксимируют условия (38) с погрешностью $O(h^2)$.

Если $\beta=\infty$, то из (43) находим, что

$$y=w_0, \quad x=0,$$

а это и есть аппроксимация одного из условий (38) в этом случае.

5. Аппроксимация граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. Пусть в области $G=\{x=(x_1, x_2)\,|\,0<x_\alpha<l_\alpha, \alpha=1,2\}$ ищется решение уравнения (1) § 5

$$D\Delta^2w=q, \qquad x\in G, \qquad (45)$$

удовлетворяющие при $x_1=0$ неоднородным граничным условиям типа (31) § 5 с $C=0$:

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}=D\left(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\right)+M, \; x_1=0,$$
$$D\left(\frac{\partial^3w}{\partial x_1^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3w}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)=-\beta w-B\frac{\partial^4w}{\partial x_2^4}+Q, \qquad x_1=0, \qquad (46)$$

а при $x_1=l_1$ и при $x_2=0$, l_2 — граничным условиям типа (34) § 5:

$$w(x_1, 0)=w(l_1, x_2)=w(x_1, l_2)=\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}(l_1, x_2)=$$
$$=\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}(x_1, l_2)=\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}(x, 0)=0. \qquad (47)$$

На основании (37) § 5 при $\alpha\neq\infty$ в угловых точках $(0, 0)$, $(0, l_2)$ области должны удовлетворяться условия согласования, которые в рассматриваемом нами случае имеют вид:

$$B\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}=0, \qquad x_1=0, \quad x_2=0, l_2. \qquad (48)$$

Построим сеточные аналоги граничных условий (46). Построение проведем методом аппроксимации функционала.

Легко проверить, что решение $w(x)$ задачи (45) — (48) доставляет минимум функционалу

$$I(w) = W - \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\, w\, dx - \int_0^{l_2} \left\{M(x_2)\frac{\partial w}{\partial x_1} + Q(x_2)\, w\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2, \tag{49}$$

где

$$W = \mathring{W} + \hat{W},$$

$$\mathring{W}(w) = \frac{D}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\, \partial x_2}\right)^2\right\} dx_1\, dx_2, \tag{50}$$

$$\hat{W}(w) = \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \beta w^2\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2,$$

который мы и будем аппроксимировать на прямоугольной равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$. Функционалы такого типа мы уже аппроксимировали, так что, используя граничные условия (47), сразу напишем

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\, w(x)\, dx_1\, dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2 + \sum_{\omega_2}\frac{h_1}{2} h_2 qw\Big|_{x_1=0}, \tag{51}$$

$$\int_0^{l_2}\left\{M\frac{\partial w}{\partial x_1} + Qw\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2 \sim \sum_{\omega_2}\left(M\frac{\partial w}{\partial x_1} + Qw\right)\Big|_{x_1=0} h_2.$$

Далее, учитывая условия согласования (48),

$$\mathring{W} \sim \frac{D}{2}\sum_{\omega}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\} h_1h_2 + D(1-\nu)\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\, \partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \frac{D}{2}\sum_{\omega_2}\frac{h_1h_2}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}\Big|_{x_1=0}, \tag{52}$$

$$W_1 \sim \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) + \beta w^2\right\}\Big|_{x_1=0} h_2.$$

В первом из соотношений (52) заменим производные, стоящие под знаком $\sum_{\omega}$, разностными отношениями $w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha=1,\ 2$, смешанные производные — разностными отношениями $w_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$ и обозначим

$$\mathring{W}^h(y)=\frac{D}{2}\sum_{\omega}\left\{(w_{\bar{x}_1x_1})^2+(w_{\bar{x}_2x_2})^2+2\nu w_{\bar{x}_1x_1}w_{\bar{x}_2x_2}\right\}h_1h_2+$$
$$+D(1-\nu)\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}(w_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2h_1h_2. \qquad (53)$$

Отдельно изучим аппроксимацию производных в (51), (52), стоящих под знаком $\sum_{\omega_2}$. Из сумм по ω_2 в (51) и (52) составим выражение

$$I_1(w)=\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}h_2\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\beta w^2+\right.$$
$$+\frac{Dh_1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+(1-\nu^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right]-$$
$$\left.-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}-2Q\,w-h_1qw\right\}\Big|_{x_1=0}, \qquad (54)$$

которое входит в аппроксимацию функционала $I(w)$ квадратурными формулами. Аппроксимация вторых производных по x_2 в (54) не вызывает труда, так что сосредоточим свое внимание на аппроксимации выражения

$$A(w)=\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{Dh_1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}.$$

Используя первое из граничных условий (46), будем иметь

$$A(w)=\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{h_1}{2D}\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}-M\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}=$$
$$=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)\left[\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]+\frac{h_1}{2D}M^2.$$

Теперь $A(w)$ выражается лишь через первую производную $\partial w/\partial x_1$, а способ ее аппроксимации мы уже обсуждали неоднократно. Подставляя в разложение

$$w_{x_1}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+Q(h_1^2),\qquad x_1=0$$

вторую производную из граничного условия (46), получим

$$w_{x_1}=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\frac{h_1 M}{2D}+O(h_1^2).$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)^{-1}\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1 M}{2D}+O(h_1^2)\right]$$

и, следовательно,

$$A(w)=\alpha\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)^{-1}\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1 M}{2D}+O(h_1^2)\right]^2-$$

$$-2M\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1 M}{2D}+O(h_1^2)\right]+\frac{h_1}{2D}M^2.$$

Подставим это выражение для $A(w)$ в (54), заменим вторые производные по x_2 вторыми разностными отношениями $w_{\bar{x}_2x_2}$ и отбросим члены, обозначенные через $O(h_1^2)$. Полученное выражение обозначим через $I_1^h(w)$, т. е.

$$I_1^h(w)=\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}h_2\left\{B(w_{\bar{x}_2x_2})^2+\beta w^2+\frac{Dh_1}{2}(1-\nu^2)(w_{x_2x_2})^2+\right.$$

$$+\frac{\alpha}{1+\frac{h_1\alpha}{2D}}\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1M}{2D}\right)^2-2Qw-$$

$$\left.-h_1qw-2M\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}\right)-\frac{h_1}{2D}M^2\right\}. \qquad (55)$$

Итак, будем аппроксимировать функционал (49), (50) сеточным функционалом

$$I^h(w)=\mathring{W}^h(w)+I_1^h(w)+\sum_{\omega}qwh_1h_2, \qquad (56)$$

где $\mathring{W}^h(w)$ и $I_1^h(w)$ определяются формулами (53) и (55) соответственно.

Чтобы построить сеточные аппроксимации граничных условий (46), нужно продифференцировать сеточный функционал (56) по $w(x_1, x_2)$ при $x_1=0$, h_1 и $x_2\in\mathring{\omega}_2$, а затем приравнять полученные выражения к нулю. После

умножения полученных соотношений на $h_1h_2^{-1}$ будем иметь $(x_1=0,\ x_2\in\mathring{\omega}_2)$:

$$D\left(w_{\bar{x}_1x_2}+\nu w_{\bar{x}_2x_2}\right)^{(+1_1)}+2D\left(1-\nu\right)h_1w_{x_1\bar{x}_2x_2}+$$
$$+h_1\Big\{Bw_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\beta w+\frac{h_1}{2}D\left(1-\nu^2\right)w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}-$$
$$-\frac{\alpha}{h_1\left(1+h_1\alpha/(2D)\right)}\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1M}{2D}+\right.$$
$$+\frac{h_1\nu\alpha}{2\left(1+h_1\alpha/(2D)\right)}\left(w_{x_1\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1\nu}{2}M_{\bar{x}_2x_2}\right)-$$
$$\left.-Q-\frac{h_1}{2}q+\frac{M}{h_1}-\frac{h_1\nu}{2}M_{\bar{x}_2x_2}\right\}=0, \qquad (57)$$

$$\frac{\alpha}{1+h_1\alpha/(2D)}\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}\right)-D\left(w_{\bar{x}_1x_1}+\nu w_{\bar{x}_2x_2}\right)^{(+1_1)}+$$
$$+Dh_1\left(w_{\bar{x}_1x_1x_1}+\nu w_{\bar{x}_2x_2x_1}\right)^{(+1_1)}+h_1^2D\left[w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\right.$$
$$\left.+\left(2-\nu\right)w_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_1x_2}-q\right]^{(+1_1)}-\frac{M}{1+h_1\alpha/(2D)}=0. \qquad (58)$$

Легко проверить, что уравнение (58) аппроксимирует первое из граничных условий (46) с погрешностью $O(|h|^2)$. Складывая (57) и (58) и деля результат на h_1, получим аппроксимацию второго из условий (46):

$$D\left(w_{\bar{x}_1x_1x_1}+\left(2-\nu\right)w_{\bar{x}_2x_2x_1}\right)^{(+1_1)}+Bw_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\beta w+Q+$$
$$+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\alpha}{1+h_1\alpha/(2D)}\left(w_{x_1\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}\right)+$$
$$+\frac{h_1}{2}D\left(1-\nu^2\right)w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+h_1D\left(w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\nu w_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_1x_2}\right)^{(+1_1)}-$$
$$-\frac{h_1}{2}q-h_1q^{(+1_1)}-\frac{h_1\nu}{2}M_{\bar{x}_2x_2}+\frac{\alpha h_1\nu}{2\left(1+h_1\alpha/(2D)\right)}\frac{h_1}{2D}M_{\bar{x}_2x_2}=0. \qquad (59)$$

Уравнение (59) аппроксимирует второе из граничных условий (46) с погрешностью $O(|h|^2)$.

ГЛАВА V

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Настоящая глава носит вспомогательный характер. Здесь вводятся некоторые из наиболее часто используемых в дальнейшем обозначений и выводятся основные формулы, при помощи которых преобразовываются выражения, содержащие сеточные функции. Затем излагаются основные методы получения априорных оценок и исследования сходимости разностных схем. Эти методы иллюстрируются на примерах одномерных задач. Далее изучаются сеточные аналоги теорем вложения и выводятся оценки снизу для некоторых сеточных операторов. Эти результаты используются при получении априорных оценок и исследовании скорости сходимости разностных схем в гл. VI.

§ 1. Обозначения, разностные формулы и некоторые неравенства

1. Обозначения. Пусть $\bar{\omega}=\{x=x_i \mid i=0,\ 1,\ \ldots,\ N;\ x_0=0,\ x_N=l\}$ есть сетка на $[0,\ l]$. Шаг сетки в точке x_i задается величиной $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,\ 2,\ \ldots$, а средний шаг — величиной $\hbar_i=(h_i+h_{i+1})/2$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$. Положим $\hbar_0=h_1/2$, $\hbar_N=h_N/2$. Если во всех узлах сетки шаг постоянен, т. е. $h=l/N$, то сетка $\bar{\omega}$ называется *равномерной*.

Введем следующие обозначения:

$$\omega=\{x_i \mid i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1\},\quad \mathring{\omega}=\{x_i \mid i=2,\ 3,\ \ldots,\ N-2\},$$

$$\omega^+=\{x_i \mid i=1,\ 2,\ \ldots,\ N\},\quad {}^+\omega=\{x_i \mid i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1\}.$$

Пусть $v(x)$ и $w(x)$ — некоторые сеточные функции, заданные на $\bar{\omega}$. Определим *скалярное произведение* этих

функций следующей формулой:

$$(v,\ w)_{\bar{\omega}} = \sum_{i=0}^{N} v(x_i)\, w(x_i)\, \hbar_i. \tag{1}$$

Если $v(x_i)$ и $w(x_i)$ рассматривать как значения на сетке $\bar{\omega}$ функций $v(x)$ и $w(x)$ непрерывного аргумента $x \in [0,\ l]$, то скалярное произведение (1) представляет собой квадратурную формулу трапеций для интеграла

$$\int_0^l v(x)\, w(x)\, dx. \tag{2}$$

Помимо скалярного произведения (1), определенного для сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}$, нам потребуются в дальнейшем скалярные произведения для сеточных функций, заданных на ω^+, ${}^+\omega$, ω и $\mathring{\omega}$. Пусть

$$(v,\ w)_{\omega^+} = \sum_{i=1}^{N} v(x_i)\, w(x_i)\, h_i, \tag{3}$$

$$(v,\ w)_{+\omega} = \sum_{i=0}^{N-1} v(x_i)\, w(x_i)\, h_{i+1}, \tag{4}$$

$$(v,\ w)_{\omega} = \sum_{i=1}^{N-1} v(x_i)\, w(x_i)\, \hbar_i, \tag{5}$$

$$(v,\ w)_{\mathring{\omega}} = \sum_{i=2}^{N-2} v(x_i)\, w(x_i)\, \hbar_i.$$

Скалярное произведение (3) можно трактовать как квадратурную формулу правых прямоугольников для интеграла (2), а (4) — как квадратурную формулу левых прямоугольников для того же интеграла. Легко проверить, что

$$(v,\ w)_{\bar{\omega}} = \frac{1}{2}\left[(v,\ w)_{\omega^+} + (v,\ w)_{+\omega}\right].$$

Иногда, если это не будет вызывать недоразумений, индекс, указывающий, по какой сетке осуществляется суммирование, будем опускать и писать просто $(v,\ w)$.

2. Разностные формулы. Для преобразования выражений, содержащих разностные отношения сеточных функций, полезны формулы взятия разностного отношения от

произведения. Используя определения разностных отношений, нетрудно проверить, что имеют место следующие формулы:

$$(vw)_{\bar{x},\,i} = v_{\bar{x},\,i}w_{i-1} + v_i w_{\bar{x},\,i} = v_{\bar{x},\,i}w_i + v_{i-1}w_{\bar{x},\,i} = \\ = v_{\bar{x},\,i}w_i + v_i w_{\bar{x},\,i} - h_i v_{\bar{x},\,i}w_{\bar{x},\,i}, \tag{6}$$

$$(vw)_{x,\,i} = v_{x,\,i}w_{i+1} + v_i w_{x,\,i} = v_{x,\,i}w_i + v_{i+1}w_{x,\,i} = \\ = v_{x,\,i}w_i + v_i w_{x,\,i} + h_{i+1}v_{x,\,i}w_{x,\,i}. \tag{7}$$

Из этих формул легко выводятся формулы суммирования по частям. Умножая, например, (6) на h_i и суммируя полученное соотношение по i от $m+1$ до n $(0 \leqslant m < n \leqslant N)$, находим, что

$$\sum_{i=m+1}^{n} (vw)_{\bar{x},\,i}h_i = \sum_{i=m+1}^{n} v_{\bar{x},\,i}w_{i-1}h_i + \sum_{i=m+1}^{n} v_i w_{\bar{x},\,i}h_i.$$

Выполняя суммирование в левой части и делая замену индекса суммирования $i-1=i'$ в первой сумме правой части, после некоторой перегруппировки получим следующую формулу:

$$\sum_{i=m+1}^{n} v_i w_{\bar{x},\,i}h_i = -\sum_{i=m}^{n-1} v_{x,\,i}w_i h_{i+1} + v_n w_n - v_m w_m \tag{8}$$

(*формула суммирования по частям*). Первое слагаемое суммы, стоящей в правой части (8), равно

$$v_{x,\,m}w_m h_{m+1} = v_{m+1}w_m - v_m w_m.$$

Поэтому формулу (8) можно преобразовать к виду

$$\sum_{i=m+1}^{n-1} v_{x,\,i}w_i h_{i+1} = -\sum_{i=m+1}^{n} v_i w_{\bar{x},\,i}h_i + v_n w_n - v_{m+1}w_m. \tag{9}$$

Из формулы (9), учитывая, что

$$v_{x,\,i}h_{i+1} = v_{\hat{x},\,i}\hbar_i,$$

получим следующую формулу:

$$\sum_{i=m+1}^{n-1} v_{\hat{x},\,i}w_i\hbar_i = \sum_{i=m+1}^{n} v_i w_{\bar{x},\,i}h_i + v_n w_n - v_{m+1}w_m. \tag{10}$$

Если в соотношении (10) положить $v_i = a_i u_{x,\,i}$, $w_i = v_i$, то будем иметь формулу

$$\sum_{i=m+1}^{n-1} (au_{\bar{x}})_{\hat{x},\,i} v_i h_i =$$

$$= -\sum_{i=m+1}^{n} a_i u_{\bar{x},\,i} v_{\bar{x},\,i} h_i + a_n u_{\bar{x},\,n} v_n - a_{m+1} u_{x,\,m} v_m. \qquad (11)$$

Формула (11) при $m=0$, $n=N$ называется *первой разностной формулой Грина* и может быть записана так:

$$((au_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ v)_{\omega} = -(au_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega+} + a_N u_{\bar{x},\,N} v_N - a_1 u_{x,\,0} v_0. \qquad (12)$$

Вычитая из (12) соотношение

$$((av_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ u)_{\omega} = -(av_{\bar{x}},\ u_{\bar{x}})_{\omega+} + a_N v_{\bar{x},\,N} u_N - a_1 v_{x,\,0} u_0,$$

получим, что

$$((au_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ v)_{\omega} - ((av_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ u)_{\omega} =$$

$$= a_N (u_{\bar{x}} v - u v_{\bar{x}})_N - a_1 (u_x v - u v_x)_0 \qquad (13)$$

(*вторая разностная формула Грина*).

Соотношения, аналогичные первой и второй разностным формулам Грина (12) и (13), имеют место и для разностного оператора четвертого порядка $(bu_{\bar{x}\bar{x}})_{\bar{x}\bar{x}}$. Установим, например, аналог первой формулы Грина (12) в предположении, что сетка $\bar{\omega}$ равномерная. Из (11) при $m=1$, $n=N-1$, $a \equiv 1$, $u \equiv w$ рассуждениями, использованными для доказательства (13), выводим тождество

$$(w_{\bar{x}\bar{x}},\ v)_{\mathring{\omega}} - (w,\ v_{\bar{x}\bar{x}})_{\mathring{\omega}} = (w_{\bar{x}} v - w v_{\bar{x}})_{N-1} - (w_x v - w v_x)_1.$$

Вычтем из левой и правой частей этого тождества величину $h(w_1 v_{\bar{x}\bar{x},\,1} + w_{N-1} v_{\bar{x}\bar{x},\,N-1})$ и заметим, что

$$(v_x - h v_{\bar{x}\bar{x}})_1 = v_{\bar{x},\,1} = v_{x,\,0},$$

$$(-v_{\bar{x}} - h v_{\bar{x}\bar{x}})_{N-1} = -v_{x,\,N-1} = -v_{x,\,N}.$$

В результате имеем

$$(w_{\bar{x}\bar{x}},\ v)_{\mathring{\omega}} - (w,\ v_{\bar{x}\bar{x}})_{\omega} =$$

$$= (w_{\bar{x},\,N-1} v_{N-1} - w_{N-1} v_{\bar{x},\,N}) - (w_{x,\,1} v_1 - w_1 v_{x,\,0}).$$

Полагая $w \equiv bu_{\bar{x}\bar{x}}$, получим *первую разностную формулу*

Грина для оператора четвертого порядка

$$((bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}}, v)_{\mathring{\omega}} = (bu_{\bar{x}x}, v_{\bar{x}x})_{\omega} + [(bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}} v - bu_{\bar{x}x} v_x]_{N-1} - \\ - [(bu_{\bar{x}x})_x v - bu_{\bar{x}x} v_{\bar{x}}]_1. \quad (14)$$

3. Некоторые неравенства. В дальнейшем мы часто будем пользоваться некоторыми хорошо известными алгебраическими неравенствами.

1) *Неравенство Коши*:

$$\left| \sum_{i,\, j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i b_j \right| \leqslant \left(\sum_{i,\, j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i a_j \right)^{1/2} \left(\sum_{i,\, j=0}^{n} \alpha_{ij} b_i b_j \right)^{1/2}, \quad (15)$$

где $\alpha_{ij} \geqslant 0$ при $i, j = 0, 1, \ldots, n$.

2) *ε-неравенство*:

$$|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad (16)$$

где ε — любое положительное число.

Общее неравенство Коши (15) в конкретных ситуациях принимает специальный вид. Так, например, если $n = N$, $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\alpha_{ii} = \hbar_i$ при $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $\alpha_{00} = h_1/2$, $\alpha_{NN} = h_N/2$ и $a_i = u(x_i)$, $b_i = v(x_i)$, то неравенство (15) может быть записано следующим образом:

$$|(u, v)_{\bar{\omega}}| \leqslant (u, u)_{\bar{\omega}}^{1/2} (v, v)_{\bar{\omega}}^{1/2}.$$

Величина $(v, v)_{\omega}^{1/2}$ является сеточным аналогом нормы в L_2. Учитывая это обстоятельство, введем следующее обозначение:

$$\|v\|_{L_2(\bar{\omega})} = (v, v)_{\bar{\omega}}^{1/2},$$

тогда предыдущее неравенство запишется в виде

$$|(u, v)_{\bar{\omega}}| \leqslant \|u\|_0 \|v\|_0,$$

где $\|v\|_0 = \|v\|_{L_2(\bar{\omega})}$.

§ 2. Одномерные модели

Материал этого параграфа носит в основном методический характер. Здесь изучаются краевые задачи для обыкновенных разностных уравнений второго и четвертого порядков, и на этих простейших примерах иллюстрируется методика исследования сеточных задач.

Исследование сеточной задачи состоит из трех этапов: 1) выяснения вопроса о разрешимости задачи, 2) исследования устойчивости задачи по правой части и граничным условиям, 3) исследования скорости сходимости решения сеточной задачи к решению аппроксимируемой задачи. Основная цель второго этапа состоит в получении априорной оценки решения. При помощи априорной оценки, с одной стороны, можно выяснить вопрос о разрешимости задачи, а с другой стороны, получить оценку скорости сходимости сеточной задачи.

1. Первая краевая задача для одномерного уравнения второго порядка. На сетке $\bar{\omega}=\{x=x_i \mid i=0, 1, \ldots, N; x_0=0, x_N=l\}$ рассмотрим следующую задачу:

$$\Lambda y \equiv -(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}}=\varphi, \quad x\in\omega, \quad y(0)=u_0, \quad y(l)=u_1. \tag{1}$$

Будем предполагать, что коэффициенты $a(x)$ задачи (1) удовлетворяют условию

$$a(x)\geqslant c_0>0, \qquad x\in\omega^+. \tag{2}$$

Исследуем вопрос о разрешимости поставленной задачи. Рассмотрим однородную задачу ($\varphi\equiv 0$, $u_0=u_1=0$), решение которой заведомо существует. Пусть $y(x)$ — одно из решений однородной задачи. Умножим уравнение (1) на $y\hbar$ и просуммируем по сетке ω. Преобразовывая полученное выражение при помощи первой разностной формулы Грина (12) § 1, будем иметь

$$(\Lambda y, y)_\omega=[y, y]=0, \tag{3}$$

где

$$[v, v]\equiv(av_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+}. \tag{4}$$

Из соотношения (4) с учетом неравенства (2) находим, что $[v, v]\geqslant c_0(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+}\geqslant 0$. Но $(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+}=0$ лишь при $v(x)=\mathrm{const}$, $x\in\bar{\omega}$, и поэтому из формулы (3) следует, что единственным решением однородной задачи является постоянная, которая в силу граничных условий равна нулю. Тем самым решение задачи (1), (2) при любых $\varphi(x)$, u_0 и u_1 существует и единственно.

Получим априорную оценку решения задачи (1). Рассмотрим сначала задачу с однородными граничными

условиями

$$y(0)=y(l)=0. \tag{5}$$

Пусть $\mathring{V}$ — множество сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль при $x=0,\ l$. Для функций из этого множества введем две нормы:

$$\|v\|_1^2=(v_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega^+}, \tag{6}$$

которая превращает множество $\mathring{V}$ в нормированное пространство, обозначаемое через $\mathring{W}_2^1(\bar{\omega})$, и

$$\|\varphi\|_{-1}=\sup_{0\neq v\in\mathring{V}}\frac{|(\varphi,\ v)_\omega|}{\|v\|_1}, \tag{7}$$

превращающую его в нормированное пространство $W_2^{-1}(\omega)$. Умножим уравнение (1) на $y\hbar$, просуммируем его по сетке ω и, учитывая граничные условия (5), преобразуем полученное выражение при помощи первой разностной формулы Грина (12) § 1.

В результате получим

$$(ay_{\bar{x}},\ y_{\bar{x}})_{\omega^+}=(\varphi,\ y)_\omega.$$

Учитывая неравенство (2) и принимая во внимание соотношения (6), (7), находим отсюда, что

$$c_0\|y\|_1^2\leqslant|(\varphi,\ y)_\omega|\leqslant\|y\|_1\|\varphi\|_{-1}, \tag{8}$$

или

$$\|y\|_1\leqslant\frac{1}{c_0}\|\varphi\|_{-1}. \tag{9}$$

Априорная оценка решения задачи (1), (5) получена.

Вернемся к задаче (1) с неоднородными граничными условиями. Представим решение этой задачи в виде

$$y(x)=\bar{y}(x)+\hat{y}(x),\qquad x\in\bar{\omega}, \tag{10}$$

где

$$\bar{y}_{\bar{x}\hat{x}}=0,\quad x\in\omega,\quad \bar{y}(0)=u_0,\quad \bar{y}(l)=u_1, \tag{11}$$

а

$$\Lambda\hat{y}=\varphi-\Lambda\bar{y},\quad x\in\omega,\quad \hat{y}(0)=\hat{y}(l)=0. \tag{12}$$

Оценим решения задач (11) и (12). Дополнительно к (2) будем предполагать, что

$$a(x)\leqslant c_1,\qquad x\in\omega^+. \tag{13}$$

Для оценки решения задачи (12) воспользуемся соотношением (8), на основании которого

$$c_0 \|\mathring{y}\|_1^2 \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|\mathring{y}\|_1 + |(\Lambda\bar{y}, \mathring{y})_\omega|. \tag{14}$$

Принимая во внимание первую разностную формулу Грина (12) § 1, находим, что

$$|(\Lambda\bar{y}, \mathring{y})_\omega| = |(a\bar{y}_{\bar{x}}, \mathring{y}_{\bar{x}})_{\omega^+}| \equiv |[\bar{y}, \mathring{y}]|,$$

а используя условие (13) и неравенство Коши (15) § 1, будем иметь оценку

$$|(\Lambda\bar{y}, \mathring{y})_\omega| \leqslant c_1 \|\bar{y}\|_1 \|\mathring{y}\|_1.$$

Подставляя эту оценку в (14), получим

$$c_0 \|\mathring{y}\|_1^2 \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|\mathring{y}\|_1 + c_1 \|\bar{y}\|_1 \|\mathring{y}\|_1,$$

откуда

$$\|\mathring{y}\|_1 \leqslant \frac{1}{c_0} \|\varphi\|_{-1} + \frac{c_1}{c_0} \|\bar{y}\|_1. \tag{15}$$

Найдем теперь $\bar{y}(x)$. Из (11) следует, что

$$\bar{y}(x) = \frac{u_1 - u_0}{l} x + u_0, \tag{16}$$

и поэтому

$$\|\bar{y}\|_1 = \frac{1}{\sqrt{l}} |u_1 - u_0|.$$

Подставляя это соотношение в (15), получим оценку функции $\mathring{y}(x)$

$$\|\mathring{y}\|_1 \leqslant \frac{1}{c_0} \|\varphi\|_{-1} + \frac{c_1}{c_0 \sqrt{l}} |u_1 - u_0|. \tag{17}$$

Оценим $\bar{y}$. Функция $\bar{y}(x)$ не принадлежит множеству $\mathring{V}$, т. е. не обращается в нуль при $x = 0, l$. Поэтому величина $(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega^+}$ не может служить нормой этой функции, ибо $(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} = 0$ при $v(x) = \text{const} \neq 0$, $x \in \bar{\omega}$. В связи с этим введем новую норму

$$\|v\|_1^2 \equiv (v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} + (v, v)_{\bar{\omega}} \tag{18}$$

и оценим $\bar{y}$ в этой норме. Из соотношения (16) следует, что

$$(\bar{y}_{\bar{x}}, \bar{y}_{\bar{x}})_{\omega^+} = \frac{|u_1 - u_0|^2}{l},$$

$$(\bar{y}, \bar{y})_{\bar{\omega}} \leqslant l \max_{x \in \bar{\omega}} |\bar{y}|^2 \leqslant l (|u_0| + |u_1|)^2,$$

и поэтому

$$\|\bar{y}\|_1 \leqslant \sqrt{l+1/l}\,(|u_0|+|u_1|). \tag{19}$$

Вернемся к оценке решения задачи (1). Из соотношения (10) вытекает неравенство

$$\|y\|_1 \leqslant \|\bar{y}\|_1 + \|\mathring{y}\|_1. \tag{20}$$

Первое слагаемое правой части $\|\bar{y}\|_1$ оценивается неравенством (19), а для функции $\mathring{y}$ мы имеем оценку лишь в норме $\mathring{W}_2^1$. Но из (6) и (18) вытекает, что

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_0^2 + (v,\ v)_{\bar{\omega}},$$

и, следовательно, достаточно оценить $(\mathring{y},\ \mathring{y})_{\bar{\omega}} \equiv \|\mathring{y}\|_0^2$. В § 5 этой главы (лемма 2) будет показано, что для функций из $\mathring{V}$ выполняется неравенство *)

$$\|v\|_1^2 \geqslant \frac{8}{l^2}\|v\|_0^2.$$

Поэтому

$$\|v\|_1^2 \geqslant \frac{1}{(1+l^2/8)}\|v\|_1^2. \tag{21}$$

Учитывая эту оценку, из неравенства (17) находим, что

$$\|\mathring{y}\|_1 \leqslant \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{c_0}\|\varphi\|_{-1} + \frac{c_1}{c_0}\frac{\sqrt{1+l^2/8}}{l^{1/2}}(|u_0|+|u_1|).$$

Оценивая при помощи этого неравенства и неравенства (19) правую часть соотношения (20), окончательно получим

$$\|y\|_1 \leqslant M_1\|\varphi\|_{-1} + M_2(|u_0|+|u_1|), \tag{22}$$

где

$$M_1 = \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{c_0}, \quad M_2 = \frac{c_1}{c_0}\frac{\sqrt{1+l^2/8}}{l^{1/2}} + \sqrt{l+1/l}.$$

Априорная оценка решения задачи (1) получена. Отметим, что постоянные M_1 и M_2, фигурирующие в этой

*) Как уже отмечалось, излагаемый здесь материал носит методический характер. Одна из преследуемых нами целей состоит в том, чтобы выяснить, какого типа специальные неравенства требуются для исследования разностных схем. Эта и последующие ссылки как раз и связаны с такими неравенствами, доказательства которых мы приводим в §§ 4, 5.

оценке, не зависят от сетки $\bar{\omega}$, так что из (22) следует устойчивость решения задачи (1) по правой части и по граничным условиям.

Воспользуемся полученной априорной оценкой для исследования скорости сходимости разностной схемы. Рассмотрим на отрезке $[0, l]$ следующую задачу:

$$(ku')' = -f, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u_0, \quad u(l) = u_1 \tag{23}$$

и, согласно § 2 гл. II, аппроксимируем ее на произвольной неравномерной сетке $\bar{\omega}$ задачей (1), полагая, например,

$$a(x_i) = k(x_i - h_i/2), \quad \varphi(x_i) = f(x_i). \tag{24}$$

Для функции $z(x) = y(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega}$ получим задачу

$$\Lambda z = \psi, \quad x \in \omega, \quad z(0) = z(l) = 0, \tag{25}$$

где $\psi(x) = \Lambda u + f$ — погрешность аппроксимации. Оценим решение задачи (25). Учитывая неравенство (9), находим, что

$$\|z\|_1 \leqslant \frac{1}{c_0} \|\psi\|_{-1}. \tag{26}$$

Легко проверить (см., например, формулы (6) — (8) § 2 гл. IV), что для погрешности аппроксимации $\psi(x)$ имеет место следующее представление:

$$\psi(x) = \eta_{\hat{x}} + \overset{*}{\psi}, \quad \eta(x) = O(h^2), \quad \overset{*}{\psi}(x) = O(\hbar^2). \tag{27}$$

Принимая во внимание, что $\|\psi\|_{-1}$, определяется соотношением (7), оценим $(\psi, v)_\omega$ при $v \in \mathring{V}$. Учитывая представление (27) и вспоминая, что $\eta_{\hat{x}, i} = \frac{h_{i+1}}{\hbar_i} \eta_{x, i}$, будем иметь

$$(\psi, v)_\omega = (\eta_{\hat{x}}, v)_\omega + \left(\overset{*}{\psi}, v\right)_\omega = \sum_{i=1}^{N-1} \eta_{x, i} v_i h_{i+1} + \left(\overset{*}{\psi}, v\right)_\omega.$$

Преобразовывая первое слагаемое правой части при помощи формулы суммирования по частям (9) § 1, находим, что

$$(\psi, v)_\omega = -(\eta, v_{\bar{x}})_\omega + \left(\overset{*}{\psi}, v\right)_\omega.$$

Применяя для оценки правой части неравенство Коши (15) § 1, получим

$$|(\psi, v)_\omega| \leqslant (\eta^2, 1)_{\omega^+}^{1/2} \|v\|_1 + \|\overset{*}{\psi}\|_0 \|v\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \left\{(\eta^2, 1)_{\omega^+} + \|\overset{*}{\psi}\|_0^2\right\}^{1/2} \|v\|_1.$$

Подставим эту оценку в определение (7) и учтем неравенство (21). В результате будем иметь неравенство

$$\|\psi\|_{-1} \leqslant \left\{(\eta^2, 1)_{\omega^+} + \|\overset{*}{\psi}\|_0^2\right\}^{1/2} \sup \frac{\|v\|_1}{\|v\|_1} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{1 + l^2/8} \left\{(\eta^2, 1)_{\omega^+} + \|\overset{*}{\psi}\|_0^2\right\}^{1/2}.$$

Принимая во внимание (27), отсюда и из (26) находим, что

$$\|z\|_1 = O(|h|^2), \qquad |h| = \max h(x).$$

Итак, решение разностной задачи (1), (24) при выполнении условия (2) сходится к достаточно гладкому решению задачи (23) со скоростью $O(|h|^2)$.

2. Третья краевая задача для одномерного уравнения второго порядка. На равномерной сетке $\bar{\omega}$, расположенной на отрезке $[0, l]$, рассмотрим следующую задачу:

$$\Lambda y \equiv -(a y_{\bar{x}})_x + dy = \varphi(x), \quad x \in \omega,$$
$$-a_1 y_{x,0} + \left(\varkappa_0 + \frac{h}{2} d_0\right) y_0 = g_0 + \frac{h}{2} \varphi_0, \tag{28}$$
$$a_N y_{\bar{x},N} + \left(\varkappa_1 + \frac{h}{2} d_N\right) y_N = g_1 + \frac{h}{2} \varphi_N.$$

Будем предполагать, что коэффициент $a(x)$ удовлетворяет условию (2), а коэффициенты $d(x)$, $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ — условиям

$$d(x) \geqslant 0, \quad x \in \bar{\omega}, \quad \varkappa_0 \geqslant 0, \quad \varkappa_1 \geqslant 0, \tag{29}$$
$$\varkappa_0 + \varkappa_1 + (d, 1)_{\bar{\omega}} > 0. \tag{30}$$

Введем оператор $\bar{\Lambda}$, определяемый формулой

$$\bar{\Lambda} v(x) = \begin{cases} -\frac{2}{h} a_1 v_x + \left(\frac{2}{h} \varkappa_0 + d_0\right) v, & x = 0, \\ \frac{2}{h} a_N v_{\bar{x}})_x + dv, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h} a_N v_{\bar{x}} + \left(\frac{2}{h} \varkappa_1 + d_N\right), & x = l, \end{cases} \tag{31}$$

и перепишем задачу (28) в следующем виде:

$$\bar{\Lambda} v = \Phi, \qquad x \in \bar{\omega}, \tag{32}$$

где

$$\Phi = \begin{cases} \varphi_0 + \dfrac{2}{h} g_0, & x = 0, \\ \varphi(x), & x \in \omega, \\ \varphi_N + \dfrac{2}{h} g_1, & x = l. \end{cases} \tag{33}$$

Изучим вопрос о разрешимости задачи (32). Исследуем скалярное произведение $(\bar{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}}$. Используя формулу Грина (12) § 1, находим, что

$$(\bar{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}} = (a v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} + (d v, v)_{\bar{\omega}} + \varkappa_0 v_0^2 + \varkappa_1 v_N^2 \equiv [v, v]. \tag{34}$$

Отсюда с учетом условий (2) и (29) следует, что

$$[v, v] \geqslant 0,$$

причем, если $[v, v] = 0$, то $v \equiv \text{const}$, $x \in \bar{\omega}$. Так как хотя бы одна из величин $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $d(\mathring{x})$, где $\mathring{x}$ — некоторый узел сетки $\bar{\omega}$, больше нуля, равенство $[v, v] = 0$ влечет за собой равенство нулю либо $v(0)$, либо $v(l)$, либо $v(\mathring{x})$, т. е. $v \equiv 0$.

Положим теперь в уравнении (32) $\Phi \equiv 0$, $x \in \bar{\omega}$ и рассмотрим полученную однородную задачу. Ее решение $y(x)$ на основании тождества (34) удовлетворяет условию $[y, y] = 0$, что в силу только что доказанного влечет за собой утверждение $y(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\omega}$. Итак, однородная задача (32) при выполнении условий (2), (29), (30) имеет лишь тривиальное решение, а следовательно, задача (32) при тех же условиях однозначно разрешима для любой функции $\Phi(x)$. Получим априорную оценку решения задачи (32). Для этого положим в (34) $v \equiv y$ и учтем уравнение (32) и формулу (33). В результате получим

$$[y, y] = (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + g_0 y(0) + g_1 y(l). \tag{35}$$

Будем оценивать решение $y(x)$ в норме пространства $W_2^1(\bar{\omega})$ (см. (18)). Предположим, что коэффициенты $d(x)$, $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ задачи (32) таковы, что имеет место неравенство

$$[v, v] \geqslant m \|v\|_1^2, \tag{36}$$

где m — положительная постоянная, не зависящая ни от сетки $\bar{\omega}$, ни от функции $v(x)$. Учитывая (34), легко проверить, что неравенство (36) будет иметь место, если, помимо условий (2) и (29), выполнено дополнительное условие

$$d(x) \geqslant c_3 > 0, \qquad x \in \bar{\omega}.$$

Другие достаточные условия, обеспечивающие справедливость неравенства (36), будут установлены в § 5 настоящей главы.

Итак, из тождества (35) и неравенства (36) следует, что

$$\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{m}\{|(\varphi, y)_{\bar{\omega}}| + |g_0 y(0)| + |g_1 y(l)|\}.$$

Пусть

$$\|\varphi\|_{-1} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(\varphi, v)_{\bar{\omega}}|}{\|v\|_1}. \tag{37}$$

Тогда

$$\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{m}\{\|\varphi\|_{-1}\|y\|_1 + |g_0||y(0)| + |g_1||y(l)|\}.$$

Чтобы отсюда получить априорную оценку, нужно уметь оценивать $|y(0)|$ и $|y(l)|$ через $\|y\|_1$. В § 4 (теорема 2) будет доказано, что

$$\|v\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}} |v(x)| \leqslant M\|v\|_1, \tag{38}$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит ни от сетки $\bar{\omega}$, ни от $v(x)$. Подставляя это неравенство в предыдущее, получим априорную оценку

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{1}{m}\{\|\varphi\|_{-1} + M(|g_0| + |g_1|)\}. \tag{39}$$

Из этой оценки вытекает устойчивость решения задачи (30) по правой части и по граничным условиям.

Воспользуемся априорной оценкой (39) для исследования сходимости разностной схемы. На отрезке $[0, l]$ рассмотрим задачу

$$(ku')' - qu = -f(x), \qquad 0 < x < l, \tag{40}$$
$$k(0)u'(0) = \varkappa_0 u(0) - g_0, \quad -k(l)u'(l) = \varkappa_1 u(l) - g_1$$

и, согласно § 2 гл. II, аппроксимируем ее на равномерной сетке $\bar{\omega}$ задачей (28), положив

$$a(x_i)=k(x_i-h/2),\quad d(x_i)=q(x_i),\quad \varphi(x_i)=f(x_i). \tag{41}$$

Функция $z(x)=y(x)-u(x)$, $x\in\bar{\omega}$, где $y(x)$ — решение задачи (28), (41), а $u(x)$ — решение задачи (40), является в свою очередь решением следующей задачи:

$$\begin{gathered}\Lambda z=\psi(x),\quad x\in\omega,\\ -a_1 z_{x,0}+\left(\varkappa_0+\frac{h}{2}d_0\right)z_0=\psi_0,\\ a_N z_{\bar{x},N}+\left(\varkappa_1+\frac{h}{2}d_N\right)z_N=\psi_N.\end{gathered} \tag{42}$$

В § 3 гл. II было показано, что при достаточной гладкости решения задачи (40) погрешности аппроксимаций уравнения и граничных условий есть величины $O(h^2)$, т. е.

$$\psi(x)=O(h^2),\quad x\in\omega,\quad \psi_0=O(h^2),\quad \psi_N=O(h^2). \tag{43}$$

Для решения задачи (42) в силу неравенства (39) справедлива оценка

$$\|z\|_1\leqslant\frac{1}{m}\{\|\psi\|_{\hat{1}}+M(|\psi_0|+|\psi_N|)\}.$$

Так как (см. формулу (37)) $\|\psi\|_{\hat{1}}\leqslant\|\psi\|_0\leqslant\sqrt{l}\,\|\psi\|_C$, то из вышеприведенной оценки с учетом соотношений (43) получаем, что $\|z\|_1=O(h^2)$. Таким образом, решение задачи (28) при выполнении условия (36) сходится к решению задачи (40) со скоростью $O(h^2)$.

3. **Вторая краевая задача для одномерного уравнения второго порядка.** Положим в (28) $d(x)\equiv 0$, $\varkappa_0=\varkappa_1=0$. При этих предположениях задача (28) примет вид

$$\begin{gathered}-(ay_{\bar{x}})_x=\varphi,\quad x\in\omega,\\ -a_1 y_{x,0}=g_0+\frac{h}{2}\varphi_0,\quad a_N y_{\bar{x},N}=g_1+\frac{h}{2}\varphi_N.\end{gathered} \tag{44}$$

Заметим, что высказанные предположения противоречат условию (30), которое играло определяющую роль при исследовании разрешимости задачи (28). Легко проверить, что однородная задача (44) имеет нетривиальное решение $y(x)=\text{const}$ и, следовательно, задача (43) вырождена, а потому не может иметь решение при любых правых частях $\varphi(x)$ и g_0, g_1. Так как $[v,v]\equiv(av_{\bar{x}},v_{\bar{x}})_{\omega^+}=0$

лишь при $y(x) \equiv \text{const}$, то на основании тождества (34) $y(x) \equiv \text{const}$ является единственным решением задачи (44).

Введем оператор $\mathring{\Lambda}$, определяемый следующей формулой (ср. с (31)):

$$\mathring{\Lambda} v(x) \equiv \begin{cases} -\frac{2}{h} a_1 v_x, & x = 0, \\ -(a v_{\bar{x}})_x, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h} a_N v_{\bar{x}}, & x = l. \end{cases}$$

Из вышесказанного следует, что нуль является однократным собственным значением этого оператора и, следовательно, неоднородная задача (44) будет разрешима, если на ее правые части будет наложено одно условие. Преобразовывая скалярное произведение $(\mathring{\Lambda} y, 1)_{\bar{\omega}}$ при помощи второй разностной формулы Грина (13) § 1, найдем, что $(\mathring{\Lambda} y, 1)_{\bar{\omega}} = 0$. Но, с другой стороны,

$$(\mathring{\Lambda} y, 1)_{\bar{\omega}} = (\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + g_0 + g_1,$$

и, следовательно, должно выполняться условие

$$(\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + g_0 + g_1 = 0. \tag{45}$$

Итак, при выполнении условия (45) задача (44) разрешима. Получим априорную оценку этого решения. Как и при исследовании задачи (28), находим, что

$$[y, y] \equiv (a y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega^+} = (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + g_0 y(0) + g_1 y(l).$$

Учитывая условие (12), определение (37) и неравенство (38), получим

$$c_0 (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega^+} \leqslant \|\varphi\|_{\mathring{1}} \|y\|_1 + M(|g_0| + |g_1|) \|y\|_1. \tag{46}$$

В § 5 этой главы будет доказано (лемма 3), что

$$(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} \geqslant M_1 \|v\|_{\mathring{1}}^2 - M_2 (v, 1)_{\bar{\omega}}^2,$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, не зависящие ни от сетки $\bar{\omega}$, ни от $v(x)$. Учитывая это, из неравенства (46) находим

$$c_0 M_1 \|y\|_{\mathring{1}}^2 \leqslant \|\varphi\|_{\mathring{1}} \|y\|_1 + M(|g_0| + |g_1|) \|y\|_1 + c_0 M_2 (y, 1)_{\bar{\omega}}^2.$$

Используя теперь ε-неравенство (16) § 1 для оценки произведений $\|\varphi\|_{\hat{1}}\|y\|_{\hat{1}}$, $|g_0|\|y\|_{\hat{1}}$, $|g_1|\|y\|_{\hat{1}}$, имеем оценку

$$(c_0M_1-\varepsilon-2M\varepsilon)\|y\|_{\hat{1}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|_{\hat{1}}^2+\frac{M}{4\varepsilon}(|g_0|^2+|g_1|^2)+c_0M_2(y,\ 1)_{\bar{\omega}}^2.$$

Выбирая $\varepsilon>0$, например, из условия $(c_0M_1-\varepsilon-2M\varepsilon)=c_0M_1/2$, получим следующую априорную оценку:

$$\|y\|_{\hat{1}}^2 \leqslant M_3\{\|\varphi\|_{\hat{1}}^2+|g_0|^2+|g_1|^2+(y,\ 1)_{\bar{\omega}}^2\}. \qquad (47)$$

Правая часть (47) содержит, помимо известных величин, квадрат скалярного произведения искомого решения на единицу. Наличие этого слагаемого связано с тем обстоятельством, что искомое решение находится не однозначно, как в задачах (1) и (28), а с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Воспользуемся априорной оценкой (47) для исследования скорости сходимости разностной схемы. На отрезке $[0,\ l]$ рассмотрим задачу

$$(ku')'=-f(x),\ k(0)u'(0)=-g_0,\ -k(l)u'(l)=-g_1. \qquad (48)$$

Будем считать выполненным условие разрешимости

$$\int_0^l f(x)\,dx+g_0+g_1=0. \qquad (49)$$

Задание проекции искомого решения на единицу

$$\int_0^l u(x)\,dx=Q \qquad (50)$$

обеспечивает его единственность. На равномерной сетке $\bar{\omega}$ задачу (48), (49) аппроксимируем задачей (44), у которой

$$a(x_i)=k\left(x_i-\frac{h}{2}\right),\ \varphi(x_i)=f(x_i)-R/l,$$

$$R=(f,\ 1)_{\bar{\omega}}+g_0+g_1, \qquad (51)$$

а условие (50) аппроксимируем условием

$$(y,\ 1)_{\bar{\omega}}=Q. \qquad (52)$$

Условие (45) на основании формул (51) для аппроксимируемой задачи выполняется, и, следовательно, она разрешима.

Введем в рассмотрение функцию $z(x)=y(x)-u(x)$, где $y(x)$ — решение задачи (44), (51), (52), а $u(x)$ — решение задачи (48) — (50). Для функции $z(x)$ получим задачу $-(az_{\bar{x}})_x=\psi(x)$, $x\in\omega$, $-a_1 z_{x,0}=\psi(0)$, $a_N z_{\bar{x},N}=\psi(l)$,

$$(z,\ 1)_{\bar{\omega}}=Q-(u,\ 1)_{\bar{\omega}}. \tag{53}$$

Так как задачи (44), (51), (52) и (48) — (50) разрешимы, то разрешима и задача (53). С учетом априорной оценки (47) для $z(x)$ имеем

$$\|z\|_1^2\leqslant M_3\left\{\|\psi\|_{\overset{\circ}{1}}^2+|\psi(0)|^2+|\psi(l)|^2+(z,\ 1)_{\bar{\omega}}^2\right\}. \tag{54}$$

По ранее доказанному $\psi(x)=O(h^2)$, а в силу (53)

$$(z,\ 1)_{\bar{\omega}}=Q-(u,\ 1)_{\bar{\omega}}=\int_0^l u(x)\,dx-(u,\ 1)_{\bar{\omega}}=O(h^2).$$

Тем самым из (54) находим, что $\|z\|_1=O(h^2)$. Сходимость разностной схемы (44), (51), (52) доказана.

4. Первая краевая задача для одномерного уравнения четвертого порядка. Обратимся теперь к разностным схемам, аппроксимирующим краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Пусть на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ введена равномерная сетка $\bar{\omega}$ с шагом h. На сетке $\bar{\omega}$ рассмотрим следующую задачу:

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x}=\varphi(x),\qquad x\in\overset{\circ}{\omega}, \tag{55}$$

$$y(0)=w_0,\ y_x-\frac{h}{2}y_{xx}+\frac{h^2}{2}y_{xxx}|_{x=0}=\frac{h^3}{2}\varphi(h)+w_0', \tag{56}$$

$$y_{\bar{x}}+\frac{h}{2}y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{h^2}{2}y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\Big|_{x=l}=-\frac{h^3}{3}\varphi(l-h)+w_1',\ y(l)=w_1.$$

Как было показано в п. 4 § 6 гл. IV, задача (55), (56) аппроксимирует с погрешностью $O(h^2)$ задачу

$$\begin{aligned}&w^{IV}=\varphi(x),\qquad 0<x<l,\\ &w(0)=w_0,\ w'(0)=w_0',\ w(l)=w_1,\ w'(l)=w_1'.\end{aligned} \tag{57}$$

Исследуем вопрос о разрешимости задачи (55), (56) и получим априорную оценку ее решения. Умножим уравнение (55) на $y(x)h$ и просуммируем полученное соотношение по сетке $\overset{\circ}{\omega}$:

$$(y_{\bar{x}x\bar{x}x},\ y)_{\overset{\circ}{\omega}} = (\varphi,\ y)_{\overset{\circ}{\omega}}.$$

Преобразовывая левую часть при помощи формулы Грина (14) § 1, будем иметь

$$(y^{\circ}_{\bar{x}x},\ 1)_{\omega} + \left[y_{\bar{x}x\bar{x}}y - y_{\bar{x}x}y_{\bar{x}}\right]_{N-1} - \left[y_{\bar{x}xx}y - y_{\bar{x}x}y_{\bar{x}}\right]_1 = (\varphi,\ y)_{\overset{\circ}{\omega}}. \tag{58}$$

Для дальнейшего преобразования левой части полученного соотношения воспользуемся граничными условиями (56). Так как $y_1 = y_0 + hy_{x,0}$, $y_{N-1} = y_N - hy_{\bar{x},N}$, то

$$\left[y_{\bar{x}xx}y - y_{\bar{x}x}y_{\bar{x}}\right]_1 = -y_{xxx}y|_{x=0} + y_x(y_{xx} - hy_{xxx})|_{x=0},$$
$$\left[y_{\bar{x}x\bar{x}}y - y_{\bar{x}x}y_x|_{N-1} = y_{\bar{x}x\bar{x}}y|_{x=l} - y_{\bar{x}}(y_{\bar{x}\bar{x}} + hy_{\bar{x}x\bar{x}})|_{x=l},\right.$$

а учитывая (56), получим, что

$$-\left[y_{\bar{x}xx}y - y_{\bar{x}x}y_{\bar{x}}\right]_1 =$$
$$= -y_{xxx,0}w_0 + \frac{2}{h}y^{2}_{\bar{x},0} - h\varphi(h)\,y(h) + h\varphi(h)\,w_0 - \frac{2}{h}w_0'y_{\bar{x},0},$$
$$\left[y_{\bar{x}x\bar{x}}y - y_{\bar{x}x}y_{\bar{x}}\right]_{N-1} =$$
$$= y_{\bar{x}x\bar{x},N}w_1 + \frac{2}{h}y^{2}_{\bar{x},N} - h\varphi(l-h)\,y(l-h) +$$
$$+ h\varphi(l-h)\,w_1 - \frac{2}{h}y_{\bar{x},N}w_1'.$$

Подставляя эти соотношения в (58), найдем, что

$$(y^{\circ}_{\bar{x}x},\ 1)_{\omega} + \frac{2}{h}(y^{\circ}_{\bar{x},0} + y^{2}_{\bar{x},N}) =$$
$$= (\varphi,\ y)_{\omega} + \frac{2}{h}(y_{x,0}w_0' + y_{\bar{x},N}w_1') -$$
$$- h\left[\varphi(h)\,w_0 - \varphi(l-h)\,w_1\right]. \tag{59}$$

Пусть $y(x)$ — одно из решений однородной ($\varphi \equiv 0$, $w_0 = w_1 = w_0' = w_1' = 0$) задачи (55), (56). Тогда из (59) следует, что $(y^{2}_{\bar{x}x},1)_{\omega} = 0$, $y^{\circ}_{\bar{x},0} = 0$, $y^{2}_{\bar{x},N} = 0$. Но $(y^{2}_{\bar{x}x},\ 1) = 0$ лишь при $y(x) = ax + b$, где a и b — некоторые постоянные.

Из соотношений $y^2_{x,\,0}=0$ и $y^{\bar{2}}_{\bar{x},\,N}=0$ следует, что $a=0$, т. е. $y(x)=\text{const}$, $x\in\bar{\omega}$. Так как по предположению $y_0=y_N=0$, то $y(x)\equiv 0$, $x\in\bar{\omega}$. Итак, $y(x)\equiv 0$ есть единственное решение однородной задачи (55), (56), и, тем самым, решение задачи (55), (56) при любых $\varphi(x)$, w_0, w_1, w_0', w_1' существует и единственно.

Получим априорную оценку решения задачи (55), (56). Представим ее решение в виде $y(x)\equiv\bar{y}(x)+\mathring{y}(x)$, где $\bar{y}(x)$ есть решение однородного уравнения с неоднородными граничными условиями

$$\bar{y}_{\bar{x}x\bar{x}x}=0,\ x\in\mathring{\omega},\ \bar{y}_0=w_0,\ \bar{y}_0=w_0',\ \bar{y}_{\bar{x},\,N}=w_1',\ \bar{y}_N=w_1, \tag{60}$$

а $\mathring{y}(x)$ — решение следующей задачи:

$$\mathring{y}_{\bar{x}x\bar{x}x}=\varphi,\ x\in\mathring{\omega},\ \mathring{y}_0=\mathring{y}_N=0,$$

$$\mathring{y}_x-\frac{h}{2}\mathring{y}_{xx}+\frac{h^2}{2}\mathring{y}_{xxx}|_{x=0}=$$

$$=\frac{h^3}{2}\varphi(h)+\frac{h}{2}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})|_{x=0}, \tag{61}$$

$$\mathring{y}_{\bar{x}}+\frac{h}{2}y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{h^2}{2}\mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l}=$$

$$=-\frac{h^3}{2}\varphi(l-h)-\frac{h}{2}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}+h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})|_{x=l}.$$

Для сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}$, введем норму по формуле $\|v\|^2_2\equiv\|v\|^2_{W_2^2(\bar{\omega})}\equiv\|v_{\bar{x}x}\|^2_0+\|v\|^2_0$, где $\|v_{\bar{x}x}\|^2_0\equiv\equiv\|v\|^2_{2,\,0}\equiv(v_{\bar{x}x},\ v_{\bar{x}x})_\omega$.

Для решения задачи (61) на основании тождества (59) находим, что

$$\|\mathring{y}\|^2_{2,\,0}+\frac{2}{h}(\mathring{y}^2_{x,\,0}+\mathring{y}^{\bar{2}}_{\bar{x},\,N})=$$

$$=(\varphi,\ \mathring{y})_\omega+\mathring{y}_{x,\,0}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0-\mathring{y}_{\bar{x},\,N}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}+h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})_N. \tag{62}$$

Оценим правую часть этого соотношения. Так как

$$(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0=2\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}(h)-\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}(2h),$$

то, дважды применяя ε-неравенство (16) § 1, будем иметь

$$|\mathring{y}_{x,\,0}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0| \leqslant 2|\mathring{y}_{x,\,0}\bar{y}_{\bar{x}x,\,1}|+|\mathring{y}_{x,\,0}\bar{y}_{\bar{x}x,\,2}| \leqslant$$
$$\leqslant(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\mathring{y}^2_{x,\,0}+\frac{1}{4\varepsilon_1}4\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)+\frac{1}{4\varepsilon_2}\bar{y}^2_{\bar{x}x}(2h).$$

Положим $\varepsilon_1+\varepsilon_2=2/h$ и приравняем коэффициенты при $\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)$ и $\bar{y}^2_{\bar{x}x}(2h)$, т. е. положим $1/\varepsilon_1=1/4\varepsilon_2$. Решая эту систему, найдем, что $\varepsilon_1=4\varepsilon_2=8/h$. Тем самым,

$$|\mathring{y}_{x,\,0}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0| \leqslant \frac{2}{h}\mathring{y}^2_{x,\,0}+\frac{5}{8}h\left[\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(2h)\right].$$

Аналогично устанавливается оценка

$$\left|\mathring{y}_{\bar{x},\,N}\left(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}+h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right)_N\right| \leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{h}\mathring{y}^2_{\bar{x},\,N}+\frac{5}{8}h\left[\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-h)+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-2h)\right].$$

Подставляя полученные оценки в (62), получим, что при $h \leqslant l/5$ (т. е. при $2h \neq l-2h$)

$$\|\mathring{y}\|^2_{2,\,0} \leqslant |(\varphi,\,\mathring{y})_\omega| + \frac{5}{8}h\left[\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)+\bar{y}_{\bar{x}x}(2h)+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-2h)+\right.$$
$$\left.+\,\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-h)\right] \leqslant |(\varphi,\,\mathring{y})_\omega|+\frac{5}{8}\|\bar{y}\|^2_{2,\,0}. \qquad (63)$$

Оценим первое слагаемое правой части при помощи неравенства Коши (15) и ε-неравенства (16) § 1:

$$|(\varphi,\,\mathring{y})_\omega| \leqslant \varepsilon\|\mathring{y}\|^2_2+\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|^2_0. \qquad (64)$$

В § 5 этой главы (лемма 5) будет доказано, что для сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль при $x=0$ и $x=l$, справедливо неравенство

$$\|v_{\bar{x}x}\|^2_0 \geqslant M_6\|v\|^2_0, \qquad M_6=\text{const}>0. \qquad (65)$$

Подставляя оценку (65) в неравенство (64), а его, в свою очередь, в оценку (63) и полагая $\varepsilon=(2M_6)^{-1}$, получим:

$$\|\mathring{y}\|^2_{2,\,0} \leqslant M_6\|\varphi\|^2_0+\frac{5}{4}\|\bar{y}\|^2_{2,\,0}. \qquad (66)$$

Оценим теперь решение задачи (60). Проводя соответствующие выкладки, находим, что решение задачи (60)

имеет вид

$$\bar{y}(x) = w_0 + \frac{w_1 - w_0}{l} x + \frac{w_0 - w_1 + l w_0' + h(w_1' - w_0')}{l(l-h)(l-2h)} x(l-x)^2 + \\ + \frac{w_1 - w_0 - l w_1' + h(w_1' - w_0')}{l(l-h)(l-2h)} x^2 (l-x), \quad x \in \bar{\omega}. \qquad (67)$$

Оценивая $\bar{y}_{\bar{x}x}(x)$, будем иметь, что

$$\| \bar{y}_{\bar{x}x} \|_{C(\omega)} \leqslant \frac{2}{l(l-h)} \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}$$

и, тем самым, при $h \leqslant l/5$

$$\| \bar{y} \|_{2,0}^2 \leqslant \frac{5}{l^3} \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2. \qquad (68)$$

Подставляя эту оценку в (66) и учитывая неравенство (65), получим оценку функции $\dot{y}$ в норме $W_2^2(\bar{\omega})$:

$$\| \dot{y} \|_2^2 \leqslant (1 + M_6) \| \varphi \|_0^2 + \\ + \frac{25}{4} \frac{1 + M_6}{M_6 l^3} \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2.$$

Оценим в норме $W_2^2(\bar{\omega})$ функцию $\bar{y}(x)$. Из (67) находим, что

$$\| \bar{y} \|_0^2 \leqslant l \{2(|w_0| + |w_1|) + l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2.$$

Учитывая это неравенство и неравенство (68), получим

$$\| \bar{y} \|_2^2 \leqslant \frac{5}{l^3} \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2 + \\ + l \{2(|w_0| + |w_1|) + l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2.$$

Осталось оценить функцию $y(x)$, которая равна сумме функций $\dot{y}(x)$ и $\bar{y}(x)$. В результате получаем искомую априорную оценку:

$$\| y \|_2^2 \leqslant 2(\| \dot{y} \|_2^2 + \| \bar{y} \|_2^2) \leqslant \\ \leqslant 2(1 + M_6) \| \varphi \|_0^2 + l \{2(|w_0| + |w_1|) + l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2 + \\ + \frac{25 + 45 M_6}{4 M_6 l^3} \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2.$$

Оценка решения задачи (55), (56) получена. Из полученной априорной оценки с учетом оценки погрешности аппроксимации (см. п. 4 § 6 гл. IV) задачи (57) задачей (55), (56) следует сходимость решения задачи (55), (56) со скоростью $O(h^2)$.

5. Дискретная модель опертого упругого стержня. Рассмотрим следующую сеточную задачу:

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \mathring{\omega}, \tag{69}$$

$$y(0) = w_0, \qquad -y_{xx} + hy_{xxx}|_{x=0} = \mathscr{M}_0 + h^2\varphi(h),$$

$$y_{\bar{x}\bar{x}} + hy_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = \mathscr{M}_1 - h^2\varphi(l-h), \qquad y(l) = u_1, \tag{70}$$

и получим для нее априорную оценку. Представим решение этой задачи в виде $y(x) = \mathring{y}(x) + \bar{y}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, где $\bar{y}(x)$ есть решение задачи

$$\bar{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = 0, \qquad x \in \mathring{\omega},$$

$$\bar{y}(0) = u_0, \quad -\bar{y}_{xx} + h\bar{y}_{xxx}|_{x=0} = 0, \quad \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = 0,$$

$$\bar{y}(l) = u_1, \tag{71}$$

а $\mathring{y}(x)$ определяется из уравнений

$$\mathring{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \mathring{\omega},$$

$$\mathring{y}(0) = 0, \quad -\mathring{y}_{xx} + h\mathring{y}_{xxx}|_{x=0} = \mathscr{M}_0 + h^2\varphi(h), \tag{72}$$

$$-\mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}} - h\mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = \mathscr{M}_1 + h^2\varphi(l-h), \quad \mathring{y}(l) = 0.$$

Умножим уравнение в задаче (72) на $\mathring{y}(x)h$ и просуммируем полученное выражение по сетке $\mathring{\omega}$. Преобразовывая полученное соотношение при помощи формулы Грина (14) § 1 и учитывая граничные условия (72), найдем, что

$$\|\mathring{y}\|^2_{2,0} = (\varphi, \mathring{y})_\omega + \mathscr{M}_0\mathring{y}_{x,0} + \mathscr{M}_1\mathring{y}_{\bar{x},N}. \tag{73}$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части полученного соотношения. На основании неравенства Коши (15) § 1

$$|(\varphi, y)_\omega| \leqslant \|\varphi\|_0 \|\mathring{y}\|_0.$$

Принимая во внимание неравенство (65), получим, что $(0 < \sigma < 1)$

$$\|\mathring{y}\|_0 \leqslant [\sigma\|\mathring{y}\|^2_0 + \frac{1-\sigma}{M_0}\|\mathring{y}\|^2_{2,0}]^{1/2}.$$

Выбирая параметр σ из условия равенства коэффициентов при $\|\mathring{y}\|^2_0$ и $\|\mathring{y}\|^2_{2,0}$, найдем $\|\mathring{y}\|_0 \leqslant \sqrt{(1+M_6)/M_6}\,\|\mathring{y}\|_2$, и, следовательно,

$$|(\varphi, y)_\omega| \leqslant \sqrt{(1+M_6)/M_6}\,\|\mathring{y}\|_2\|\varphi\|_0.$$

В § 4 этой главы (теорема 3) будет показано, что для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}$,

$$\|v_{\bar{x}}\|^2_{C(\omega^+)} \leqslant M \|v\|^2_2, \quad M = \text{const} > 0. \tag{74}$$

Используя это неравенство, находим, что

$$|\mathscr{M}_0 \dot{y}_{x,0} + \mathscr{M}_1 \dot{y}_{\bar{x},N}| \leqslant (|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|) \sqrt{M} \|\dot{y}\|_2.$$

Отсюда и из равенства (73) следует:

$$\|\dot{y}\|^2_{2,0} \leqslant \left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}} \|\varphi\|_0 + \sqrt{M}(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\} \|\dot{y}\|^2_2.$$

В силу (65) имеем

$$\|\dot{y}\|^2_{2,0} \geqslant \frac{M_6}{1+M_6} \|\dot{y}\|^2_2.$$

Подставляя эту оценку в левую часть предыдущего неравенства, получаем априорную оценку для решения задачи (72):

$$\|\dot{y}\|_2 \leqslant \frac{1+M_6}{M_6} \left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}} \|\varphi\|_0 + \sqrt{M}(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\}.$$

Оценим решение задачи (71). Очевидно, что

$$\bar{y}(x) = w_0 + \frac{w_1 - w_0}{l} x$$

и поэтому

$$\|\bar{y}\|_2 = \|\bar{y}\|_0 \leqslant \sqrt{l} \|\bar{y}\|_C \leqslant \sqrt{l}(|w_0| + |w_1|).$$

Тем самым,

$$\|y\|_2 \leqslant \|\dot{y}\|_2 + \|\bar{y}\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+M_6}{M_6} \left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}} \|\varphi\|_0 + \sqrt{M}(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\} +$$
$$+ \sqrt{l}(|w_0| + |w_1|).$$

Оценка решения задачи (69), (70) найдена. Используя результаты п. 4 § 6 гл. IV, легко проверить, что задача (69), (70) аппроксимирует с погрешностью $O(h^2)$ задачу об изгибе шарнирно опертого стержня, т. е. задачу

$$\begin{aligned} &w^{IV} = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \\ &w(0) = w_0, \quad -w''(0) = \mathscr{M}_0, \; w''(l) = \mathscr{M}_1, \; w(l) = w_1. \end{aligned} \tag{75}$$

С учетом этого факта из полученной априорной оценки следует сходимость решения задачи (69), (70) к решению задачи (75) со скоростью $O(h^2)$.

6. Дискретная модель упругого стержня с одним «свободным концом». Получим априорную оценку для задачи

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \mathring{\omega},$$

$$y(0) = 0, \quad y_x - \frac{h}{2} y_{xx} + \frac{h^2}{2} y_{xxx}|_{x=0} = \frac{h^3}{2} \varphi(h), \tag{76}$$

$$y_{\bar{x}\bar{x},\,N} = \mathscr{M} + hQ + \frac{h^2}{2} \varphi(l), \quad -y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x},\,N} =$$

$$= Q + h\left[\varphi(l-h) + \frac{1}{2} \varphi(l)\right],$$

которая моделирует на сетке $\bar{\omega}$ задачу об изгибе упругого стержня, левый конец которого ($x = 0$) жестко заделан, а правый конец находится под действием приложенной силы. Представим решение задачи (76) в виде суммы двух функций $\mathring{y}(x)$ и $\bar{y}(x)$, где $\bar{y}(x) = \left[\frac{h}{2}(\mathring{y}_{xx,\,0} - h\mathring{y}_{xxx,\,0}) + \right.$ $\left. + \frac{h^3}{2} \varphi(h)\right] x$, а $\mathring{y}(x)$ есть решение следующей задачи:

$$\mathring{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \mathring{\omega}, \tag{77}$$

$$\mathring{y}(0) = 0, \quad y_{x,\,0} = 0, \tag{78}$$

$$y_{\bar{x}\bar{x},\,N} = \mathscr{M} + hQ + \frac{h^2}{2} \varphi(l), \quad -\mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} =$$

$$= Q + h\left[\varphi(l-h) + \frac{1}{2} \varphi(l)\right].$$

Умножим уравнение (77) на $\mathring{y}(x)h$ и просуммируем это соотношение по сетке $\mathring{\omega}$. Преобразовывая полученное тождество при помощи формулы Грина (14) § 1 и принимая во внимание граничные условия (78), после некоторых преобразований будем иметь

$$\|\mathring{y}\|_{2,\,0} = (\varphi, \mathring{y})_{\bar{\omega}} + Q\mathring{y}_N + \mathscr{M}\mathring{y}_{\bar{x},\,N}. \tag{79}$$

Оценим правую часть этого соотношения. На основании неравенства Коши $|(\varphi, \mathring{y})_{\bar{\omega}}| \leqslant \|\varphi\|_0 \|\mathring{y}\|_0$. В § 5 этой главы (лемма 6) будет показано, что для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на $\bar{\omega}$ и удовлетворяющей

условиям $v_0 = v_1 = 0$, справедливо неравенство

$$\| v \|_0^2 \leqslant \frac{l^4}{12} \| v \|_{2,0}^2, \tag{80}$$

так что $\| v \|_0^2 \leqslant l^4/(12 + l^4) \| v \|_2^2$. Тем самым,

$$| (\varphi, \dot{y})_{\bar{\omega}} | \leqslant \frac{l^2}{\sqrt{12 + l^4}} \| \varphi \|_0 \| \dot{y} \|_2.$$

На основании того же неравенства (80)

$$\| \dot{y} \|_{2,0}^2 \geqslant \frac{12}{12 + l^4} \| \dot{y} \|_2^2.$$

Подставляя эти оценки в равенство (79), найдем, что

$$\| \dot{y} \|_2^2 \leqslant \frac{12 + l^4}{12} \left[\frac{l^2}{\sqrt{12 + l^4}} \| \varphi \|_0 \| \dot{y} \|_2 + |Q| |\dot{y}_N| + |\mathscr{M}| |\dot{y}_{\bar{x}, N}| \right]. \tag{81}$$

В § 4 этой главы будет показано (теорема 3), что для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на $\bar{\omega}$, справедливо неравенство

$$\| v \|_C^2 \leqslant \overline{M} \| v \|_2^2, \qquad \overline{M} = \text{const} > 0. \tag{82}$$

Принимая во внимание это неравенство и неравенство (74), получим

$$|Q| |\dot{y}_N| + |\mathscr{M}| |\dot{y}_{\bar{x}, N}| \leqslant (\overline{M} |Q| + M |\mathscr{M}|) \| \dot{y} \|_2.$$

Из этого неравенства и неравенства (81) следует оценка

$$\| \dot{y} \|_2 \leqslant \frac{12 + l^4}{12} \left[\frac{l^2}{\sqrt{12 + l^4}} \| \varphi \|_0 + \overline{M} |Q| + M |\mathscr{M}| \right]. \tag{83}$$

Оценим теперь функцию $\bar{y}(x)$. Очевидно, что

$$\| \bar{y} \|_2 \leqslant l^{3/2} \left[\left| \frac{h}{2} (\dot{y}_{xx, 0} - h \dot{y}_{xxx, 0}) \right| + \frac{h^3}{2} |\varphi(h)| \right].$$

Но

$$\frac{h}{2} | \dot{y}_{xx, 0} - h \dot{y}_{xxx, 0} | = \frac{1}{2} | -2 y_{\bar{x}, 1} + 3 y_{\bar{x}, 2} - y_{\bar{x}, 3} |$$

и на основании неравенства (74) $h/2 | \dot{y}_{xx, 0} - h \dot{y}_{xxx, 0} | \leqslant 3M \| \dot{y} \|_2$. Далее,

$$\frac{h^3}{2} |\varphi(h)| = \frac{h^{5/2}}{2} [h \varphi^2(h)]^{1/2} \leqslant \frac{h^{5/2}}{2} \| \varphi \|_0 \leqslant \frac{l^{5/2}}{2} \| \varphi \|_0.$$

Учитывая эти неравенства, для $\|\bar{y}\|_2$ получим оценку $\|\bar{y}\|_2 \leqslant 3Ml^{3/2}\|\mathring{y}\|_2 + l^4/2\|\varphi\|_0$. Подставляя сюда оценку (83) и используя для оценки нормы $y(x) = \mathring{y} + \bar{y}$ неравенство треугольника, получим $\|y\|_2 \leqslant M(\|\varphi\|_0 + |\mathscr{M}| + |Q|)$, $M = \text{const} > 0$.

Как обычно, из этой априорной оценки вытекает сходимость решения задачи (76) к решению соответствующей задачи для дифференциального уравнения, но мы на этом уже не останавливаемся.

7. **Дискретная модель системы двух стержней, соединенных идеальным шарниром.** Посмотрим, как исследуется сеточная задача при наличии условий сопряжения. Пусть $\bar{\omega} = \{x = x_i \mid x_i = ih,\ i = 0, \pm 1, \ldots, \pm N,\ h = l/N\}$ — равномерная сетка с шагом h, заданная на отрезке $[-l, l]$. Обозначим через $\bar{\omega}_л$ подмножество узлов сетки $\bar{\omega}$, расположенное на отрезке $[-l, 0]$, т. е. $\bar{\omega}_л = \{x_i \mid i = -N, -N+1, \ldots, 0\}$. Будем обозначать через $\omega_л$, $\mathring{\omega}_л$, $\omega^+_л$, ${}^+\omega_л$ подмножества $\bar{\omega}_л$, определяемые аналогично ω, $\mathring{\omega}$ и т. д. (см. п. 1 § 1). Пусть $\bar{\omega}_п$, $\omega_п$ и т. д. — соответствующие подмножества $\bar{\omega}$, расположенные на $[0, l]$.

На сетке $\bar{\omega}$ рассмотрим следующую задачу:

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \qquad x \in \mathring{\omega}_л \cup \mathring{\omega}_п, \tag{84}$$

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}\bar{x}} + hy_{\bar{x}x\bar{x}} &= \mathscr{M}^- - h^2\varphi(-h), && x = 0, \\ -y_{xx} + hy_{xxx} &= \mathscr{M}^+ + h^2\varphi(h), && x = 0, \\ y_{xxx} - y_{\bar{x}x\bar{x}} &= \bar{\varphi} + 3h\varphi(0) + h^3\varphi_{\bar{x}x}(0), && x = 0, \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned} &y(-l) = 0, \quad y_x - \frac{h}{2}y_{xx} + \frac{h^2}{2}y_{xxx}\Big|_{x=-l} = \frac{h^3}{2}\varphi(-l+h), \\ &y_{\bar{x}} + \frac{h}{2}y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{h^2}{2}y_{\bar{x}x\bar{x}}\Big|_{x=l} = -\frac{h^3}{2}\varphi(l-h), \quad y(l) = 0. \end{aligned} \tag{86}$$

Легко проверить, что задача (84) — (86) аппроксимирует на сетке $\bar{\omega}$ с погрешностью $O(h^2)$ задачу об изгибе системы двух стержней, соединенных между собой идеальным шарниром в точке $x = 0$ и жестко заделанных при $x = -l$ и $x = l$:

$$\begin{aligned} &w^{\mathrm{IV}} = \varphi(x), \quad -l < x < 0, \ 0 < x < l, \\ &[w]|_{x=0} = 0, \ w''(-0) = \mathscr{M}^-, \ -w''(+0) = \\ &\qquad = \mathscr{M}^+, \ [w''']|_{x=0} = \bar{\varphi}, \\ &w(-l) = w'(-l) = w'(l) = w(l) = 0. \end{aligned} \tag{87}$$

Соотношения (85), аппроксимирующие условия сопряжения задачи (87), были построены в гл. IV (см. формулы (20) и (19) § 6 при $\alpha=\beta=0$).

Получим априорную оценку решения задачи (84)—(86). Умножим уравнения (84) на $y(x)h$, просуммируем их по сеткам $\overset{\circ}{\omega}_л$ и $\overset{\circ}{\omega}_п$ и полученные соотношения сложим. После преобразований при помощи сеточной формулы Грина (14) § 1 получим соотношение

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_л)}+\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_п)}+(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}y^{(-1)}-y_{\bar{x}\bar{x}}y_{\bar{x}})_0-$$
$$-(y_{xxx}y^{(+1)}-y_{xx}y_x)_{-l}+(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}y^{(-1)}-y_{\bar{x}\bar{x}}y_{\bar{x}})_l-$$
$$-(y_{xxx}y^{(+1)}-y_{xx}y_x)_0=(\varphi,\ y)_{\overset{\circ}{\omega}_л}+(\varphi,\ y)_{\overset{\circ}{\omega}_п}.$$

Преобразовывая левую часть полученного тождества при помощи условий сопряжения (85) и граничных условий (86), получим следующее энергетическое тождество:

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_л)}+\|y_{\bar{x}x}\|_{L_2(\omega_п)}+\frac{2}{h}(y_x^2(-l)+y_x^2(l))=$$
$$=(\varphi,\ y)_\omega+\bar{\varphi}y\ (0)+\mathscr{M}^-y_{\bar{x}}(0)+\mathscr{M}^+y_x(0). \tag{88}$$

Оценим правую часть этого тождества:

$$|(\varphi,\ y)_\omega+\bar{\varphi}y(0)+\mathscr{M}^-y_{\bar{x}}(0)+\mathscr{M}^+y_x(0)|\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi\|_0\|y\|_0+|\bar{\varphi}||y(0)|+|\mathscr{M}^-||y_{\bar{x}}(0)|+|\mathscr{M}^+||y_x(0)|\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi\|_0\|y\|_0+|\bar{\varphi}|\|y\|_{C(\bar{\omega})}+|\mathscr{M}^-|\|y_{\bar{x}}\|_{C(\omega^+_л)}+|\mathscr{M}^+|\|y_{\bar{x}}\|_{C(\omega^+_п)}.$$

Используя для дальнейших оценок ε-неравенство и принимая во внимание соотношения (74), (82), получим

$$|(\varphi,\ y)_\omega+\bar{\varphi}y(0)+\mathscr{M}^-y_{\bar{x}}(0)+\mathscr{M}^+y_x(0)|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon(1+M+\overline{M})(\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_л)}+\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_п)})+ \tag{89}$$
$$+\frac{1}{4\varepsilon}(\|\varphi\|_0^2+|\bar{\varphi}|^2+|\mathscr{M}^-|^2+|\mathscr{M}^+|^2).$$

Оценим снизу левую часть тождества (88). Полагая в лемме 2 § 5 $\varkappa_1=0$, $\varkappa_0=2/h$, $\bar{\omega}={}^+\omega_л$, для функции

$v(x)=y_x(x)$, заданной на ${}^{+}\omega_л$, получим оценку:

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_л)}+\frac{2}{h}y_x^2(-l)\geqslant\frac{1}{l(l-h)}\sum_{\omega_л^+}y_x^2h=$$

$$=\frac{1}{l(l-h)}\|y_{\bar{x}}\|^2_{L_2(\omega_л^+)}. \quad (90)$$

Так как $y(-l)=0$, то полагая в лемме 2 § 5 $\varkappa_1=0$, $\bar{\omega}=\bar{\omega}_л$ и переходя к пределу при $\varkappa_0\to\infty$, убеждаемся в справедливости неравенства $\|y_{\bar{x}}\|^2_{L_2(\omega_л^+)}\geqslant\frac{2}{l^2}\|y\|^2_{L_2(\bar{\omega}_л)}$. Учитывая эту оценку, из (90) находим, что

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_л)}+\frac{2}{h}y_x^2(-l)\geqslant\frac{2}{l^3(l-h)}\|y\|^2_{L_2(\bar{\omega}_л)}.$$

Предполагая, что $h\leqslant l/2$, будем иметь оценку

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_п)}+2h^{-1}y_x^2(-l)\geqslant 4l^{-4}\|y\|^2_{L_2(\bar{\omega}_л)}.$$

Из этой оценки следует, что

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_л)}+\frac{2}{h}y_x^2(-l)\geqslant\frac{4}{4+l^4}\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_л)}. \quad (91)$$

Аналогично доказывается оценка

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_п)}+\frac{2}{h}y_x^2(l)\geqslant\frac{4}{4+l^4}\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_п)}. \quad (92)$$

Вернемся к энергетическому тождеству (88). Принимая во внимание неравенства (89), (91) и (92), из (88) получаем оценку

$$\left[\frac{4}{4+l^4}-\varepsilon(1+M+\overline{M})\right]\left(\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_л)}+\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_п)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\left(\|\varphi\|_0^2+|\overline{\varphi}|^2+|\mathscr{M}^-|^2+|\mathscr{M}^+|^2\right).$$

Полагая здесь, например, $\varepsilon=2\left[(4+l^4)(1+M+\overline{M})\right]^{-1}$, приходим к априорной оценке решения задачи (84)—(86):

$$\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_л)}+\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_п)}\leqslant$$

$$\leqslant M\left(\|\varphi\|_0^2+|\overline{\varphi}|^2+|\mathscr{M}^-|^2+|\mathscr{M}^+|^2\right),$$

где $M=\mathrm{const}>0$.

Из полученной априорной оценки обычным образом выводится оценка скорости сходимости решения задачи (84)—(86) к решению задачи (87).

§ 3. Сеточные задачи на собственные значения

При получении тех или иных оценок, связанных с исследованием разностных схем, появляется необходимость представления сеточной функции в виде разложения по собственным функциям подходящей разностной задачи. В этом параграфе мы изучим основные свойства простейших сеточных задач на собственные значения. Будут рассмотрены первая и вторая задачи для оператора второго разностного отношения и для пятиточечной аппроксимации оператора Лапласа в прямоугольнике. Все рассмотрения проводятся для случая равномерной сетки.

1. Первая краевая задача на собственные значения для оператора второго разностного отношения. Как известно, проблема отыскания собственных функций и собственных значений задачи

$$u''(x)+\lambda u=0, \quad 0<x<l, \quad u(0)=u(l)=0 \qquad (1)$$

состоит в нахождении таких значений параметра λ (собственных значений), при которых существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) решения $u(x)$ (собственные функции) однородной задачи (1).

Сеточный аналог задачи (1) сформулируем следующим образом. Пусть на отрезке $[0, l]$ введена равномерная сетка $\bar{\omega}$ с шагом $h=l/N$. На сетке $\bar{\omega}$ задана разностная аппроксимация задачи (1):

$$y_{\bar{x}x}+\lambda y=0, \quad x\in\omega, \quad y_0=y_N=0. \qquad (2)$$

Требуется найти такие значения параметра λ (*собственные значения*), при которых существуют нетривиальные решения $y(x)$ (*собственные функции*) задачи (2).

Найдем вид общего решения задачи (2). Перепишем уравнения (2) в следующем виде:

$$y_{j-1}-2\left(1-\frac{h^2\lambda}{2}\right)y_j+y_{j+1}=0, \qquad j=1, 2, \ldots, N-1. \qquad (3)$$

Введем следующее обозначение:

$$1-\frac{h^2\lambda}{2}=\cos\alpha h. \qquad (4)$$

С учетом обозначения (4), характеристическое уравнение для (3) можно привести к виду $q^2-2\cos\alpha h q+1=0$.

Корни этого уравнения $q_1 = e^{i\alpha h}$, $q_2 = e^{-i\alpha h}$. Следовательно, общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{i\alpha x} + C_2 e^{-i\alpha x} = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x.$$

Постоянные c_1 и c_2 определим из граничных условий (2):

$$y(0) = c_2 = 0, \qquad y(l) = c_1 \sin \alpha l = 0. \tag{5}$$

Для того чтобы выполнялось второе из соотношений (5), нужно, чтобы либо c_1, либо $\sin \alpha l$ обращались в нуль. Но c_1 не может обращаться в нуль, так как $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Следовательно, $\sin \alpha l = 0$, или $\alpha = k\pi/l$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Тем самым решениями задачи (2) являются функции

$$\mu_k(x) = c \sin \frac{k\pi x}{l}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

Из (4) находим, что собственные значения задачи (2) находятся среди чисел

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2l}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Заметим, что число нуль не может быть собственным значением задачи (2), так как ему соответствует решение, тождественно равное нулю. Из оставшихся членов указанной выше последовательности имеется только $(N-1)$ различных между собой, например λ_k при $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1$. Это собственные значения задачи (2).

Докажем теперь, что собственные функции $\mu_k(x)$, определяемые соотношением (6) при $k = 1, 2, \ldots, N-1$, попарно ортогональны. В самом деле, пусть собственному значению λ_k отвечает собственная функция $\mu_k(x)$, а собственному значению λ_m — собственная функция $\mu_m(x)$. Пусть $k \neq m$ и $1 \leqslant k, m \leqslant N-1$. Умножим скалярно соотношение

$$\mu_{k\bar{x}x} + \lambda_k \mu_k = 0, \qquad x \in \omega, \tag{7}$$

на $\mu_m(x)$, а соотношение

$$\mu_{m\bar{x}x} + \lambda_m \mu_m = 0, \qquad x \in \omega,$$

на $\mu_k(x)$ и вычтем второе из первого. Получим

$$0 = (\mu_{k\bar{x}x}, \mu_m)_\omega - (\mu_{m\bar{x}x}, \mu_k)_\omega + (\lambda_k - \lambda_m)(\mu_k, \mu_m)_\omega.$$

Применяя к первым двум слагаемым правой части первую разностную формулу Грина (12) § 1, в результате имеем

$$0 = -(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} + (\mu_{m\bar{x}}, \mu_{k\bar{x}})_{\omega^+} + (\lambda_k - \lambda_m)(\mu_k, \mu_m)_\omega = \\ = (\lambda_k - \lambda_m)(\mu_k, \mu_m)_\omega.$$

Так как при $k \neq m$, $1 \leqslant k$, $m \leqslant N-1$, $\lambda_k \neq \lambda_m$, то

$$(\mu_k, \mu_m)_\omega = 0.$$

Тем самым собственные функции ортогональны. Выберем постоянную c в (6) так, чтобы собственные функции имели норму, равную единице. Непосредственные вычисления показывают, что

$$(\mu_k, \mu_k)_\omega = c^2 l/2.$$

Полагая $c = \sqrt{2/l}$, получим, что $\|\mu_k\|_0 = 1$.

Вычислим левое разностное отношение собственных функций (6) при $c = \sqrt{2/l}$:

$$[\mu_k(x)]_{\bar{x}} = \sqrt{2/l}\,\frac{\sin(k\pi x/l) - \sin(k\pi(x-h)/l)}{h} = \\ = \sqrt{2/l}\,\frac{2\sin(k\pi h/(2l))}{h}\cos\frac{k\pi(x-h/2)}{l} = \\ = \sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos(k\pi(x-h/2)/l).$$

Умножим уравнение (7) скалярно на $\mu_m(x)$ и полученное соотношение преобразуем при помощи первой формулы Грина (12) § 1:

$$0 = (\mu_{k\bar{x}x}, \mu_m)_\omega + \lambda_k(\mu_k, \mu_m)_\omega = \\ = -(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} + \lambda_k(\mu_k, \mu_m)_\omega.$$

Отсюда следует, что при $k \neq m$

$$(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} = 0,$$

т. е. разностные отношения собственных функций ортогональны в смысле скалярного произведения $(\,,\,)_{\omega^+}$.

Пусть $f(x)$ — произвольная сеточная функция, заданная на ω (или сеточная функция, заданная на $\bar{\omega}$, и обращающаяся в нуль при $x=0$ и $x=l$). Разложим $f(x)$ по собственным функциям $\{\mu_k(x)\}_1^{N-1}$, т. е. представим $f(x)$ суммой вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu_k(x), \tag{8}$$

где f_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Умножая соотношение (8) скалярно на $\mu_m(x)$, найдем, что

$$(f,\ \mu_m)_\omega = \sum_{k=1}^{N-1} f_k (\mu_k,\ \mu_m)_\omega = f_m.$$

Возведем левую и правую части (8) в квадрат и умножим скалярно на единицу

$$(f^2,\ 1)_\omega = \left(\left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu_k(x)\right)^2,\ 1\right) =$$

$$= \sum_{k,\,m=1}^{N-1} f_k f_m (\mu_k,\ \mu_m)_\omega = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2.$$

Полученное соотношение есть сеточный аналог равенства Парсеваля.

Исследуем более подробно собственные значения λ_k задачи (2). Заметим, что функция $\sin\frac{k\pi h}{2l}$ монотонно возрастает при изменении k от 1 до $N-1$. Следовательно, $\lambda_k < \lambda_m$ при $k < m$. Известно, что при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ для функции $(\sin\alpha)/\alpha$ справедливы оценки

$$2/\pi \leqslant (\sin\alpha)/\alpha \leqslant 1.$$

Так как

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{\sin(k\pi h/(2l))}{k\pi h/(2l)}\right)^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad (9)$$

то $(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2$ и, в частности,

$$\lambda_k \geqslant \lambda_1 \geqslant 4/l^2.$$

На самом деле справедлива более точная оценка снизу первого собственного значения λ_1. Из (9) имеем

$$\frac{d\lambda_k}{d\alpha} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{\sin 2\alpha}{\alpha^3}(\alpha - \operatorname{tg}\alpha) < 0, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда вытекает, что собственные числа убывают при увеличении шага h, а так как максимальным шагом сетки ω на отрезке $[0, l]$ для задачи (2) является $h_0 = l/2$, то

$$\lambda_1(h_0) = 8/l^2 \leqslant \lambda_1(h) \leqslant \lambda_k(h).$$

Подытожим сведения, полученные относительно собственных функций и собственных значений задачи (2).

Чтобы подчеркнуть аналогию собственных функций и собственных значений задачи (1) и (2), приведем параллельно и свойства решений задачи (1).

Для задачи (1)	Для задачи (2)
Собственные функции	
$u_k(x) = \sqrt{2/l}\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k=1, 2, \ldots$	$\mu_k(x) = \sqrt{2/l}\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k=1, 2, \ldots, N-1$ (10)
Собственные значения	
$\lambda_k = (k\pi/l)^2$, $k=1, 2, \ldots$, $\lambda_k > \lambda_m$ при $k>m$	$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}$, $k=1, 2, \ldots, N-1$, $(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2$, $\lambda_k > \lambda_m$ при $k>m$, $\lambda_1 \geqslant 8/l^2$ (11) (12)
Ортонормированность собственных функций	
$\int_0^l u_k(x)\,u_m(x)\,dx = \delta_{k,m}$	$(\mu_k, \mu_m)_\omega = \sum_\omega \mu_k(x)\,\mu_m(x)\,h = \delta_{k,m}$, (13)

где $\delta_{k,m}$ есть символ Кронекера, т. е.

$$\delta_{k,m} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=m, \\ 0 & \text{при } k \neq m. \end{cases}$$

Производные (разностные отношения) собственных функций	
$u_k'(x) = \sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos\frac{k\pi x}{l}$, $k=1, 2, \ldots$	$\mu_{k\bar{x}} = \sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos\frac{k\pi(x-h/2)}{l} \equiv \sqrt{\lambda_k}\,\bar{\mu}_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, N-1$
Ортогональность производных (разностных отношений) собственных функций	
$\int_0^l u_k'(x)\,u_m'(x)\,dx = \lambda_k\delta_{k,m}$	$(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} \equiv \sum_{\omega^+}\mu_{k\bar{x}}\mu_{m\bar{x}}h = \lambda_k\delta_{k,m}$

Полнота системы собственных функций

Для любой функции $f(x) \in L_2(0, l)$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x),$$

где

$$f_k = \int_0^l f(x)\, u_k(x)\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для любой сеточной функции $f(x)$, заданной на ω

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu_k(x), \qquad (14)$$

где

$$f_k = (f, \mu_k)_\omega, \qquad (15)$$
$$k = 1, 2, \ldots, N-1$$

Равенство Парсеваля

$$\|f\|^2_{L_2(0, l)} \equiv \int_0^l f^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$$

$$\|f\|^2_{L_2(\omega)} \equiv \|f\|_0^2 \equiv (f_1 f)_\omega = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 \qquad (16)$$

2. Вторая краевая задача на собственные значения для оператора второй разности. Рассмотрим сеточный аналог задачи

$$u''(x) + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \quad u'(0) = u'(l) = 0.$$

Граничные условия будем аппроксимировать с погрешностью $O(h^2)$. Именно

$$y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \quad x \in \omega, \quad y_{x, 0} + \frac{h}{2} \lambda y_0 = 0,$$

$$y_{\bar{x}, N} - \frac{h\lambda}{2} y_N = 0. \qquad (17)$$

Обратим внимание на то, что в разностной задаче (17) собственные значения входят в граничные условия, хотя в аппроксимируемой задаче в граничные условия они не входили.

Пусть $\overset{\circ}{\Lambda}$ есть сеточный оператор, определяемый соотношениями

$$\overset{\circ}{\Lambda} v = \begin{cases} -\frac{2}{h} v_x, & x = 0, \\ -v_{\bar{x}x}, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h} v_{\bar{x}}, & x = l. \end{cases} \qquad (18)$$

Тогда задачу (17) можно переписать так:

$$\mathring{\Lambda} y = \lambda y, \quad x \in \mathring{\omega}.$$

Решения задачи (17) и их свойства получаются точно так же, как и в случае задачи (2). Поэтому мы не будем останавливаться на их получении, а сразу приведем сводку результатов.

1) Собственные функции

$$\begin{aligned} &\mu_k(x) = \sqrt{2/l}\cos(k\pi x/l), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1, \\ &\mu_0(x) = \sqrt{1/l}, \quad \mu_N(x) = \sqrt{1/l}\cos(N\pi x/l). \end{aligned} \tag{19}$$

2) Собственные значения

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{20}$$

$$(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{21}$$

$$\lambda_k > \lambda_m, \quad k > m, \tag{22}$$

$$\lambda_1 \geqslant 8/l^2, \quad \lambda_0 = 0. \tag{23}$$

3) Ортонормированность собственных функций

$$(\mu_k, \mu_m)_{\bar{\omega}} = \delta_{k,m}. \tag{24}$$

4) Разностные отношения собственных функций

$$\begin{aligned} &(\mu_k(x))_{\bar{x}} = -\sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\sin k\pi((x-h/2)/l) = \sqrt{\lambda_k}\,\bar{\mu}_k(x), \\ &\qquad k = 1, 2, \ldots, N-1, \\ &(\mu_N(x))_{\bar{x}} = -\sqrt{\lambda_N}\sqrt{1/l}\sin N\pi((x-h/2)/l) = \sqrt{\lambda_N}\,\bar{\mu}_N(x). \end{aligned} \tag{25}$$

5) Ортогональность разностных отношений собственных функций

$$(\mu_{k\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega+} = \lambda_k \delta_{k,m}. \tag{26}$$

6) Собственные функции образуют базис на сетке $\mathring{\omega}$. Для любой сеточной функции $f(x)$, заданной на $\mathring{\omega}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k \mu_k(x), \tag{27}$$

где

$$f_k = (f, \mu_k)_{\bar{\omega}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{28}$$

коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

7) Равенство Парсеваля

$$\|f\|^2_{L_2(\bar{\omega})} = \|f\|^2_0 \equiv (f,\ f)_{\bar{\omega}} = \sum_{k=0}^{N} f_k^2. \tag{29}$$

3. Задачи на собственные значения для сеточного оператора Лапласа. Пусть в прямоугольнике $\bar{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1,\ 2\}$ задана прямоугольная равномерная сетка $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$. Пусть $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ — множество внутренних узлов этой сетки, а $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ — множество ее граничных узлов. На сетке $\bar{\omega}$ рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\Lambda y \equiv -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} = \lambda y,\quad x \in \omega,\quad y(x) = 0,\quad x \in \gamma. \tag{30}$$

Легко видеть, что задача (30) допускает разделение переменных и имеет решение

$$\mu_k(x) \equiv \mu_{1, k_1}(x_1)\,\mu_{2, k_2}(x_2),\quad \lambda_k = \lambda_{1, k_1} + \lambda_{2, k_2},\quad k = (k_1,\ k_2),\quad k_\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_\alpha - 1,\quad \alpha = 1,\ 2, \tag{31}$$

где $\mu_{\alpha, k_\alpha}(x_\alpha)$ задается соотношением (10) при $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $x = x_\alpha$, а $\lambda_{\alpha, k_\alpha}$ задается соотношением (11) с $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $h = h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$. Собственные функции (31) задачи (30) ортонормированы, т. е.

$$(\mu_k(x),\ \mu_m(x))_\omega \equiv \sum_{\omega_1} h_1 \sum_{\omega_2} h_2 \mu_k(x_1,\ x_2)\,\mu_m(x_1,\ x_2) = \delta_{k, m}.$$

Рассмотрим на сетке $\bar{\omega}$ еще одну задачу на собственные значения

$$\bar{\Lambda} y \equiv \left(\overset{\circ}{\bar{\Lambda}}_1 + \overset{\circ}{\bar{\Lambda}}_2\right) y = \lambda y,\qquad x \in \bar{\omega}, \tag{32}$$

где оператор $\overset{\circ}{\bar{\Lambda}}_\alpha$ определяется соотношением (18) при $x = x_\alpha$, $l = l_\alpha$, $h = h_\alpha$, $\omega = \omega_\alpha$. Задача (32) является сеточным аналогом второй краевой задачи на собственные значения для двумерного оператора Лапласа в прямоугольнике. Как и (30), задача допускает разделение переменных и имеет следующее решение:

$$\mu_k(x) \equiv \mu_{1, k_1}(x_1)\,\mu_{2, k_2}(x_2),\qquad \lambda_k = \lambda_{1, k_1} + \lambda_{2, k_2},\quad k = (k_1,\ k_2),\quad k_\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_\alpha,\quad \alpha = 1,\ 2, \tag{33}$$

где $\mu_{\alpha, k_\alpha}(x_\alpha)$ задается соотношениями (19) при $l = l_\alpha$,

$k=k_\alpha$, $x=x_\alpha$, а $\lambda_{\alpha, k_\alpha}$ задается соотношением (20) с $l=l_\alpha$, $k=k_\alpha$, $h=h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha$. Собственные функции (33) задачи (32) ортонормированы:

$$(\mu_k(x),\ \mu_m(x))_{\bar\omega}=\delta_{k,m}.$$

§ 4. Теоремы вложения

В § 2 этой главы при получении априорных оценок для решений сеточных задач на отрезке мы столкнулись с необходимостью сравнивать различные нормы одной и той же функции. При сравнении норм требовались оценки одной нормы через другую с постоянными, не зависящими от сетки. Аналогичная ситуация возникает и при изучении многомерных сеточных задач.

В этом параграфе будет установлен ряд таких неравенств, устанавливающих связь между некоторыми нормами сеточных функций, заданных на сетке, расположенной на отрезке или в прямоугольнике. Будут рассматриваться только такие неравенства, постоянные в которых не зависят ни от самой функции, ни от сетки, на которой функция задана. Предложения, утверждающие эти неравенства, будем называть теоремами вложения.

1. Теоремы вложения для сеточных функций одного аргумента. Будем изучать сеточные функции, заданные на сетке $\bar\omega\in[0, l]$. В части теорем этого пункта будем предполагать, что сетка равномерная, а в других — предположение о равномерности сетки использовать не будем. Напомним обозначения для норм сеточных функций, которые будут использоваться в этом пункте:

$$\|v\|_C=\max_{x\in\bar\omega}|v(x)|,\qquad \|v_{\bar x}\|_C=\max_{x\in\omega^+}|v_{\bar x}(x)|,$$

$$\|v\|_0\equiv\|v\|_{L_2(\bar\omega)}=(v,\ v)_\omega^{1/2},\qquad \|v_{\bar x}\|_0=(v_{\bar x},\ v_{\bar x})_{\omega^+}^{1/2},$$

$$\|v_{\bar x\bar x}\|_0=(v_{\bar x\bar x},\ v_{\bar x\bar x})_\omega^{1/2}.$$

Теорема 1. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на произвольной неравномерной сетке $\bar\omega$ и обращающейся в нуль при $x=0$ и $x=l$, справедливо неравенство*

$$\|v\|_C^2\leqslant M_1\|v_{\bar x}\|_0^2, \tag{1}$$

где $M_1=l/4$.

Доказательство. Для функции $v(x)$ справедливы представления

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j} h_j, \qquad v_i = -\sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x},j} h_j.$$

Отсюда, используя неравенства Коши (15) § 1, получаем

$$v_i^2 \leqslant x_i \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}^2 h_j, \tag{2}$$

$$v_i^2 \leqslant (l - x_i) \sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x},j}^2 h_j. \tag{3}$$

Умножим неравенство (2) на $(l - x_i)$, а неравенство (3) на x_i. Сложим полученные соотношения и результат поделим на l. Тогда

$$v^2(x) \leqslant \frac{x(l-x)}{l} \| v_{\bar{x}} \|_0^2 \leqslant \frac{l}{4} \| v_{\bar{x}} \|_0^2, \qquad x \in \bar{\omega}.$$

Так как это неравенство справедливо для любого x, то оно справедливо и для того $x = x_0$, в котором функция $v^2(x)$ достигает наибольшего значения. Теорема доказана.

Замечание 1. Неравенство (1) справедливо (с постоянной $M_1 = l$) и для функций, обращающихся в нуль лишь при $x = 0$ или при $x = l$.

Замечание 2. Неравенство (1) с $M_1 = l/4$ является точным в том смысле, что существуют такая сетка $\bar{\omega}$ и такая функция $v(x)$, для которых равенство в (1) достигается. Примером может служить функция $v(x) = |x - l/2|$ на любой сетке, у которой точка $x = l/2$ является узловой.

Обобщением теоремы 1 на случай произвольных сеточных функций является

Теорема 2. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на произвольной неравномерной сетке $\bar{\omega}$, справедливо неравенство*

$$\| v \|_C^2 \leqslant \varepsilon \| v_{\bar{x}} \|_0^2 + (1/\varepsilon + 1/l) \| v \|_0^2, \tag{4}$$

где ε — произвольная положительная постоянная.

Доказательство. Из соотношений

$$v_i^2 = v_j^2 + \sum_{k=j+1}^{i} (v^2)_{\bar{x},\,k}\, h_k, \qquad i \geqslant j,$$

$$v_i^2 = v_j^2 - \sum_{k=i+1}^{j} (v^2)_{\bar{x},\,k}\, h_k, \qquad i \leqslant j,$$

следует, что при любых $(x,\ y) \in \bar{\omega}$

$$v^2(x) \leqslant v^2(y) + (\,|\,(v^2)_{\bar{x}}\,|,\ 1)_{\omega+}.$$

Считая x фиксированным, умножим это неравенство скалярно на 1:

$$l v^2(x) \leqslant \|v\|_0^2 + l\,(\,|\,(v^2)_{\bar{x}}\,|,\ 1)_{\omega+}. \tag{5}$$

Легко проверить, что (здесь $v^{(-1)} \equiv v_{i-1}$)

$$(v^2)_{\bar{x}} = (v + v^{(-1)})\, v_{\bar{x}}.$$

Учитывая неравенство Коши (15) § 1 и ε-неравенство (16) § 1, получим, что

$$(\,|\,(v^2)_{\bar{x}}\,|,\ 1)_{\omega+} \leqslant (\,|\,v\,|,\ |\,v_{\bar{x}}\,|\,)_{\omega+} + (\,|\,v^{(-1)}\,|,\ |\,v_{\bar{x}}\,|\,)_{\omega+} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\left[\sum_{x \in \omega^+} v^2(x-h)\, h + \sum_{x \in \omega^+} v^2(x)\, h\right] =$$

$$= \varepsilon \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|v\|_0^2.$$

Подставляя эту оценку в (5) и деля полученное соотношение на l, приходим к неравенству (4). Теорема доказана.

В неравенстве, утверждаемом теоремой 2, вместо функции можно поставить ее разностное отношение.

Лемма 1. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}$, справедливо неравенство*

$$\|v_{\bar{x}}\|_C^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + (1/\varepsilon + 1/l)\,\|v_{\bar{x}}\|_0^2. \tag{6}$$

Доказательство. Проводя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве неравенства (5), получим, что

$$l v_{\bar{x}}^2(x) \leqslant \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + l\,(\,|\,(v_{\bar{x}}^2)_x\,|,\ 1)_{\omega}. \tag{7}$$

Так как

$$(v_{\bar{x}}^2)_x = (v_x + v_{\bar{x}})\, v_{\bar{x}\bar{x}},$$

то на основании неравенства Коши (15) § 1 и ε-неравенства (16) § 1 имеем

$$(|(v_{\bar{x}}^2)_x|, 1)_\omega \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(v_{\bar{x}}^2 + v_x^2,\ 1)_\omega \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Подставляя это неравенство в (7), получим (6). Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}$, справедливо неравенство*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}\bar{x}}\|_0^2 + M(1/\varepsilon + 1/l^2)\|v\|_0^2, \tag{8}$$

где ε — произвольная положительная постоянная, а M — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $\bar{\omega}$. Если функция $v(x)$ при $x=0$ и при $x=l$ обращается в нуль, то наряду с (8) для нее справедливо и более точное неравенство

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|v\|_0^2. \tag{9}$$

Доказательство. Умножим неравенство

$$\left(l\sqrt{\alpha}\, v_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{l\sqrt{\alpha}}\, v\right)^2 \geqslant 0$$

на h, просуммируем его по $x \in \omega$ и преобразуем полученное соотношение при помощи формулы Грина (12) § 1

$$l^2\alpha \|v_{\bar{x}\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{l^2\alpha}\|v\|_0^2 - 2\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + 2(v_{\bar{x}} v|_{x=l} - v_x v|_{x=0}) \geqslant 0.$$

Если $v(0) = v(l) = 0$, то, полагая здесь $l^2\alpha/2 = \varepsilon$, получим неравенство (9). В общем же случае после очевидных выкладок находим, что

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \frac{\alpha l^2}{2}\|v_{\bar{x}\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{2\alpha l^2}\|v\|_0^2 + \beta l(v_x^2(0) + v_{\bar{x}}^2(l)) + \frac{1}{4\beta l}(v^2(0) + v^2(l)). \tag{10}$$

Оценим слагаемые, содержащиеся в скобках. Полагая в (4) $\varepsilon=\gamma l$, а в (6) $\varepsilon=\delta l$, получим, что

$$v^2(0)+v^2(l)\leqslant 2\|v\|_C^2\leqslant 2\gamma l\|v_{\bar{x}}\|_0^2+2(1/(\gamma l)+1/l)\|v\|_0^2,$$
$$v_x^2(0)+v_{\bar{x}}^2(l)\leqslant 2\|v_{\bar{x}}\|_C^2\leqslant 2\delta l\|v_{\bar{x}x}\|_0^2+2(1/(\delta l)+1/l)\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Подставляя эти оценки в (10) и преобразовывая полученное неравенство, будем иметь

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2\leqslant l^2\frac{\alpha/2+2\beta\delta}{1-2\beta-2\beta/\delta-\gamma/(2\beta)}\|v_{\bar{x}x}\|_0^2+$$
$$+\frac{1}{2l^2}\frac{1/\alpha+1/(\beta\gamma)+1/\beta}{1-2\beta-2\beta/\delta-\gamma/(2\beta)}\|v\|_0^2, \quad (11)$$

где α, β, γ и δ — произвольные положительные постоянные, удовлетворяющие условию

$$1-2\beta-2\beta/\delta-\gamma/(2\beta)>0. \quad (12)$$

Покажем, что эти постоянные можно выбрать так, чтобы коэффициент при $\|v_{\bar{x}x}\|_0^2$ был сколь угодно малым. Обозначим через

$$\zeta=\frac{\alpha/2+2\beta\delta}{1-2\beta-2\beta/\delta-\gamma/(2\beta)} \quad (13)$$

и найдем отсюда δ. Имеем

$$\delta=\frac{1}{4\beta}(\zeta-2\beta\zeta-\alpha/2-\gamma\zeta/(2\beta)+$$
$$+\sqrt{(\zeta-2\beta\zeta-\alpha/2-\gamma\zeta/(2\beta))^2-8\beta^2\zeta}>0.$$

Положим выражение, стоящее под знаком корня, равным нулю. Тогда

$$\delta=\sqrt{\zeta/2}. \quad (14)$$

Подставим это значение δ в (13) и найдем оттуда

$$\beta=\frac{\zeta-\alpha/2+\sqrt{(\zeta-\alpha/2)^2-4\gamma\zeta(\zeta+3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2})}}{4(\zeta+3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2})}>0.$$

Предполагая, что

$$\zeta-\alpha/2>0, \quad (15)$$

снова положим выражение, стоящее под знаком корня,

равным нулю. Тогда

$$\beta=\sqrt{\zeta}\,\frac{1-\alpha/(2\zeta)}{4\,(3\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})}, \tag{16}$$

$$\gamma=\sqrt{\zeta}\,\frac{(1-\alpha/(2\zeta))^2}{4\,(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})}. \tag{17}$$

Отметим, что при выполнении условия (15) постоянные β, γ и δ, определяемые соотношениями (16), (17) и (14), удовлетворяют и условию (12).

Полагая теперь, например, $\alpha=\zeta$ и принимая во внимание (14), (16), (17), находим, что

$$M(\zeta)=\frac{1/\alpha+1/(\beta\gamma)+1/\beta}{2\,(1-2\beta-2\beta/\delta-\gamma/(2\beta))}=$$

$$=\frac{1/\zeta+2^7\,(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})^2/\zeta+8\,(3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2}+1)/\zeta}{2\left(1-\dfrac{(\sqrt{\zeta}+\sqrt{2})}{4\,(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})}-\dfrac{1}{4}\right)}=$$

$$=2\,\frac{(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})^2}{\zeta}\cdot\frac{1+2^7\,(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})^2+8\,(3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2}+1)}{(7\sqrt{2}+2\sqrt{\zeta})\,(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})}\leqslant$$

$$\leqslant M\,(1+1/\zeta).$$

Подставляя эту оценку в (10) и обозначая $l^2\zeta$ через ε, получим неравенство (8). Лемма доказана.

Теорема 3. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}$, справедливы неравенства*

$$\|v\|_C^2\leqslant\varepsilon\,\|v_{\bar{x}x}\|_0^2+M\,(1/l+1/\varepsilon^{1/3})\,\|v\|_0^2, \tag{18}$$

$$\|v_{\bar{x}}\|_C^2\leqslant\varepsilon\,\|v_{\bar{x}x}\|_0^2+M\,(1/l+1/\varepsilon^{3})\,\|v\|_0^2, \tag{19}$$

где $\varepsilon>0$ — произвольное число, а M — некоторая положительная постоянная, не зависящая ни от сетки $\bar{\omega}$, ни от функции $v(x)$.

Доказательство. Докажем сначала неравенство (18). Положим в (4) $\varepsilon=\alpha l$, а в (8) $\varepsilon=\beta l^2$. Оценим $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ в первом из упомянутых неравенств при помощи второго. Тогда

$$\|v\|_C^2\leqslant\alpha\beta l^3\,\|v_{\bar{x}x}\|_0^2+\frac{1}{l}\,[M\alpha\,(1+1/\beta)+1+1/\alpha]\,\|v\|_0^2. \tag{20}$$

Пусть $\alpha\beta=\gamma$, $\beta=\gamma/2$. Полагая

$$\alpha=\frac{\gamma^{1/3}}{1+\gamma^{1/3}},$$

будем иметь

$$M\alpha(1+1/\beta)+1+1/\alpha=$$
$$=\frac{1+\gamma^{1/3}}{\gamma^{1/3}}\left[1+\frac{\gamma^{1/3}}{1+\gamma^{1/3}}+M\,\frac{\gamma+\gamma^{2/3}+1}{(1+\gamma^{1/3})^3}\right]\leqslant M_1(1+\gamma^{-1/3}).$$

Полагая $l^3\gamma=\varepsilon$ и учитывая полученную оценку, находим, что из (20) следует (18).

Докажем теперь неравенство (19). Положим в (6) $\varepsilon=\alpha l$, а в (8) $\varepsilon=\beta l^2$. Снова оценивая $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ в первом из упомянутых неравенств при помощи второго, получим, что

$$\|v_{\bar{x}}\|_C^2\leqslant l(\alpha+\beta/\alpha+\beta)\|v_{\bar{x}x}\|_0^2+\frac{M}{\beta^3}(1+1/\alpha)(1+1/\beta)\|v\|_0^2. \tag{21}$$

Введем следующее обозначение:

$$\alpha+\beta/\alpha+\beta=\gamma$$

и выразим β через α и γ:

$$\beta^{-1}=\frac{1+1/\alpha}{\gamma-\alpha}.$$

Полагая теперь, например, $\alpha=\gamma/2$, будем иметь неравенство

$$(1+1/\alpha)(1+1/\beta)=[1+(2/\gamma)^3]\,\frac{1+2/\gamma+(2/\gamma)^2}{1-2/\gamma+(2/\gamma)^2}\leqslant 24(1+\gamma^{-3}).$$

Используя это неравенство для оценки коэффициента при $\|v\|_0^2$ в (21) и полагая $\gamma l=\varepsilon$, получим (19). Теорема доказана.

2. Теоремы вложения для сеточных функций двух аргументов. В этом пункте мы будем изучать сеточные функции, заданные на прямоугольной сетке $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2$, расположенной в прямоугольнике $\bar{G}=\{x=(x_1, x_2)\mid 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha, \alpha=1, 2\}$. Пусть $\omega=\omega_1\times\omega_2$ — множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}$, а $\gamma=\bar{\omega}\setminus\omega$ — множество ее граничных узлов.

Для сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}$, введем следующие нормы:

$$\|v\|_C = \max_{x\in\bar{\omega}} |v(x)|, \qquad \|v\|_0^2 = \sum_{\bar{\omega}_1} h_1 \sum_{\bar{\omega}_2} h_2 v^2(x),$$

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 = \sum_{\omega_1^+} h_1 \sum_{\bar{\omega}_2} h_2 v_{\bar{x}_1}^2(x), \qquad \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 = \sum_{\bar{\omega}_1} h_1 \sum_{\omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_2}^2(x),$$

$$\|\nabla v\|_0^2 = \|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2, \qquad \|v\|_1^2 = \|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2.$$

Пусть

$$(u, v)_\gamma = \sum_\gamma u(x) v(x) \tau(x),$$

где

$$\tau(x) = \begin{cases} h_\alpha(x_\alpha), & x_\alpha \in \omega_\alpha, \ x_\beta = 0, \ l_\beta; \ \beta \neq \alpha, \\ [h_1(x_1) + h_2(x_2)]/2, & x_\alpha = 0, \ l_\alpha; \ \alpha = 1, 2, \end{cases} \tag{22}$$

есть сеточный аналог скалярного произведения следов функций $u(x)$ и $v(x)$ на границе, а

$$\|v\|_\delta = (v, v)_\gamma^{1/2}.$$

Для сеточных функций, заданных на равномерной сетке $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль на ее границе γ, введем норму

$$\|v\|_{2,\,0}^2 = \sum_\omega h_1 h_2 (v_{\bar{x}_1 x_1}^2 + v_{\bar{x}_2 x_2}^2) + 2 \sum_{\omega_1^+} h_1 \sum_{\omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2.$$

Теорема 4. *Для любой функции $v(x)$, заданной на произвольной неравномерной сетке $\bar{\omega}$, справедливо неравенство*

$$\|v\|_0^2 \leqslant \varepsilon \|\nabla v\|_0^2 + M_2(\varepsilon) \|v\|_\delta^2,$$

где ε — произвольная положительная постоянная, а

$$M_2(\varepsilon) = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} + \frac{8}{\varepsilon}.$$

Доказательство. При произвольном фиксированном x_2 для функции $v(x)$ на основании теоремы 2 справедливо неравенство

$$v^2(0, x_2) + v^2(l_1, x_2) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_1 \sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2(x) h_1 + 2(1/l_1 + 1/\varepsilon_1) \sum_{\bar{\omega}_1} v^2(x) h_1.$$

Умножая это неравенство на $\hbar_2(x_2)$ и суммируя полученное соотношение по $\bar{\omega}_2$, будем иметь

$$\sum_{\bar{\omega}_2}[v^2(0,\ x_2)\hbar_2+v^2(l_1,\ x_2)\hbar_2]\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon_1\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2+2(1/l_1+1/\varepsilon_1)\|v\|_0^2.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\sum_{\bar{\omega}_1}[v^2(x_1,\ 0)\hbar_1+v^2(x_1,\ l_2)\hbar_1]\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon_1\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2+2(1/l_2+1/\varepsilon_1)\|v\|_0^2.$$

Складывая последние два неравенства и полагая $2\varepsilon_1=\varepsilon$, приходим к утверждению теоремы.

Теорема 5. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}$ и обращающейся в нуль на границе γ, справедливо неравенство*

$$\|v\|_C\leqslant M_3\|v\|_{2,\,0},$$

где

$$M_3^2=\frac{1}{32}\left[\pi(l_1^2+l_2^2)+\frac{2l_1^2l_2^2}{(l_1^2+l_2^2)^2}\right].$$

Доказательство. Пусть $\mu_k(x)$ — собственные функции сеточного оператора Лапласа на сетке $\bar{\omega}$, удовлетворяющие граничным условиям первого рода. Разложим функцию $v(x)$ по функциям $\mu_k(x)$:

$$v(x)=\sum_k v_k\mu_k(x),\qquad k=(k_1,\ k_2).$$

В силу (31) § 3 функции $\mu_k(x)$ равномерно ограничены, и поэтому

$$v^2(x)\equiv\left(\sum_k v_k\mu_k(x)\right)^2\leqslant\frac{4}{l_1l_2}\left(\sum_k|v_k|\right)^2. \tag{23}$$

Оценим квадрат суммы, стоящей в правой части неравенства (23):

$$\left(\sum_k|v_k|\right)^2=\left(\sum_k|v_k|\,\lambda_k\lambda_k^{-1}\right)^2\leqslant\sum_k v_k^2\lambda_k^2\sum_k\lambda_k^{-2}, \tag{24}$$

где λ_k — собственные значения сеточного оператора Лапласа. Используя ортонормированность собственных функ-

ций $\mu_k(x)$ и ортогональность их разностных отношений (см. задачи (30) § 3 и (2) § 3), находим, что

$$\sum_k v_k^2\lambda_k^2 \equiv \sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1} v_{k_1k_2}^2\left(\lambda_{k_1}^2+2\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}+\lambda_{k_2}^2\right)= \\ =\left\|v_{\bar{x}_1x_1}\right\|_0^2+2\left\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\right\|_0^2+\left\|v_{\bar{x}_2x_2}\right\|_0^2\equiv\|v\|_{2,0}^2.$$

Отсюда и из соотношений (24), (23) следует оценка

$$\|v\|_C^2\leqslant M\|v\|_{2,0}^2, \tag{25}$$

где

$$M=\frac{4}{l_1l_2}\sum_k\lambda_k^{-2}.$$

Оценим постоянную M. Так как

$$\sum_k\lambda_k^{-2}=\lambda_1^{-2}+\sum_{\substack{k_1=1\\k_1+k_2>2,}}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\lambda_k^{-2},$$

то на основании формул (31), (11) и (12) § 3 имеем

$$\sum_k\lambda_k^{-2}\leqslant\left(\frac{8}{l_1^2}+\frac{8}{l_2^2}\right)^{-2}+\sum_{\substack{k_1=1\\k_1+k_2>2}}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\left(\frac{4}{l_1^2}k_1^2+\frac{4}{l_2^2}k_2^2\right)^2\leqslant \\ \leqslant\left[\frac{l_1^2l_2^2}{8\left(l_1^2+l_2^2\right)}\right]^2+\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\left(\frac{4}{l_1^2}\cos^2\varphi+\frac{4}{l_2^2}\sin^2\varphi\right)^2}\int_1^\infty\frac{dr}{r^3}= \\ =\left[\frac{l_1^2l_2^2}{8\left(l_1^2+l_2^2\right)}\right]^2+\frac{\pi l_1l_2\left(l_1^2+l_2^2\right)}{2^7},$$

ибо *)

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2}=\frac{\pi}{4ab^3}.$$

Подставляя эту оценку в (25), получим утверждение теоремы.

---

*) См., например, формулу 3.642.3 в книге: Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., «Наука», 1971.

§ 5. Оценки снизу для некоторых операторов

В § 2 этой главы при изучении одномерных моделей на том или ином этапе исследований мы сталкивались с необходимостью иметь оценки типа

$$[y, y] \geqslant M \|y\|_0^2, \quad M = \text{const} > 0, \tag{1}$$

где $[u, v] \equiv (\Lambda u, v)_\omega$ или $[u, v] \equiv (\overline{\Lambda} u, v)_{\overline{\omega}}$, а Λ и $\overline{\Lambda}$ — аппроксимации соответствующих дифференциальных операторов и граничных условий для них. Все рассматривавшиеся в § 2 операторы были самосопряженными в смысле соответствующих скалярных произведений, а для самосопряженных операторов справедлива оценка

$$\lambda_{\min}(v, v) \leqslant (Av, v),$$

где $\lambda_{\min}$ — минимальное собственное значение оператора, т. е.

$$\lambda_{\min} = \min \lambda(A).$$

Отсюда следует, что неравенство (1) устанавливает оценку снизу для минимального собственного значения соответствующего сеточного оператора.

В этом параграфе будут установлены оценки (1) для некоторых сеточных операторов, действующих на сеточных функциях одного или двух аргументов. Для того чтобы не повторять однотипные рассуждения, доказываемые утверждения мы будем формулировать не в терминах операторов, а в терминах квадратичных форм $[v, v]$, которые очевидным образом связаны с оцениваемыми операторами.

1. Сеточные функции одного аргумента. Будем рассматривать сеточные функции, заданные на сетке $\overline{\omega}$, расположенной на отрезке $[0, l]$.

Лемма 1 (неравенство Фридрихса). *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\overline{\omega}$ с шагом h и обращающейся в нуль при $x=0$ и $x=l$, справедливо неравенство*

$$\|v_x\|_0^2 \geqslant M_1 \|v\|_0^2, \quad \text{где} \quad M_1 = \left[\frac{2 \sin(\pi h/(2l))}{h}\right]^2. \tag{2}$$

Доказательство. На основании разностной формулы Грина (12) § 1 справедливо следующее соотношение:

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 = -(v_{\bar{x}x}, v)_\omega.$$

Таким образом, для получения (2) достаточно оценить оператор второго разностного отношения с граничными условиями первого рода. В § 3 была рассмотрена соответствующая задача на собственные значения и было, в частности, показано, что минимальное собственное значение этой задачи равно M_1. Отсюда вытекает неравенство (2). Лемма доказана.

Замечание 1. Неравенство (2) с постоянной M_1 является точным в том смысле, что оно переходит в равенство, если в качестве $v(x)$ взять первую собственную функцию задачи (2) § 3.

Замечание 2. Постоянная M_1 в неравенстве (2) зависит от шага h, но на основании соотношения (12) § 3 она может быть оценена снизу величиной, от h не зависящей. Именно при $h \leqslant l/2$ имеет место оценка $M_1 \geqslant 8/l^2$.

Замечание 3. Неравенство (2) остается в силе и в случае произвольной неравномерной сетки, если постоянную M_1 положить равной $8/l^2$ (см. лемму 2).

Замечание 4. Неравенство (2) справедливо и для функций, которые обращаются в нуль лишь на одном конце, т. е. при $x=0$ или при $x=l$, но с несколько большей постоянной (см. замечание 2 к лемме 2).

Замечание 5. Если $v(x)$ есть произвольная сеточная функция на $\bar{\omega}$, то для нее неравенство (2), вообще говоря, не имеет места. Примером может служить функция $v(x) = \text{const}$ при $x \in \bar{\omega}$, для которой левая часть в (2) обращается в нуль. Аналоги неравенства (2) для произвольных функций будут установлены в леммах 2 и 3.

Лемма 2. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на произвольной неравномерной сетке $\bar{\omega}$, справедливо неравенство*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \varkappa_0 v^2(0) + \varkappa_1 v^2(l) \geqslant M_2 \|v\|_0^2, \tag{3}$$

где $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ — неотрицательные постоянные, сумма которых положительна, а

$$M_2 = \frac{8(\varkappa_0 + \varkappa_1 + l\varkappa_0\varkappa_1)^2}{l(2+l\varkappa_0)(2+l\varkappa_1)(2\varkappa_0 + 2\varkappa_1 + l\varkappa_0\varkappa_1)}. \tag{4}$$

Если $v(0)=v(l)=0$, *то неравенство* (3) *принимает вид*

$$\|v_x\|_0^2 \geqslant \frac{8}{l^2}\|v\|_0^2. \tag{5}$$

Идею доказательства поясним на примере функций непрерывного аргумента. Для любой гладкой функции $v(x)$ имеет место тождество

$$v(x)=v(0)+\int_0^x v'(\xi)\,d\xi.$$

Возводя это тождество в квадрат и оценивая правую часть при помощи неравенства Коши — Буняковского и ε-неравенства (16) § 1, будем иметь

$$v^2(x)\leqslant(1+\varepsilon_0)\,v^2(0)+(1+1/\varepsilon_0)\,x\int_0^x v'^2(\xi)\,d\xi.$$

Пусть $x\leqslant y\leqslant l$. Тогда

$$v^2(x)\leqslant(1+\varepsilon_0)\,v^2(0)+(1+1/\varepsilon_0)\,x\int_0^y v'^2(\xi)\,d\xi.$$

Интегрируя это неравенство по x от 0 до y, получим, что

$$\int_0^y v^2(x)\,dx\leqslant(1+\varepsilon_0)\,yv^2(0)+(1+1/\varepsilon_0)\,\frac{y^2}{2}\int_0^y v'^2(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\int_0^l v^2(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant(1+\varepsilon_1)\,(l-y)\,v^2(l)+(1+1/\varepsilon_1)\,\frac{(l-y)^2}{2}\int_y^l v'^2(\xi)\,d\xi.$$

Выберем теперь $y\in[0,\ l]$ так, чтобы коэффициенты при интегралах в обоих неравенствах совпадали. Это будет при $y=y_0$, где

$$y_0=\frac{l\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}.$$

Складывая указанные выше неравенства при этом

значении y, будем иметь

$$\int_0^l v^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l(1+\varepsilon_0)\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}\,v^2(0) + l\,\frac{(1+\varepsilon_1)\sqrt{1+1/\varepsilon_0}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}\,v^2(l) +$$

$$+\frac{l^2}{2}\,\frac{(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}{(\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1})^2}\int_0^l v'^2(x)\,dx.$$

Доказательство леммы. Реализуем теперь эту идею для сеточной функции $v(x)$, заданной на $\bar{\omega}$. Так как точка $y=y_0$ может не принадлежать сетке $\bar{\omega}$, то рассуждения придется несколько усложнить.

Для любой сеточной функции $v(x)=v_i$ имеет место тождество

$$v_i = v_0 + \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}h_j.$$

Возводя левую и правую части этого тождества в квадрат и оценивая правую часть при помощи неравенства Коши (15) § 1 и ε-неравенства (16) § 1, будем иметь

$$v_i^2 \leqslant (1+\varepsilon_0)v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0)x_i\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}^2 h_j. \qquad (6)$$

Пусть $x_k \in \bar{\omega}$. Тогда для $x_i \leqslant x_{k-1}$ из соотношения (6) находим, что

$$v_i^2 \leqslant (1+\varepsilon_0)v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0)x_i\sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},j}h_j.$$

Умножим это неравенство на h_i и просуммируем по i от 0 до $k-1$. Замечая, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i h_i = \sum_{i=1}^{k-1} x_i\,\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2} = \frac{x_k x_{k-1}}{2},$$

будем иметь

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 \hbar_j \leqslant (1+\varepsilon_0)\left(x_k - \frac{h_k}{2}\right) v_0^2 + \\ + (1+1/\varepsilon_0)\frac{x_k x_{k-1}}{2} \sum_{j=1}^{k} v_{\overline{x}, j}^2 h_j. \qquad (7)$$

Положим теперь в неравенстве (6) $i=k$, умножим его на $\varepsilon\hbar_k$, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, и прибавим к (7):

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 \hbar_j + \varepsilon v_k^2 \hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_0)\left(x_k - \frac{h_k}{2} + \varepsilon\hbar_k\right) v_0^2 + \\ + (1+1/\varepsilon_0)\frac{x_k (x_{k-1}+2\varepsilon\hbar_k)}{2} \sum_{j=1}^{k} v_{\overline{x}, j}^2 h_k. \qquad (8)$$

Положим

$$\eta = x_k - \frac{h_k}{2} + \varepsilon\hbar_k = x_k - (1-\varepsilon)\frac{h_k}{2} + \varepsilon\frac{h_{k+1}}{2} \qquad (9)$$

и заметим, что при $x \in \bar{\omega}$ и $\varepsilon \in [0, 1]$ η может принимать любые значения из $[0, l]$. Легко проверить, что

$$x_k (x_{k-1} + 2\varepsilon\hbar_k) = x_k^2 + x_k (-(1-\varepsilon) h_k + \varepsilon h_{k+1}) \leqslant \eta^2.$$

Учитывая это обстоятельство, из соотношения (8) получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 \hbar_j + \varepsilon v_k^2 \hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_0)\,\eta v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0)\frac{\eta^2}{2} \sum_{j=1}^{k} v_{\overline{x}, j}^2 h. \qquad (10)$$

Из тождества

$$v_l = v_N - \sum_{j=l+1}^{N} v_{\overline{x}, j} h_j$$

рассуждениями, аналогичными проведенным выше, доказывается неравенство

$$\sum_{j=k+1}^{N} v_j^2 \hbar_j + (1-\varepsilon)\, v_k^2 \hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_1)\,(l-\eta)\, v_N^2 + \\ + (1+1/\varepsilon_1)\frac{(l-\eta)^2}{2} \sum_{j=k+1}^{N} v_{\overline{x}, j}^2 h_j. \qquad (11)$$

Полагая теперь в неравенствах (10) и (11)

$$\eta = \frac{l\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}$$

и складывая их, после преобразований получим

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{2\varepsilon_0}{l}\left(1+\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_0}{1+1/\varepsilon_1}}\right)v^2(0)+$$
$$+\frac{2\varepsilon_1}{l}\left(1+\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_1}{1+1/\varepsilon_0}}\right)v^2(l) \geqslant \frac{2\left(\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}\right)^2}{l^2(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}\|v\|_0^2.$$

Осталось выразить ε_0 и ε_1 через $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$. Эти выражения мы найдем, полагая коэффициент при $v^2(0)$ равным $\varkappa_0$, а коэффициент при $v^2(l)$ равным $\varkappa_1$, т. е.

$$\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_0}{1+1/\varepsilon_1}} = \frac{l\varkappa_0}{2\varepsilon_0} - 1 \equiv \frac{\bar{\varkappa}_0}{\varepsilon_0} - 1,$$
$$\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_1}{1+1/\varepsilon_0}} = \frac{l\varkappa_1}{2\varepsilon_1} - 1 \equiv \frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1} - 1, \qquad (12)$$

где

$$\bar{\varkappa}_0 = l\varkappa_0/2, \qquad \bar{\varkappa}_1 = l\varkappa_1/2.$$

Из формул (12) находим, что

$$\frac{\bar{\varkappa}_0}{\varepsilon_0} - 1 = \left(\frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1} - 1\right)^{-1}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\bar{\varkappa}_0} + \frac{1}{\bar{\varkappa}_0}\left(\frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1} - 1\right)^{-1}. \qquad (13)$$

Подставляя значение ε_0^{-1} во второе из уравнений (12) и возводя обе части равенства в квадрат, после некоторых преобразований получим уравнение для ε_1

$$(1+1/\bar{\varkappa}_0)\,\bar{\varkappa}_1^2/\varepsilon_1 = 2\bar{\varkappa}_1 + \bar{\varkappa}_1/\bar{\varkappa}_0 + 1.$$

Отсюда

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{\varkappa}_1^2(\bar{\varkappa}_0+1)}{2\bar{\varkappa}_0\bar{\varkappa}_1+\bar{\varkappa}_0+\bar{\varkappa}_1}.$$

Подставляя это значение ε_1 в (13), находим

$$\varepsilon_0 = \frac{\bar{\varkappa}_0^2(\bar{\varkappa}_1+1)}{2\bar{\varkappa}_0\bar{\varkappa}_1+\bar{\varkappa}_0+\bar{\varkappa}_1}.$$

Выразим через $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ постоянную

$$M_2 = \frac{2\left(\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}\right)^2}{l^2(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}.$$

Из формул (12) следует, что

$$\frac{\varkappa_0}{\varepsilon_0}=\frac{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}},\quad \frac{\varkappa_1}{\varepsilon_1}=\frac{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_1}},$$

и поэтому

$$M_2=\frac{1}{l^2}\,2\varkappa_0\varkappa_1/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1(1+\varepsilon_0)(1+\varepsilon_1)}.$$

Подставляя сюда значения ε_0 и ε_1, получим, что

$$M_2=\frac{8(\varkappa_0+\varkappa_1+l\varkappa_0\varkappa_1)^2}{l(2+l\varkappa_0)(2+l\varkappa_1)(2\varkappa_0+2\varkappa_1+l\varkappa_0\varkappa_1)}.$$

Неравенство (3) доказано.

Неравенство (5) получается из (3), если в последнем положить $v(0)=v(l)=0$, а в (4) перейти к пределу при $\varkappa_0\to\infty$ и $\varkappa_1\to\infty$. Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть сеточная функция $v(x)$ обращается в нуль на одном из концов отрезка $[0, l]$, например, при $x=0$. Тогда в формуле (4) можно перейти к пределу при $\varkappa_0\to\infty$

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2+\varkappa_1 v^2(l)\geqslant M_3\|v\|_0^2,\quad \text{где } M_3=\frac{8}{l^2}\left(\frac{1+l\varkappa_1}{2+l\varkappa_1}\right)^2. \tag{14}$$

Замечание 2. При тех же предположениях можно получить оценку снизу через $\|v\|_0^2$ и для $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$. Для этого в (14) нужно положить $\varkappa_1=0$:

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2\geqslant\frac{2}{l^2}\|v\|_0^2. \tag{15}$$

Замечание 3. Если в (3) положить нулю, например $\varkappa_0$, то оценка примет вид

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2+\varkappa_1 v^2(l)\geqslant M_4\|v\|_0^2,\quad \text{где } M_4=\frac{2\varkappa_1}{l(2+l\varkappa_1)}. \tag{16}$$

Лемма 3 (неравенство Пуанкаре). *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на произвольной неравномерной сетке $\bar{\omega}$, справедливо неравенство*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2\geqslant\frac{4}{l^2}\|v\|_0^2-\frac{4}{l}(v,\ 1)_{\omega}^2. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть x_i и x_k — два любых узла сетки $\bar{\omega}$. Так как при $x_i<x_k$ выполнено соотношение

$$(v_i-v_k)^2=\left(\sum_{j=i+1}^{k}v_{\bar{x},j}h_j\right)^2\leqslant(x_k-x_i)\sum_{j=i+1}^{k}v_{\bar{x},j}^2h_j,$$

а при $x_i > x_k$ — соотношение

$$(v_i - v_k)^2 = \left(\sum_{j=k+1}^{i} v_{\bar{x},j} h_j \right)^2 \leqslant (x_i - x_k) \sum_{j=k+1}^{i} v_{\bar{x},j}^2 h_j,$$

то всегда справедливо неравенство

$$(v_i - v_k)^2 \leqslant |x_i - x_k| \, \|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Умножим это неравенство на $\hbar_i$ и просуммируем по i от 0 до N. После некоторых преобразований получим

$$\|v\|_0^2 + l v_k^2 - 2 v_k (v, 1)_{\bar{\omega}} \leqslant \frac{l^2}{2} \|v_{\bar{x}}\|_0^2,$$

так как

$$\sum_{i=0}^{N} |x_i - x_k| \hbar_i = \int_0^l |t - x_k| \, dt = \int_0^{x_k} (x_k - t) \, dt + \int_{x_k}^{l} (t - x_k) \, dt =$$
$$= \frac{l^2}{2} - (l - x_k) x_k \leqslant \frac{l^2}{2}.$$

Умножая теперь последнее неравенство на $\hbar_k$ и суммируя по k от 0 до N, найдем, что

$$2l \|v\|_0^2 - 2 (v, 1)_{\bar{\omega}}^2 \leqslant \frac{l^3}{2} \|v_x\|_0^2,$$

откуда и следует (17). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть неравномерная сетка $\bar{\omega}$ такова, что*

$$\sum_{\bar{\omega} \cap [a, b]} \hbar(x) \geqslant m, \tag{18}$$

где $[a, b] \subset [0, l]$. Тогда для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на $\bar{\omega}$, справедливо неравенство

$$\|v_x\|_0^2 + \mu \sum_{\bar{\omega} \cap [a, b]} v^2 \hbar \geqslant M_5 \|v\|_0^2, \tag{19}$$

где $M_5 = \dfrac{2m\mu}{(2 + lm\mu) l}$, *а* $\mu = \text{const} > 0$.

Доказательство. При $x_i \leqslant x_k$ выполнено соотношение

$$v_i^2 = \left(v_k - \sum_{j=i+1}^{k} v_{\bar{x},j} h_j\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\, v_k^2 + (1+1/\varepsilon)\left(\sum_{j=i+1}^{k} v_{\bar{x},j} h_j\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\, v_k^2 + (1+1/\varepsilon)\, |x_i - x_k| \, \|v_x\|_0^2.$$

Легко проверить, что написанное неравенство остается справедливым и при $x_i \geqslant x_k$. Потому умножим его на $\hbar_i$ и просуммируем по i от 0 до N:

$$\|v\|_0^2 \leqslant l(1+\varepsilon)\, v_k^2 + (1+1/\varepsilon)\, \|v_{\bar{x}}\|_0^2 (|x_k - x_i|,\ 1) \leqslant$$

$$\leqslant l(1+\varepsilon)\, v_k^2 + (1+1/\varepsilon)\, \frac{l^2}{2} \|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Вновь полученное неравенство умножим на $\hbar_k$ и просуммируем по $x_k \in \bar{\omega} \cap [a, b]$. Получим

$$\sum_{\bar{\omega} \cap [a,b]} \hbar \|v\|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant l(1+\varepsilon) \sum_{\bar{\omega} \cap [a,b]} v^2(x)\, \hbar + (1+1/\varepsilon)\, \frac{l^2}{2} \sum_{\bar{\omega} \cap [a,b]} \hbar \|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Используя теперь условие (18) и полагая $\varepsilon = \mu l m/2$, получим (19). Лемма доказана.

Лемма 5. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}$ с шагом h, и обращающейся в нуль при $x = 0$, и $x = l$, справедливо неравенство*

$$\|v_{xx}\|_0^2 \geqslant M_6 \|v\|_0^2, \quad M_6 = \left[\frac{2 \sin(\pi h/2l)}{h}\right]^4. \tag{20}$$

Доказательство. На основании неравенства (9) § 4, при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \|v_{\bar{x}}\|_0^2 - \frac{1}{4\varepsilon^2} \|v\|_0^2,$$

а на основании леммы 1

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant M_1 \|v\|_0^2, \qquad \text{где } M_1 = \left[\frac{2 \sin(\pi h/(2l))}{h}\right]^2.$$

Оценивая $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ в первом из неравенств при помощи второго, будем иметь

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \left(\frac{M_1}{\varepsilon} - \frac{1}{4\varepsilon^2}\right)\|v\|_0^2.$$

Выберем ε так, чтобы коэффициент при $\|v\|_0^2$ был максимальным: $\varepsilon = 1/(2M_1)$. Подставляя это значение ε в последнее неравенство, приходим к (20). Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}$ с шагом h, и обращающейся в нуль при $x=0$ и $x=h$, справедливо неравенство*

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \frac{12}{l^4}\|v\|_0^2.$$

Доказательство. Учитывая, что $v(0)=0$, напишем формулу

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} hv_{\bar{x},j} = \sum_{j=1}^{i} hx_{\bar{x},j}v_{\bar{x},j}$$

и преобразуем ее при помощи формулы (11) § 1, полагая в последней $m=0$, $n=i$, $a \equiv 1$, $u \equiv v$, $v \equiv x$:

$$v_i = x_i v_{\bar{x},i} - \sum_{j=1}^{i-1} x_j v_{\bar{x}x,j}h.$$

Учитывая, что $v_{\bar{x}}(h)=0$, находим

$$v_{\bar{x},i} = \sum_{j=1}^{i-1} v_{\bar{x}x,j}h.$$

Подставляя это соотношение в предыдущее, будем иметь

$$v_i = \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)v_{\bar{x}x,j}h.$$

Отсюда находим, что

$$\|v\|_0^2 = \sum_{i=2}^{N-1} h\left\{\sum_{j=1}^{i-1}(x_i - x_j)v_{\bar{x}x,j}h\right\}^2 + \\ + \frac{h}{2}\left\{\sum_{j=1}^{N-1} h(x_N - x_j)v_{\bar{x}x,j}\right\}^2.$$

Оценим суммы, стоящие в правой части полученного соотношения. Используя неравенство Коши (15) § 1, находим,

что для любого $i=2, \ldots, N-1$ выполнено неравенство

$$\left\{\sum_{j=1}^{i-1}(x_i-x_j)v_{\bar{x}x,\,j}h\right\}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{i-1}(x_i-x_j)^2 h\,\|v_{\bar{x}x,\,j}\|_0^2.$$

Учитывая эту оценку, из последнего тождества получаем неравенство

$$\|v\|_0^2 \leqslant M\,\|v_{\bar{x}x}\|_0^2,$$

где

$$M=\sum_{j=1}^{N-1} h\left\{\sum_{j=1}^{i-1} h\,(x_i-x_j)^2+\frac{h}{2}\,(x_N-x_i)^2\right\}.$$

Вычисления показывают, что

$$M=\frac{h^4}{12}N\,(N-1)\,(N^2-N+1)<\frac{l^4}{12},$$

откуда и следует утверждение леммы.

2. Сеточные функции двух аргументов. Здесь мы будем изучать сеточные функции, заданные на прямоугольной сетке $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2$, расположенной в прямоугольнике

$$\bar{G}=\{x=(x_1,\ x_2)\mid 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\ \alpha=1,2\}.$$

Будем использовать обозначения, введенные в п. 2 § 4.

Лемма 7 (неравенство Фридрихса). *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на произвольной прямоугольной неравномерной сетке $\bar{\omega}$ и обращающейся в нуль на границе γ справедливо неравенство*

$$\|\nabla v\|_0^2 \geqslant (8/l_1^2+8/l_2^2)\,\|v\|_0^2. \tag{21}$$

Доказательство. Для функции $v(x)=v(x_1, x_2)$ при фиксированном x_2 на основании неравенства (5) справедливо соотношение

$$\sum_{x_1\in\omega_1^+}(v_{\bar{x}}(x_1,\ x_2))h_1(x_1)\geqslant\frac{8}{l_1}\sum_{x_1\in\bar{\omega}_1}v^2(x_1,\ x_2)\,\hbar_1(x_1).$$

Умножая это неравенство на $h_2(x_2)$ и суммируя по $x_2\in\bar{\omega}_2$, получим

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2\geqslant(8/l_1^2)\,\|v\|_0^2.$$

Аналогично находим, что

$$\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2\geqslant(8/l_2^2)\,\|v\|_0^2.$$

Складывая последние два соотношения, получим неравенство (21). Лемма доказана.

Лемма 8 (неравенство Пуанкаре). *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на произвольной прямоугольной неравномерной сетке $\bar{\omega}$, справедливо неравенство*

$$\|\nabla v\|_0^2 \geqslant \frac{4}{l_1^2+l_2^2}\|v\|_0^2 - \frac{4}{l_1 l_2 (l_1^2+l_2^2)}(v,\ 1)_{\bar{\omega}}^2. \qquad (22)$$

Доказательство. Пусть $x_i=(x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2)})$ и $x_j=(x_1^{(j_1)},\ x_2^{(j_2)})$ есть два любых узла сетки $\bar{\omega}$. Для любой функции $v(x)$ справедливо тождество *)

$$[v_i - v_j]^2 = \Bigg[\operatorname{sign}(i_1-j_1)\sum_{k_1=m_1+1}^{n_1} h_1 v_{x_1,k_1,i_2} + \operatorname{sign}(i_2-j_2)\sum_{k_2=m_2+1}^{n_2} h_2 v_{\bar{x}_2,j_1,k_2}\Bigg],$$

где

$$m_\alpha = \min\{i_\alpha,\ j_\alpha\},\quad n_\alpha = \max\{i_\alpha,\ j_\alpha\},\quad \alpha = 1,\ 2.$$

Отсюда на основании ε-неравенства (16) § 1 и неравенства Коши (15) § 1 находим, что

$$[v(x)-v(y)]^2 \leqslant (1+\varepsilon)|x_1-y_1|\sum_{x_1\in\omega_1^+} h_1 v_{\bar{x}_1}^2(x_1,\ x_2) + (1+1/\varepsilon)|x_2-y_2|\sum_{x_2\in\omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_2}^2(y_1,\ x_2). \qquad (23)$$

Умножим это неравенство на $\hbar_1(x_1)\,\hbar_2(x_2)\,\hbar_1(y_1)\,\hbar_2(y_2)$ и просуммируем по $x\in\bar{\omega}$ и $y\in\bar{\omega}$. Так как

$$\sum_{x_\alpha\in\bar{\omega}_\alpha} |y_\alpha - x_\alpha|\,\hbar_\alpha \leqslant l_\alpha^2/2, \qquad (24)$$

то

$$2l_1l_2\|v\|_0^2 - 2(v,\ 1)_{\bar{\omega}}^2 \leqslant (1+\varepsilon)\frac{l_1^3 l_2}{2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + (1+1/\varepsilon)\frac{l_1 l_2^3}{2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

Выбирая теперь $\varepsilon=(l_2/l_1)^2$, получим (22). Лемма доказана.

*) Такой вид на сетке приобретает очевидное для функций непрерывного аргумента соотношение

$$[v(x)-v(y)]^2 = \left[\int_{y_1}^{x_1}\frac{\partial v(\xi_1,\ x_2)}{\partial\bar{\xi}_1}d\xi_1 + \int_{y_2}^{x_2}\frac{\partial v(y_1,\ \xi_2)}{\partial\bar{\xi}_2}d\xi_2\right]^2.$$

Лемма 9. *Пусть* $\tilde{\omega} \subset \bar{\omega}$ — *некоторое множество узлов сетки* $\bar{\omega}$, *причем*

$$\sum_{\omega} \hbar_1 \hbar_2 \geqslant m. \tag{25}$$

Тогда для любой функции $v(x)$, *заданной на* $\bar{\omega}$, *справедливо неравенство*

$$\| \nabla v \|_0^2 + \mu \sum_{\tilde{\omega}} v^2 \hbar_1 \hbar_2 \geqslant M_7 \| v \|_0^2, \tag{26}$$

где $\mu = \text{const} > 0$ *произвольна, а*

$$M_7 = \frac{2m\mu}{l_1 l_2 [2 + \mu (l_1^2 + l_2^2)]}.$$

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ — два произвольных узла сетки $\bar{\omega}$. Для $v(x)$ справедливо неравенство

$$[v(x) - v(y)]^2 \geqslant (1 - \varepsilon_1) v^2(x) - (1/\varepsilon_1 - 1) v^2(y),$$

откуда на основании (23) находим, что

$$(1 - \varepsilon_1) v^2(x) \leqslant (1/\varepsilon_1 - 1) v^2(y) + (1 + \varepsilon_2) |x_1 - y_1| \sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2 (x_1, x_2) h_1 + (1 + 1/\varepsilon_2) |x_2 - y_2| \sum_{\omega_2^+} v_{\bar{x}_2}^2 (y_1, x_2) h_2.$$

Умножим это неравенство на $\hbar_1 \hbar_2$ и просуммируем по $x \in \bar{\omega}$. Принимая во внимание оценку (24), получим:

$$(1 - \varepsilon_1) \| v \|_0^2 \leqslant l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1) v^2(y) + (1 + \varepsilon_2) \frac{l_1^2}{2} \| v_{\bar{x}_1} \|_0^2 + (1 + 1/\varepsilon_1) \frac{l_1 l_2^2}{2} \sum_{\omega_2^+} v_{\bar{x}_2}^2 (y_1, x_2) h_2. \tag{27}$$

Умножим это неравенство на $\hbar_1 \hbar_2$ и просуммируем по $y \in \tilde{\omega}$. После некоторых оценок найдем, что

$$(1 - \varepsilon_1) \sum_{\tilde{\omega}} \hbar_1 \hbar_2 \| v \|_0^2 \leqslant (1/\varepsilon_1 - 1) l_1 l_2 \sum_{\tilde{\omega}} v^2 \hbar_1 \hbar_2 + (1 + \varepsilon_2) \frac{l_1^2 l_2}{2} \| v_{x_1} \|_0^2 + (1 + 1/\varepsilon_2) \frac{l_1 l_2^2}{2} \| v_{\bar{x}_2} \|_0^2.$$

Полагая $\varepsilon_2=(l_2/l_1)^2$, будем иметь оценку

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\omega}}\hbar_1\hbar_2\|v\|_0^2\leqslant(1/\varepsilon_1-1)\,l_1l_2\sum_{\tilde{\omega}}v^2\hbar_1\hbar_2+$$
$$+\frac{l_1l_2\,(l_1^2+l_2^2)}{2}\|\nabla v\|_0^2.$$

Выбирая здесь ε_1 из условия $(1/\varepsilon_1-1)=\mu\,(l_1^2+l_2^2)/2$ и принимая во внимание условие (25), получим оценку (26). Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $\tilde{\gamma}\subset\gamma$ есть некоторое множество узлов границы, а неравномерная сетка $\bar{\omega}$ такова, что*

$$\sum_{\tilde{\gamma}}\tau(x)\geqslant m, \tag{28}$$

где $\tau(x)$ задается соотношением (22) § 4. *Тогда для любой функции $v(x)$, заданной на $\bar{\omega}$, справедливо неравенство*

$$\|\nabla v\|_0^2+\mu\sum_{\tilde{\gamma}}v^2\tau\geqslant M_8\|v\|_0^2, \tag{29}$$

где

$$M_8=\frac{m\mu}{l_1l_2+\mu\,(l_1^2+l_2^2)\,(l_1+l_2)},$$

а μ — произвольная положительная постоянная. Если, в частности, $v(x)=0$ при $x\in\tilde{\gamma}$, то для функции $v(x)$ справедливо неравенство

$$\|\nabla v\|_0^2\geqslant\frac{m}{(l_1+l_2)\,(l_1^2+l_2^2)}\|v\|_0^2. \tag{30}$$

Доказательство. Для функции $v(x)$ справедливо неравенство (27). Наряду с неравенством (27) для $v(x)$ справедливо также аналогично доказываемое неравенство

$$(1-\varepsilon_1)\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2\,(1/\varepsilon_1-1)\,v^2(y)+$$
$$+(1+\varepsilon_2)\frac{l_1^2l_2}{2}\sum_{\omega_1^+}v_{\bar{x}_1}^2(x_1,\,y_2)+(1+1/\varepsilon_2)\frac{l_2^2}{2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2. \tag{31}$$

Пусть $\tilde{\gamma}=\tilde{\gamma}^{(1)}\cup\tilde{\gamma}^{(2)}$, где $\tilde{\gamma}^{(\alpha)}$ есть множество узлов γ, расположенных на прямой $x_\alpha=0$ или $x_\alpha=l_\alpha$. Умножим (27) на $\hbar_1(y_1)$ и просуммируем его по $\tilde{\gamma}^{(2)}$. Будем иметь

неравенство

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{y_1\in\tilde{\gamma}^{(2)}}\hbar_1(y_1)\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)\sum_{y_1\in\tilde{\gamma}^{(2)}}v^2(y)\hbar_1+$$
$$+(1+\varepsilon_2)\,l_1^2\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2+(1+1/\varepsilon_2)\,l_1l_2^2\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

Умножая обе части соотношения (31) на $\hbar_2(y_2)$ и суммируя полученный результат по $\tilde{\gamma}^{(1)}$, приходим к неравенству

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{y_2\in\tilde{\gamma}^{(1)}}\hbar_2(y_2)\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)\sum_{y_2\in\tilde{\gamma}^{(1)}}\hbar_2v^2(y)+$$
$$+(1+\varepsilon_2)\,l_1^2l_2\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2+(1/\varepsilon_2+1)\,l_2^2\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

Складывая последние два неравенства, найдем

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\gamma}}\tau\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)\sum_{\tilde{\gamma}}v^2(x)\,\tau+$$
$$+(1+\varepsilon_2)\,l_1^2(l_1+l_2)\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2+(1+1/\varepsilon_2)\,l_2^2(l_1+l_2)\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2.$$

Полагая теперь $\varepsilon_2=(l_2/l_1)^2$, получим

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\gamma}}\tau\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)\sum_{\tilde{\gamma}}v^2(x)\,\tau(x)+$$
$$+(l_1^2+l_2^2)(l_1+l_2)\|\nabla v\|_0^2. \qquad (32)$$

Выбирая ε_1 из условия

$$l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)=\mu(l_1+l_2)(l_1^2+l_2^2)$$

и принимая во внимание условие (28), получим оценку (29).

Пусть теперь $v(x)=0$ при $x\in\tilde{\gamma}$. Тогда первый член правой части наравенства (32) выпадает. Так как ε_1 есть произвольное неотрицательное число, то, полагая $\varepsilon_1=0$ и принимая во внимание (28), получим (30). Лемма доказана.

ГЛАВА VI

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

В главе IV были приведены примеры построения разностных аппроксимаций для широкого класса задач математической физики. После того как разностная схема построена и исследована её погрешность аппроксимации, возникает вопрос об оценке скорости сходимости решения сеточной задачи к решению аппроксимируемой задачи. Как уже отмечалось, оценка скорости сходимости разностной схемы может быть выведена из априорной оценки для этой схемы. Настоящая глава и посвящена получению априорных оценок для некоторых разностных схем, построенных в гл. IV. Приводимые априорные оценки носят, в основном, иллюстративный характер и далеко не охватывают всех задач даже из числа рассмотренных в гл. IV. Однако изучаемые здесь задачи типичны в том отношении, что излагаемые для них методы получения априорных позволяют получать аналогичные оценки для существенно более широкого класса задач.

В этой главе излагаются два метода получения априорных оценок: метод энергетических неравенств и метод функции Грина. Третий метод получения априорных оценок, широко используемый на практике, основан на принципе максимума и был изложен в гл. III. Примеры, иллюстрирующие использование метода энергетических неравенств при получении априорных оценок для одномерных моделей разностных уравнений второго и четвертого порядков, изложены в § 2 гл. V.

§ 1. Метод энергетических неравенств

В этом параграфе излагается метод энергетических неравенств получения априорных оценок для разностных задач. Изучаемые задачи предполагаются заданными на прямоугольной равномерной сетке $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2$. Рассматриваются разностная схема, аппроксимирующая первую краевую задачу для уравнения второго порядка со смешанными производными, разностные схемы четвертого порядка аппроксимации для уравнения Пуассона и уравнения со смешанными производными (коэффициенты постоянны), разностные схемы, аппроксимирующие вторую и третью краевые задачи для уравнения второго порядка без смешанных производных.

1. Введение. Введем две новые нормы сеточных функций, используемые в этом параграфе при получении априорных оценок

$$\|\varphi\|_{-1}=\sup_{v|_\gamma=0}\frac{|(\varphi, v)_\omega|}{\|v\|_1},\quad \|\varphi\|_{-\hat{1}}=\sup_{v\neq 0}\frac{|(\varphi, v)_{\bar{\omega}}|}{\|v\|_1}.$$

Другие нормы, используемые в этом параграфе, были введены в § 4 гл. V.

Установим одно вспомогательное утверждение. Имеет место

Лемма 1. *Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2$, справедливо неравенство*

$$\|v_{\bar{x}_\alpha}\|_0^2\leqslant\frac{4}{h_\alpha^2}\|v\|_0^2,\qquad \alpha=1, 2.$$

Доказательство. Проведем доказательство, например, для случая $\alpha=1$. По определению

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2=(v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2}=\frac{1}{h_1^2}(v-v^{(-1_1)}, v-v^{(-1_1)})_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2}.$$

Почленно перемножая и используя неравенство Коши, получим, что

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2\leqslant\frac{2}{h_1^2}(v^2, 1)_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2}+\frac{2}{h_1^2}(v^2, 1)_{+\omega_1\times\bar{\omega}_2}=\frac{4}{h_1^2}\|v\|_0^2.$$

2. Задача Дирихле для самосопряженного уравнения второго порядка со смешанными производными. Рассмотрим следующую задачу. В прямоугольнике $D=\{x=(x_1, x_2)|$

$0<x_\alpha<l_\alpha$, $\alpha=1, 2\}$ найти решение уравнения

$$Lu=\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)-q(x)u=-f(x),\qquad x\in D, \quad (1)$$

удовлетворяющее на границе Γ области D условию

$$u(x)=g(x),\qquad x\in\Gamma. \quad (2)$$

Будем предполагать, что при всех $x\in\bar{D}=D\cup\Gamma$ матрица $\{k_{\alpha\beta}(x)\}$ симметрична, положительно определена и имеет ограниченные элементы, т. е. при всех $x\in\bar{D}$

$$c_1(\xi_1^2+\xi_2^2)\leqslant\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2}k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta\leqslant c_2(\xi_1^2+\xi_2^2), \quad (3)$$

$$c_1=\text{const}>0,\quad c_2=\text{const}>0.$$

Будем, кроме того, предполагать, что

$$q(x)\geqslant 0,\qquad x\in D. \quad (4)$$

Введем в $\bar{D}$ прямоугольную равномерную сетку $\bar{\omega}$. Для оператора L в гл. IV была построена разностная аппроксимация, которую мы и используем при построении разностной схемы для задачи (1), (2). Именно, пусть

$$\Lambda y=-\varphi(x),\quad x\in\omega,\quad y=g(x),\quad x\in\gamma, \quad (5)$$

где

$$\Lambda y=\frac{1}{2}(\Lambda^-+\Lambda^+)y-dy,$$

$$\Lambda^- y=\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2}(k_{\alpha\beta}(x)y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha},$$

$$\Lambda^+ y=\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2}(k_{\alpha\beta}(x)y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha},$$

$$\varphi(x)=f(x),\quad d(x)=q(x),\quad x\in\omega.$$

Исследуем задачу (5).

Теорема 1. *Решение задачи* (5) *существует и единственно. Для решения задачи* (5) *с однородными краевыми условиями* ($g\equiv 0$) *справедлива априорная оценка*

$$\|y\|_1\leqslant\frac{1}{c_1}\left[1+\frac{l_1^2l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right]\|\varphi\|_{-1}.$$

Доказательство. Пусть $v(x)$ есть сеточная функция, заданная на $\bar{\omega}$ и $v(x)=0$ при $x\in\gamma$. Тогда, используя формулы суммирования по частям (9) § 1 гл. V, находим, что

$$(\Lambda^- v,\ v)_\omega = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{2} \left((k_{\alpha\beta}(x)\, v_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha},\ v\right)_\omega =$$

$$= -\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{2} \left(k_{\alpha\beta}(x)\, v_{\bar{x}_\beta},\ v_{\bar{x}_\alpha}\right)_{\omega_1\times\omega_2}.$$

Отсюда на основании условия (3) следует, что

$$c_1 \|\nabla v\|_0^2 \leqslant -(\Lambda^- v,\ v)_\omega.$$

Точно также доказывается неравенство

$$c_1 \|\nabla v\|_0^2 \leqslant -(\Lambda^+ v,\ v)_\omega.$$

Объединяя эти неравенства и учитывая условия (4), получаем

$$c_1 \|\nabla v\|_0^2 \leqslant -(\Lambda v,\ v)_\omega. \tag{6}$$

Из (6) на основании леммы (7) § 5 гл. V находим, что

$$\|v\|_1^2 \leqslant -\frac{1}{c_1}\left[1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8\,(l_1^2+l_2^2)}\right](\Lambda v,\ v)_\omega. \tag{7}$$

Отсюда следует, что если $\Lambda v\equiv 0$ при $x\in\omega$, то и $v\equiv 0$ при $x\in\omega$. Таким образом, мы доказали, что однородная задача (5) имеет лишь тривиальное решение $v(x)\equiv 0$, а следовательно, решение неоднородной задачи (3) существует при любых φ и g и это решение единственно.

Получим теперь априорную оценку решения задачи (5) при условии, что $g(x)\equiv 0$, $x\in\gamma$. Для этого представим в (7) $v=y$ и учтем, что $\Lambda y=-\varphi$. Будем иметь

$$\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{c_1}\left[1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8\,(l_1^2+l_2^2)}\right](\varphi,\ y)_\omega. \tag{8}$$

Так как

$$|(\varphi,\ y)_\omega| \leqslant \|\varphi\|_{-1}\|y\|_1,$$

то из (8) следует искомая априорная оценка. Теорема доказана.

3. **Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации.** Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике D:

$$\Delta u=-f(x),\ x\in D;\ u=g(x),\ x\in\Gamma. \tag{9}$$

Для уравнения (9) в гл. III на прямоугольной равномерной сетке ω была построена разностная аппроксимация, имеющая на гладких решениях уравнения (9) погрешность $O(|h|^4)$. Используя эту аппроксимацию, построим разностную схему для задачи (9) следующим образом:

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x} + \frac{h_1^2+h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \quad (10)$$

$$y(x) = g(x) \text{ при } x \in \gamma,$$

где

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Для задачи (10) при условии

$$1/\sqrt{5} \leqslant h_1/h_2 \leqslant \sqrt{5}$$

была доказана однозначная разрешимость и получена априорная оценка (21) § 4 гл. III в метрике C. Здесь мы докажем разрешимость задачи (10) без каких-либо ограничений на сетку $\bar{\omega}$.

Теорема 2. *Решение задачи* (10) *существует на любой равномерной сетке* $\bar{\omega}$. *Это решение единственно, и для него при* $g(x) \equiv 0$ *справедливы априорные оценки*

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{3}{2}\left(1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)\|\varphi\|_{-1}, \quad (11)$$

$$\|y\|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2}\|\varphi\|_0, \quad (12)$$

$$\|y\|_C \leqslant M\|\varphi\|_0, \quad M = \text{const} > 0. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $v(x)$ есть сеточная функция, заданная на $\bar{\omega}$ и равная нулю на границе: $v(x) = 0$ при $x \in \gamma$.

Тогда

$$(\Lambda' v, v)_\omega = (v_{\bar{x}_1 x_1}, v)_\omega + (v_{\bar{x}_2 x_2}, v)_\omega + \frac{h_1^2+h_2^2}{12}(v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, v)_\omega =$$

$$= -(v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+ \times \omega_2} - (v_{\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_2})_{\omega_1 \times \omega_2^+} +$$

$$+ \frac{h_1^2+h_2^2}{12}(v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}, v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} = -\|\nabla v\|_0^2 + \frac{h_1^2+h_2^2}{12}\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2.$$

На основании леммы 1

$$\|v_{x_1 x_2}\|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_1^2}\|v_{x_2}\|_0^2, \quad \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_2^2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2$$

и, следовательно,

$$(\Lambda' v,\ v)_\omega \leqslant -\frac{2}{3}\|\nabla v\|_0^2.$$

На основании леммы 7 § 5 гл. V отсюда следует, что

$$\|v\|_1^2 \leqslant -\frac{3}{2}\left(1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)(\Lambda' v,\ v)_\omega. \tag{14}$$

Тем самым, если $\Lambda' v = 0$ при $x \in \omega$, то и $v(x) \equiv 0$ при $x \in \omega$. Отсюда следует, что задача (10) имеет единственное решение при любых φ и g. Априорная оценка (11) следует из (14) очевидным образом.

Рассмотрим теперь соотношение

$$\begin{aligned}(\Lambda' v,\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega &= (v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega + \\ &+ \frac{h_1^2+h_2^2}{12}\{(v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1})_\omega + (v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},\ v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega\} = \\ &= \|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2 - \frac{h_1^2+h_2^2}{12}(\|v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2}\|_0^2 + \\ &+ \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2}\|_0^2).\end{aligned} \tag{15}$$

В силу леммы 1 справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\|v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2}\|_0^2 &\leqslant \frac{4}{h_1^2}(\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2), \\ \|v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2}\|_0^2 &\leqslant \frac{4}{h_2^2}(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2).\end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя неравенства (16) в (15), получим

$$(\Lambda' v,\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant \frac{2}{3}(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2).$$

Если $v = y$, то в силу (10) имеем:

$$\begin{aligned}\|y_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2 &\leqslant \frac{3}{2}|(\varphi,\ y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_\omega| \leqslant \\ &\leqslant \frac{3}{2}\|\varphi\|_0 \|y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2.\end{aligned}$$

Но

$$\|y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 = \|y_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2 \equiv \|y\|_{2,0}^2$$

и, следовательно,

$$\|y\|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2}\|\varphi\|_0.$$

Неравенство (13) следует из (12) на основании теоремы 5 § 4 гл. V. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и смешанной производной:

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}=-f(x),\quad x\in D,\quad |\alpha|<1,$$
$$u(x)=g(x),\quad x\in\Gamma. \tag{17}$$

При $|\alpha|<1$ уравнение (17) является эллиптическим. В гл. IV на квадратной сетке ω с шагом h для уравнения (17) была построена разностная схема, аппроксимирующая (17) на гладких решениях с погрешностью $O(|h|^4)$. Используя эту схему, разностную задачу, аппроксимирующую задачу (17), поставим следующим образом:

$$\Lambda' y=y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}+\alpha\left(y_{\bar{x}_1x_2}+y_{x_1\bar{x}_2}\right)+$$
$$+h^2\frac{1+3\alpha+2\alpha^2}{6}y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}=-\varphi(x),\quad x\in\omega, \tag{18}$$
$$y=g\quad\text{при}\quad x\in\gamma,$$

где

$$\varphi=f(x)+\frac{h^2}{12}Lf.$$

Исследуем задачу (18).

Теорема 3. *Решение задачи* (18) *существует и единственно. Для решения задачи* (18) *при* $g\equiv 0$ *справедливы априорные оценки*

$$\|y\|_1\leqslant\frac{3}{2(1-|\alpha|)}\left(1+\frac{l_1^2l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)\|\varphi\|_{-1}, \tag{19}$$
$$\|y\|_{2,0}\leqslant\frac{3}{2(1-|\alpha|)}\|\varphi\|_0, \tag{20}$$
$$\|y\|_C\leqslant M\|\varphi\|_0,\quad M=\text{const}>0. \tag{21}$$

Доказательство. Преобразуем оператор Λ'. Заметим сначала, что

$$h^2y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}=y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}+y_{x_1x_2}-y_{x_1\bar{x}_2}-y_{\bar{x}_1x_2}. \tag{22}$$

Оператор Λ' удобно преобразовать так, чтобы коэффициентом при $\frac{h^2}{6}y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}$ было выражение

$$1-3|\alpha|+2\alpha^2. \tag{23}$$

Учитывая формулу (22), напишем

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha\left(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}\right) + \\ + \frac{\alpha + |\alpha|}{2}\left(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2} - y_{\bar{x}_1 x_2} - y_{x_1 \bar{x}_2}\right) + \\ + \frac{h^2}{6}\left(1 - 3|\alpha| + 2\alpha^2\right) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{x_2 x_2} + \\ + \frac{\alpha - |\alpha|}{2}\left(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}\right) + \frac{\alpha + |\alpha|}{2}\left(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}\right) + \\ + \frac{h^2}{6}\left(1 - 3|\alpha| + 2\alpha^2\right) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{sign}\alpha\right)\Lambda^- y + \\ + \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sign}\alpha\right)\Lambda^+ y + \frac{h^2}{6}\left(1 - 3|\alpha| + 2\alpha^2\right) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, \qquad (24)$$

где

$$\Lambda^- y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha\left(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}\right),$$
$$\Lambda^+ y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha\left(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}\right).$$

Пусть $v(x)$ есть сеточная функция, заданная на $\bar{\omega}$ и $v(x) = 0$ при $x \in \gamma$. На основании условия $|\alpha| < 1$ имеем

$$\left(\Lambda^- v,\ v\right)_\omega = -\left(v_{\bar{x}_1},\ v_{\bar{x}_1}\right)_{\omega_1^+ \times \omega_2} - \left(v_{\bar{x}_2},\ v_{\bar{x}_2}\right)_{\omega_1 \times \omega_2^+} - \\ - \alpha\left(v_{\bar{x}_1},\ v_{\bar{x}_2}\right)_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} - \alpha\left(v_{\bar{x}_1},\ v_{\bar{x}_2}\right)_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} \leqslant -\left(1 - |\alpha|\right)\|\nabla v\|_0^2. \qquad (25)$$

Аналогично доказывается, что

$$\left(\Lambda^+ v,\ v\right)_\omega \leqslant -\left(1 - |\alpha|\right)\|\nabla v\|_0^2. \qquad (26)$$

На основании леммы 1

$$h^2\left(v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},\ v\right)_\omega = h^2\left(v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2},\ v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\right)_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} \leqslant 2\|\nabla v\|_0^2. \qquad (27)$$

Заметим, что функция (23) неположительна при $0{,}5 \leqslant |\alpha| < 1$ и положительна при $0 \leqslant |\alpha| < 0{,}5$. Тем самым при $0{,}5 \leqslant |\alpha| < 1$ из соотношений (24) — (27) находим, что

$$-\left(\Lambda' v,\ v\right)_\omega \geqslant \left(1 - |\alpha|\right)\|\nabla v\|_0^2. \qquad (28)$$

При $0 \leqslant |\alpha| < 0{,}5$

$$-\left(\Lambda' v,\ v\right)_\omega \geqslant \left(1 - |\alpha| - \frac{1 - 3|\alpha| + 2\alpha^2}{3}\right)\|\nabla v\|_0^2. \qquad (29)$$

Объединяя (28) и (29) при всех $|\alpha| < 1$, будем иметь

$$\frac{2}{3}\left(1 - |\alpha|\right)\|\nabla v\|_0^2 < -\left(\Lambda' v,\ v\right)_\omega. \qquad (30)$$

Из неравенства (30) на основании леммы 7 § 5 гл. V находим, что

$$\|v\|_1^2 \leqslant -\frac{3}{2}\left\{\left(1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)/(1-|\alpha|)\right\}(\Lambda' v, v)_\omega. \quad (31)$$

Если $\Lambda' v = 0$ при $x \in \omega$, то из (31) следует, что $v(x) \equiv 0$ при $x \in \omega$. Таким образом, мы доказали, что решение задачи (18) существует и единственно. Априорная оценка (19) следует из неравенства (31) очевидным образом.

Докажем справедливость априорной оценки (20). На основании условия $|\alpha| < 1$ получаем

$$\begin{aligned}(v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + 2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1})_\omega &= \\ &= (v_{\bar{x}_1 x_1} + 2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1})_\omega + \|v_{\bar{x}_1 x_2}\|_0^2 \geqslant \\ &\geqslant (1-|\alpha|)\left(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогично находим, что

$$\begin{aligned}(v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + 2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2},\ v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega &\geqslant \\ &\geqslant (1-|\alpha|)\left(\|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Объединяя (32) и (33), получим

$$\begin{aligned}(v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + 2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega &\geqslant \\ &\geqslant (1-|\alpha|)\left(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Точно также доказывается неравенство

$$\begin{aligned}(v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + 2\alpha v_{x_1 \bar{x}_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega &\geqslant \\ &\geqslant (1-|\alpha|)\left(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Складывая (34) и (35) и деля результат на 2, получим

$$(\Lambda^- v,\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant (1-|\alpha|)\left(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2\right). \quad (36)$$

Совершенно аналогично находим, что

$$(\Lambda^+ v,\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant (1-|\alpha|)\left(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2\right). \quad (37)$$

Далее на основании леммы 1

$$\begin{aligned}h^2(v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega &= -h^2\left(\|v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2}\|_0^2\right) \geqslant \\ &\geqslant -2\left(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2\right). \end{aligned} \quad (38)$$

Точно так же, как и при доказательстве неравенства (30),

находим, что

$$\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + 2\|v_{x_1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{2}\frac{1}{1-|\alpha|}(\Lambda' v,\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega. \qquad (39)$$

Подставляя в (39) $v(x) = y(x)$, обычным образом получаем оценку (20). Оценка (21) следует из оценки (20) на основании теоремы 5 § 4 гл. V.

3. Третья краевая задача для самосопряженного уравнения второго порядка без смешанных производных в прямоугольнике. Рассмотрим задачу

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u = -f(x), \qquad x \in D, \qquad (40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \varkappa(s)\, u - g(s), \qquad s \in \Gamma, \qquad (41)$$

где $\partial/\partial N$ есть оператор производной по внутренней конормали к границе Γ, т. е.,

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \begin{cases} k_\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1,\ 2, \end{cases}$$

s — длина дуги границы Γ, отсчитываемая от точки с координатами (0, 0) против часовой стрелки,

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x)\, u.$$

Будем предполагать, что коэффициенты задачи (40), (41) удовлетворяют условиям

$$k_\alpha(x) \geqslant c_1 > 0, \quad q_\alpha(x) \geqslant 0, \quad \varkappa(s) \geqslant 0. \qquad (42)$$

Положим

$$\bar{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha} - d_\alpha y, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ \Lambda_\alpha^{-} y = \dfrac{2}{h_\alpha}\left[a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha} - \left(\varkappa_{-\alpha} + \dfrac{1}{2} h_\alpha d_\alpha\right) y\right], & x_\alpha = 0, \\ \Lambda_\alpha^{+} y = \dfrac{2}{h_\alpha}\left[-a_\alpha y_{x_\alpha} - \left(\varkappa_{+\alpha} + \dfrac{1}{2} h_\alpha d_\alpha\right) y\right], & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

Тогда разностную аппроксимацию задачи (40), (41) можно записать в виде

$$\bar{\Lambda} y = -\Phi(x), \qquad x \in \bar{\omega}, \qquad (43)$$

где

$$\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_1 + \overline{\Lambda}_2, \qquad \Phi(x) = \varphi(x) + \delta(\gamma) g(x),$$

а $\delta(\gamma)$ — сеточный аналог дельта — функции, сосредоточенной на границе, т. е. $(v, \delta(\gamma))_{\bar{\omega}} = (v, 1)_\gamma$.

Теорема 4. *Если для любой функции $v(x)$, заданной на $\bar{\omega}$, равномерно по $|h|$ выполнено соотношение*

$$-(\overline{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}} \geqslant c \|v\|_1^2, \quad c = \text{const} > 0, \tag{44}$$

то существует единственное решение задачи (43), *и для него справедлива априорная оценка*

$$\|y\|_1^2 \leqslant M (\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0'^2), \quad M = \text{const} > 0. \tag{45}$$

Доказательство. Из (43) и (44) следует, что если $\Phi(x) \equiv 0$ при $x \in \bar{\omega}$, то и $v(x) \equiv 0$ при $x \in \bar{\omega}$. Тем самым решение задачи (43) существует и единственно.

Умножим (43) скалярно на y

$$-(\overline{\Lambda} y, y)_{\bar{\omega}} = (\Phi, y)_{\bar{\omega}} \equiv (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + (g, y)_\gamma. \tag{46}$$

На основании определения нормы $\|\cdot\|_{-1}$ и ε-неравенства (16) § 1 гл. V получаем

$$|(\varphi, y)_{\bar{\omega}}| \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|y\|_1 \leqslant \varepsilon \|y\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_{-1}^2. \tag{47}$$

С учетом неравенства Коши (15) § 1 гл. V и ε-неравенства (16) § 1 гл. V:

$$|(g, y)_\gamma| \leqslant \varepsilon \|y\|_0'^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|g\|_0'^2. \tag{48}$$

В силу теоремы § 4 гл. V справедлива оценка

$$\|y\|_0'^2 \leqslant M_2 \|y\|_1^2. \tag{49}$$

Подставляя оценки (47) — (49) в (46) и принимая во внимание неравенство (44) при $\varepsilon = c/(2(1 + M_2))$, получим (45). Теорема доказана.

Теорема 5. *Если*

$$d(x) \equiv \varkappa(s) \equiv 0 \tag{50}$$

и для любой функции $v(x)$, заданной на $\bar{\omega}$, равномерно по $|h|$ выполнено соотношение

$$-(\overline{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}} \geqslant c \|\nabla v\|_0^2, \qquad c = \text{const} > 0, \tag{51}$$

то при выполнении условия

$$(\Phi,\ 1)_{\bar{\omega}} \equiv (\varphi,\ 1)_{\bar{\omega}} + (g,\ 1)_{\gamma} = 0 \tag{52}$$

решение задачи (43) *существует. Оно единственно, если*

$$(y,\ 1)_{\bar{\omega}} = Q, \tag{53}$$

где Q *— фиксированная постоянная. Для решения задачи* (43), (50) *справедлива априорная оценка*

$$\|y\|_1^2 \leqslant M\{\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0^{\prime 2} + (y,\ 1)^2\}, \tag{54}$$

где $M = \text{const} > 0$.

Доказательство. Из вида оператора $\bar{\Lambda}$ следует, что он самосопряжен. Легко проверить, что при выполнении условий (50) нуль есть собственное значение этого оператора, которому соответствует собственная функция, равная постоянной. Тем самым из (52) следует существование, а из (53) единственность решения задачи (43).

Для получения априорной оценки умножим (43) скалярно на y. Будем иметь $-(\bar{\Lambda}y,\ y)_{\bar{\omega}} = (\varphi,\ y)_{\bar{\omega}} + (g,\ y)_{\gamma}$. Правую часть тождества оценим точно так же, как в теореме 4. Тогда, принимая во внимание (51), получим

$$c\|\nabla y\|_0^2 \leqslant \varepsilon(1+M_2)\|y\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon}(\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0^{\prime 2}).$$

Используя теперь неравенство Пуанкаре (лемма 8 § 5 гл. V) при достаточно малом ε получим (54). Теорема доказана.

Априорная оценка (45) теоремы (4) установлена в предположении справедливости соотношения (44). Выясним теперь, какие условия нужно наложить на коэффициенты задачи (40), (41), чтобы соотношение (44) выполнялось.

Теорема 6 (первое достаточное условие). *Пусть коэффициенты задачи* (40), (41) *удовлетворяют условиям* (42) *и, кроме того,*

$$q(x) \geqslant c_2 > 0, \qquad x \in \bar{D}_0, \tag{55}$$

где

$$\bar{D}_0 = \{x = (x_1,\ x_2) \mid l_{-\alpha} \leqslant x_\alpha \leqslant l_{+\alpha},\ \alpha = 1,\ 2\} \subset \bar{D}.$$

Тогда, если сетка выбрана таким образом, что выполнено условие леммы 9 § 5 *гл.* V, *то для любой сеточной*

функции $v(x)$, *заданной на* $\bar{\omega}$, *выполняется неравенство*:

$$-(\Lambda v,\ v)_{\bar{\omega}} \geqslant c\|v\|_1^2,\quad c=\text{const}>0.$$

Доказательство. На основании условия (55)

$$(d,\ v^2)_{\bar{\omega}} \geqslant \sum_{\bar{\omega}\cap\bar{D}_0} dv^2 h_1 h_2 \geqslant c_2 \sum_{\bar{\omega}\cap\bar{D}_0} v^2 h_1 h_2.$$

По построению

$$-(\Lambda v,\ v)_{\bar{\omega}} = \sum_{\omega_1^+}\sum_{\bar{\omega}_2} a_1 v_{\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1}\sum_{\omega_2^+} a_2 v_{\bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + (d,\ v^2)_{\bar{\omega}} + (\varkappa,\ v^2)_{\gamma}. \qquad (56)$$

На основании условий (42) из леммы 9 § 5 гл. V и предыдущего неравенства следует, что

$$-(\Lambda v,\ v)_{\bar{\omega}} \geqslant c_1\|\nabla v\|_0^2 + c_2 \sum_{\bar{\omega}\cap\bar{D}_0} v^2 h_1 h_2 \geqslant c\|v\|_1^2.$$

Теорема доказана.

Теорема 7 (второе достаточное условие). *Пусть коэффициенты задачи* (40), (41) *удовлетворяют условиям* (42) *и, кроме того,*

$$\varkappa(s) \geqslant c_3 > 0,\qquad s\in\Gamma_0, \qquad (57)$$

где $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. *Тогда, если сетка выбрана таким образом, что выполнено условие леммы* 10 § 5 гл. V, *то для любой сеточной функции* $v(x)$, *заданной на* $\bar{\omega}$, $-(\Lambda v,\ v)_{\bar{\omega}} \geqslant c\|v\|_1^2,\quad c=\text{const}>0.$

Доказательство. На основании условия (57)

$$(\varkappa,\ v^2)_{\gamma} \geqslant \sum_{\gamma\cap\bar{\Gamma}_0} \varkappa v^2 \tau \geqslant c_3 \sum_{\gamma\cap\bar{\Gamma}_0} v^2\tau.$$

Отсюда из (56) и леммы 9 § 5 гл. V на основании условий (42) следует, что

$$-(\Lambda v,\ v)_{\bar{\omega}} \geqslant c_1\|\nabla v\|_0^2 + c_3 \sum_{\gamma\cap\bar{\Gamma}_0} v^2\tau \geqslant c\|v\|_1^2.$$

Теорема доказана.

Лемма 2. *При выполнении условий* (42) *для любой функции* $v(x)$, *заданной на* $\bar{\omega}$,

$$-(\Lambda v,\ v)_{\bar{\omega}} \geqslant c_1\|\nabla v\|_0^2.$$

Доказательство немедленно следует из соотношения (56).

Теорема 8. *Если выполнены условия* (42) *и* (55) *или* (42) *и* (57), *то решение задачи* (43) *сходится в смысле нормы пространства* W_2^1 *к достаточно гладкому решению задачи* (40), (41) *со скоростью* $O(|h|^2)$, *т. е.*

$$\|y-u\|_1 \leqslant M|h|^2.$$

Доказательство немедленно следует из теорем 4, 6 и 7 и утверждения о том, что погрешность аппроксимации (задача (43)) есть величина $O(|h|^2)$.

Рассмотрим задачу (40), (41) при выполнении условий (42) и (50). Как уже отмечалось, в этом случае задача имеет решение не при любых правых частях f и g. Для существования решения необходимо предполагать, что

$$\int_D f(x)\,dx + \int_\Gamma g(s)\,ds = 0. \tag{58}$$

Единственное решение в этом случае можно выделить условием

$$\int_D u(x)\,dx = Q = \text{const}. \tag{59}$$

Теорема 9. *Если выполнены условия* (42) *и* (50), *то решение задачи* (43), (52), (53) *с правой частью*

$$\Phi = \varphi(x) + \delta(\gamma)\,g - \{(f,\ 1)_{\bar{\omega}} + (g,\ 1)_\gamma\}/\text{mes}\,D$$

сходится в смысле нормы пространства W_2^1 *к достаточно гладкому решению задачи* (40), (41), (58), (59) *со скоростью* $O(|h|^2)$, *т. е.*

$$\|y-u\|_1 \leqslant M|h|^2.$$

Доказательство. Для погрешности решения $z = y-u$ на основании теоремы 5 имеем оценку

$$\|z\|_1^2 \leqslant M\left(\|\psi\|_{-1}^2 + \|\psi_\gamma\|_0^{\prime 2} + (z,\ 1)_\omega^2\right),$$

где ψ — погрешность аппроксимации уравнения, а ψ_γ — погрешность аппроксимации граничных условий. Так как решение исходной задачи предполагается достаточно гладким, то функции ψ и ψ_γ будут $O(|h|^2)$ если возмущение правой части

$$(f,\ 1)_{\bar{\omega}} + (g,\ 1)_\gamma$$

будет $O(|h|^2)$. Но это так, ибо и $(f, 1)_{\bar{\omega}}$ и $(g, 1)_\gamma$ суть квадратурные формулы трапеций, которые имеют погрешность $O(|h|^2)$. Учитывая условие (58), находим, что

$$(f, 1)_{\bar{\omega}} + (g, 1)_\gamma = O(|h|^2).$$

Нам осталось оценить $(z, 1)_{\bar{\omega}}^2$. По определению и на основании условий (53) и (59)

$$(z, 1)_{\bar{\omega}} = (y, 1)_{\bar{\omega}} - (u, 1)_{\bar{\omega}} = \int_D u\,dx - (u, 1)_{\bar{\omega}} = O(|h|^2),$$

так как $(u, 1)_{\bar{\omega}}$ есть квадратурная формула трапеций. Теорема доказана.

4. Первая краевая задача для системы уравнений теории упругости в прямоугольнике. Обратимся к рассмотрению задачи для системы уравнений. Пусть D — ранее определенный прямоугольник и Γ — его граница. Пусть в D задана система уравнений равновесия однородного изотропного упругого тела

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_1 = 0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + F_2 = 0\end{aligned} \tag{60}$$

и требуется найти решение этой системы, удовлетворяющее на границе Γ однородным граничным условиям первого рода

$$u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma = 0. \tag{61}$$

Пусть ω — прямоугольная равномерная сетка в $\bar{D} = D \cup \Gamma$. В § 4 гл. IV на такой сетке была построена сеточная аппроксимация системы (60) и было показано, что ее погрешность есть $O(|h|^2)$. Указанная система сеточных уравнений может быть записана в виде

$$\begin{aligned}&((\lambda+2\mu)y_{1\bar{x}_1})_{x_1} + (\mu y_{1\bar{x}_2})_{x_2} +\\ &+\frac{1}{2}[(\lambda y_{2x_2})_{x_1} + (\lambda y_{2\bar{x}_2})_{\bar{x}_1} + (\mu y_{2x_1})_{x_2} + (\mu y_{2\bar{x}_1})_{\bar{x}_2}] + F_1 = 0,\\ &\frac{1}{2}[(\lambda y_{1x_1})_{x_2} + (\lambda y_{1\bar{x}_1})_{\bar{x}_2} + (\mu y_{1x_2})_{x_1} + (\mu y_{1\bar{x}_2})_{\bar{x}_1}] +\\ &+(\mu y_{2\bar{x}_1})_{x_1} + ((\lambda+2\mu)y_{2\bar{x}_2})_{x_2} + F_2 = 0,\ x \in \omega.\end{aligned} \tag{62}$$

Так как коэффициенты λ и μ постоянны, то на самом деле, например,

$$(\lambda y_{2x_2})_{x_1} + (\mu y_{2x_1})_{x_2} = (\lambda + \mu)\, y_{2x_1x_2},$$

однако использованная нами запись этих членов в (62) будет удобна для дальнейшего исследования. Дополняя систему (62) аппроксимацией граничных условий (61):

$$y_1|_\gamma = y_2|_\gamma = 0, \tag{63}$$

получим сеточную задачу (62), (63), которая аппроксимирует задачу (60), (61).

Установим априорную оценку решения задачи (62), (63). Для этого умножим первое из уравнений (62) на $y_1(x)\, h_1h_2$, второе — на $y_2(x)\, h_1h_2$, просуммируем полученные соотношения по сетке ω и сложим. Преобразуем выражения, стоящие под знаком суммы, при помощи первой разностной формулы Грина (12) § 1 гл. V и формул суммирования по частям (8) и (9) того же параграфа. При этом преобразование каждого выражения проведем только по одной переменной, указанной внешним индексом взятия разностного отношения. После учета граничных условий (63) и перегруппировки слагаемых будем иметь

$$2W_h = (F_1,\ y_1)_\omega + (F_2,\ y_2)_\omega, \tag{64}$$

где

$$W_h \equiv \frac{1}{2}\{2\mu(\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 + \|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}((y_{1\bar{x}_1} + y_{2x_2})^2,\ 1)_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2} + \frac{\lambda}{2}((y_{1x_1} + y_{2\bar{x}_2})^2,\ 1)_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+} +$$

$$+ \frac{\mu}{2}((y_{1x_2} + y_{2\bar{x}_1})^2,\ 1)_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2} +$$

$$+ \frac{\mu}{2}((y_{1\bar{x}_2} + y_{2x_1})^2,\ 1)_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+} \tag{65}$$

есть сеточный аналог энергии упругой деформации.

Преобразуем два последних выражения, стоящих в правой части (65). Производя возведение в квадрат, преобразовывая с учетом граничных условий (63) выражение $(y_{\alpha x_\beta},\ y_{\beta\bar{x}_\alpha})_\omega$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1,2$ сначала при помощи формулы суммирования по частям (8) § 1 гл. V по переменной x_α, а затем при помощи формулы (9) того же параграфа —

по переменной x_β, получим

$$\left(\left(y_{\alpha x_\beta}+y_{\beta\bar{x}_\alpha}\right)^2,\ 1\right)_{\omega_\alpha^+\times^+\omega_\beta}=\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2+2\left(y_{\alpha x_\alpha},\ y_{\beta\bar{x}_\beta}\right)_\omega.$$

Подставляя эти соотношения в (65) и отбрасывая слагаемые с коэффициентами $\lambda/2$, найдем, что

$$W_h\geqslant\frac{\mu}{2}\{2(\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2)+\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2+$$
$$+(y_{1x_1},\ y_{2\bar{x}_2})_\omega+(y_{1\bar{x}_1},\ y_{2x_2})_\omega.$$

На основании неравенства Коши (15) § 1 гл. V и ε-неравенства (16) того же параграфа

$$\left|\left(y_{\alpha\bar{x}_\alpha},\ y_{\beta x_\beta}\right)_\omega\right|\leqslant\frac{1}{2}\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2+\frac{1}{2}\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2.$$

Учитывая это, заключаем, что

$$W_h\geqslant\frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{2}\|y_{\alpha\bar{x}_\beta}\|_0^2=\frac{\mu}{2}\{\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2\}.$$

Доказанное неравенство является сеточным аналогом *неравенства Корна* для первой краевой задачи. Из неравенства Корна и из соотношения (64) следует, что

$$\mu(\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2)\leqslant|(F_1,\ y_1)_\omega|+|(F_2,\ y_2)_\omega|. \qquad (66)$$

Слагаемые, стоящие в правой части, оценим снова при помощи неравенства Коши и ε-неравенства:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}|(F_\alpha,\ y_\alpha)_\omega|\leqslant\sum_{\alpha=1}^{2}(\varepsilon(\|y_\alpha\|_0^2+\|y_2\|_0^2)+\frac{1}{4\varepsilon}\|F_\alpha\|_0^2).$$

На основании леммы 7 § 5 гл. V

$$\|y_1\|_0^2+\|y_2\|_0^2\leqslant(8/l_1^2+8/l_2^2)^{-1}(\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2).$$

Отсюда, из предыдущего неравенства и из неравенства (66) при $\varepsilon=\mu(8/l_1^2+8/l_2^2)$ находим, что

$$\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2\leqslant\mu^{-2}(8/l_1^2+8/l_2^2)^{-1}(\|F_1\|_0^2+\|F_2\|_0^2).$$

Это и есть искомая априорная оценка, из которой следует разрешимость задачи (62), (63) и сходимость ее решения к решению задачи (60), (61) со скоростью $O(|h|^2)$.

5. Смешанная краевая задача для системы уравнений теории упругости в прямоугольнике. Для системы уравнений (60) рассмотрим смешанную задачу. Пусть в прямоугольнике D требуется найти решение системы уравнений (60), удовлетворяющее на границе Γ следующим краевым условиям:

$$u_1(x) = u_2(x) = 0 \text{ при } x_2 = l_2,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \tag{67}$$

$$\text{и при } x_1 = 0,\ x_1 = l_1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2,$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = -f_1,\ \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -f_2 \tag{68}$$

$$\text{при } x_2 = 0,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1.$$

На прямоугольной равномерной сетке $\bar{\omega}$ систему уравнений (60) аппроксимируем системой сеточных уравнений (62), а граничные условия (67) — сеточными граничными условиями

$$y_1(x) = y_2(x) = 0 \text{ при } x_2 = l_2,\ x_1 \in \bar{\omega}_1 \tag{69}$$

$$\text{и при } x_1 = 0,\ x_1 = l_1,\ x_2 \in \bar{\omega}_2.$$

Граничные условия (68) аппроксимируем соотношениями типа (18) § 4 гл. IV, относительно которых в § 4 гл. IV доказано, что они имеют погрешность аппроксимации $O(|h|^2)$:

$$\mu\left(y_{1x_2} + y_{2\mathring{x}_1}\right) + \frac{h_2}{2}\left[\left((\lambda+2\mu)\,y_{1\bar{x}_1}\right)_{x_1} + \left(\lambda y_{2x_2}\right)_{x_1} + \left(\mu y_{2x_1}\right)_{x_2}\right] =$$

$$= -f_1 - \frac{h_2}{2}F_1(x_1, 0), \tag{70}$$

$$\lambda y_{1\mathring{x}_1} + (\lambda+2\mu)\,y_{2x_2} + \frac{h_2}{2}\left[\left(\lambda y_{1x_1}\right)_{x_2} + \left(\mu y_{1x_2}\right)_{x_1} + \left(\mu y_{2\bar{x}_1}\right)_{x_1}\right] =$$

$$= -f_2 - \frac{h_2}{2}F_2(x_1, 0)$$

при $x_2 = 0,\ x_1 \in \omega_1$.

Исследуем сеточную задачу (62), (69), (70), которая аппроксимирует задачу (60), (67), (68) с погрешностью $O(|h|^2)$. Умножим первое из уравнений (62) на $y_1(x)\,h_1h_2$, второе — на $y_2(x)\,h_1h_2$, просуммируем полученные соотношения по сетке ω и сложим. Затем умножим первое из граничных условий (70) на $y_1(x_1, 0)\,h_1$, второе — на $y_2(x_1, 0)\,h_1$, просуммируем полученные соотношения по ω_1 и сложим. Прибавим теперь это соотношение к ранее полученному и преобразуем выражения, стоящие под знаками сумм, как это

мы делаем в п. 4 при доказательстве соотношения (64). Учитывая граничные условия (69), находим, что

$$2W_h = \sum_{\alpha=1}^{2} (F_\alpha,\ y_\alpha)_{\bar{\omega}} + \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\omega_1} f_\alpha y_\alpha |_{x_2=0} h_1, \qquad (71)$$

где W_h определяется соотношением (65).

Оценим W_h снизу. Так как выражения, входящие в W_h с множителями $\lambda/2$, неотрицательны, то

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2} \{2 (\| y_{1\bar{x}_1} \|_0^2 + \| y_{2\bar{x}_2} \|_0^2) + I\}, \qquad (72)$$

где

$$I = \frac{1}{2} ((y_{1x_2} + y_{2\bar{x}_1})^2,\ 1)_{\omega_1^+ \times +\omega_2} + \frac{1}{2} ((y_{1\bar{x}_2} + y_{2x_1})^2,\ 1)_{+\omega_1 \times \omega_2^+}.$$

Преобразуем выражение I. Производя возведение в квадрат и преобразовывая выражение $(y_{1x_2},\ y_{2\bar{x}_1})_{\omega_1^+ \times +\omega_2}$ сначала при помощи формулы суммирования по частям (9) § 1 гл. V по переменной x_2, а затем при помощи формулы (8) того же параграфа — по переменной x_1, найдем, что

$$(y_{1x_2},\ y_{2\bar{x}_1})_{+\omega_1 \times +\omega_2} = (y_{1x_1},\ y_{2\bar{x}_2})_{+\omega_1 \times \omega_2^+} - \sum_{\omega_1^+} y_1 y_{2\bar{x}} \Big|_{x_2=0} h_1.$$

Аналогично находим, что

$$(y_{1\bar{x}_2},\ y_{2\bar{x}_1})_{+\omega_1 \times \omega_2^+} = (y_{1\bar{x}_1},\ y_{2x_2})_{\omega_1^+ \times +\omega_2} - \sum_{+\omega_1} y_1 y_{2x_1} \Big|_{x_2=0} h_1.$$

Принимая во внимание полученные соотношения, будем иметь

$$I = \| y_{1\bar{x}_2} \|_0^2 + \| y_{2\bar{x}_1} \|_0^2 + (y_{1x_1},\ y_{2\bar{x}_2})_{+\omega_1 \times \omega_2^+} + \\ + (y_{1\bar{x}_1},\ y_{2x_2})_{\omega_1^+ \times +\omega_2} - \sum_{\omega_1^+} \frac{y_1 + y_1^{(-1_1)}}{2} y_{2\bar{x}_1} h_1. \qquad (73)$$

Оценим третье и четвертое слагаемые правой части (73) при помощи неравенства Коши и ε-неравенства с $\varepsilon = \alpha$, а последнее слагаемое — при помощи теоремы из дополнения 2

и ε-неравенства с $\varepsilon=\beta$. В результате получим

$$I \geqslant \|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2-\alpha\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2-\frac{1}{\alpha}\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2-$$
$$-\beta\left[\varepsilon_1\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2\right]-$$
$$-\frac{1}{\beta}\left[\varepsilon_2\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2+\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2\right]. \quad (74)$$

Так как $I\geqslant 0$, то при $\sigma\in[0,\,1]$ $I\geqslant\sigma I$. Учитывая это неравенство и неравенство (74), из соотношения (72) находим, что

$$2W_h\geqslant\mu\left\{\left[2-\sigma\left(\alpha+\beta\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right)\right]\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2+\right.$$
$$+\left[2-\sigma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon_2}{\beta}\right)\right]\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2+$$
$$\left.+\sigma[1-\beta\varepsilon_1]\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\sigma\left[1-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right]\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2\right\}. \quad (75)$$

Придадим параметрам ε_2 и α некоторые фиксированные значения. Вибирая затем параметр β из условия $\beta>(1/\varepsilon_2+$ $+\,l_1/\pi l_2)$, параметр ε_1 из условия $0<\varepsilon_1<\beta^{-1}$, а параметр σ из условия

$$0<\sigma<\min\left\{1,\,2\left[\alpha+\beta\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right]^{-1},\,2\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon_2}{\beta}\right]\right\},$$

в правой части неравенства (75) получим линейную комбинацию норм функций $y_{\alpha\bar{x}_\beta}$, $\alpha,\ \beta=1,\ 2$, с положительными коэффициентами. Тем самым,

$$2W_h\geqslant m\,(\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2), \quad (76)$$

где $m\equiv m(\mu,\,\alpha,\,\beta,\,\sigma,\,\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)>0$. Неравенство (76) называется *неравенством Корна* рассматриваемой смешанной задачи.

На основании леммы 10 § 5 гл. V $\|\nabla y_\alpha\|_0^2\geqslant M_1\|y\|_1^2$, так что вместо (76) можно написать неравенство

$$2W_h\geqslant mM_1\,(\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2).$$

Учитывая это неравенство, из соотношения (71) находим оценку

$$mM_1\,(\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{|\,(F_\alpha,\,y_\alpha)_{\omega}\,|+\left|\sum_{\omega_1}f_\alpha y_\alpha\Big|_{x_2=0}h_1\right|\right\}. \quad (77)$$

Оценим правую часть этого неравенства. На основании неравенства Коши, леммы 10 § 5 гл. V и ε-неравенства

$$|(F_\alpha, y_\alpha)_{\bar\omega}| \leqslant \varepsilon \|F_\alpha\|_0^2 + \frac{M_2^2}{4\varepsilon}\|y_\alpha\|_1^2.$$

Далее, неравенство Коши, теорема 4 § 4 гл. V и ε-неравенство приводят к оценке

$$\left|\sum_{\omega_1} f_\alpha y_\alpha \Big|_{x_2=0} h_1\right| \leqslant \varepsilon \|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2 + \frac{M_3^2}{4\varepsilon}\|y_\alpha\|_1^2.$$

Принимая во внимание эти оценки, из неравенства (77) находим, что

$$\left(mM_1 - \frac{M_2^2}{4\varepsilon} - \frac{M_3^2}{4\varepsilon}\right)(\|y_1\|_1^2 + \|y_2\|_1^2) \leqslant \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{2} (\|F_\alpha\|_0^2 + \|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2).$$

Выбирая теперь ε достаточно большим, получим следующую априорную оценку решения задачи (62), (69), (70):

$$\|y_1\|_1^2 + \|y_2\|_1^2 \leqslant M_4 \sum_{\alpha=1}^{2} (\|F_\alpha\|_0^2 + \|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2).$$

Из полученной априорной оценки следует разрешимость задачи (62), (69), (70) и сходимость ее решения к решению задачи (60), (67), (68) со скоростью $O(|h|^2)$.

§ 2. Метод функции Грина

Рассмотрим разностную задачу

$$\Lambda y \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda_\alpha y = -\Phi(x), \qquad x \in \bar\omega, \tag{1}$$

$$(\Phi, 1)_{\bar\omega} = 0, \tag{2}$$

$$(y, 1)_{\bar\omega} = q. \tag{3}$$

где

$$\Lambda_\alpha y = \begin{cases} \dfrac{2}{h_\alpha} y_{x\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ y_{\bar x\alpha x\alpha}, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ -\dfrac{2}{h_\alpha} y_{\bar x\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

Сетка $\bar{\omega}$ предполагается равномерной. Рассмотрим функции Грина оператора $\bar{\Lambda}$. Так как для оператора $\bar{\Lambda}$ нуль является точкой спектра, которой отвечает собственная функция, равная постоянной, то речь идет об обобщенной функции Грина. Она определяется следующим образом:

$$\bar{\Lambda}G(x, \xi) = \varkappa - \delta(x, \xi), \quad x \in \bar{\omega}, \quad \varkappa = (\operatorname{mes} D)^{-1}, \tag{4}$$

$$(G(x, \xi), 1)_{\bar{\omega}} = Q = \text{const}. \tag{5}$$

Простыми выкладками легко убедиться в том, что решение задачи (1) — (3) представимо в виде

$$y(x) = (G(x, \xi), \varphi(\xi))_{\bar{\omega}} + (G(x, \xi), g(\xi))_{\gamma} + \varkappa (y(\xi), 1)_{\bar{\omega}}. \tag{6}$$

На основании (6) можно написать, что

$$\|y(x)\|_C \leqslant \max_{x \in \bar{\omega}} (\|G(x, \xi)\|_{L_1} \|\varphi\|_C + \|G(x, \xi)\|'_{L_1} \|g\|'_C) + \\ + \varkappa |(y(\xi), 1)_{\bar{\omega}}|. \tag{7}$$

Если нормы $G(x, \xi)$, участвующие в (7), равномерно по $|h|$ ограничены, то (7) дает априорную оценку решения задачи (1) — (3).

Для оценки указанных норм функции Грина будем пользоваться ее разложением по собственным функциям оператора $\bar{\Lambda}$. Можно показать, что для функции $G(x, \xi)$, удовлетворяющей соотношениям (4), (5), разложение по собственным функциям оператора $\bar{\Lambda}$ имеет вид

$$G(x, \xi) = Q\varkappa + \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)\, \mu_k(\xi)}{\lambda_k}, \tag{8}$$

где

$$|k|^2 = \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^2, \qquad k_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,$$

а $\mu_k(x)$ и λ_k определяются формулами (33), (19), (20) § 3 гл. V.

Лемма 1. *Если проекция функции Грина $G(x, \xi)$ на единицу удовлетворяет условию*

$$Q \geqslant 2l_0^2, \quad l_0 = \max(l_1 l_2), \tag{9}$$

то $G(x, \xi)$ неотрицательна на $\bar{\omega}$, и для нее справедливы соотношения

$$\max_{x \in \bar{\omega}} \|G(x, \xi)\|_{L_1} = Q, \quad \max_{x \in \bar{\omega}} \|G(x, \xi)\|'_{L_1} \leqslant \left(2Q\varkappa + \frac{\pi^2}{6}\right)(l_1 + l_2).$$

Доказательство. Пусть $G(x, \xi; d) \equiv G^{(1)}(x, \xi; d)$ есть функция Грина оператора $(\bar{\Lambda} - dE)$ $(d = \text{const} > 0)$, а $G^{(m)}(x, \xi; d)$ — ее итерации, которые определяются соотношениями

$$(-\bar{\Lambda} + dE)^m G^{(m)}(x, \xi; d) = \delta(x - \xi), \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Сравним функцию $G(x, \xi)$ с функцией $\sum_{m=1}^{n} d^{m-1} G^{(m)}(x, \xi; d)$. Так как операторы $\bar{\Lambda}$, $(\bar{\Lambda} - dE)$ и $(\bar{\Lambda} - dE)^m$ имеют общую систему собственных функций, то

$$G^{(m)}(x, \xi; d) = \frac{\varkappa}{d^m} + \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{(\lambda_k + d)^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Из (8) и (10) находим, что

$$G(x, \xi) - \sum_{m=1}^{n} d^{m-1} G^{(m)}(x, \xi; d) = \left(Q - \frac{n}{d}\right)\varkappa + d^n \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{\lambda_k (\lambda_k + d)^n}. \tag{11}$$

Ясно, что за счет надлежащего выбора параметра n всегда можно обеспечить равномерную по $|h|$ ограниченность суммы в правой части (11). В данном случае двумерного пространства n достаточно взять равным единице. Пусть эта сумма ограничена по абсолютной величине постоянной M. Тогда из (11) следует, что при

$$Q \geqslant 1/d + dM/\varkappa \equiv Q(d) \tag{12}$$

для функции $G(x, \xi)$ справедлива оценка снизу вида

$$G(x, \xi) \geqslant G^{(1)}(x, \xi; d). \tag{13}$$

Но для оператора $(\bar{\Lambda} - dE)$ при $d > 0$ справедлив принцип максимума и, следовательно, на основании следствия 1 из теоремы 1 § 3 гл. III $G(x, \xi; d) \geqslant 0$ *). Из неотри-

*) Из неотрицательности функции Грина $G^{(1)}(x, \xi; d)$ следует неотрицательность и всех ее итераций, ибо

$$G^2(x, \xi; d) = (G^{(1)}(x, \eta; d), G^{(1)}(\eta, \xi; d))_{\Omega}$$

и т. д.

цательности функции $G(x, \xi)$ при выполнении условия (12) очевидным образом следует оценка ее норм на $\bar{\omega}$. В самом деле,

$$\max_{x\in\bar{\omega}} \| G(x, \xi) \|_{L_1} = \max_{x\in\bar{\omega}} (G(x, \xi), 1)_{\bar{\omega}} = Q.$$

Далее

$$\| G(x, \xi) \|'_{L_1} = (G(x, \xi), 1)_\gamma = \\ = \sum_{|k|\neq 0} \frac{\mu_k(x)}{\lambda_k} (\mu_k(\xi), 1)_\gamma + Q\varkappa \operatorname{mes}\Gamma. \qquad (14)$$

Но

$$(\mu_k(\xi), 1)_\gamma = (\mu_{k_1}(\xi_1)\mu_{k_2}(\xi_2), 1)_\gamma = \\ = \delta_{0,k_1}[\mu_{k_2}(0) + \mu_{k_2}(l_2)]/\sqrt{l_1} + \delta_{0,k_2}[\mu_{k_1}(0) + \mu_{k_1}(l_1)]/\sqrt{l_2},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ есть символ Кронекера.

Подставляя это выражение в (14) и, учитывая соотношения (33), (19), (21) § 3 гл. V, получим:

$$\| G(x, \xi) \|'_{L_1} = \sum_{k_1=1}^{N_1} \mu_{k_1}(x_1)(\mu_{k_1}(0) + \mu_{k_1}(l_1))/\lambda_{k_1} + \\ + \sum_{k_2=1}^{N_2} \mu_{k_2}(x_2)(\mu_{k_2}(0) + \mu_{k_2}(l_2))/\lambda_{k_2} + \\ + Q\varkappa \operatorname{mes}\Gamma \leqslant (l_1 + l_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + Q\varkappa \operatorname{mes}\Gamma = (2Q\varkappa + \frac{\pi^2}{6}(l_1 + l_2). \qquad (15)$$

Покажем теперь, что из неотрицательности $G(x, \xi)$ при выполнении условия (12) следует ее неотрицательность и при выполнении условия (9). Для этого найдем постоянную M, оценивающую абсолютную величину суммы в правой части (11). Учитывая вид функций $\mu_k(x)$ (33) § 3 гл. V, получим

$$\left| \sum_{|k|\neq 0} \frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k + d)} \right| \leqslant 4\varkappa \sum_{|k|\neq 0} \lambda_k^{-1}(\lambda_k + d)^{-1}, \qquad (16)$$

а так как на основании (33) и (21) § 3 гл. V

$$\lambda_k \geqslant \frac{4}{l_0^2}(k_1^2 + k_2^2),$$

то

$$\sum_{|k|\neq 0} \lambda_k^{-1}(\lambda_k+d)^{-1} \leqslant (l_0/2)^4 \sum_{|k|\neq 0}^{\infty} |k|^{-4} =$$

$$= (l_0/2)^4 \left[2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} - \frac{1}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty} (1+k^2)^{-2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1,\, k_2=2}^{\infty} (k_1^2+k_2^2)^{-2} \right] \leqslant (l_0/2)^4 \left[\frac{\pi^4}{45} - \frac{1}{4} + 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{dr}{r^3} \right] = (l_0/2)^4 \left[\frac{\pi^4}{45} + \frac{2\pi-1}{2} \right] < l_0^4/4. \qquad (17)$$

Подставляя эту оценку в (16), найдем

$$\left| \sum_{|k|\neq 0} \frac{\mu_k(x)\,\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k+d)} \right| \leqslant \varkappa l_0^4.$$

Постоянная M найдена. Для завершения доказательства воспользуемся полученной оценкой и найдем минимум по d функционала $Q(d)$. Легко проверить, что

$$\min_{d>0} Q(d) = 2l_0^2.$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Решение задачи* (1)—(3) *существует, единственно и для него справедливая априорная оценка*

$$\|y\|_C \leqslant 2l_0^2\|\varphi\|_C + (4l_0^2\varkappa + \frac{\pi^2}{6})(l_1+l_2)\|g\|'_C + \varkappa|[y,\ 1]|.$$

Доказательство. Существование и единственность решения задачи следует из теоремы 5 предыдущего параграфа, а априорная оценка — из леммы 1 и неравенства (7).

Из теоремы 1 и результатов предыдущего параграфа следует

Теорема 2. *Если при* $k_\alpha(x) \equiv 1$, $d(x) \equiv \varkappa = 0$ *решение задачи* (40), (41), (58), (59) § 1 $u(x) \in C^{(4)}(D)$, *то решение задачи* (1)—(3), *правые части которой вычисляются согласно теореме* 9 1, *равномерно сходится к решению аппроксимируемой задачи со скоростью* $O(|h|^2)$, *т. е.*

$$\|y-u\|_C \leqslant M|h|^2,$$

где M — *положительная постоянная, не зависящая от* $|h|$.

ДОПОЛНЕНИЕ I

АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ (НЕСОГЛАСОВАННАЯ СЕТКА)

В п. 5 § 3 гл. IV была построена аппроксимация указанного граничного условия для уравнения Пуассона на специально построенной (согласованной) сетке. Здесь мы рассмотрим аппроксимацию граничного условия третьего рода для уравнения Пуассона на криволинейной границе в наиболее общем случае, т. е. на сетке, которая не является согласованной. Построение сеточной аппроксимации граничного условия и уравнения вблизи границы проведем при помощи мегода Ритца.

Пусть в области G с границей Γ ищется решение задачи

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa(x)\, u - g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

где функция $\varkappa(x) \geqslant 0$ при $x \in \Gamma$ и $\varkappa(x) \not\equiv 0$. Нахождение решения задачи (1) эквивалентно отысканию функции $u(x) \in W_2^1(G)$, минимизирующей следующий функционал:

$$I(u) \equiv \frac{1}{2} \int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_\Gamma \varkappa u^2\, ds - \\ - \int_G f(x)\, u(x)\, dx - \int_\Gamma g(x)\, u(x)\, ds. \tag{2}$$

Покроем плоскость Ox_1x_2 прямоугольной равномерной сеткой

$$\Omega = \left\{ x = (x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha i_\alpha,\ \ i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \alpha = 1,2 \right\}.$$

Каждую прямоугольную ячейку

$$G[i] = \left\{ x = (x_1,\ x_2) \,\middle|\, x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)},\ \alpha = 1,2 \right\}$$

разделим диагональю, образующей угол $\operatorname{arctg} h_2/h_1$ с осью Ox_1, на два треугольника. Как и в п. 2 § 2 гл. IV, обозначим через $\overline{G}_h$ наименьшее объединение указанных треугольников, содержащее G, а в качестве конечномерного подпространства V пространства $W_2^1(G)$ возьмем пространство функций, непрерывных на $\overline{G}_h$ и линейных над каждым треугольником. Пусть $\overline{\omega} = G_h \cap \Omega$ — сетка для задачи (1), $\omega = \overline{\omega} \cap G$ — множество внутренних узлов сетки, а $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$ — множество граничных узлов. Обозначим $\mathfrak{M} = \{ i = (i_1,\ i_2) \mid x_i \in \omega \}$.

Приближенное решение задачи (1) будем искать в виде

$$\bar{u}(x)=\sum_{j\in\mathfrak{M}} y_j\eta_j(x), \qquad j=(j_1, j_2), \tag{3}$$

где $\{\eta_j\}$ — базис пространства V, элементы $\eta_j(x)$ которого задаются соотношением (16) § 2 гл. IV.

Как обычно, подставим соотношение (3) в функционал (2), продифференцируем полученное выражение по y_j и результат приравняем нулю. В результате получим систему уравнений

$$\sum_{j\in\mathfrak{M}} A_i^j y_j=\Phi_i, \qquad i\in\mathfrak{M}, \tag{4}$$

где коэффициенты системы вычисляются согласно формуле

$$A_i^j=\int\limits_G\left[\frac{\partial\eta_i}{\partial x_1}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_1}+\frac{\partial\eta_i}{\partial x_2}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_2}\right]dx+\int\limits_\Gamma \varkappa\eta_i\eta_j\,ds, \tag{5}$$

а элементы правой части — согласно формуле

$$\Phi_i=\int\limits_G f\eta_i\,dx+\int\limits_\Gamma g\eta_i\,ds. \tag{6}$$

Вычислим коэффициенты A_i^j и правые части Φ_i для i, отвечающих граничным узлам γ и некоторым внутренним узлам ω, прилегающим к границе. Чтобы иметь возможность довести вычисления до конца, будем предполагать прямолинейность границы в окрестности рассматриваемого узла. Более того, предположим для простоты, что на рассматриваемом участке границы $\varkappa(x)=0$.

Пусть $x_i\in\omega$, а $x_{i'}\in\gamma$, где $i'=(i_1+1, i_2)$. Будем считать, что узел x_i находится в начале координат, т. е. $i_1=i_2=0$, и граница Γ в окрестности этого узла задается уравнением

$$\frac{x_1}{\theta_1 h_1}+\frac{x_2}{\theta_2 h_2}=1, \tag{7}$$

где $0<\theta_1, \theta_2<1$.

Вычислим коэффициенты и правые части уравнений (4) для внутреннего узла $(0, 0)$ и граничного узла (h_1, h_2). Перенумеруем интересующие нас в дальнейшем узлы следующим образом: 0 — узел с координатами $(0, 0)$, 1 — узел $(h_1, 0)$, 2 — узел $(0, h_2)$, 3 — узел $(-h_1, 0)$, 4 — узел $(0, -h_2)$ и 5 — узел (h_1, h_2). Подставляя в (5) выражения производных $\partial\eta_i/\partial x_\alpha$ из (20) § 2 гл. IV и принимая во внимание, что координаты точек пересечения границы, задаваемой уравнением (7), с прямыми $x_1/h_1-x_2/h_2=0$ и $x_1/h_1-x_2/h_2=\mp 1$ суть соответственно

$$\left(\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_1, \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_2\right), \left(-\frac{\theta_1(1-\theta_2)}{\theta_1+\theta_2}h_1, \frac{(1+\theta_1)\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_2\right),$$
$$\left(\frac{\theta_1(1+\theta_2)}{\theta_1+\theta_2}h_1, -\frac{(1-\theta_1)\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_2\right),$$

находим коэффициенты уравнений.

Для точки 0:

$$A_0^1 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1(1+2\theta_2)}{\theta_1+\theta_2}, \quad A_0^2 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{\theta_2(1+2\theta_1)}{\theta_1+\theta_2},$$

$$A_0^3 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1+2\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1\theta_2^3}{\theta_1+\theta_2},$$

$$A_0^4 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{2\theta_1+\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1^3\theta_2}{\theta_1+\theta_2},$$

$$A_0^0 = -(A_0^1+A_0^2+A_0^3+A_0^4).$$

Для точки 5:

$$A_5^1 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{\theta_1^3\theta_2}{\theta_1+\theta_2}, \quad A_5^2 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1\theta_2^3}{\theta_1+\theta_2}, \quad A_5^5 = -(A_5^1+A_5^2).$$

Подставляя в (6) выражения $\eta_l(x)$ (16) § 2 гл. IV, находим

$$\Phi_0 = \int\limits_{G\cap\bar{G}[0]} f(x)\,\eta_0(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} g(x)\,\eta_0(x)\,ds,$$

$$\Phi_5 = \int\limits_{G\cap\bar{G}[5]} f(x)\,\eta_5(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} g(x)\,\eta_5(x)\,ds.$$

Если в рассматриваемой окрестности точки 0 функции $f(x)$ и $g(x)$ постоянны, то

$$\Phi_0 = f\frac{h_1h_2}{6(\theta_1+\theta_2)^2}[3(\theta_1+\theta_2)^2+6\theta_1\theta_2(\theta_1+\theta_2)+\theta_1^3\theta_2^3(\theta_1+\theta_2)-$$

$$-2\theta_1^3\theta_2^3(\theta_1^3+\theta_2^3)] + g\frac{\sqrt{h_1^2\theta_1^2+h_2^2\theta_2^2}}{\theta_1+\theta_2}\left(1-\frac{\theta_1\theta_2}{2}\right),$$

$$\Phi_5 = f\frac{h_1h_2}{6}\frac{\theta_1^3\theta_2^3}{\theta_1+\theta_2} + g\frac{\sqrt{h_1^2\theta_1^2+h_2^2\theta_2^2}}{2(\theta_1+\theta_2)}\theta_1\theta_2.$$

Подставляя найденные коэффициенты и правые части в (4), получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{h_1}\left[\frac{\theta_1(1+2\theta_2)}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_1-y_0}{h_1} - \frac{\theta_1+2\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1\theta_2^3}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_0-y_3}{h_1}\right] +$$

$$+\frac{1}{h_2}\left[\frac{\theta_2(1+2\theta_1)}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_2-y_0}{h_2} - \frac{\theta_2+2\theta_1+2\theta_1\theta_2-\theta_1^3\theta_2}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_0-y_4}{h_2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{h_1h_2}\Phi_0,$$

$$\frac{h_2}{2}\frac{\theta_1\theta_2^3}{\theta_1+\theta_2}\frac{y_5-y_2}{h_1} + \frac{h_1}{2}\frac{\theta_1^3\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\frac{y_5-y_1}{h_2} = -\Phi_5.$$

ДОПОЛНЕНИЕ 2

ОЦЕНКА СЛЕДА ПРОИЗВЕДЕНИЯ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

При доказательстве сеточного аналога неравенства Корна в случае, когда вектор-функция $y = (y_1(x), y_2(x))$ обращается в нуль лишь на трех сторонах сеточного прямоугольника, мы столкнулись

с необходимостью уметь оценивать

$$\sum_{x_1 \in \omega_1^+} \frac{y_1 + y_1^{(-1_1)}}{2} y_{2\bar{x}_1} h_1$$

при фиксированном значении $x_2 \in \bar{\omega}_2$. Интересующую нас оценку дает

Теорема 6. *Для любой пары сеточных функций $u(x)$ и $v(x)$, заданных на равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ и обращающихся в нуль при $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$, справедливо неравенство*

$$\left\| \sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 \frac{u(x) + u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1} \right\|_{C(\bar{\omega}_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \varepsilon_1 \| u_{\bar{x}_2} \|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \| u_{\bar{x}_1} \|_0^2 \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \varepsilon_2 \| v_{\bar{x}_2} \|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \| v_{\bar{x}_1} \|_0^2 \right\}^{1/2}, \qquad (1)$$

где ε_1 и ε_2 — произвольные положительные постоянные.

Доказательство проведем в три этапа. На первом этапе докажем, что неравенство (1) следует из аналогичного неравенства для функций непрерывного аргумента, т. е. из неравенства

$$\sup_{0 \leqslant y_2 \leqslant l_2} \left| \int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \varepsilon_1 \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} \right\|_{L_2(\bar{D})}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} \right\|_{L_2(\bar{D})}^2 \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \varepsilon_2 \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \right\|_{L_2(\bar{D})}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \right\|_{L_2(\bar{D})}^2 \right\}^{1/2}. \qquad (2)$$

Затем установим оценку

$$\left| \int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} dy_1 \right| \leqslant \| \tilde{u} \|_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]} \| \tilde{v} \|_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]}, \qquad (3)$$

где $\| \cdot \|_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]}$ — некоторая норма, определяемая ниже. Завершим доказательство теоремы получением для функции $\tilde{u}(y)$ и $\tilde{v}(y)$ оценок вида

$$\sup_{0 \leqslant y_2 \leqslant l_2} \| \tilde{w}(y) \|_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]}^2 \leqslant \varepsilon \left\| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_2} \right\|_{L_2(\bar{D})}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \left\| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_1} \right\|_{L_2(\bar{D})}^2, \qquad (4)$$

где ε — любое положительное число.

Реализуем намеченный план. 1) Пусть $\bar{D} = \{y = (y_1, y_2) | 0 \leqslant y_\alpha \leqslant l_\alpha; \alpha = 1, 2\}$ — прямоугольник, а $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ — сетка в прямоугольнике D,

где $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha = h_\alpha i_\alpha \mid i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha;\ N_\alpha = l_\alpha/h_\alpha\}$. Разобьем прямоугольник $\bar{D}$ прямыми $y_\alpha = h_\alpha i_\alpha$ и $y_2 = \frac{h_2}{h_1} y_1 + h_1 i_1$, где $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, на равные прямоугольные треугольники, вершинами которых являются узлы сетки $\bar{\omega}$. По сеточным функциям $u(x)$ и $v(x)$, $x \in \bar{\omega}$, построим их кусочно-линейные восполнения $\tilde{u}(y)$ и $\tilde{v}(y)$, т. е. такие непрерывные функции, которые линейны над каждым из указанных выше треугольников и совпадают с $u(x)$ и $v(x)$ при $y = x \in \bar{\omega}$. Производные построенных функций $\partial\tilde{u}/\partial y_\alpha$ и $\partial\tilde{v}/\partial y_\alpha$ кусочно-постоянны, и поэтому

$$\left\| u_{\bar{x}_\alpha} \right\|_0^2 = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_\alpha} \right)^2 dy_1 dy_2, \quad \left\| v_{\bar{x}_\alpha} \right\|_0^2 = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_\alpha} \right)^2 dy_1 dy_2. \tag{5}$$

Далее,

$$\sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 \frac{u(x) + u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1}(x)$$

совпадает с квадратурной формулой трапеций для интеграла

$$\int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1,$$

а так как $\tilde{u}\,\partial\tilde{v}/\partial y_1$ кусочно линейна, то при $y_2 = x_2 \in \bar{\omega}_2$

$$\sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 \frac{u(x) + u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1}(x) = \int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1. \tag{6}$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 \frac{u(x) + u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1}(x) \right\|_{C(\bar{\omega}_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant y_2 \leqslant l_2} \left| \int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1 \right|. \tag{7}$$

Принимая во внимание соотношения (5) — (7), заключаем, что теорема будет доказана, если будет установлено неравенство (2).

2) Докажем теперь неравенство (3). Пусть $w(y_1)$ есть некоторая функция, заданная на отрезке $[0, l_1]$ и обращающаяся в нуль при $y_1 = 0$ и $y_1 = l_1$. Обозначим

$$\|w\|^2_{\overset{\circ}{W}_2^{1/2}[0,\, l_1]} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2 \frac{k\pi}{l_1}, \tag{8}$$

где w_k — коэффициенты Фурье функции $w(y_1)$ при разложении по ортонормированной системе $\left\{\sqrt{2/l_1}\sin\frac{k\pi y_1}{l_1}\right\}_1^\infty$, т. е.

$$w_k=\sqrt{2/l_1}\int_0^{l_1} w(y_1)\sin\frac{k\pi y_1}{l_1}\,dy_1,\quad k=1,2,\ldots$$

При фиксированном $y_2\in[0,\ l_2]$ разложим функции $\tilde{u}(y)$ и $\tilde{v}(y)$ по указанной ортонормированной системе:

$$\tilde{u}(y)=\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k(y_2)\sin\frac{k\pi y_1}{l_1},\quad \tilde{v}(y)=\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{v}_k(y_2)\sin\frac{k\pi y_1}{l_1}.$$

Подставляя это разложение в левую часть неравенства (3) и выполняя простые вычисления, находим, что

$$\int_0^{l_1}\tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}(y)}{\partial y_1}\,dy_1=\frac{2}{l_1}\sum_{\substack{p,\ q=1\\ p\neq q}}^{\infty}\frac{pq}{p^2-q^2}[1-(-1)^{p+q}]\,\tilde{u}_p(y_2)\,\tilde{v}_q(y_2).$$

Принимая во внимание определение (8) и это соотношение, заключаем, что неравенство (3) будет установлено, если будет доказана ограниченность билинейной формы

$$A(\xi,\ \eta)\equiv\sum_{\substack{p,\ q=1\\ p\neq q}}^{\infty}a_{pq}\xi_p\eta_q, \tag{9}$$

где

$$a_{pq}=\frac{\sqrt{pq}}{p^2-q^2}[1-(-1)^{p+q}],\quad p\neq q, \tag{10}$$

постоянной $\pi/2$, т. е.

$$|A(\xi,\ \eta)|\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2\sum_{q=1}^{\infty}\eta_q^2\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Докажем неравенство (11). Сначала рассмотрим билинейную форму $B(\xi,\ \eta)$, коэффициенты которой определяются соотношениями

$$b_{pq}=\frac{1-(-1)^{p+q}}{p-q},\quad p\neq q,\ b_{pp}=0, \tag{12}$$

и докажем, что она ограничена постоянной π. Для этого введем в рассмотрение билинейную форму $C(\xi,\ \eta)$ с коэффициентами

$$c_{pq}=\frac{1-(-1)^{p+q}}{p+q}$$

и сопряженные формы $B'(\xi,\ \eta)$ и $C'(\xi,\ \eta)$, матрицы коэффициентов B' и C' которых являются сопряженными матрицам коэффициентов

B и C форм $B(\xi, \eta)$ и $C(\xi,\eta)$ соответственно. По формам $B(\xi, \eta)$, $C(\xi, \eta)$ и им сопряженным построим формы $F(\xi, \eta)$ и $G(\xi, \eta)$, матрицы коэффициентов F и G которых являются произведениями матриц B на B' и C на C' соответственно, т. е.

$$f_{pq} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} b_{qk}, \quad q_{pq} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} c_{qk}.$$

Очевидно, что матрицы F и G симметричны и неотрицательны: $F = F'$, $G = G'$, $F(\xi, \xi) \geqslant 0$, $G(\xi, \xi) \geqslant 0$.

Пусть квадратичная $F(\xi, \xi$ формa) ограничена постоянной M^2: $F(\xi, \xi) \leqslant M^2 \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2$. Тогда

$$B(\xi, \eta)| =$$

$$= \left| \sum_{q=1}^{\infty} \eta_q \sum_{p=1}^{\infty} b_{pq} \xi_p \right| \leqslant \left(\sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2 \right)^{1/2} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} b_{pq} \xi_p \right)^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2 \right)^{1/2} \{F(\xi, \xi)\}^{1/2} \leqslant M \left(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2 \sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2 \right)^{1/2}, \quad (13)$$

т. е. из ограниченности квадратичной формы $F(\xi, \xi)$ постоянной M^2 следует ограниченность билинейной формы $B(\xi, \eta)$ постоянной M, и поэтому достаточно доказать ограниченность $F(\xi, \xi)$. Далее, так как $G(\xi, \xi) \geqslant 0$, то $F(\xi, \xi) \leqslant F(\xi, \xi) + G(\xi, \xi) = H(\xi, \xi)$.

Оценим квадратичную форму $H(\xi, \xi)$. Сначала вычислим ее коэффициенты:

$$h_{pp} = f_{pp} + g_{pp} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (b_{pk}^2 + c_{pk}^2) = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (-1)^{p+k}]^2 \left[\frac{1}{(p+k)^2} + \frac{1}{(p-k)^2} \right] =$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1 - (-1)^{p+k}] \frac{1}{(p+k)^2} - 2[1 - (-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

Делая замену индекса суммирования $p + k = k'$ и опуская штрих, получим, что

$$h_{pp} = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1 - (-1)^k] \frac{1}{k^2} - 2[1 - (-1)^p] \frac{1}{p^2} =$$

$$= 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - 2[1 - (-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

Известно *), что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\ \text{и поэтому}\ h_{pp}=\pi^2-2\left[1-(-1)^p\right]\frac{1}{p^2}.$$

При $p\neq q$

$$h_{pq}=\sum_{k=1}^{\infty}(b_{pk}b_{qk}+c_{pk}c_{qk})=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-(-1)^{p+k}\right]\left[1-(-1)^{q+k}\right]\left[\frac{1}{(p+k)(q+k)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(p-k)(q-k)}\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^{p+k}\right]\left[1-(-1)^{q+k}\right]}{(p+k)(q+k)}-$$

$$-\frac{\left[1-(-1)^p\right]\left[1-(-1)^q\right]}{pq}=\bar{h}_{pq}-\frac{\left[1-(-1)^p\right]\left[1-(-1)^q\right]}{pq}.$$

Исследуем $\bar{h}_{pq}$:

$$\bar{h}_{pq}=\frac{1}{p-q}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[1-(-1)^{p+k}\right]\left[1-(-1)^{q+k}\right]\left[\frac{1}{q+k}-\frac{1}{p+k}\right]=$$

$$=-\frac{4}{p-q}\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right], & \text{если } p \text{ и } q-\text{четные},\\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k}-\frac{1}{p+2k}\right], & \text{если } p \text{ и } q-\text{нечетные},\\ 0, & \text{если } p+q \text{ — нечетное}.\end{cases}$$

Изучим каждую сумму в отдельности:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right]=$$

$$=\lim_{K\to\infty}\sum_{k=-K}^{K}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right].$$

*) Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., «Наука», 1971, Формула 0. 234. 2.

Допредельное выражение можно записать в виде

$$\sum_{k=-K}^{K}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right]=$$

$$=\sum_{i=-K}^{K}\frac{1}{q+2i-1}-\sum_{j=-K}^{K}\frac{1}{p+2j-1}=h_{pq}^{(1)}(K).$$

Так как p и q — четные числа, то в каждом из сумм можно сделать замену индекса суммирования: $q+2i=2k$, $p+2j=2k$. В результате получим

$$h_{pq}^{(1)}(K)=\sum_{k=-K+q/2}^{K+q/2}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=-K+p/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}.$$

При $|p|$, $|q|<K$ и $p<q$

$$h_{pq}^{(1)}(K)=\sum_{k=-K+q/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=K+1+p/2}^{K+q/2}\frac{1}{2k-1}-$$

$$-\sum_{k=-K+p/2}^{-K-1+q/2}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=-K+q/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}=$$

$$=\sum_{k=K+1+p/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=-K+p/2}^{-K-1+q/2}\frac{1}{2k-1}.$$

Отсюда находим, что при $p<q$ и $|p|$, $|q|<K$

$$|h_{pq}^{(1)}(K)|\leqslant\frac{|p-q|}{2K+1-|p|},$$

и, следовательно, при $p<q$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right]=\lim_{K\to\infty}h_{pq}^{(1)}(K)=0.$$

Аналогично устанавливается равенство нулю этой суммы и при $p>q$, а также равенство нулю суммы

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k}-\frac{1}{p+2k}\right].$$

Итак, $\bar{h}_{pq}=0$ и, следовательно,

$$h_{pq}=-\frac{[1-(-1)^p][1-(-1)^q]}{pq}.$$

Тем самым,

$$H(\xi,\ \xi)=\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2-\sum_{p,\ q=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^p]\,[1-(-1)^q]}{pq}\,\xi_p\xi_q=$$

$$=\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2-4\sum_{p,\ q=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}\,\xi_{2q-1}}{(2p-1)\,(2q-1)}.$$

Но

$$\sum_{p,\ q=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}\,\xi_{2q-1}}{(2p-1)\,(2q-1)}=\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}}{2p-1}\right)^2\geqslant 0$$

и, следовательно,

$$H(\xi,\ \xi)\leqslant\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2.$$

Отсюда и из (13) получаем оценку

$$|B(\xi,\ \eta)|=\left|\sum_{\substack{p,\ q=1\\ p\neq q}}^{\infty}\frac{1-(-1)^{p+q}}{p-q}\xi_p\eta_q\right|\leqslant\pi\left(\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2\sum_{q=1}^{\infty}\eta_q^2\right)^{1/2}. \quad (14)$$

Прежде чем переходить к доказательству неравенства (11), введем в рассмотрение еще одну квадратичную форму:

$$S(\xi,\ \xi)=\sum_{p,\ q=1}^{\infty}\frac{\xi_p\xi_q}{p+q}. \quad (15)$$

Так как $\dfrac{1}{p+q}=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-(p+q)t}\,dt$, то

$$S(\xi,\ \xi)=\lim_{n\to\infty}\sum_{p,\ q=1}^{n}\frac{\xi_p\xi_q}{p+q}=\int_0^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\xi_pe^{-pt}\right)^2dt\geqslant 0,$$

т. е. квадратичная форма $S(\xi,\ \xi)$ неотрицательна. Полагая в (15) $\xi_p=\sqrt{p}\,\xi'_p$, убеждаемся в том, что квадратичная форма

$$T(\xi,\ \xi)=\sum_{p,\ q=1}^{\infty}t_{pq}\,\xi_p\xi_q,\qquad t_{pq}=\frac{\sqrt{pq}}{p+q},$$

также неотрицательна. Пусть n — некоторое натуральное число и

$$T_n(\xi,\ \xi)=\sum_{p,\ q=1}^{n}t_{pq}\,\xi_p\xi_q,\qquad t_{pq}=\frac{\sqrt{pq}}{p+q}. \quad (16)$$

По доказанному квадратичная форма $T_n(\xi, \xi)$ неотрицательна, и, следовательно, из ее матрицы можно извлечь квадратный корень $T_n^{1/2} = U_n$. Пусть u_{pq} — элементы матрицы U_n. Тогда

$$t_{pq} = \sum_{r=1}^{n} u_{rp} u_{rq}. \tag{17}$$

Рассмотрим билинейную форму

$$A_n(\xi, \eta) = \sum_{\substack{p, q=1 \\ p \neq q}}^{n} a_{pq} \xi_p \eta_q,$$

коэффициенты которой определяются соотношениями (10). При $n \to \infty$ эта билинейная форма переходит в интересующую нас форму (9). Из (10), (12), (16) и (17) следует, что

$$a_{pq} = b_{rq} t_{rq} = b_{pq} \sum_{r=1}^{n} u_{rp} u_{rq},$$

т. е.

$$A_n(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{p, q=1 \\ p \neq q}}^{n} b_{pq} (u_{rp} \xi_p)(u_{rq} \eta_q) = \sum_{r=1}^{n} B_n(u_{rp} \xi_p, u_{rq} \eta_q), \tag{18}$$

где $B_n(\alpha_p, \beta_q) = \sum_{p, q=1}^{n} b_{pq} \alpha_p \beta_q$. На основании (14) билинейная форма $B_n(\alpha_p, \beta_q)$ имеет грань π, и, следовательно,

$$B_n(u_{rp} \xi_p, u_{rq} \eta_q) | \leqslant$$

$$\leqslant \pi \left[\sum_{p=1}^{n} (u_{rp} \xi_p)^2 \sum_{p=1}^{n} (u_{rp} \eta_p)^2 \right]^{1/2} \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} (u_{rp})^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

Используя это неравенство для оценки правой части соотношения (18) и принимая во внимание (17), получим, что

$$| A_n(\xi, \eta) | \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} (u_{rp})^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} t_{pp} (\xi_p^2 + \eta_p^2) \leqslant \frac{\pi}{2} \max_{1 \leqslant p \leqslant n} t_{pp} \sum_{p=1}^{n} (\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

Но из (16) следует, что $\max t_{pp} = 1/2$, и поэтому

$$| A_n(\xi, \eta) | \leqslant \frac{\pi}{4} \sum_{p=1}^{n} (\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

Пусть $\sum_{p=1}^{n} \xi_p^2 = \sum_{p=1}^{n} \eta_p^2 = 1$. Тогда $|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \pi/2$. Полагая в $A_n(\xi, \eta)$

$$\xi_p = \xi'_p \Big/ \left(\sum_{p=1}^{n} \xi_p'^2 \right), \quad \eta_p = \eta'_p \Big/ \left(\sum_{p=1}^{n} \eta_p'^2 \right),$$

приходим к следующему неравенству:

$$|A_n(\xi', \eta')| \leqslant \frac{\pi}{2} \left(\sum_{p=1}^{n} \xi_p'^2 \sum_{q=1}^{n} \eta_q'^2 \right)^{1/2}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство (11), из которого следует оценка (3).

3) Нам осталось доказать неравенство (4). Пусть $\tilde{w}(y)$ есть функция, совпадающая либо с $\tilde{u}(y)$, либо с $\tilde{v}(y)$. Согласно определению (8)

$$\| \tilde{w}(y_1, y_2) \|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}[0, l_1]} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{w}_k^2(y_2) \frac{k\pi}{l_1}. \tag{19}$$

Используя теорему 2 § 4 гл. V, легко показать, что

$$\tilde{w}_k^2 \leqslant \varepsilon_k \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial y_2} \right)^2 dy_2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_k} + \frac{1}{l_2} \right) \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2(y_2)\, dy_2.$$

Подставляя эту оценку в правую часть соотношения (19) и полагая $\varepsilon_k k\pi / l_1 = \varepsilon$, получим, что

$$\| \tilde{w}(y_1, y_2) \|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1/2}[0, l_1]} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial y_2} \right)^2 dy_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{l_2 k\pi} \right) \left(\frac{k\pi}{l_1} \right)^2 \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2(y_2)\, dy_2.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial y_2} \right) dy_2 = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_2} \right)^2 dy_1\, dy_2,$$

а

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{l_2 k\pi} \right) \left(\frac{k\pi}{l_1} \right)^2 \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2(y_2)\, dy_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l_1} \right)^2 \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2(y_2)\, dy_2 = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2} \right) \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_1} \right)^2 dy_1\, dy_2,$$

откуда и следует неравенство (4). Теорема полностью доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К гл. I, § 1. Другие примеры или более подробное изложение рассмотренных примеров задач физики и механики, приводящих к эллиптическим уравнениям, можно найти в книгах [8], [12].

К гл. I, § 2. Более подробные сведения об эллиптических уравнениях и их обобщенных решениях можно почерпнуть из книг [5] и [10].

К гл. II, §§ 1, 2. Материал близкого содержания с более подробным изложением теории однородных разностных схем содержится в книге [11].

К гл. II, § 3. Подробное изложение метода Ритца можно найти в книге [7]. Методы построения разностных схем излагаются в книгах [2], [6], [9], [11].

К гл. III. Разностные аппроксимации уравнения Пуассона и граничных условий для него рассматриваются в книгах [3], [4], [11]. В этих же книгах приводится и изложение принципа максимума.

К гл. V. Другие теоремы вложения и оценки для иных сеточных операторов можно найти в книгах [2], [5], [11].

К гл. VI. Метод энергетических неравенств при исследовании разностных схем широко используется в книгах [2], [5], [11]. В книге [9] проводится исследование вариационно-разностных схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., ИЛ, 1963.
2. Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, вып. I (стационарные задачи), М., Ротапринт ВЦ МГУ, 1971.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, М., Физматгиз, 1962.
4. Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1953,
5. Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., «Наука», 1973.
6. Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, Новосибирск, «Наука», 1973.
7. Михлин С. Г., Вариационные методы математической физики, М., «Наука», 1969.
8. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., «Наука», 1966.
9. Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1 и 2, В сб. «Дифференциальные уравнения и их применение», вып. 5, Вильнюс, Пяргале, 1973; вып. 8, Вильнюс, Пяргале, 1974.
10. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М., Физматгиз, 1961.
11. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., «Наука», 1971.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, М., «Наука», 1972.