МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 13 номер 2 год 2001

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

УДК 519.86

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ

© *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич*

Институт математического моделирования РАН, Москва

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 98-01-00335, 99-01-00958)

Обсуждаются возможности решения задач математической физики на нерегулярных сетках. Как наиболее важная для приложений рассматривается проблема аппроксимации уравнений конвекции-диффузии. Основное внимание уделяется построению разностных схем на треугольных сетках (как наиболее общих неструктурированных сетках). Выделены аппроксимации на сетках (триангуляциях) Делоне, которые обладают оптимальными свойствами.

Основой построения дискретных аналогов является метод баланса (интегро-интерполяционный метод), для которого в настоящее время утвердился (в англоязычной литературе) термин *метод конечного объема.* Конструктивизм такого подхода особенно сильно проявляется при построении разностных схем на нерегулярных сетках. В качестве контрольного объема при триангуляциях Делоне выступают многоугольники Вороного.

DIFFERENCE METHODS FOR SOLVING MATHEMATICAL PHYSICS PROBLEMS ON UNSTRUCTURED GRIDS

A.A.Samarskii, P.N. Vabishchevich

Institute for Mathematical Modeling RAS, Moscow, Russia

In the present work there are discussed possibilities to solve problems of mathematical physics on unstructured grids. The emphasis is on approximation of the convection-diffusion equation as the most important application. The main attention is given to constructing difference schemes on triangular grids (as the most general unstructured grids). Approximations on the grids designed via the Delaunay triangulation are highlighted as the most optimal.

The basis for constructing discrete analogs is the balance method (integro-interpolation approach) which in publications in English is referred to as *the finite volume method.* Positive features of this approach are very attractive in case of unstructured grids. For the Delaunay triangulation we have Voronoi cells as control volumes.

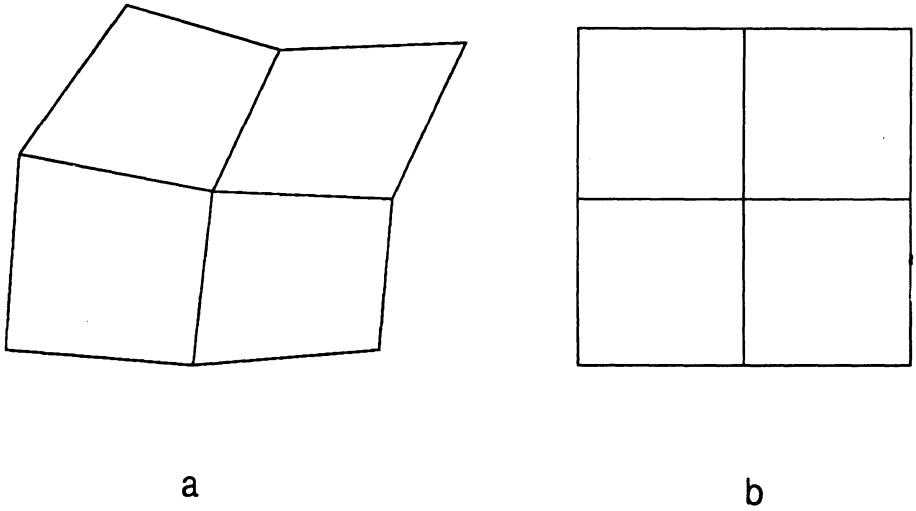

Рис. 1. Топологическое соответствие

1. Структурированные и неструктурированные сетки

При нашем обсуждении в качестве модельных будем рассматривать стационарные и нестационарные двухмерные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии. Приближенное решение краевых задач математической физики в сложных областях проводится с использованием нерегулярных сеток [1]–[4]. Расчетная область Ω предполагается нерегулярной (непрямоугольной, не составленной из прямоугольников). В силу этого приходится использовать непрямоугольные расчетные сетки. Среди нерегулярных сеток выделим два основных класса.

Структурированные сетки. Наиболее важным примером таких сеток являются нерегулярные четырехугольные сетки, которые во многом наследуют (топологически эквивалентны) свойства стандартных прямоугольных сеток.

Неструктурированные сетки. В этом случае шаблон разностной схемы не сохраняет структуру. Нет возможности топологически связать расчетную сетку с регулярной прямоугольной сеткой. В частности, схема пишется в каждой точке с разным числом соседей.

Аппроксимация на структурированных сетках может проводится на основе отмеченной близости этих сеток к стандартным прямоугольным сеткам. Наиболее просто эта ситуация реализуется в рамках использования новых независимых переменных. В этом случае нерегулярная в исходных координатах сетка преобразуется в регулярную в новых независимых координатах (рис.1). Не выделяя каких-либо работ в данном направлении, укажем только на книгу [3], в которой эта технология широко используется.

Вторая возможность не связана с формальным введением новых координат и реализуется на основе аппроксимации исходной задачи на такой нерегулярной сетке. Понятно, что использование простейших подходов для построения разностных схем на основе неопределенных коэффициентов для нерегулярных сеток хотя и возможно, но не является конструктивно оправданным. Отметим некоторые общие подходы к построению разностных схем на таких структурированных нерегулярных сетках.

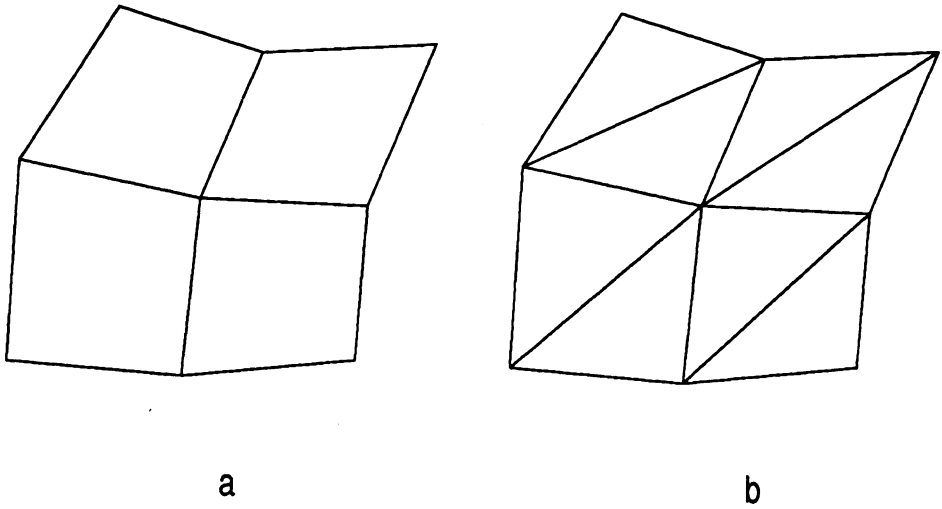

Рис. 2. Триангуляция структурированной сетки

Метод баланса. Это общий подход к построению дискретных аналогов. На его основе строятся схемы для базовых задач математической физики, механики сплошных сред. Метод баланса (интегро-интерполяционный метод) [5, 6] был предложен А.А. Самарским в работе [7] и с середины 50-х годов активно используется в вычислительной практике при численном решении различных прикладных проблем. В настоящее время в англоязычной литературе утвердился термин метод конечного объема (см., например, [8]). Конструктивизм интегро–интерполяционного метода особенно сильно проявляется при построении разностных схем на нерегулярных сетках [2], в задачах с разрывными коэффициентами.

Метод опорных операторов. В этом случае задача формулируется в терминах инвариантных операторов векторного анализа — дивергенция, градиент, ротор. Далее один из них (который и называется опорным) аппроксимируется, а аппроксимации других согласуются с аппроксимацией опорного на основе интегральных соотношений векторного анализа. Наиболее простое описание такого подхода имеется в книге [10], математически более полному описанию посвящена работа [2]. В идейном плане этот подход примыкает к смешанному методу конечных элементов [11], когда исходное эллиптическое уравнение второго порядка записывается в виде системы уравнений первого порядка и в качестве неизвестных выступает само решение и его первые производные.

Схемы метода конечных элементов. Как и для общих неструктурированных сеток так и для структурированных можно строить разностные схемы на основе конечноэлементных аппроксимаций [12]. Например, в исходной нерегулярной четырехугольной сетке (см. рис.2) проведем триангуляцию с помощью диагоналей. В этом случае при использовании линейных элементов шаблон разностной схемы при решении эллиптического уравнения второго порядка остается девятиточечным, но при этом проявляется наиболее важные конструктивные особенности метода конечных элементов.

Преимущества структурированных сеток связаны именно с сохранением канонической структуры соседей для каждого узла сетки, с сохранением шаблона. Это облегчает жизнь, в частности, при программировании, при решении сеточных задач. Проблемы же построения разностных схем на таких сетках не намного легче, чем для общих неструктурированных сеток.

Среди структурированных сеток необходимо выделить важный класс ортогональных сеток. В этом случае действительно проявляются преимущества структурированных сеток перед неструктурированными. В этом случае многие проблемы построения сеточных задач, решения сеточных уравнений принципиально упрощаются. Если необходимо в наибольшей степени использовать преимущества структурированных нерегулярных сеток перед неструктурированными, то лучше ограничиться ортогональными криволинейными сетками. Проблемы генерации сеток не всегда (более того, именно это и является наиболее типичной ситуацией) сложнее решаемых задач. Поэтому лучше тратить усилия (сравнимые с решением поставленной задачи) на оптимизацию расчетной сетки. В сложных расчетных областях имеет смысл использовать многоблочную технология генерации ортогональных сеток [13], базирующуюся на современных CAD-системах.

2. Треугольные сетки

Произвольная сетка генерируется из некоторого множества узлов. Наиболее естественно и просто по этому общему множеству точек определить *триангуляцию* — построить треугольную сетку. Использовать более сложные конструкции неструктурированных сеток чаще всего нет необходимости.

По заданным точкам можно провести триангуляцию различными способами (пример на рис.3). Отметим также, что при любом способе триангуляции для данного набора узлов мы получим одно и тоже число треугольников.

Встает проблема оптимизации триангуляции по каким-то критериям. Основной критерий оптимизации состоит в том, чтобы полученные треугольники, с одной стороны, были блики к равносторонним (не должно быть слишком острых углов). Это локальный критерий, который относится к одному треугольнику. Второй (глобальный) критерий состоит в том, чтобы соседние треугольники не слишком сильно разнились по площади — критерий *равномерности* сетки.

Имеется специальная триангуляция — *триангуляция Делоне*, которая обладает рядом оптимальных свойств. Одно из них заключается в стремлении полученных треугольников к равноугольным. Более точно отмеченное свойство формулируется следующим образом: при триангуляции Делоне максимизируется минимальное значение внутренних углов треугольников. Более полное обсуждение свойств триангуляции Делоне и связанных проблем можно найти в обзорах [14, 15]. Формальное определение триангуляции Делоне (см., например, [16]) связывается со свойством, что для каждого треугольника все другие узлы лежат вне описанной окружности. Для нашего дальнейшего изложения очень важна связь триангуляции Делоне с *диаграммной (разбиением) Вороного.*

Многоугольником Вороного для отдельного узла будет множество точек, которые лежат ближе к этому узлу, чем ко всем другим. Для двух точек множества определяются полуплоскостью, которая ограничена перпендикуляром к середине отрезка соединяющего эти две точки. Поэтому многоугольником Вороного будет пересечение таких полуплоскостей для всех пар узлов, образованных данным узлом и всеми другими узлами. Подчеркнем, что этот многоугольник всегда выпуклый. Схематично диаграмма Вороного для некоторого набора узлов с выделением отдельного многоугольника Вороного отображена на рис.4.

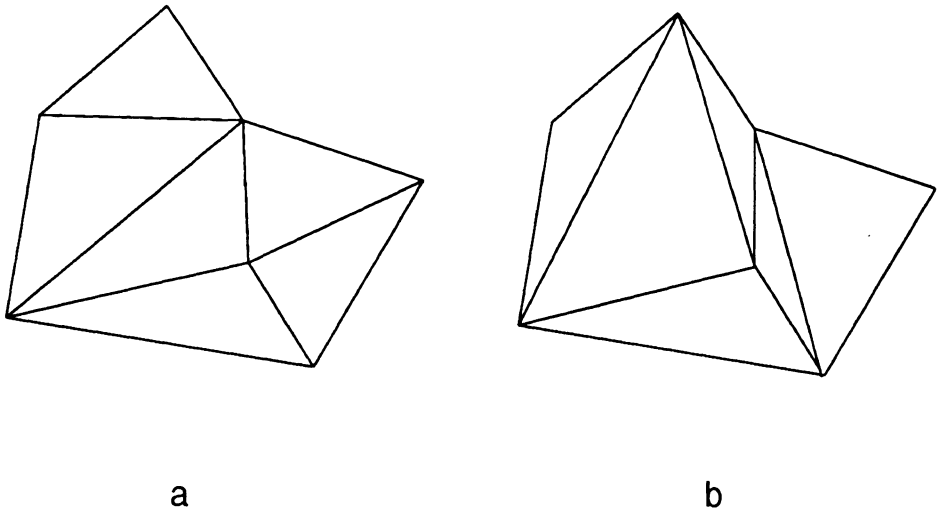

Рис. 3. Неоднозначность триангуляции

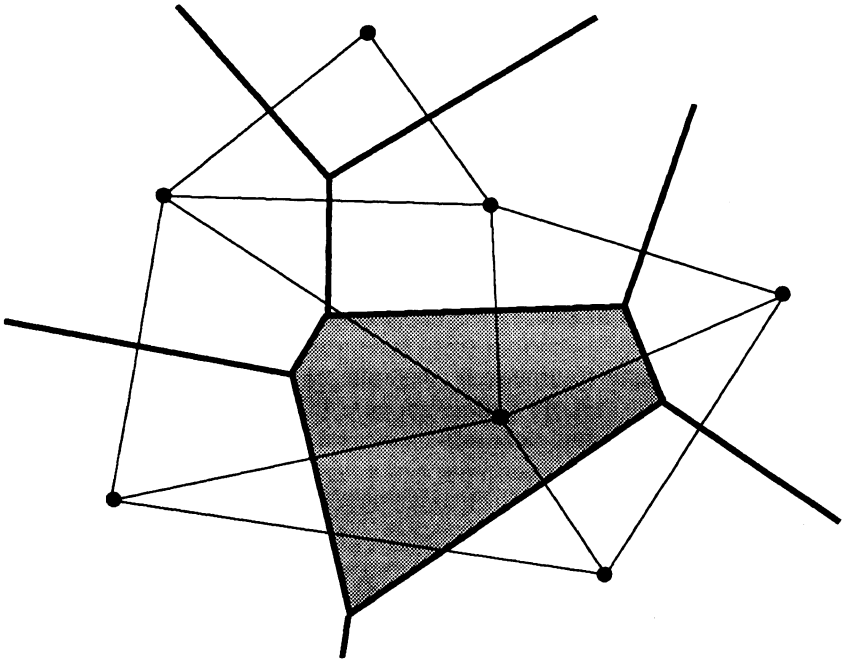

Рис. 4. Триангуляция Делоне и диаграмма Вороного

Каждая вершина многоугольника Вороного является точкой встречи трех многоугольников Вороного. С каждой из этих вершин связывается треугольник, построенный по соответствующим узлам контактирующих многоугольников Вороного. Это есть именно триангуляция Делоне. Тем самым между диаграммой Вороного и триангуляцией устанавливается взаимное соответствие.

При триангуляции Делоне мы получаем оптимальное разбиение расчетной области по заданному множеству узлов. Оптимальное с точки зрения максимилизации минимальных углов треугольников. Триангуляции Делоне соответствует диаграмма Вороного, которая для каждого узла однозначно определяет множество точек области. Это выделение множества точек делается по совершенно прозрачному геометрическому критерию максимальной близости к узлу. Тем самым триангуляция Делоне и диаграмма Вороного полностью определяют (и определяют оптимально и однозначно) расчетную треугольную сетку и контрольный объем.

Триангуляция Делоне активно используется в вычислительной практике при построении схем конечных элементов (см., например, [17]). Имеется также много хорошо проработанных вычислительных методов генерации таких треугольных сеток, доступно и соответствующее программное обеспечение.

3. Разностные схемы на треугольных сетках

Прежде чем переходит к конкретному обсуждению проблем построения разностных схем на треугольных сетках отметим некоторые возможные общие подходы, которые могут найти (и находят) применение.

3.1. Схемы метода конечных элементов

Наиболее простой (с методологической точки зрения) подход к построению дискретных аналогов на треугольных сетках состоит в использовании метода конечных элементов. Другое дело, что не всегда можно ограничиться стандартными вариантами конечноэлементной аппроксимации.

Наиболее широко в вычислительной практике используются кусочно-линейные конечные элементы, которые соответствуют аппроксимации приближенного решения на каждом треугольнике линейной функцией. При этом в задачах конвекции-диффузии мы получаем аналоги схем с центральноразностной аппроксимацией конвективных слагаемых.

При конечноэлементной аппроксимации есть проблемы получения монотонных схем, т.е. схем, для которых выполнен принцип максимума. В теории метода конечных элементом проблема решается использованием не метода Галеркина, а его обобщения — метода Петрова-Галеркина (см., например, [18]). В этом случае пробные функции, из которых конструируется решение, и поверочные, которые дают систему уравнений, различаются. На таком достаточно искусственном пути получаются схемы, имеющие, например, большое сходство со схемами с направленными разностями.

3.2. Метод опорных операторов

В этом подходе (более подробное изложение в [2, 10]) исходная задача формулируется терминах дифференциальных операторов векторного анализа: дивергенция, градиент и ротор. Далее на выбранной сетке аппроксимируется один из этих операторов. Другие операторы уже определяются из некоторых связей интегрального характера между дифференциальными операторами. Этим достигается согласованная аппроксимация операторов, дающая такие свойства как консервативность, сопряженность и т.д.

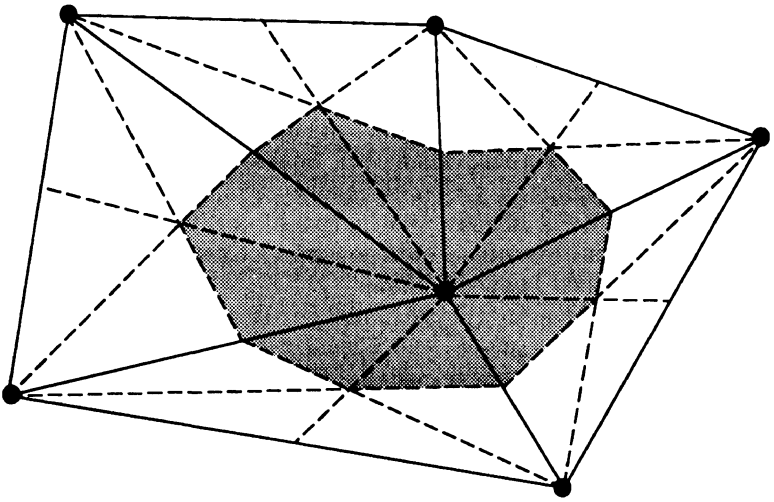

Рис. 5. Контрольный объем, построенный по медианам

Для треугольных расчетных сеток метод опорных операторов развивается, например, в [19]. Основные особенности связаны с заданием множества сеточных функций. Например, решение может аппроксимироваться в узлах треугольной сетки, потоки — в ячейках (ячеечно-узловая) аппроксимация либо в центрах граней ячейки (разнесенные сетки).

3.3. Метод баланса (интегро-интерполяционный метод)

Один из основных подходов к построению разностных схем на нерегулярных сетках является классический интегро-интерполяционный метод. Метод баланса основан на следующих основных положениях. Первое, мы должны задать сетку (определить множество узлов, множество сеточных функций). Второе, для каждого отдельного узла определяется окрестность (контрольный объем) — часть расчетной области, отнесенной к заданному узлу. Третье, разностная схема получается интегрированием исходного уравнения по контрольному объему с некими предположениями о поведении решения. В зависимости от того, как все это делается мы и приходит к тому или иному варианту метода контрольного объема.

При построении разностных схем на треугольной сетке методом контрольного объема естественно задавать сеточные функции в узлах. Это стандартный, но единственный вариант. В качестве альтернативы можно использовать задание сеточных в некоторых точках, связываемых с треугольной ячейкой. Примером может служить задание сеточных функций в вершинах многоугольников Вороного.

Второй неопределенный момент порожден выбором контрольного объема. При триангуляции в качестве контрольного объема во многих работах выбирается часть треугольника, которая выделяется при пересечении медиан (рис.5). В этом случае к каждому из узлов относится равная по площади часть треугольника.

Интересный вариант выбора контрольного объема связан с диаграммой Вороного (см. рис.4). В этом случае к каждому отдельному узлу относится часть всей расчетной области, которая ближе всего расположена к нему (никакого равновеликого разделения треугольников здесь, конечно, нет). Важно, что и в том и в другом случае в качестве критерия выбора контрольного объема положены совершенно прозрачные геометрические требования: в первом случае — разделение треугольника на три равновеликие части, во втором — геометричаская близость точек расчетной области.

Среди плюсов разделения медианами отметим, что оно проводиться для произвольного разбиения на треугольники, не ограничиваясь триантуляцией Делоне. Преимущества разбиения Вороного представляются более весомыми и связаны с ортогональностью сторон треугольника к граням многоугольников Вороного.

Эвристические соображения в пользу многоугольников Вороного связаны с идеей глобализации (оптимизации) сетки и контрольных объемов — оптимизация для всех узлов, а не для отдельного треугольника.

Метод баланса при использовании треугольных сеток необходимо реализовывать на триангуляции Делоне при выборе многоугольников Вороного в качестве контрольного объема. Это наиболее естественная процедура, позволяющая наиболее просто строить разностные схемы с использованием оптимизированных треугольных сеток.

4. Сетки

Будем считать, что расчетная область представляет собой выпуклый многоугольник Ω с границей $\partial\Omega$. Для точек области используем обозначения $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$.

В области $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$ введена сетка $\overline{\omega}$, состоящая из узлов $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, причем углы многоугольника Ω являются узлами. Пусть ω — множество внутренних, а $\partial\omega$ — множество граничных узлов, т.е. $\omega = \overline{\omega} \bigcap \Omega$, $\partial\omega = \overline{\omega} \bigcap \partial\Omega$.

С каждым узлов $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, свяжем контрольный объем Ω_i как определенную часть расчетной области. В качестве контрольного объема выбираются многоугольники Вороного или их часть, принадлежащая Ω. Многоугольником Вороного для отдельного узла будет множество точек, которые лежат ближе к этому узлу, чем ко всем другим. Для двух точек множества определяются полуплоскостью, которая ограничена перпендикуляром к середине отрезка соединяющего эти две точки. С каждой из вершин многоугольника Вороного связывается треугольник, построенный по соответствующим узлам контактирующих многоугольников Вороного. Эти треугольники определяют триангуляцию Делоне.

Контрольные объемы покрывают всю расчетную область, так что

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} \overline{\Omega}_i, \quad \overline{\Omega}_i = \Omega_i \bigcup \partial\Omega_i, \quad \Omega_i \bigcap \Omega_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i,\ j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для общих граней контрольных объемов используем обозначения

$$\partial\Omega_i \bigcap \partial\Omega_j = \Gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad i,\ j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для узла i определим множество соседних узлов $\mathcal{W}(i)$, для которых контрольные объемы имеют общие грани с контрольным объемом для узла i, т.е.

$$\mathcal{W}(i) = \{j \mid \partial\Omega_i \bigcap \partial\Omega_j \neq \emptyset,\ j = 1, 2, \ldots, M\}, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Введем также обозначения

$$V_i = \int_{\Omega_i} d\mathbf{x}, \quad l_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} d\mathbf{x}, \quad i,\ j = 1, 2, \ldots, M,$$

для площади контрольного объема и длины ребра многоугольника Вороного соответственно.

5. Задачи конвекции-диффузии

В качестве модельных рассматриваются стационарные краевые задачи конвекционно-диффузионного переноса. В области Ω ищется решение уравнения конвекции-диффузии в недивергентной (характеристической) форме

$$\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{5.1}$$

которое дополняется простейшими граничными условиями

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{5.2}$$

В качестве основного рассматривается также уравнение конвекции-диффузии в дивергентной (консервативной) форме:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) u) - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{5.3}$$

И наконец, будем отдельно исследовать случай, когда решение определяется из уравнения конвекции-диффузии в симметричной форме:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} + \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) u) \right) - \tag{5.4}$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

На множестве функций $u(\mathbf{x})$, удовлетворяющих граничным условиям (5.2), стационарную задачу конвекции-диффузии запишем в виде операторного уравнения

$$\mathcal{A}u = f, \quad \mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{D}. \tag{5.5}$$

Здесь $\mathcal{D}$ — оператор диффузионного переноса, который определяется выражением

$$\mathcal{D}u = - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \right). \tag{5.6}$$

Оператор конвективного переноса $\mathcal{C}$ в соответствии с (5.1),(5.3),(5.4) записывается в различных формах. Для оператора конвективного переноса в недивергентной форме в соответствии с (5.1) положим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$, где

$$\mathcal{C}_1 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}. \tag{5.7}$$

Аналогично из (5.3) имеем $C = C_2$, где теперь

$$C_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) u). \tag{5.8}$$

С учетом (5.4) оператор конвективного переноса в симметричной форме имеет вид

$$C = C_0 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2),$$

причем

$$C_0 u = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} + \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) u) \right). \tag{5.9}$$

Решение дискретной задачи должно наследовать основные свойства дифференциальной задачи. Это обеспечивается, когда сеточные операторы будут иметь те же основные свойства, что и дифференциальные операторы [20].

6. Разностные операторы

Определим расстояние между узлами $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j$

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \left[\sum_{\alpha=1}^{2} (x_i^{(\alpha)} - x_j^{(\alpha)})^2 \right]^{1/2}$$

и середину отрезка, соединяющего эти узлы:

$$\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)}), \quad x_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(x_i^{(\alpha)} + x_j^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2.$$

Будем, для простоты, рассматривать случай, когда коэффициенты уравнения конвекции–диффузии и само решение достаточно гладкие. Для разностного оператора диффузионного переноса интегро–интерполяционным методом получим представление

$$(Dy)_i = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{6.10}$$

Будем относить нормальную компоненту скорости к середине отрезка, соединяющего узлы сетки. При использовании обозначений

$$b_{ij} = (\mathbf{v}, \mathbf{n})(\mathbf{x}_{ij})$$

для разностного оператора конвективного переноса методом баланса получим

$$(C_2 y)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} \frac{y_j + y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{6.11}$$

Разностные операторы конвективного переноса в недивергентной и симметричной формах не очень удобны строить на основе прямого использования метода баланса. Отметим возможность согласования аппроксимаций операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах, которая понимается в том

смысле, что один разностный оператор совпадает с другим в случае, когда соответствующее разностное условие несжимаемости имеет место.

На основе метода баланса определим разностный оператор дивергенции соотношением

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v} = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{6.12}$$

Из (6.11) и (6.12) непосредственно следует

$$(C_1 y)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} \frac{y_j - y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{6.13}$$

Для оператора конвективного переноса в симметричной форме (5.9) получим наиболее компактную аппроксимацию

$$(C_0 y)_i = \frac{1}{2V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} y_j, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{6.14}$$

При построении безусловно монотонных схем необходимо ориентироваться на применение схем с направленными разностями для операторов конвективного переноса.

Выделим положительную и отрицательную составляющие нормальной компоненты скорости, положив

$$b_{ij} = b_{ij}^+ + b_{ij}^-,$$

где

$$b_{ij}^+ = \frac{1}{2}(b_{ij} + |b_{ij}|),$$

$$b_{ij}^- = \frac{1}{2}(b_{ij} - |b_{ij}|).$$

Для разностного оператора конвективного переноса в дивергентном виде получим

$$(C_2 y)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} (b_{ij}^- y_j + b_{ij}^+ y_i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{6.15}$$

Аппроксимация оператора конвективного переноса в недивергентной форме дает

$$(C_1 y)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}^- (y_j - y_i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{6.16}$$

На основе аппроксимаций (6.15), (6.16) строятся монотонные разностные схемы для задач конвекции-диффузии (5.1), (5.2) и (5.2), (5.3).

Основной вывод состоит в следующем. На основе метода баланса построение разностных схем заданного качества для базовых задач математической физики на треугольных сетках проводится легко и просто. Никаких преимуществ метод конечных элементов при этом не имеет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Фрязинов И.В.* О разностных методах аппроксимации задач математической физики // Успехи математических наук. 1976. Т.31. N 6. С.167–197.
2. *Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. и др.* Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Критерий, 1996.
3. *Годунов С.Л., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
4. *Heinrich B.* Finite Difference Methods on Irregular Networks. Berlin: Akademie-Verlag, 1987.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
6. *Самарский А. А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
7. *Самарский А.А.* Уравнения параболического типа и разностные методы их решения / Труды Всесоюзного совещания по дифференциальным уравнениям, 1958. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1960, с.148–160.
8. *Versteeg H. K., Malalaseker W.* An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. Longman Scientific & Technical, 1995.
9. *Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. и др.* Операторные разностные схемы // Дифференциальные уравнения. 1981. Т.17. N 7. С. 1317–1321.
10. *Shashkov M.* Conservative Finite-Difference Methods on General Grids. — Boca Raton: CRC Press, 1996.
11. *Fortin M., Brezzi F.* Mixed and Hybrid Finite Elements Methods. Hardcover: Springer, 1991.
12. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1977.
13. *Chudanov V.V., Aksenova A.E., Pervichko V.A. at all.* Block ortogonal grid generation using CAD system // 8th International Meshing Roundtable. Proceeding. Sandia National Laboratories, 1999. P.179–186
14. *Aurenhammer F.* Voronoi diagrams — A survey of a fundamental geometric data structure // ACM Comput. Surveys. 1991. Vol. 23. P.345–405.
15. *Fortune S.* Voronoi diagrams and Delaunay triangulations // Computing in Euclidean Geometry (Lecture Notes Series of Computing), Vol. 1. World Scientific, 1992. P.193–233.
16. *Ласло М.* Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++. М.: Бином, 1997.
17. *George P.-L., Borouchaki H.* Delaunay Triangulation and Meshing: Application to Finite Elements. Hermes: Paris, 1998.
18. *Morton K.W.* Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems. London: Charman & Hall, 1996.
19. *Арделян Н.В., Космачевский К.В.* Неявный свободно-лагранжев метод расчета двумерных магнитогазодинамических течений // Математическое моделирование. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993, с.25–44.
20. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

Поступила в редакцию 29.10.99.