ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2000, том 40, № 5, с. 726–739

УДК 519.633.6

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ[1)]

© 2000 г. П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский

(125047 Москва, Миусская пл., 4а, Ин-т матем. моделирования РАН)

Поступила в редакцию 15.12.99 г.

Обсуждаются вопросы построения разностных схем на треугольных сетках при приближенном решении задач математической физики в сложных расчетных областях. В качестве расчетной сетки используется триангуляция Делоне, которая обладает оптимальными свойствами. Основой построения дискретных аналогов является метод баланса (интегроинтерполяционный метод) объема. В качестве контрольного объема при триангуляциях Делоне выступают многоугольники Вороного. Для модельного двумерного стационарного уравнения конвекции-диффузии приведены аппроксимации операторов конвективного и диффузионного переноса, которые на дискретном уровне наследуют основные свойства дифференциальных операторов. Рассмотрение проведено для трех основных форм записи конвективных слагаемых: дивергентная, недивергентная и симметричная.

Приближенное решение краевых задач математической физики в сложных областях проводится с использованием нерегулярных сеток [1]–[4]. Расчетная область Ω предполагается нерегулярной (непрямоугольной, не составленной из прямоугольников). В силу этого приходится использовать непрямоугольные расчетные сетки. Среди нерегулярных сеток выделим два основных класса: структурированные и неструктурированные сетки. Наиболее важным примером таких сеток являются нерегулярные четырехугольные сетки, которые подобны (топологически эквивалентны) стандартным прямоугольным сеткам. Аппроксимация на структурированных сетках может проводится на основе отмеченной близости этих сеток к стандартным прямоугольным сеткам. Наиболее просто эта ситуация реализуется в рамках использования новых независимых переменных. Преимущества структурированных сеток связаны именно с сохранением канонической структуры соседей для каждого узла сетки, с сохранением шаблона. Это облегчает жизнь, в частности, при программировании, при решении сеточных задач.

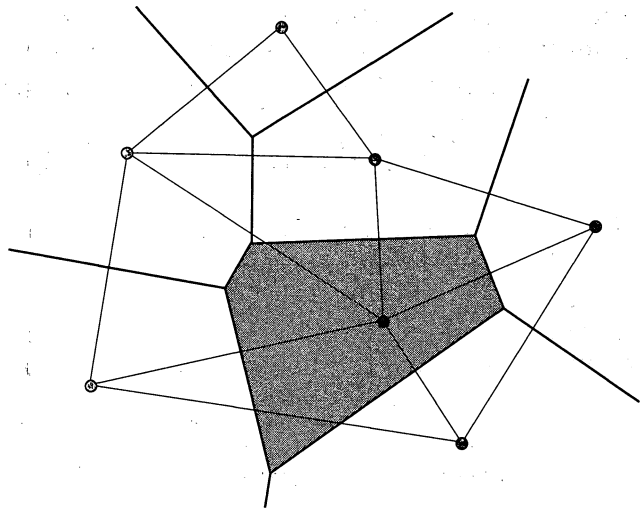
В общем случае (неструктурированные сетки) шаблон разностной схемы не сохраняет структуру. Нет возможности топологически связать расчетную сетку с регулярной прямоугольной сеткой. В частности, схема пишется в каждой точке с разным числом соседей. Произвольная сетка генерируется из некоторого множества узлов. Наиболее естественно и просто по этому общему множеству точек определить триангуляцию – построить треугольную сетку.

По заданным точкам можно провести триангуляцию различными способами. Встает проблема оптимизации триангуляции по каким-то критериям. Основной критерий оптимизации состоит в том, чтобы полученные треугольника, с одной стороны, были близки к равносторонним (не должно быть слишком острых углов). Это локальный критерий, который относится к одному треугольнику. Второй (глобальный) критерий состоит в том, чтобы соседние треугольники не слишком сильно разнились по площади – критерий "равномерности" сетки. Имеется специальная триангуляция – триангуляция Делоне, которая обладает оптимальными свойствами, выражающимися в стремлении полученных треугольников к равносторонним. Более точно отмеченное свойство формулируется следующим образом: при триангуляции Делоне максимизируется минимальное значение внутренних углов треугольников. Полное обсуждение свойств триангуляции Делоне и связанных с этим проблем можно найти в [5]–[7].

При построении дискретных аналогов в качестве основного используется универсальный метод баланса (интегроинтерполяционный метод) [8]. Он был предложен А.А. Самарским в работе [9] и с середины 50-х годов активно используется в вычислительной практике при численном решении различных прикладных проблем. В настоящее время в англоязычной литературе утвердился термин *метод конечного объема* (см., например, [10]). Конструктивизм интегроинтерпо-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-000958).

ляционного метода особенно сильно проявляется при построении разностных схем на нерегулярных сетках [2], [11], в задачах с разрывными коэффициентами.



Фигура.

Построение разностной схемы методом баланса основывается на интегрировании исходного уравнения по контрольному объему – части расчетной области, примыкающей к заданному расчетному узлу. В качестве контрольного объема при триангуляциях Делоне естественно использовать многоугольники Вороного. Многоугольником Вороного для отдельного узла будет множество точек, которые лежат ближе к этому узлу, чем ко всем другим. Для двух точек на плоскости эти множества определяются полуплоскостью, которая ограничена перпендикуляром к середине отрезка, соединяющего эти две точки. Поэтому многоугольником Вороного будет пересечение таких полуплоскостей для всех пар узлов, образованных данным узлом и всеми другими узлами. С каждой из этих вершин многоугольника Вороного связывается треугольник, построенный по соответствующим узлам контактирующих многоугольников Вороного. Это есть именно триангуляция Делоне (см. фигуру). Тем самым между диаграммой Вороного и триангуляцией Делоне устанавливается взаимное соответствие.

В качестве базовой математической модели для задач механики сплошной среды выступают краевые задачи для уравнений конвекции-диффузии, основные особенности которых связаны с несамосопряженностью эллиптического оператора. В книге [12] рассмотрены вопросы построения разностных схем для стационарных и нестационарных уравнений конвекции-диффузии на регулярных прямоугольных сетках. Исследование точности и сходимости разностных схем проводится на основе использования общих результатов теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем при установлении основных свойств операторов конвективного и диффузионного переноса (дифференциальных операторов первого и второго порядка) в соответствующих пространствах сеточных функций.

В данной работе отмечаются наиболее важные проблемы построения разностных схем при использовании треугольных сеток. Разностные схемы строятся на основе метода баланса с использованием триангуляций Делоне и многоугольников Вороного. Основное внимание уделяется свойствам разностных операторов конвективного и диффузионного переноса. Рассмотрены особенности аппроксимаций конвективных слагаемых в дивергентной (консервативной), недивергентной (характеристической) и симметричной формах. Результаты данной работы анонсированны в заметке [13].

1. РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением двумерных задач. Будем считать, что расчетная область представляет собой выпуклый многоугольник Ω с границей $\partial\Omega$. Для точек области используем обозначения $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$.

В области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ введена сетка $\overline{\omega}$, состоящая из узлов $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, причем углы многоугольника Ω являются узлами. Пусть ω – множество внутренних, а $\partial\omega$ – множество граничных узлов, т.е. $\omega = \overline{\omega} \cap \Omega$, $\partial\omega = \overline{\omega} \cap \partial\Omega$.

С каждым узлом $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, свяжем контрольный объем Ω_i как определенную часть расчетной области. В качестве контрольного объема выбираются многоугольники Вороного или их части, принадлежащие Ω. Многоугольником Вороного для отдельного узла будет множество точек, которые лежат ближе к этому узлу, чем ко всем другим. Для двух точек такие множества определяются полуплоскостью, которая ограничена перпендикуляром к середине отрезка, соединяющего эти две точки. С каждой из вершин многоугольника Вороного связывается

треугольник, построенный по соответствующим узлам контактирующих многоугольников Вороного. Эти треугольники определяют триангуляцию Делоне.

Контрольные объемы покрывают всю расчетную область, так что

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} \bar{\Omega}_i, \quad \bar{\Omega}_i = \Omega_i \cup \partial\Omega_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для общих граней контрольных объемов используем обозначения

$$\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \Gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для узла i определим множество соседних узлов $\mathcal{W}(i)$, для которых контрольные объемы имеют общие грани с контрольным объемом для узла i, т.е.

$$\mathcal{W}(i) = \{j | \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \varnothing, j = 1, 2, \ldots, M\}, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Введем также обозначения

$$V_i = \int_{\Omega_i} d\mathbf{x}, \quad l_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} d\mathbf{x}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M,$$

для площади контрольного объема и длины ребра многоугольника Вороного соответственно.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

В качестве модельных рассматриваются стационарные краевые задачи конвекционно-диффузионного переноса. В области Ω ищется решение уравнения конвекции-диффузии в недивергентной (характеристической) форме:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

которое дополняется простейшими граничными условиями

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{2}$$

В качестве основного рассматривается также уравнение конвекции-диффузии в дивергентной (консервативной) форме:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) u) - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{3}$$

И, наконец, будем отдельно исследовать случай, когда решение определяется из уравнения конвекции-диффузии в симметричной форме:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} + \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) u) \right) - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{4}$$

На множестве функций $u(\mathbf{x})$, удовлетворяющих граничным условиям (2), стационарную задачу конвекции-диффузии запишем в виде операторного уравнения:

$$\mathcal{A} u = f, \quad \mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{D}. \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{D}$ – оператор диффузионного переноса, который определяется выражением

$$\mathcal{D} u = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \right). \tag{6}$$

Оператор конвективного переноса $\mathcal{C}$ в соответствии с (1), (3), (4) записывается в различных формах. Для оператора конвективного переноса в недивергентной форме в соответствии с (1)

положим $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1$, где

$$\mathscr{C}_1 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}. \tag{7}$$

Аналогично из (3) имеем $\mathscr{C} = \mathscr{C}_2$, где теперь

$$\mathscr{C}_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) u). \tag{8}$$

С учетом (4) оператор конвективного переноса в симметричной форме имеет вид

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 = \frac{1}{2}(\mathscr{C}_1 + \mathscr{C}_2),$$

причем

$$\mathscr{C}_0 u = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} + \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)}(\mathbf{x}) u) \right). \tag{9}$$

Решение дискретной задачи должно наследовать основные свойства дифференциальной задачи. Это обеспечивается, когда сеточные операторы будут иметь те же основные свойства, что и дифференциальные операторы.

3. ОПЕРАТОР ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА

Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(\Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой

$$(u, w) = \int_\Omega u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \|u\| \equiv (u, u)^{1/2} = \left(\int_\Omega u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

для произвольных функций $u(\mathbf{x})$ и $w(\mathbf{x})$, обращающихся в ноль на $\partial\Omega$.

Оператор диффузионного переноса, определяемый согласно (6), самосопряжен и положительно определен в $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}^* \geq \frac{\kappa}{\mathscr{M}_0} E \tag{10}$$

при $k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0$. Здесь E – тождественный оператор, а $\mathscr{M}_0$ – постоянная в неравенстве Фридрихса

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \mathscr{M}_0 \sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \right)^2 d\mathbf{x},$$

Для сеточных функций $y(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x})$, заданных в узлах $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$ и обращающихся в ноль в граничных узлах $\mathbf{x} \in \partial\omega$, зададим скалярное произведение в $H = L_2(\omega)$ и норму соотношениями

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} V_i y(\mathbf{x}_i) w(\mathbf{x}_i), \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

Определим расстояние между узлами $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j$:

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \left[\sum_{\alpha=1}^{2} (x_i^{(\alpha)} - x_j^{(\alpha)})^2 \right]^{1/2},$$

и середину отрезка, соединяющего эти узлы:

$$\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)}), \quad x_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(x_i^{(\alpha)} + x_j^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2.$$

Будем для простоты рассматривать случай, когда коэффициенты уравнения конвекции-диффузии и само решение достаточно гладкие. Сеточный оператор диффузионного переноса, который относится ко внутреннему узлу $\mathbf{x}_i \in \omega$, определим в соответствии с интегроинтерполяционным методом из интегрирования по контрольному объему Ω_i:

$$Du = (Du)_i \approx \frac{1}{V_i}\int\limits_{\Omega_i} \mathcal{D}u d\mathbf{x}. \tag{11}$$

Для вектора диффузионного потока используем выражение

$$\mathbf{q} = -k(\mathbf{x})\operatorname{grad} u,$$

так что

$$\mathcal{D}u = \operatorname{div}\mathbf{q}.$$

С учетом этого для правой части (11) получим

$$\int\limits_{\Omega_i} \mathcal{D}u dx = \int\limits_{\partial\Omega_i} (\mathbf{q}, \mathbf{n}) d\mathbf{x}, \tag{12}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль.

Разностную аппроксимацию нормальной компоненты потока на грани γ_{ij} обозначим q_{ij}^h и поэтому из (11), (12) для разностного оператора диффузионного переноса получим представление

$$(Dy)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} q_{ij}^h, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{13}$$

Для случая гладких коэффициентов уравнения и самого решения естественно использовать простейшие аппроксимации для потока по нормали в точке $\mathbf{x}_{ij}$:

$$q_{ij}^h = -k(\mathbf{x}_{ij})\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}. \tag{14}$$

Из (13), (14) получим для разностного оператора диффузионного переноса искомое представление

$$(Dy)_i = -\frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} k(\mathbf{x}_{ij})\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{15}$$

Как и при рассмотрении разностных схем на регулярных сетках [9], [12], можно исследовать и другие аппроксимации для потоков. Этот момент особенно важен, в частности, для задач с кусочно-гладкими коэффициентами уравнения.

Для сеточных функций $y_i \equiv y(\mathbf{x}_i) = 0$, $w_i = 0$, $\mathbf{x}_i \in \partial\omega$ имеем

$$(Dy, w) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} q_{ij}^h w_i = -\sum_{\mathbf{x}_i \in \omega}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} k(\mathbf{x}_{ij})\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)} w_i.$$

Этому суммированию по всем граням многоугольников Вороного для всех внутренних узлов можно придать более удобную форму:

$$(Dy, w) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_i \in \omega}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} \frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)} k(\mathbf{x}_{ij})[(y_j - y_i)w_j - (y_j - y_i)w_i] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_i \in \omega}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) k(\mathbf{x}_{ij})\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\frac{z_j - z_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}.$$

Тем самым $(Dy, w) = (y, D^*w)$, т.е. разностный оператор (15) является самосопряженным в H.

В силу

$$(Dy, y) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_i \in \omega}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) k(\mathbf{x}_{ij})\left(\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2, \tag{16}$$

он является также и положительным ($D = D^* > 0$).

Установим теперь разностный аналог леммы Фридрихса. В различных формулировках она доказывается в теории метода конечных элементов [14], при рассмотрении разностных схем на нерегулярных структурированных и неструктурированных сетках [2], [4]. Разностные схемы на основе триангуляции Делоне и диаграммы Вороного имеют некоторые особенности, и поэтому разностный аналог леммы Фридрихса необходимо доказывать отдельно.

Лемма. *Для сеточных функций* $y_i \equiv y(\mathbf{x}_i) = 0$, $\mathbf{x}_i \in \partial\omega$, *имеет место неравенство*

$$\|y\|^2 \le \frac{M_0}{2}\sum_{\mathbf{x}_i \in \omega}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\left(\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2 \tag{17}$$

с постоянной

$$M_0 = l_1^2/16 + l_2^2/16,$$

где l_α, $\alpha = 1, 2$, *– длины сторон прямоугольника с параллельными осям координат сторонами, целиком содержащего многоугольник* Ω.

Доказательство. На множестве сеточных функций $y_i \equiv y(\mathbf{x}_i) = 0$, $\mathbf{x}_i \in \partial\omega$ с учетом (15) определим разностный оператор Лапласа Λ соотношением

$$(\Lambda y)_i = -\frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij}\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{18}$$

Принимая эти обозначения, доказываемому неравенству (17) придадим более компактную форму:

$$\|y\|^2 \le M_0(\Lambda y, y). \tag{19}$$

Для оценки сеточного оператора Лапласа снизу воспользуемся решением вспомогательной краевой задачи (см. [15], [16]). Покажем, что в неравенстве (19) можно положить

$$M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \omega} w(\mathbf{x}), \tag{20}$$

где $w(\mathbf{x})$ – решение задачи

$$\Lambda w = 1, \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{21}$$

В H рассмотрим задачу на собственные значения

$$\Lambda y = \lambda y, \quad \mathbf{x} \in \omega \tag{22}$$

для сеточного оператора $\Lambda = \Lambda^* > 0$. Для задачи (22) справедливо неравенство

$$(\Lambda y, y) \ge \lambda_{\min}\|y\|^2 \tag{23}$$

для всех $y(\mathbf{x})$. Равенство в (23) достигается только для собственных функций $v(\mathbf{x})$, которые соответствуют минимальным собственным значениям $\lambda_{\min}$. Тем самым оценка (19) будет установлена, если мы покажем, что $M_0^{-1} \le \lambda_{\min}$.

Прежде всего поясним, что $v(\mathbf{x})$ является знакопостоянной функцией. Предположим, что это не так и $v(\mathbf{x})$ меняет знак на сетке ω. Рассмотрим теперь функцию $|v(\mathbf{x})|$ и с учетом

$$(\Lambda y, y) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_i \in \omega}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\left(\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2$$

получим

$$\frac{(\Lambda|v(\mathbf{x})|, |v(\mathbf{x})|)}{(|v(\mathbf{x})|, |v(\mathbf{x})|)} < \frac{(\Lambda v(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))}{(v(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))}.$$

Это неравенство противоречит тому, что минимум отношения Рэлея $(\Lambda y(\mathbf{x}), y(\mathbf{x}))(y(\mathbf{x}), y(\mathbf{x}))^{-1}$ достигается при выборе $y(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$.

С учетом $\Lambda v = \lambda_{\min} v$ получим

$$\lambda_{\min} = \frac{(\Lambda v(\mathbf{x}), 1)}{(v(\mathbf{x}), 1)}. \tag{24}$$

Принимая во внимание (21), для знаменателя получаем

$$(v(\mathbf{x}), 1) = (v(\mathbf{x}), \Lambda w(\mathbf{x})) = (w(\mathbf{x}), \Lambda v(\mathbf{x})) \le \max_{\mathbf{x} \in \omega} w(\mathbf{x})(\Lambda v(\mathbf{x}), 1),$$

так как $\Lambda v(\mathbf{x}) \ge 0$, $\mathbf{x} \in \omega$. Тем самым из (24) следует, что $M_0^{-1} \le \lambda_{\min}$, и для постоянной M_0 можно использовать выражение (20).

Далее воспользуемся принципом максимума для сеточных эллиптических уравнений [8]. Поместим многоугольник Ω в прямоугольник

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}) \,|\, a_\alpha \le x^{(\alpha)} \le b_\alpha, \alpha = 1, 2\},$$

причем $l_\alpha = b_\alpha - a_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Рассмотрим функцию

$$W(\mathbf{x}) = -\mu[(x^{(1)} - a_1)(x^{(1)} - b_1) + (x^{(2)} - a_2)(x^{(2)} - b_2)]$$

с некоторой положительной константой μ. Запишем эту функцию в виде

$$W(\mathbf{x}) = -\mu[(x^{(1)} - x_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - x_i^{(2)})^2] + g_i(\mathbf{x}),$$

где $g_i(\mathbf{x})$ – некоторая линейная функция.

Для линейных функций

$$\Lambda g(\mathbf{x}) = 0.$$

Чтобы показать это, достаточно рассмотреть функцию $g(\mathbf{x}) = x^{(1)}$. С учетом (18) получим

$$\Lambda x^{(1)} = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} \frac{x_j^{(1)} - x_i^{(1)}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}.$$

Имеем

$$\frac{x_j^{(1)} - x_i^{(1)}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)} = \cos\varphi_{ji},$$

где φ_{ji} – угол между отрезком $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]$ и осью $Ox^{(1)}$. В этом случае $l_{ij}\cos\varphi_{ji}$ есть проекция j-й грани многоугольника Вороного Ω_i на ось $Ox^{(1)}$. Для замкнутого многоугольника

$$\Lambda x^{(1)} = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} \cos\varphi_{ji} = 0.$$

С учетом этого для функции $W(\mathbf{x})$ непосредственно получим

$$(\Lambda W(\mathbf{x}))_i = \mu(\Lambda d^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i))_i = \frac{\mu}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 4.$$

Поэтому при выборе $\mu = 0.25$ имеем

$$\Lambda W(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

В граничных узлах

$$W(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega,$$

и поэтому функция $W(\mathbf{x})$ является мажорантой для задачи (21). Для постоянной M_0 в неравенстве (17) справедлива оценка

$$M_0 \leq \max_{\mathbf{x} \in \omega} W(\mathbf{x}) = l_1^2/16 + l_2^2/16.$$

Лемма доказана.

Это дает возможность сформулировать основной результат о свойствах разностного оператора диффузионного переноса.

Теорема 1. *Сеточный оператор диффузионного переноса, определяемый из* (15), *удовлетворяет равенству*

$$D = D^* \geq \frac{\kappa}{M_0} E \tag{25}$$

в пространстве $H = L_2(\omega)$.

Принципиально то, что постоянная M_0 в неравенстве Фридрихса (17) не зависит от узлов расчетной сетки, а сама оценка полностью аналогична оценке (10) для дифференциального оператора.

4. ОПЕРАТОРЫ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

Рассмотрим теперь оператор конвективного переноса в различных формах (см. (7)–(9)). Принимая во внимание однородные граничные условия (2), имеем

$$(\mathscr{C}_1 u, w) = \sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega v^{(\alpha)} \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} w d\mathbf{x} = -\sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)} w) u d\mathbf{x} = -(u, \mathscr{C}_2 w).$$

Тем самым устанавливается сопряженность с точностью до знака операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах друг другу, т.е.

$$\mathscr{C}_1^* = -\mathscr{C}_2. \tag{26}$$

В силу (26), оператор конвективного переноса в симметричной форме (9) будет кососимметричным ($(\mathscr{C}_0 u, u) = 0$):

$$\mathscr{C}_0 = -\mathscr{C}_0^*. \tag{27}$$

При выполнении условия несжимаемости среды

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{28}$$

кососимметричными будут и операторы конвективного переноса в недивергентном (7) и дивергентном (8) видах. Принципиальным при построении дискретных аппроксимаций операторов конвективного переноса является то, что свойство кососимметричности для оператора $\mathscr{C}_0$ имеет место для любых $v^{(\alpha)}(\mathbf{x})$, $\alpha = 1, 2$, в том числе и не удовлетворяющих условию несжимаемости (28).

Полезны также оценки сверху для операторов конвективного переноса. Для (7), (8) имеем

$$(\mathscr{C}_1 u, u) = -(\mathscr{C}_2 u, u) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega v^{(\alpha)} \frac{\partial u^2}{\partial x^{(\alpha)}} d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int_\Omega u^2 \operatorname{div}\mathbf{v} d\mathbf{x}$$

и поэтому

$$|(\mathscr{C}_\alpha u, u)| \leq \frac{1}{2} \|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_{C(\Omega)} \|u\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \tag{29}$$

где

$$\|w\|_{C(\Omega)} = \max_{\mathbf{x}\in\Omega}|w(\mathbf{x})|.$$

В силу этого для операторов конвективного переноса, определяемых в соответствии с (7), (8) ($\mathscr{C} = \mathscr{C}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$), имеем

$$|(\mathscr{C}u, u)| \le \mathscr{M}_1\|u\|^2, \tag{30}$$

где постоянная $\mathscr{M}_1$ зависит только от $\operatorname{div}\mathbf{v}$ и, в соответствии с (29)

$$\mathscr{M}_1 = \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_{C(\Omega)}. \tag{31}$$

Приведем также оценки подчиненности оператора конвективного переноса оператору диффузионного переноса:

$$\|\mathscr{C}u\|^2 \le \mathscr{M}_2(\mathscr{D}u, u), \tag{32}$$

с постоянной $\mathscr{M}_2$, зависящей от скорости.

Для недивергентного оператора конвекции (7) имеем

$$\|\mathscr{C}_1u\|^2 = \int_\Omega\left(\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right)^2 d\mathbf{x} \le 2\sum_{\alpha=1}^{2}\int_\Omega (v^{(\alpha)})^2\left(\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right)^2 d\mathbf{x} \le$$

$$\le 2\max_\alpha\{\|(v^{(\alpha)})^2\|_{C(\Omega)}\}\frac{1}{\kappa}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_\Omega k\left(\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right)^2 d\mathbf{x} \le \frac{2}{\kappa}\max_\alpha\{\|(v^{(\alpha)})^2\|_{C(\Omega)}\}(\mathscr{D}u, u),$$

т.е. в неравенстве (32) при $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1$ можем положить

$$\mathscr{M}_2 = \frac{2}{\kappa}\max_\alpha\{\|(v^{(\alpha)})^2\|_{C(\Omega)}\}. \tag{33}$$

Аналогично, при $\mathscr{C} = \mathscr{C}_2$ (см. (8)) получим

$$\|\mathscr{C}_2u\|^2 = \int_\Omega\left(\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} + \operatorname{div}\mathbf{v}u\right)^2 d\mathbf{x} \le 2\int_\Omega\left(\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right)^2 d\mathbf{x} + 2\int_\Omega(\operatorname{div}\mathbf{v})^2u^2 d\mathbf{x}.$$

Принимая во внимание неравенство Фридрихса, получаем при $\mathscr{C} = \mathscr{C}_2$ оценку (32) с

$$\mathscr{M}_2 = \frac{2}{\kappa}\left(2\max_\alpha\{\|(v^{(\alpha)})^2\|_{C(\Omega)}\} + \mathscr{M}_0\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{C(\Omega)}\right). \tag{34}$$

Аналогично, для случая $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0$ имеем

$$\|\mathscr{C}_0u\|^2 = \frac{1}{4}\|\mathscr{C}_1u + \mathscr{C}_2u\|^2 \le \frac{1}{2}\|\mathscr{C}_1u\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathscr{C}_2u\|^2,$$

т.е.

$$\mathscr{M}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(3\max_\alpha\{\|(v^{(\alpha)})^2\|_{C(\Omega)}\} + \mathscr{M}_0\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{C(\Omega)}\right). \tag{35}$$

Приведенные оценки (30), (32) служат ориентиром при исследовании дискретных аналогов операторов конвективного переноса.

5. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

При построении разностных операторов конвективного переноса методом баланса удобно начать с рассмотрения оператора переноса в дивергентной форме (8). Положим

$$C_2u = (C_2u)_i \approx \frac{1}{V_i}\int\limits_{\Omega_i} \mathscr{C}_2 u d\mathbf{x} \tag{36}$$

для внутренних углов сетки. Для правой части имеем

$$\int\limits_{\Omega_i} \mathscr{C}_2 u d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial\Omega_i} (\mathbf{v}, \mathbf{m}) u d\mathbf{x}.$$

Подобно случаю аппроксимации диффузионного переноса, будем относить нормальную компоненту скорости к середине отрезка, соединяющего узлы сетки. При использовании обозначений

$$b_{ij} = (\mathbf{v}, \mathbf{m})(\mathbf{x}_{ij})$$

для разностного оператора конвективного переноса из (36) получим

$$(C_2y)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathscr{W}(i)} l_{ij}b_{ij}\frac{y_j+y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{37}$$

Рассмотрим теперь аппроксимацию оператора конвективного переноса в недивергентной форме (7). Здесь имеется несколько возможностей. Первая из них связана с использованием достаточно сложной (мало прозрачной) конструкции для получения разностного оператора конвективного переноса в недивергентной форме на основе специальных формул приближенного интегрирования. Но мы могли бы поступить и иначе. В духе метода опорных операторов [17] построим простую аппроксимацию оператора конвективного переноса в дивергентной форме (37). Для получения разностной аппроксимации оператора (7) ищется сопряженный к (37) разностный оператор и на основании свойства (19) находится разностный оператор конвективного переноса в недивергентной форме. Такая возможность особенно ценна при рассмотрении аппроксимаций на нерегулярных сетках.

Непосредственные выкладки дают

$$(C_2y, w) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_i\in\omega}\sum_{j\in\mathscr{W}(i)} l_{ij}b_{ij}y_iw_i + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_i\in\omega}\sum_{j\in\mathscr{W}(i)} l_{ij}b_{ij}y_jw_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_i\in\omega}\sum_{j\in\mathscr{W}(i)} l_{ij}b_{ij}y_iw_i - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_i\in\omega}\sum_{j\in\mathscr{W}(i)} l_{ij}b_{ij}y_iw_j = -(y, C_1w),$$

где учтено, что $b_{ij} = -b_{ji}$. Это дает возможность определить разностный оператор

$$(C_1y)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathscr{W}(i)} l_{ij}b_{ij}\frac{y_j-y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{38}$$

По построению, разностные операторы конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах, определяемые согласно (37), (38), с точностью до знака сопряжены друг другу, т.е.

$$C_1^* = -C_2. \tag{39}$$

Для оператора конвективного переноса в симметричной форме (9) с учетом представления

$$C_0 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

из (37) и (38) получим наиболее компактную аппроксимацию:

$$(C_0 y)_i = \frac{1}{2V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} y_j, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{40}$$

Основное свойство этого разностного оператора есть

$$C_0^* = -C_0, \tag{41}$$

причем это свойство кососимметричности имеет место при любом поле скоростей (для произвольных векторов $\mathbf{v}$, не обязательно удовлетворяющих какому-то разностному аналогу свойства несжимаемости (28)).

Прежде чем рассматривать разностный аналог свойства ограниченности и подчиненности операторов конвективного переноса оператору диффузионного переноса в смысле выполнения оценок (30) и (32), обсудим более подробно важные особенности аппроксимаций (37) и (38).

При численном решении задач механики сплошной среды большое значение имеет согласование аппроксимаций операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах. Согласованность понимается в том смысле, что один разностный оператор совпадает с другим в случае, когда соответствующее разностное условие несжимаемости имеет место. Такой момент важен, так как в случае дифференциальных уравнений такая эквивалентность есть и именно она обеспечивает выполнимость не одного, а нескольких законов сохранения. В частности, для уравнений Навье–Стокса для несжимаемой среды оператор конвективного переноса в уравнении движения не дает вклада ни в кинетическую энергию, ни в отдельные компоненты импульса (энергетическая нейтральность и нейтральность по импульсу). При использовании простейших аппроксимаций мы можем рассчитывать на что-то одно: либо мы следим за кинетической энергией, либо за импульсом.

При рассмотрении несжимаемой среды (условие (28)) на дифференциальном уровне можно использовать любую из трех (7)–(9) эквивалентных форм записи конвективных слагаемых. Это является следствием следующей формулы векторного анализа:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}u) = (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div} \mathbf{v},$$

которая, в свою очередь, базируется на формуле дифференцирования произведения двух функций. Для операторов конвективного переноса имеем

$$\mathcal{C}_2 u = \mathcal{C}_1 u + \operatorname{div} \mathbf{v} u. \tag{42}$$

При построении конечно-разностных аппроксимаций операторов конвективного переноса естественно стремиться к отбору таких разностных операторов, которые имели бы отмеченное выше свойство (42) дифференциальных операторов – свойство перехода одной разностной аппроксимации в другую.

Из (37), (38) имеем

$$C_2 y = C_1 y + \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} y_i, \quad \mathbf{x}_i \in \omega.$$

Этому равенству придадим форму, аналогичную (42):

$$C_2 y = C_1 y + \operatorname{div}_h \mathbf{v} y, \tag{43}$$

где разностный оператор дивергенции есть

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v} = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{44}$$

К аппроксимации дивергенции вектора посредством (44) мы придем, если будем использовать определение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\delta \to 0} \left[\left(\int_{\partial V} \mathbf{f} d\mathbf{S} \right) \left(\int_V dV \right)^{-1} \right],$$

где V – область, ∂V – граница области, δ – диаметр области. Выражение (44) можно рассматривать как соответствующую квадратурную формулу для правой части при интегрировании по контрольному объему для узла $\mathbf{x}_i \in \omega$.

Прежде всего рассмотрим разностные аналоги оценки энергии операторов конвективного переноса типа (30), (31). Принимая во внимание (43), записываем

$$C_1 y = C_0 y - \frac{1}{2}\mathrm{div}_h \mathbf{v} y, \quad C_2 y = C_0 y + \frac{1}{2}\mathrm{div}_h \mathbf{v} y. \tag{45}$$

С учетом (41) из (45) непосредственно следует

$$|(C_\alpha y, y)| \le M_1 \|y\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \tag{46}$$

с постоянной M_1, которая зависит только от сжимаемости среды (на разностном уровне):

$$M_1 = \frac{1}{2}\|\mathrm{div}_h \mathbf{v}\|_\infty. \tag{47}$$

Здесь использованы обозначения

$$\|y\|_\infty = \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} |y(\mathbf{x}_i)|$$

для нормы в $L_\infty(\omega)$. Для доказательства оценки (46) скалярно домножим равенства (45) на y и воспользуемся свойством кососимметричности оператора C_0.

Для получения разностного аналога (32) прежде всего оценим сверху выражение

$$\|C_1 y\|^2 = \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \frac{1}{V_i}\left(\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} \frac{y_j - y_i}{2}\right)^2. \tag{48}$$

Для правой части имеем

$$\sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \frac{1}{V_i}\left(\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} \frac{y_j - y_i}{2}\right)^2 \le \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} \max_{j \in \mathcal{W}(i)} |b_{ij}|^2 \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \frac{1}{4V_i}\left(\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2.$$

Принимая во внимание неравенство

$$\left(\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} \xi_j \theta_j\right)^2 \le \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} \xi_j^2 \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} \theta_j^2$$

и полагая

$$\xi_j = \sqrt{l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad \theta_j = \sqrt{l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)} \frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

получаем

$$\sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \frac{1}{4V_i}\left(\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2 \le \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \frac{1}{4V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \cdot \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\left(\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2.$$

С учетом

$$\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 4V_i$$

подстановка в (48) дает

$$\|C_1 y\|^2 \le \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} \max_{j \in \mathcal{W}(i)} |b_{ij}|^2 \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\left(\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2. \tag{49}$$

Сопоставляя (49) с (16), получаем неравенство

$$\|Cy\|^2 \le M_2(Dy, y), \tag{50}$$

в котором $C = C_1$ и постоянная

$$M_2 = \frac{2}{\kappa} \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} \max_{j \in \mathcal{W}(i)} |b_{ij}|^2.$$

При рассмотрении разностного оператора конвективного переноса в недивергентном виде (38) используется разностный аналог неравенства Фридрихса в форме (17). Принимая во внимание представление (43), непосредственно получаем

$$\|C_2 y\|^2 = \|C_1 y + \mathrm{div}_h \mathbf{v} y\|^2 \le 2\|C_1 y\|^2 + 2\|\mathrm{div}_h \mathbf{v} y\|_2.$$

Из (16) и (17) для последнего слагаемого в правой части имеем

$$\|\mathrm{div}_h \mathbf{v} y\|_2 \le \|\mathrm{div}_h \mathbf{v}\|_\infty^2 \frac{M_0}{2} \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \left(\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)} \right)^2.$$

С учетом (16) (при $C = C_1$) приходим к оценке (50) для оператора $C = C_2$, в которой

$$M_2 = \frac{2}{\kappa} \left(2 \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} \max_{j \in \mathcal{W}(i)} |b_{ij}|^2 + M_0 \|\mathrm{div}_h \mathbf{v}\|_\infty^2 \right).$$

Для разностного оператора конвективного переноса в симметричной форме (40) аналогично устанавливается неравенство (50) с

$$M_2 = \frac{1}{\kappa} \left(3 \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} \max_{j \in \mathcal{W}(i)} |b_{ij}|^2 + M_0 \|\mathrm{div}_h \mathbf{v}\|_\infty^2 \right).$$

Теорема 2. *Для сеточных операторов конвективного переноса, определяемых согласно* (37), (38) *и* (40), *в пространстве* $H = L_2(\omega)$ *имеют место свойства* (39) *и* (41) *и справедливы оценки ограниченности энергии операторов* (46) *и оценки подчиненности* (50) *разностному оператору диффузионного переноса* (15).

Полученные оценки (46) и (50) разностных операторов конвективного переноса полностью согласованы с непрерывным случаем (см. (30), (32)) и служат основой при исследовании разностных задач конвекции-диффузии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Фрязинов И.В.* О разностных методах аппроксимации задач математической физики // Успехи матем. наук. 1976. Т. 31. № 6. С. 167–197.
2. *Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. и др.* Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Критерий, 1996.
3. *Годунов С.Л., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
4. *Heinrich B.* Finite difference methods on irregular networks. Berlin: Akad.-Verl., 1987.
5. *Aurenhammer F.* Voronoi diagrams – A survey of a fundamental geometric data structure // ACM Comput. Surveys. 1991. V. 23. P. 345–405.
6. *Fortune S.* Voronoi diagrams and Delaunay triangulations // Comput. Euclidean Geimetry (Lect. Notes Ser. Computing). Vol. 1. Singapore: World Scientific, 1992. P. 193–233.
7. *George P.-L., Borouchaki H.* Delaunay traingulation and meshing: Application to finite elements. Paris: Hermes, 1998.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
9. *Самарский А.А.* Уравнения параболического типа и разностные методы их решения / Тр. Всес. совещания по дифференц. ур-ниям, 1958. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960. С. 148–160.
10. *Versteeg H.K., Malalaseker W.* An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method. Longman Scient. & Techn., 1995.

11. *Соловьев А.В., Соловьева Е.В., Тишкин В.Ф. и др.* Исследование аппроксимации разностных операторов на сетке из ячеек Дирихле // Дифференц. ур-ния. 1986. Т. 22. № 7. С. 1227–1237.
12. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
13. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Разностные схемы на нерегулярных сетках // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 1. С. 27–30.
14. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1977.
15. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
16. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational heat transfer. Chichester: Wiley, 1995.
17. *Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. и др.* Операторные разностные схемы // Дифференц. ур-ния. 1981. Т. 17. № 7. С. 1317–1321.