ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1999, том 367, № 3, с. 310–313

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ ПО ПРОСТРАНСТВУ СЕТКАХ

© 1999 г. Академик А. А. Самарский, В. И. Мажукин, Д. А. Малафей, П. П. Матус

Поступило 03.03.99 г.

Повышение точности метода без увеличения стандартного шаблона разностных схем всегда было актуальной задачей математической физики. Многочисленные примеры построения таких вычислительных методов четвертого порядка аппроксимации по пространственной переменной в случае равномерной сетки узлов для одномерных и многомерных уравнений математической физики можно найти в известной монографии [1]. При переходе от равномерной сетки к неравномерной порядок локальной погрешности аппроксимации обычно понижается. В работах [2–7] указывается на возможность повышения точности метода за счет аппроксимации исходного дифференциального уравнения не в узлах расчетной сетки, а в некоторых промежуточных точках. К сожалению, полученные в этих работах результаты в общем случае не обобщаются на дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

В настоящем сообщении предлагаются принципиально новые алгоритмы повышенного порядка аппроксимации на неравномерных сетках с использованием трехточечного шаблона для стационарных и нестационарных задач с непостоянными коэффициентами. Несомненными достоинствами предложенных разностных схем являются достаточная простота алгоритма при их машинной реализации, безусловная монотонность (выполнение принципа максимума без ограничений на соотношения между пространственным шагом и величиной переменного коэффициента), вырождение в случае равномерной сетки узлов в известную консервативную разностную схему.

В работе получены соответствующие априорные оценки разностного решения, выражающие устойчивость по начальным данным и правой части. Доказана сходимость предложенных алгоритмов к решению исходной дифференциальной задачи со вторым порядком. Теоретические исследования базируются на общей теории операторно-разностных схем [1, 6].

1. Рассмотрим простейшую дифференциальную задачу

$$Lu = (k(x)u'(x))' = -f(x), \quad 0<x<l, \tag{1}$$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2, \quad 0<k_1 \le k(x) \le k_2. \tag{2}$$

При построении монотонных схем второго порядка точности на трехточечном шаблоне с использованием произвольной неравномерной сетки $\hat{\bar{\omega}}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i,\ i = 1, 2, \ldots, N,\ x_0 = 0,\ x_N = l\}$ будем ориентироваться на соотношение [2, 3]

$$u_{\bar{x}\hat{x},i} - u''(\bar{x}_i) = O(\hbar^2), \quad \bar{x}_i = x_i + \tilde{h}_i, \quad \tilde{h}_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3}. \tag{3}$$

Здесь используются стандартные обозначения [1]:

$$u_{\bar{x}\hat{x}} = \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{\hbar}, \quad u_x = \frac{u_+ - u}{h_+}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u - u_-}{h},$$

$$\hbar = 0.5(h_+ + h), \quad v_\pm = v(x_{i\pm1}) = v_{i\pm1}.$$

Выражение (3) означает, что относительно нерасчетной точки $\bar{x}_i$ (в случае равномерной сетки $\bar{x}_i \equiv x_i$) $u_{\bar{x}\hat{x}}$ аппроксимирует вторую производную со вторым порядком. Для построения аналогичных методов для уравнения (1) будем использовать тождество

$$(ku')' = 0.5((ku)'' + ku'' - k''u).$$

Заменим на сетке $\hat{\omega}_h$ дифференциальный оператор L разностным L_h:

$$L_h u = 0.5((ku)_{\bar{x}\hat{x}} + \bar{k}u_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\bar{x}\hat{x}}\bar{u}), \tag{4}$$

где

$$\bar{k} = k + \tilde{h}k_x, \quad \bar{u} = u + \tilde{h}u_{\bar{x}} \text{ при } \tilde{h} \ge 0, \quad k_{\bar{x}\hat{x}} \ge 0,$$

$$\bar{k} = k + \tilde{h}k_{\bar{x}}, \quad \bar{u} = u + \tilde{h}u_x \text{ при } \tilde{h} \le 0, \quad k_{\bar{x}\hat{x}} \le 0.$$

Любопытно отметить, что разностный оператор (4) допускает следующую эквивалентную

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва
Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск

форму записи:

$$L_h y = (a y_x)_{\hat{x}} + \frac{h_+ - h}{3}(k_x y_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\bar{x}\hat{x}} y_{\bar{x}}),$$
$$a = \frac{1}{2}(k + k_-). \tag{5}$$

Так как

$$\bar{k} - k(\bar{x}) = O(\hbar^2), \quad \bar{u} - u(\bar{x}) = O(\hbar^2), \tag{6}$$

то в силу (3), (4) заключаем, что разностная схема

$$L_h y = -\varphi, \quad \varphi_i = f(\bar{x}_i), \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2 \tag{7}$$

аппроксимирует дифференциальную задачу (1), (2) со вторым порядком. Несомненным достоинством схемы (7) является тот факт, что в случае равномерной сетки она вырождается в известную консервативную схему [1].

Схема (7) может быть записана в каноническом виде [1]

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \tag{8}$$

причем условия принципа максимума $A_i > 0$, $B_i > 0$, $D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0$ выполнены при произвольных шагах неравномерной сетки и коэффициентах $k(x)$, удовлетворяющих условию (2) (безусловная монотонность).

2. В прямоугольнике $\overline{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ ищется непрерывное решение $u(x, t)$ задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x, t),$$
$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \tag{9}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{10}$$

Наряду с ранее введенной произвольной неравномерной пространственной сеткой $\hat{\overline{\omega}}_h$ будем рассматривать равномерную сетку по временной переменной $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \ldots, N_0, \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}$. Так как точка $\bar{x}_i = x_i + \dfrac{h_{i+1} - h_i}{3}$ не является в общем случае расчетной, то на основании разложений (6) заключаем, что

$$v_{(\sigma_1, \sigma_2)} - v(\bar{x}_i) = O(\hbar^2),$$
$$v_{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 v_+ + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)v + \sigma_2 v_-, \tag{11}$$

где переменные по пространству весовые множители определяются по формулам

$$\sigma_1 = \frac{0.5(\tilde{h} + |\tilde{h}|)}{h_+}, \quad \sigma_2 = \frac{0.5(\tilde{h} - |\tilde{h}|)}{h}.$$

Используем формулу (11) для построения схем второго порядка $\Psi(O(\hbar^2))$ аппроксимации на неравномерной сетке $\omega = \hat{\omega}_h \times \omega_\tau$:

$$y_{(\sigma_1, \sigma_2)t} = L_h \hat{y} + f(\bar{x}, t), \quad (x, t) \in \omega, \tag{12}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0, \tag{13}$$

где $v_t = \dfrac{\hat{v} - v}{\tau}$, а оператор L_h определен формулой (5). Для простоты дальнейших выкладок положим $h_+ \geq h$ (сетка сгущается к началу координат). Тогда разностное уравнение (12) преобразуется к виду

$$y_t + \frac{h_+ - h}{3} y_{tx} = L_h \hat{y} + f(\bar{x}, \hat{t}), \quad (x, t) \in \omega. \tag{14}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть*

$$\tau > \left\|\frac{h_+^2 - h^2}{4a}\right\|_C. \tag{15}$$

Тогда для решения задачи (13), (14) *при любом* $t_n \in \omega_\tau$ *справедлива априорная оценка*

$$\|y(t_n)\|_C \leq \|u_0\|_C + \sum_{k=0}^{n-1} \tau \|\varphi(t_k)\|_C,$$

где $\|v(t)\|_C = \max\limits_{x \in \hat{\omega}_h} |v(x, t)|$.

Для доказательства теоремы необходимо схему (14) привести к каноническому виду (8) и воспользоваться следующим утверждением [1].

Л е м м а 1. *Пусть выполнены условия*

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i > 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Тогда для решения задачи (8), (13) *справедлива оценка* $\|y\|_C \leq \left\|\dfrac{F}{D}\right\|_C$.

Подставляя $y = z + u$ в уравнения (12), (13), получим задачу для погрешности

$$z_{(\sigma_1, \sigma_2)t} = L_h \hat{z} + \psi, \quad (x, t) \in \omega, \tag{16}$$

$$z_i^0 = 0, \quad z_0^{n+1} = z_N^{n+1} = 0. \tag{17}$$

В дальнейшем предполагаем существование соответствующих ограниченных производных от решения $u(x, t)$ дифференциальной задачи (9), (10). Тогда, согласно формулам (3), (4)–(6), (11), заключаем, что невязка

$$\psi = -u_{(\sigma_1, \sigma_2)t} + L_h \hat{y} + f(\bar{x}, \hat{t}) = O(\hbar^2 + \tau)$$

имеет второй порядок малости по пространственной переменной и первый по временной. Так как задачи (16), (17) и (12), (13) идентичны, то при выполнении предположения (15) находим следующую оценку точности:

$$\|z\|_C \le M(\hbar^2 + \tau), \quad M > 0 = \text{const}.$$

3. Для того чтобы избавиться от ограничений (15), воспользуемся общей теорией операторно-разностных схем [1, 6]. Вместо (14) рассмотрим более общую схему с постоянным по времени весом σ:

$$Dy_t + A_1 y^{(\sigma)} + A_2 y = \varphi, \quad \varphi = f^{(\sigma)}(\bar{x}, t), \qquad (18)$$

где $v^{(\sigma)} = \sigma v(t+\tau) + (1-\sigma)v(t) = \sigma\hat{v} + (1-\sigma)v$, а операторы D, A_1, A_2 при $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $y_0 = y_N = 0$ определяются следующим образом:

$$D = E + A_0, \quad (A_0 y)_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} y_{x,i}, \qquad (19)$$

$$(A_1 y)_i = -(a y_x)_{\hat{x},i},$$

$$(A_2 y)_i = -\frac{h_{i+1} - h_i}{6\hbar_i}(k_{x,i} y_{x,i} - 2k_{x,i} y_{\bar{x},i} + k_{\bar{x},i} y_{x,i}). \quad (20)$$

Пусть $\overset{\circ}{\Omega}_h$ – множество сеточных функций, заданных при каждом $t \in \omega_\tau$ на $\hat{\bar{\omega}}_h$ и равных нулю на границе. Определим вектор $y = y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{N-1}(t))^T$ и линейное пространство $H = \overset{\circ}{\Omega}_h$ как множество таких векторов со скалярным произведением $(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i \hbar_i$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$.

Так как $A_1 = A_1^* > 0$, то через H_{A_1} обозначим гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства H и снабженное скалярным произведением и нормой

$$\|y\|_{A_1}^2 = (A_1 y, y) = (a, y_{\bar{x}}^2] = \sum_{i=1}^{N} a_i y_{\bar{x},i}^2 h_i.$$

Тогда разностная схема (18)–(20), (13) может быть записана в каноническом виде [1]

$$By_t + Ay = \varphi, \quad y_0 = u_0, \qquad (21)$$

$$B = D + \sigma\tau A_1, \quad A = A_1 + A_2, \quad A_1 = A_1^* > 0. \quad (22)$$

В дальнейшем нам понадобятся леммы из [5, 6].

Л е м м а 1. *При произвольных соотношениях на сеточные шаги и $h_+ > h$ имеет место операторное неравенство $D \ge \frac{1}{3}E$.*

Л е м м а 2. *Пусть в операторно-разностной схеме* (21) *постоянный оператор $A = A_1 + A_2$, $A_1 = A_1^* > 0$ и оператор A_2 подчинен A_1 в следующем смысле*:

$$\|A_2 y\|^2 \le \delta \|y\|_{A_1}^2, \quad \delta = \text{const} > 0. \qquad (23)$$

Тогда при

$$B(t) \ge \varepsilon E + 0.5\tau A_1,$$

$$\varepsilon > 0 - \textit{произвольная константа},$$

решение разностной схемы (21) *ρ-устойчиво в H_{A_1} и имеет место априорная оценка*

$$\|y_n\|_{A_1}^2 \le M\left(\|y_0\|_{A_1}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-1} \tau\|\varphi_k\|^2\right), \qquad (24)$$

где постоянная $M = e^{m_\varepsilon t_n}$, $m_\varepsilon = \dfrac{\delta}{2\varepsilon}$.

Л е м м а 3. *Пусть в разностной схеме* (18)

$$\frac{h_+}{h} \le c_1, \quad |k'| \le c_2.$$

Тогда неравенство (23) *для операторов* (19), (20) *выполнено с постоянной $\delta = \dfrac{2c_2^2(1 + c_1)}{k_1}$.*

Используя леммы 1–3, нетрудно доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия лемм* 1 *и* 3. *Тогда при $\sigma \ge 0.5$, $0 < \varepsilon \le \frac{1}{3}$ для решения разностной задачи* (21), (22) *справедлива априорная оценка* (24).

4. Рассмотрим краевую задачу для уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x, t),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x),$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Используя стандартные обозначения

$$y = y^n, \quad \hat{y} = y^{n+1}, \quad \check{y} = y^{n-1},$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau},$$

$$y_{\bar{t}t} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau},$$

$$v^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1\hat{v} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)v + \sigma_2\check{v}$$

по аналогии с (18) на сетке $\hat{\bar{\omega}}_h \times \bar{\omega}_\tau$ построим схему второго порядка аппроксимации по пространственной переменной

$$y_{\bar{t}t} + \left(\frac{h^2}{6} y_{\bar{t}tx}\right)_{\hat{x}} + A_1 y^{(\sigma_3, \sigma_4)} = A_2 y + \varphi, \qquad (25)$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ \ y_t(x,0) = \tilde{u}_0(x), \qquad \hat{y}_0 = \hat{y}_N = 0, \tag{26}$$

где $\varphi = f^{(\sigma_3,\sigma_4)}(\ddot{x}, t)$, $t \in \omega_\tau$, $\tilde{u}_0(x)$ выбирается так, чтобы погрешность аппроксимации второго начального условия была величиной $O(\tau^2)$, операторы A_1, A_2 определены соотношениями (19), (20). При $k(x) = \text{const}$ схема (25), (26) совпадает с предложенной в [3].

Для получения соответствующих априорных оценок запишем разностную схему в каноническом виде [1, 6]

$$Dy_{\bar{t}t} + By_{\overset{\circ}{t}} + A_1 y = \varphi_1, \quad \varphi_1 = A_2 y + \varphi, \tag{27}$$

где

$$D = E + A_0 + 0.5\tau^2(\sigma_3 + \sigma_4)A_1,$$

$$A_0 y = \left(\frac{h^2}{6}y_x\right)_{\hat{x}}, \quad B = \tau(\sigma_3 - \sigma_4)A_1.$$

Лемма 4 [1, 6]. *Пусть в операторно-разностной схеме* (27)

$$A_1 = A_1^* > 0, \quad B \geq 0, \quad D \geq \frac{(1+\varepsilon)\tau^2}{4}A_1,$$

$$D^{-1} \leq E, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Тогда схема устойчива по начальным данным, правой части, а для ее решения при произвольном $\varepsilon > 0$ имеет место априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A_1} \leq M\left(\|y(0)\|_{A_1} + \|y_t(0)\|_D + \sum_{k=1}^{n}\tau\|\varphi_1(t_k)\|\right), \tag{28}$$

$$M = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Лемма 5 [1]. *Пусть $g_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и $f_n \geq 0$, $n = 0, 1, \ldots,$ – неотрицательные функции. Если f_n – неубывающая функция ($f_{n+1} \geq f_n$), то из неравенства*

$$g_{n+1} \leq c_0\sum_{k=1}^{n}\tau g_k + f_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$g_1 \leq f_0, \quad c_0 = \text{const} > 0$$

следует оценка

$$g_{n+1} \leq e^{c_0 t_n} f_n.$$

Используя леммы 4, 5, условие подчиненности операторов (23) совершенно нетрудно доказать, что справедлива

Теорема 3. *Пусть в разностной схеме* (25), (26)

$$\sigma_3 \geq \sigma_4, \quad \sigma_3 + \sigma_4 \geq \frac{1}{k_1}\left(\frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{h^2}{3\tau^2}\right).$$

Тогда для решения разностной задачи имеет место априорная оценка (28) *с константой*

$$M = e^{\delta\sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\,t_n}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

5. На трехточечном шаблоне на неравномерной пространственной сетке можно строить разностные схемы и более высокого порядка точности. Пусть $k(x) = 1$,

$$\sigma_1 = -\frac{2}{9}\frac{(h+2h_+)(h_+-h)}{\hbar h},$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{9}\frac{(2h+h_+)(h_+-h)}{\hbar h_+}, \quad \delta = \frac{h^2 + hh_+ + h_+^2}{36}.$$

Тогда разностная схема

$$y_{(\sigma_1,\sigma_2)t} + \delta y_{t\bar{x}\hat{x}} = y_{\bar{x}\hat{x}}^{(0.5)} + \varphi, \qquad \varphi = f(\bar{x}, \bar{t}) + \delta f_{\bar{x}\hat{x}}, \quad \bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\hbar^3 + \tau^2)$. Любопытно отметить, что в случае равномерной сетки схема (29) преобразуется в известную [1]

$$y_t = y_{\bar{x}x}^{(\sigma_0)} + \varphi, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$$

с четвертым порядком аппроксимации.

Полученные результаты при помощи идей, изложенных в работах [5, 6, 8], обобщаются и на многомерные параболические и эллиптические уравнения с переменными коэффициентами. Рассмотрению этого вопроса будет посвящена отдельная работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
2. *Полевиков В.К.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2146–2152.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* // Там же. 1996. Т. 32. № 2. С. 265–274.
4. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 3. С. 413–424.
5. *Самарский А.А., Мажукин В.И., Матус П.П.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 7. С. 980–987.
6. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998. 442 с.
7. *Matus P.P.* Proc. II Intern. Conf. Finite-Difference Methods: Theory and Application. Minsk, 1998. V. 2. P. 113–120.
8. *Зыль А.Н., Матус П.П.* // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 4.