Принцип регуляризации и устойчивость разностных схем

А. А. САМАРСКИЙ, П. Н. ВАБИЩЕВИЧ
Институт математического моделирования РАН

УДК 519.6

Ключевые слова: принцип регуляризации, разностные схемы, устойчивость разностных схем.

Аннотация

В работе отражены некоторые новые результаты по построению устойчивых разностных схем.

Abstract

A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich, Regularization principle and stability of difference schemes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 3, p. 1097–1113.

Some new results on construction of stable difference schemes are represented.

1. Введение

Теория регуляризации разностных схем рассматривается как принцип улучшения качества разностной схемы за счет введения новых дополнительных слагаемых (регуляризаторов) в операторы исходной разностной схемы. Принцип регуляризации разностных схем [1] базируется на использовании результатов общей теории устойчивости разностных схем [2,3]. Можно сказать, что принцип регуляризации разностных схем является конструктивным аппаратом использования общих результатов теории устойчивости.

Принцип регуляризации предложен в работе [1], в которой на множестве содержательных примеров продемонстрированы его возможности. Наиболее впечатляющие результаты (см. [2–4]) получены при построении безусловно устойчивых разностных схем для нестационарных задач математической физики, факторизованных схем для многомерных задач, итерационных методов решения сеточных задач.

В настоящей работе основное внимание уделяется построению устойчивых разностных схем для новых классов задач математической физики на основе принципа регуляризации разностных схем. В этой связи отметим аддитивные схемы полной аппроксимации для произвольного многокомпонентного

Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, № 3, с. 1097–1113.

расщепления оператора задачи на сумму попарно некоммутируемых операторов. Отмечаются возможности построения регуляризованных разностных схем для обратных задач для эволюционных уравнений. На основе малого возмущения коэффициентов разностного уравнения получены нелинейные монотонные схемы для уравнения переноса. Для того чтобы не загромождать изложение техническими деталями, принципиальные моменты проиллюстрированы при рассмотрении простейших модельных задач.

Концептуальное оформление принципа регуляризации разностных схем прошло под сильным влиянием основополагающих работ А. Н. Тихонова по методу регуляризации для решения некорректных задач, выполненных в начале 60-х годов. Влияние личности Андрея Николаевича на теорию численных методов и, в частности, теорию разностных схем, на общее становление вычислительной математики трудно переоценить.

2. Принцип регуляризации разностных схем

В настоящее время принцип регуляризации разностных схем рассматривается как основной методологический принцип улучшения разностных схем. Он предложен и проиллюстрирован на большом числе примеров в работе [1]. Для общих двух- и трехслойных схем формулируются рецепты улучшения качества (устойчивости, точности, экономичности) разностных схем. На его основе проводится [2, 3] исследование устойчивости и сходимости широкого класса разностных схем для краевых задач математической физики, строятся итерационные алгоритмы решения сеточных задач [4].

Принцип регуляризации разностных схем традиционно широко используется для построения устойчивых разностных схем при численном решении корректных задач для уравнений с частными производными. В наших работах (см., например, [5–9]) на такой единой методологической основе строятся разностные схемы для условно корректных нестационарных задач математической физики. За счет малых возмущений операторов задачи удается контролировать рост нормы решения при переходе с одного временного слоя на другой.

Построение безусловно устойчивых разностных схем на основе принципа регуляризации реализуется следующим образом:

1) для исходной задачи строится какая-то простейшая разностная схема (производящая разностная схема), не обладающая необходимыми свойствами, т. е. схема является условно устойчивой либо даже абсолютно неустойчивой;

2) разностная схема записывается в единой (канонической) форме, для которой условия устойчивости известны;

3) качества разностной схемы (ее устойчивость) улучшается за счет возмущения операторов разностной схемы.

Тем самым принцип регуляризации разностных схем базируется на использовании уже известных результатов об условиях устойчивости. Такие критерии дает общая теория устойчивости разностных схем [10, 11]. С этой точки зрения мы можем рассматривать принцип регуляризации как элемент конструктивного использования общих результатов теории устойчивости разностных схем. Это достигается за счет записи разностных схем в достаточно общей канонической форме и формулировкой критериев устойчивости, удобных для проверки.

Ниже мы на некоторых примерах покажем возможности принципа регуляризации при построении устойчивых разностных схем для различных классов задач. С этой целью необходимо прежде всего сформулировать общие условия устойчивости разностных схем, которые записаны в канонической форме. Здесь необходимо рассмотреть наиболее важный случай устойчивости разностных схем, рассматриваемых в сеточных гильбертовых пространствах.

3. Устойчивость разностных схем

При разностной или конечно-элементной дискретизации по пространству нестационарной задачи математической физики получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая рассматривается в сеточном гильбертовом пространстве. Дискретизация по времени дает операторно-разностную схему. В настоящее время получены точные (совпадающие необходимые и достаточные) условия широкого класса двух- и трехслойных разностных схем в конечномерных гильбертовых пространствах. Основные теоретические результаты теории устойчивости суммированы в книгах [2, 3]. Напомним основные понятия и сформулируем наиболее важные результаты общей теории устойчивости двухслойных операторно-разностных схем.

3.1. Основные понятия

Пусть H — конечномерное гильбертово пространство, D, A — линейные операторы в H. Скалярное произведение и норма в H есть $(\cdot\,,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ соответственно. Через H_D, где $D = D^* > 0$, обозначим пространство H со скалярным произведением и нормой

$$(y, v)_D, \quad \|y\| = \sqrt{(Dy, y)}.$$

Пусть $\tau > 0$ — шаг сетки по времени и $y^n = y(t^n)$, $t^n = n\tau$. Рассмотрим однородную (с нулевой правой частью) двухслойную операторно-разностную схему, записанную в канонической форме

$$B\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

при заданном y^0. Будем считать, что в (1) операторы A и B постоянны (не зависят от n), оператор A самосопряжен и положителен ($A = A^* > 0$).

Разностная схема (1) называется ϱ-устойчивой (равномерно устойчивой) по начальным данным в H_D, если существует постоянная $\varrho > 0$ и постоянная M, не зависящая от τ, n, такие что при любых n и при всех $y^n \in H$ для решения y^{n+1} разностного уравнения (1) справедлива оценка

$$\|y^{n+1}\|_D \leqslant \varrho \|y^n\|_D, \quad n = 0, 1, \dots,$$

причем $\varrho^n \leqslant M$. В качестве константы ϱ выбирается обычно одна из величин

$$\begin{aligned} &\varrho = 1, \\ &\varrho = 1 + c\tau, \quad c > 0, \\ &\varrho = \exp(c\tau), \end{aligned}$$

где постоянная c не зависит от τ, n. В случае $\varrho = 1$ говорят об устойчивости разностной схемы.

3.2. Условия устойчивости

Сформулируем стандартные условия устойчивости разностных схем [2, 3].

Теорема 1. *Для разностной схемы* (1) *с оператором* $A = A^* > 0$ *условие*

$$B \geqslant \frac{\tau}{2} A \tag{2}$$

является необходимым и достаточным для устойчивости в H_A, *т. е. для выполнения оценки*

$$\|y^{n+1}\|_A \leqslant \varrho \|y^n\|_A, \quad n = 0, 1, \dots. \tag{3}$$

Если оператор $B = B^* > 0$, *то условие* (2) *является необходимым и достаточным для устойчивости и в* H_B.

При рассмотрении многих нестационарных задач (задачи конвекции-диффузии-реакции, обратные задачи) необходимо ориентироваться на более общие условия ϱ-устойчивости.

Теорема 2. *Для разностной схемы* (1) *с операторами* $A = A^*$, $B = B^* > 0$ *условия*

$$\frac{1 - \varrho}{\tau} \leqslant A \leqslant \frac{1 + \varrho}{\tau} B \tag{4}$$

необходимы и достаточны для устойчивости в H_B.

Приведенные результаты носят принципиальный характер — речь идет о совпадающих необходимых и достаточных условиях устойчивости разностных схем. Обобщения проводятся в различных направлениях: устойчивость по правой части, разностные схемы с несамосопряженными операторами, непостоянные операторы, устойчивость в более простых нормах и т. д. Например, при $A \neq A^*$ и $B = B^* > 0$ для устойчивости в H_B необходимо и достаточно выполнения неравенства для обратных операторов: $A^{-1} \geqslant 0{,}5\tau B^{-1}$. Отдельно выделим исследования трехслойных операторно-разностных схем. Наиболее полно основные результаты общей теории устойчивости разностных схем представлены в книге [3].

4. Регуляризованные разностные схемы

Будем использовать принцип регуляризации разностных схем для построения различных классов безусловно устойчивых схем для прямых задач математической физики. В качестве модельной рассматривается первая краевая задача для параболического уравнения. В качестве производящей берется условно устойчивая явная схема. В соответствии с сформулированным критерием устойчивости (2) для получения абсолютно устойчивой схемы возмущаются операторы явной разностной схемы. Выделены варианты аддитивного (стандартного) и мультипликативного (нестандартного) возмущения операторов производящей разностной схемы.

4.1. Модельная задача

Рассмотрим в качестве модельной двумерную задачу в прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ 0 < x_i < l_i,\ i = 1, 2\}.$$

В Ω ищется решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{5}$$

дополненного простейшими однородными граничными условиями первого рода:

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T. \tag{6}$$

Задается также начальное условие

$$u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{7}$$

Будем считать, что коэффициент уравнения (1) достаточно гладкий и

$$0 < m \leqslant k(x) \leqslant M, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (5)–(7) дифференциально-разностную задачу, проведя дискретизацию по пространству. Будем считать, для простоты, что в области Ω введена равномерная по каждому направлению сетка с шагами h_i, $i = 1, 2$. Пусть ω — множество внутренних узлов.

На множестве сеточных функций $y(\mathbf{x})$, таких что $y(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \neq \omega$, определим сеточный оператор Λ соотношением

$$\Lambda y = -\sum_{i=1}^{2} (a_i y_{\bar{x}_i})_{x_i}, \tag{8}$$

положив, например,

$$a_1(\mathbf{x}) = k(x_1 - 0{,}5h_1, x_2), \quad a_2(\mathbf{x}) = k(x_1, x_2 - 0{,}5h_2).$$

В сеточном гильбертовом пространстве H скалярное произведение и норму введем соотношениями

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x}\in\omega} y(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) h_1 h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

В H (см., например, [2, 4]) имеем $\Lambda = \Lambda^* > 0$. От (5)–(7) перейдем к дифференциально-операторному уравнению

$$\frac{dy}{dt} + \Lambda y = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad 0 < t < T \tag{9}$$

при заданном

$$y(0) = g, \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{10}$$

Будем строить безусловно устойчивые двухслойные разностные схемы для (9), (10) на основе принципа регуляризации.

4.2. Аддитивная регуляризация

В соответствии с принципом регуляризации выберем вначале какую-нибудь разностную схему, от которой мы и будем отталкиваться. В качестве такой производящей схемы естественно рассмотреть простейшую явную схему

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \Lambda y^n = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{11}$$

$$y^0 = g, \quad \mathbf{x} \in \omega, \tag{12}$$

где $N\tau = T$.

Запишем разностную схему (11), (12) в канонической форме двухслойных операторно-разностных схем (1) с операторами

$$A = \Lambda, \quad B = E,$$

где E — единичный (тождественный) оператор. С учетом неравенства $A \leqslant \|A\| E$ из необходимых и достаточных условий устойчивости (2) получим следующие ограничения на шаг по времени для явной схемы (11), (12)

$$\tau \leqslant \frac{2}{\|\Lambda\|}.$$

В нашем случае $\|\Lambda\| = O(|h|^2)$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$ и максимально допустимый шаг $\tau_0 = O(|h|^2)$.

В соответствии с (2) повышение устойчивости может достигаться двояко. В первом случае — за счет увеличения энергии (By, y) оператора B (левой части неравенства (2)) или же за счет уменьшения энергии оператора A (правой части неравенства (2)). Рассмотрим вначале возможности, связанные с добавлением операторных слагаемых в операторы B и A. В этом случае будем говорить об аддитивной регуляризации.

Наиболее естественно начать с аддитивного возмущения оператора B, т. е. с перехода $B \longmapsto B + \alpha R$, где R — регуляризирующий оператор, а α — параметр регуляризации. Принимая во внимание, что для нашей производящей схемы $B = E$, положим

$$A = \Lambda, \quad B = E + \alpha R. \tag{13}$$

Для того чтобы сохранить первый порядок аппроксимации в схеме (1), (13), достаточно выбрать $\alpha = O(\tau)$.

В качестве характерных рассмотрим два способа выбора регуляризирующего оператора:

$$R = \Lambda, \tag{14}$$

$$R = \Lambda^2. \tag{15}$$

Теорема 3. *Регуляризованная разностная схема* (1), (13) *устойчива в* H_A *при* $\alpha \geqslant \frac{\tau}{2}$ *в случае* (14) *и* $\alpha \geqslant \frac{\tau^2}{16}$ *при* (15).

Регуляризованная схема (1), (13), (14) соответствует использованию стандартной схемы с весами

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \Lambda(\sigma y^{n+1} + (1 - \sigma) y^n) = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad n = 0, 1, \ldots, N - 1,$$

при выборе $\alpha = \sigma\tau$.

Существует еще одна принципиальная возможность аддитивной регуляризации за счет возмущения оператора A, когда $A \longmapsto A - \alpha R$. Примером является (см., например, [12]) выбор регуляризирующего оператора согласно (15). Подчеркнем, что в этом случае схема остается явной. Для разностной схемы (1) при

$$A = \Lambda - \alpha\Lambda^2, \quad B = E$$

условие неотрицательности оператора A и условие устойчивости (2) приводят к ограничениям на параметр регуляризации

$$\alpha \geqslant \frac{1}{\|\Lambda\|} = O(|h|^2), \quad \alpha \leqslant \frac{\tau}{8}.$$

При оптимальном выборе α получим $\tau \leqslant \frac{8}{\|\Lambda\|}$, т. е. удается увеличить максимальный допустимый шаг по времени для явной схемы в четыре раза.

4.3. Мультипликативная регуляризация

Стандартный подход к построению устойчивых схем базируется на использовании аддитивной регуляризации. Вторая возможность связана с мультипликативным возмущением сеточных операторов производящей схемы. Рассмотрим некоторые простейшие примеры использования такого подхода, часть из которых можно рассматривать как новую интерпретацию уже рассмотренных выше регуляризованных схем.

При мультипликативной регуляризации оператора B произведем, например, замену $B \longmapsto B(1+\alpha R)$ или $B \longmapsto (1+\alpha R)B$. При таком возмущении мы остаемся в классе схем с самосопряженными операторами, если $R = R^*$. При этом мы имеем регуляризованную схему (1), (13), которая исследовалась выше.

Пример более сложной регуляризации дается преобразованием

$$B \longmapsto (E+\alpha R^*)B(E+\alpha R).$$

В случае $R = \Lambda$ условие устойчивости имеет вид $\alpha \geqslant \frac{\tau}{8}$. Другой интересный пример такой регуляризации соответствует попеременно-треугольному методу [2], когда $A = R^* + R$ и $\alpha \geqslant \frac{\tau}{2}$.

Аналогично проводится мультипликативная регуляризация за счет возмущения оператора A. С учетом неравенства (2) можно осуществить преобразование $A \longmapsto A(1+\alpha R)^{-1}$ или $A \longmapsto (1+\alpha R)^{-1}A$. Для простейших двухслойных схем такая регуляризация может рассматриваться как новая редакция регуляризации оператора B. Для того чтобы остаться в классе схем с самосопряженными операторами достаточно выбрать $R = R(A)$. Большие возможности предоставляет регуляризация

$$A \longmapsto (E+\alpha R^*)^{-1}A(E+\alpha R)^{-1}.$$

В этом случае регуляризирующий оператор R может напрямую не связываться с оператором A.

4.4. Регуляризирующие операторы простой структуры

При построении устойчивых разностных схем на основе принципа регуляризации одной из наиболее важных является проблема выбора регуляризирующего оператора R. Выше мы обсудили некоторые возможные структуры, связанные с тем или иным возмущением операторов разностной схемы. Для задания регуляризирующих операторов фактически здесь использовались только две возможности — (14), (15). Их выбор можно подчинить требованию более простой вычислительной реализации. В работах [1–3] при построении схем для задач с переменными коэффициентами регуляризирующий оператор соответствует задаче с постоянные коэффициентами. В этом случае сеточная задача на новом временном слое существенно упрощается.

Для модельной задачи (5)–(7) естественно связать выбор регуляризирующего оператора с оператором Лапласа

$$\Lambda_0 y = -\sum_{i=1}^{2} y_{\bar{x}_i x_i},$$

который определен на множестве сеточных функций $y(\mathbf{x})$, таких что $y(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \neq \omega$. С учетом сформулированных выше ограничений на коэффициент $k(x)$ получим

$$m\Lambda_0 \leqslant \Lambda \leqslant M\Lambda_0, \quad m > 0.$$

Выберем теперь регуляризирующий оператор $R = \Lambda_0$.

Для регуляризованной схемы (1), (13) при таком R условие устойчивости принимает вид $\alpha \geqslant M\frac{\tau}{2}$. Аналогично для схемы с мультипликативной регуляризацией

$$A = \Lambda, \quad B = (E + \alpha\Lambda_0)(E + \alpha\Lambda_0)$$

получим $\alpha \geqslant M\frac{\tau}{8}$.

5. Регуляризованные аддитивные схемы полной аппроксимации

Построение экономичных разностных схем для многомерных уравнений с частными производными позволило сформулировать понятие аддитивных разностных схем [2, 13], для которых характерно разбиение (расщепление) оператора задачи на сумму операторов более простой структуры. Класс аддитивных схем включает [2, 14] схемы расщепления по отдельным направлениям (локально-одномерные схемы), схемы расщепления по физическим процессам, регионально-аддитивные схемы декомпозиции области при построении параллельных алгоритмов. Аддитивные разностные схемы в общих условиях расщепления оператора задачи на сумму неперестановочных несамосопряженных операторов наиболее просто строятся для двухкомпонентного расщепления. Более сложная ситуация имеет место для случая многокомпонентного (на три и более операторов) расщепления. Для таких задач наиболее интересные результаты получены при использовании понятия суммарной аппроксимации [15, 16].

Здесь строятся аддитивные разностные схемы для дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядка для общего случая аддитивного расщепления с произвольным числом попарно некоммутируемых операторных слагаемых. Построение безусловно устойчивых схем основывается на регуляризации простейшей явной двух- или трехслойной схемы за счет малого мультипликативного возмущения каждого из операторов расщепления. Такой подход охватывает основные классы нестационарных задач математической физики.

5.1. Аддитивные разностные схемы

Рассматривается задача Коши для дифференциально-операторного уравнения (9), (10). Будем считать, что для оператора Λ справедливо следующее аддитивное представление:

$$\Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha, \quad \Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^* > 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{16}$$

В модельной двумерной задаче (5)–(7) имеем $p = 2$ и

$$\Lambda_i y = -(a_i y_{\bar{x}_i})_{x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Аддитивные разностные схемы строятся на основе представления (16), причем переход с одного временного слоя t^n на другой временной слой $t^{n+1} = t^n + \tau$ связан с решением задач для отдельных операторов Λ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, в аддитивном разложении (16), т. е. задача распадается на p подзадач.

5.2. Регуляризованные аддитивные схемы

Аддитивные схемы будем строить на основе принципа регуляризации разностных схем. В качестве производящей при конструировании безусловно устойчивых аддитивных схем для задачи (9), (10), (16) рассмотрим простейшую явную схему

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sum_{i=1}^{p} \Lambda_i y^n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{17}$$

При мультипликативной регуляризации будем возмущать каждое операторное слагаемое в (17):

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sum_{i=1}^{p} (E + \sigma\tau\Lambda_i)^{-1} \Lambda_i y^n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{18}$$

Теорема 4. *При $\sigma_\alpha \geqslant p/2$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, и любых $\tau > 0$ для (12), (18) выполняется априорная оценка*

$$\|y^{n+1}\| \leqslant \|g\|. \tag{19}$$

Рассматриваемая регуляризованная схема (18) имеет тесную связь с аддитивно-усредненной схемой суммарной аппроксимации [17, 18]. Будем реализовывать схему (18) в следующей форме:

$$(E + \sigma\tau\Lambda_i) \frac{y_{(i)}^{n+1} - y^n}{p\tau} + \Lambda_i y^n = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$y^{n+1} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} y_{(i)}^{n+1}.$$

Тем самым мы приходим к аддитивно-усредненной схеме, построение которой проводится теперь без привлечения понятия суммарной аппроксимации. Отличие от стандартных аддитивно-усредненных схем покомпонентного расщепления в общем случае связано с выбором правых частей.

6. Обратные эволюционные задачи

Многие прикладные проблемы формулируются как обратные задачи математической физики, которые обычно относятся к классу некорректных в классическом смысле задач. Для их приближенного решения широко используются методы регуляризации [19]. Для обратных задач для эволюционных уравнений применяется также метод квазиобращения [9, 20]. Здесь мы приведем некоторые основные результаты по построению разностных схем для неустойчивых задач на основе принципа регуляризации. Более подробное изложение имеется в оригинальных работах [5–8] и обзоре [9].

6.1. Задача с обратным временем

В прямоугольнике Ω будем искать решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{20}$$

которое отличается от (5) только знаком при производных по пространству (соответствует использованию замены t на $-t$ — уравнение с обратным временем). Граничные и начальные условия остаются прежними (см. (6), (7)).

Обратная задача (6), (7), (20) является некорректной в силу неустойчивости решения относительно малых возмущений начальных условий. При рассмотрении класса ограниченных решений уже имеется устойчивость (корректность по А. Н. Тихонову), которая следует из оценки

$$\|u(x,t)\| \leqslant \|u(x,0)\|^{1-t/T} \|u(x,T)\|^{t/T}.$$

Дифференциальной задаче (6), (7), (20) поставим в соответствие задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} - \Lambda y = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad 0 < t < T. \tag{21}$$

Построим безусловно устойчивые разностные схемы для (10), (21) на основе принципа регуляризации разностных схем.

6.2. Регуляризованные разностные схемы

Используем принцип регуляризации для построения разностных схем для некорректной задачи (10), (21). Начнем с простейшей явной разностной схемы

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} - \Lambda y^n = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \tag{22}$$

которую дополним начальным условием (12).

В соответствии с принципом регуляризации запишем схему (22) в каноническом виде с

$$A = -\Lambda, \quad B = E, \tag{23}$$

т. е. $A = A^* < 0$.

Явная схема (22) ϱ-устойчива в H с

$$\varrho = 1 + M\tau. \tag{24}$$

Этот результат следует из условий ϱ-устойчивости (4) для схемы (1), (23). При наших предположениях $B > 0$, $A < 0$ для $\varrho > 1$ правая часть двустороннего операторного неравенства (4) очевидно выполнена при всех $\tau > 0$. Левая часть (4) принимает вид $(\varrho - 1)/\tau E \geqslant \Lambda$ и имеет место при выборе ϱ согласно (24).

При приближенном решении некорректных задач выбор параметра регуляризации должен быть согласован с уровнем погрешности во входных данных. Здесь мы ограничились построением устойчивых вычислительных алгоритмов для некорректных эволюционных задач и исследованием влияния параметра регуляризации только на устойчивость соответствующей разностной схемы. При заданном параметре регуляризации α указывается минимальное значение ϱ согласно (24).

Исходя из явной схемы (22) для задачи (10), (21) запишем регуляризованную схему в каноническом виде (1) с

$$A = \Lambda, \quad B = E + \alpha R. \tag{25}$$

Теорема 5. *Регуляризованная схема* (1), (25) *ϱ-устойчива в H_B с*

$$\varrho = 1 + \frac{\tau}{\alpha} \tag{26}$$

при выборе регуляризирующего оператора согласно (14) *и*

$$\varrho = 1 + \alpha^{-1/2}\frac{\tau}{2} \tag{27}$$

если используется (15).

Для доказательства можно ограничиться проверкой выполнения левой части двустороннего неравенства (4), которое для (25) принимает вид

$$\frac{\varrho - 1}{\tau}(E + \alpha R) \geqslant \Lambda. \tag{28}$$

При $R = \Lambda$ и выборе ϱ в виде (26) неравенство (28) выполнено. При $R = \Lambda^2$ неравенство (28) преобразуется следующим образом:

$$E + \alpha\Lambda^2 - \frac{\tau}{\varrho - 1} = \left(\alpha^{1/2}\Lambda - \frac{\tau}{2(\varrho-1)}\alpha^{-1/2}E\right)^2 + \left(1 - \frac{\tau^2}{4(\varrho-1)^2}\alpha^{-1}\right)E \geqslant 0.$$

Это неравенство будет выполнено при выборе ϱ в виде (27).

С построенными регуляризованными разностными схемами можно связать те или иные (стандартные или нестандартные) варианты метода квазиобращения. Аналогично строятся и другие регуляризованные разностные схемы. В частности, рассмотрены эволюционные задачи второго порядка, задачи с несамосопряженными операторами, аддитивные схемы для многомерных обратных задач и т. д.

7. Нелинейные монотонные схемы

При численном решении многомерных нестационарных задач механики сплошной среды, задач газовой динамики в качестве базового выступает линейное уравнение переноса [21, 22]. Среди основных свойств решений начально-краевых задач для уравнения переноса выделяют принцип максимума. Разностные схемы, которые удовлетворяют принципу максимума, называют монотонными.

Для уравнения переноса легко строятся безусловно монотонные разностные схемы первого порядка по пространству с использованием направленных разностных производных. Хорошо известно, что в классе однородных линейных схем отсутствуют монотонные схемы с порядком аппроксимации по пространству выше первого. При численном решении задач механики сплошной среды широко используются более точные нелинейные монотонные схемы. Среди первых исследований в этом направлении выделим работу [23].

В настоящее время особое внимание в литературе уделяется разностным схемам TVD. Безусловная монотонность достигается за счет нелинейного ограничения потоков в исходной схеме с направленными разностями второго порядка. Эти исследования инициированы в работах [24, 25]. Мы будем строить монотонные однородные нелинейные разностные схемы для уравнения переноса на основе регуляризации (возмущения) схемы второго порядка аппроксимации. В качестве производящей выбираются схемы со стандартными аппроксимациями первой производной второго порядка центральными разностями.

7.1. Задача Коши для уравнения переноса

Рассматривается одномерное уравнение переноса в недивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{29}$$

дополненное начальном условием

$$u(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{30}$$

Будем считать, что по переменной x введена равномерная сетка с шагом h, через $x_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ обозначим узлы сетки, и пусть $v = v_i = v(x_i)$. При переходе с одного временного слоя на другой временной слой будем использовать явные разностные схемы. В силу нелинейности рассматриваемых разностных схем проблемы использования неявных разностных схем заслуживают особого исследования.

Простейшей условно устойчивой явной схемой является схема с направленными разностями [2, 3]. Ограничимся для простоты случаем $a(x,t) \geqslant 0$ в (29) и используем разностную схему

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + a^n y^n_{\bar{x}} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{31}$$

при начальном условии $y^0 = g$. Эта схема аппроксимирует исходную задачу (29), (30) с первым порядком по времени и пространству.

Для разностной схемы (31) выполнен принцип максимума (схема монотонна) при стандартных ограничениях на сеточные параметры:

$$\max_i a^n_i \frac{\tau}{h} \leqslant 1, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{32}$$

При этом для разностного решения имеет место послойная оценка устойчивости

$$\|y^{n+1}\|_\infty \leqslant \|y^n\|_\infty, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \|v\|_\infty \equiv \max_i |v|.$$

Монотонность схемы обеспечивается, с одной стороны, условием неотрицательности коэффициента a^n, а также, с другой стороны, условием (32).

7.2. Нелинейная регуляризация

Будем строить монотонные разностные схемы на основе принципа регуляризации разностных схем — за счет возмущения коэффициентов схемы, которые не относятся к классу монотонных.

В качестве производящей возьмем абсолютно неустойчивую схему с центральными разностями

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + a^n y^n_{\overset{\circ}{x}} = 0, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{33}$$

Эта схема имеет, однако, и существенное преимущество перед схемой (31) — она аппроксимирует (29) со вторым порядком по пространству. Поэтому хотелось бы сохранить в каком-то виде это достоинство, сочетая его с условной монотонностью явной схемы (31) с направленными разностями.

Запишем схему (33) как схему с направленными разностями

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \tilde{a}^n y^n_{\bar{x}}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{34}$$

с нелинейным коэффициентом

$$\tilde{a}^n = a^n \left(1 + \frac{h}{2}\frac{y^n_{\bar{x}x}}{y^n_{\bar{x}}}\right). \tag{35}$$

Нелинейная разностная схема (35) будет монотонной, если

$$\tilde{a}^n \geqslant 0, \tag{36}$$

$$\max_i \tilde{a}^n_i \frac{\tau}{h} \leqslant 1, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{37}$$

Из (35)–(37) следует, что нарушение монотонности наблюдается в окрестности экстремумов разностного решения.

Необходимо от исходной (производящей) немонотонной разностной схемы перейти к новой уже монотонной схеме (34). За счет малого возмущения коэффициентов (с сохранением хороших свойств производящей схемы — второго порядка аппроксимации) нужно получить схему (34), для которой достаточные условия монотонности и устойчивости (36), (37) будут выполнены.

В (35) перепишем коэффициент в более удобном виде

$$\tilde{a}^n = a^n \chi^n \tag{38}$$

с множителем

$$\chi^n = \left(1 + \frac{h}{2}\frac{y^n_{\bar{x}x} y^n_{\bar{x}}}{|y^n_{\bar{x}}|^2}\right).$$

Будем возмущать коэффициент χ^n, полагая

$$\chi^n = \left(1 + \frac{h}{2}\frac{y^n_{\bar{x}x} y^n_{\bar{x}}}{|y^n_{\bar{x}}|^2 + \gamma^2 h^2 |y^n_{\bar{x}x}|^2}\right) \tag{39}$$

с параметром γ. Дополнительные (регуляризирующие) слагаемые в χ^n в (39) имеют третий порядок по h. Тем самым регуляризованная схема (34), (38), (39) аппроксимирует исходное уравнение (29), как и схема (33) (схема (34), (35)) со вторым порядком по пространству.

Сформулируем условия монотонности схемы (34), (38), (39). Коэффициент $\tilde{a}^n$ (условие (36)) будет неотрицательным при $\gamma \geqslant 0{,}25$. Шаги сетки должны удовлетворять условию (37), которое с учетом (38), (39) эквивалентно неравенству

$$\max_i a^n_i \frac{\tau}{h}\left(1 + \frac{1}{4\gamma}\right) \leqslant 1, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{40}$$

Тем самым для регуляризованной схемы (34), (38), (39) при минимально допустимом значении параметра $\gamma = 0{,}25$ максимально допустимый шаг по времени в соответствии с (32), (40) уменьшается в два раза по сравнению со схемой (31).

Данный результат обобщается в различных направлениях: многомерные задачи, уравнение переноса в дивергентной форме, неравномерные сетки и т. д.

Литература

[1] Самарский А. А. О регуляризации разностных схем // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1967. — Т. 7, № 1. — С. 62–93.

[2] Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.

[3] Самарский А. А. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.

[4] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

[5] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Разностные схемы для неустойчивых задач // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2, № 11. — С. 89–98.

[6] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Regularized difference schemes for evolutionary second order equations // Math. Models and Methods in Applied Sciences. — 1992. — V. 3, No. 3. — P. 295–315.

[7] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Регуляризованные разностные схемы для уравнений с несамосопряженными операторами // Математическое моделирование. — 1992. — Т. 4, № 2. — С. 36–44.

[8] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Регуляризованные трехслойные разностные схемы с несамосопряженными операторами // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29, № 7. — С. 1244–1251.

[9] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Разностные методы решения обратных задач математической физики // Фундаментальные основы математического моделирования. — М.: Наука, 1997. — С. 5–97.

[10] Самарский А. А. Необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 181, № 4. — С. 808–811.

[11] Самарский А. А. Об устойчивости трехслойных разностных схем // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 192, № 5. — С. 998–1001.

[12] Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. — М.: Физматгиз, 1960.

[13] Самарский А. А. О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики // Aplikace Matematiky. — 1965. — V. 10, No. 2. — P. 146–164.

[14] Марчук Г. И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1989.

[15] Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1962. — Т. 2, № 5. — С. 787–811.

[16] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1967.

[17] Гордезиани Д. Г., Меладзе Г. В. О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1974. — Т. 14, № 1. — С. 246–250.

[18] Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Computational heat transfer. — Chichester: Wiley, 1995.

[19] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.

[20] Латтес Р., Лионс Ж. Л. Метод квазиобращения и его приложения. — М.: Мир, 1970.

[21] Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1992.

[22] Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. V. 2: Computational methods for inviscid and viscous flows. — Chichester: Wiley, 1988.

[23] Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Шишова Т. В. Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1965. — Т. 5, № 5. — С. 938–944.

[24] Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. — 1972. — Т. 3, № 6. — С. 68–77.

[25] Harten A. High resolution scheme for the computation of weak solution of hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. — 1983. — V. 49, No. 3. — P. 357–393.

Статья поступила в редакцию в мае 1998 г.