1998. Т. 34, № 7. С. 980 — 987

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. А. Самарский, В. И. Мажукин, П. П. Матус

Неравномерные сетки часто используются в вычислительной практике при численном решении задач математической физики (задач в сложных нерегулярных областях, с негладкими решениями и др.). При переходе от равномерной сетки к неравномерной порядок локальной погрешности аппроксимации обычно понижается, что существенно сказывается на точности вычислительного процесса.

В [1] для одномерных нестационарных задач построены и исследованы различные классы конечно-разностных методов повышенного порядка аппроксимации на неравномерных прямоугольных сетках. В [2 — 4] полученные результаты обобщаются на многомерные эллиптические уравнения как в простых, так и в сложных областях. Основная идея предлагаемого метода заключается в том, что уравнение аппроксимируется в некоторой неузловой точке (в случае прямоугольных сеток — это центр масс системы материальных точек единичной массы, входящих в шаблон схемы).

В настоящей работе приведены новые результаты по построению и исследованию разностных схем высокого порядка точности для многомерного параболического уравнения на произвольных неравномерных прямоугольных сетках и получены априорные оценки устойчивости и сходимости сеточного решения. Для одномерных задач доказана безусловная сходимость (без ограничений на сеточные шаги τ и h) со вторым порядком предложенных в [1] вычислительных методов. Исследование устойчивости и сходимости базируется на общей теории операторно-разностных схем [5].

1. Априорные оценки для одномерных задач. В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0,T]$, $\overline{\Omega} = \{x:\ 0 \le x \le l\}$ рассмотрим первую краевую задачу для параболического уравнения

$$\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2 + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \qquad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{1.2}$$

Введем произвольную неравномерную пространственную сетку

$$\widehat{\overline{\omega}}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i,\ i = 1,2,\dots,N, \quad x_0 = 0,\ x_N = l\} = \widehat{\omega}_h \cup \{x_0 = 0,\ x_N = l\} \tag{1.3}$$

и временную сетку с постоянным шагом τ $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,\dots,N_0;\ \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}$. Определим сеточный оператор по пространству

$$\Lambda u = u_{\bar{x}\hat{x}} = \frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}\right), \quad \hbar_i = 0{,}5(h_i + h_{i+1}).$$

На сетке $\overline{\omega} = \widehat{\overline{\omega}}_h \times \overline{\omega}_\tau$ дифференциальную задачу (1.1), (1.2) аппроксимируем чисто неявной разностной схемой (для простоты дальнейших выкладок предполагаем $h_{i+1} \ge h_i$, $i = 1,\dots,N-1$) [1]

$$y_t + ((h_+ - h)/3) y_{t\bar{x}} = \hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + f(\overline{x},\hat{t}), \tag{1.4}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \widehat{\omega}_h; \qquad \hat{y}_0 = \hat{y}_N = 0. \tag{1.5}$$

Здесь используем стандартные обозначения теории разностных схем [5]: $h_+ = h_{i+1}$, $h = h_i$, $y_{t\bar{x}} = (y_{t,i} - y_{t,i-1})/h_i$, $y_t = (\hat{y} - y)/\tau$, $\hat{y} = y(x, t+\tau)$, $\overline{x} = \overline{x}_i = (x_{i+1} + x_i + x_{i-1})/3 = x_i + (h_{i+1} - h_i)/3 = x + (h_+ - h)/3$. Заметим, что в случае равномерной сетки $(h_{i+1} = h_i)$ разностное уравнение (1.4) вырождается в обычную схему.

С помощью формулы Тейлора нетрудно получить разложения [1, 6]

$$\widehat{u}_{\bar{x}\hat{x},i} - \partial^2 u(\overline{x}_i, t_{n+1})/\partial x^2 = \mathrm{O}\,(\hbar_i^2), \tag{1.6}$$

$$u_{t,i} + ((h_{i+1} - h_i)/3)u_{t\bar{x},i} - \partial u(\overline{x}_i, t_{n+1})/\partial t = \mathrm{O}\,(\hbar_i^2 + \tau), \tag{1.7}$$

в силу которых невязка схемы

$$\psi(\overline{x}_i, t_{n+1}) = -u_{t,i} - ((h_{i+1} - h_i)/3)u_{t\bar{x},i} + \widehat{u}_{\bar{x}\hat{x},i} + f(\overline{x}_i, \hat{t}) = \mathrm{O}\,(\hbar_i^2 + \tau). \tag{1.8}$$

Следовательно, разностная схема (1.4), (1.5) на произвольной неравномерной сетке по пространству аппроксимирует исходную дифференциальную задачу со вторым порядком, так что

$$\max_{t\in\omega_\tau} \|\psi\|_C \le M_1(h^2 + \tau), \quad h = \max_i h_i, \tag{1.9}$$

где $\|\cdot\|_C = \max_{x\in\widehat{\omega}_h} |\cdot|$, $M_1 = \mathrm{const} > 0$.

Введем скалярные произведения и нормы на неравномерной сетке:

$$(y, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} \hbar_i y_i v_i, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h_i y_i v_i, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} h_i y_i v_i,$$

$$\|v_{\bar{x}}\|_C = \max_{x\in\omega^+} |v_{\bar{x}}(x)|, \quad \omega^+ = \widehat{\omega}_h \cup \{x_N = l\}.$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости разностной схемы в энергетической полунорме W_2^2.

Теорема 1. *Разностная схема (1.4), (1.5) абсолютно устойчива при $h_+ \ge h$ по начальным данным, правой части и для любого $t \in \omega_\tau$ имеет место оценка*

$$\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_* \le M_2(\|u_{0\bar{x}\hat{x}}\|_* + \|\overline{f}_0\|_*) + \|\overline{f}_n\|_* + M_3 \max_{1\le k\le n} \|\overline{f}_{\bar{t},k}\|_*, \tag{1.10}$$

где постоянные $M_2 = \exp(0,5T)$, $M_3 = M_2\sqrt{T}$, а $\overline{f}_k = f(\overline{x}, t_k)$.

Доказательство. Умножим уравнение (1.4) скалярно на $-2\tau\hbar_i y_{t\bar{x}\hat{x},i}$, просуммируем по всем узлам сетки $\widehat{\omega}_h$ и получим энергетическое тождество

$$2\tau\left(\|y_{t\bar{x}}]|^2 - \left(\frac{h_+ - h}{3} y_{t\bar{x}}, y_{t\bar{x}\hat{x}}\right)_*\right) = -\|\widehat{y}_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 - \tau^2\|y_{t\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 - 2\tau(y_{t\bar{x}\hat{x}}, \hat{\overline{f}}), \tag{1.11}$$

в котором, используя ε-неравенство $-ab \ge -\varepsilon a^2 - b^2/(4\varepsilon)$ при $\varepsilon = 1$, преобразуем выражение

$$-\left(\frac{h_+ - h}{3\hbar}, y_{t\bar{x}} y_{tx} - y_{t\bar{x}}^2\right)_* \ge \left(\frac{h_+ - h}{3\hbar}, y_{t\bar{x}}^2\right)_* - \left(\frac{h_+ - h}{3\hbar}, y_{t\bar{x}}^2 + \frac{1}{4} y_{tx}^2\right)_* = -\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{N-1}(h_+ - h)y_{tx,i}^2 =$$

$$= -\frac{1}{12}\sum_{i=2}^{N}(h - h_-)y_{t\bar{x},i}^2 = -\frac{1}{12}\left(\frac{h - h_-}{h}, y_{t\bar{x}}^2\right], \quad h_0 = h_1.$$

Подставив данную оценку в (1.11), приходим к неравенству

$$0 \le -\|\widehat{y}_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 - 2\tau(y_{t\bar{x}\hat{x}}, \hat{\overline{f}})_*. \tag{1.12}$$

С помощью тождеств $2(u, v)_* = -\|u - v\|_*^2 + \|u\|_*^2 + \|v\|_*^2$, $\|\hat{v}\|_*^2 - 2\tau(v, v_t)_* - \|v\|_*^2 = \tau^2\|v_t\|_*^2$, преобразуем в последнем неравенстве выражение $-\|\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 - 2\tau(y_{t\bar{x}\hat{x}}, \hat{\overline{f}})_* = -\|\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 - 2(\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}}, \hat{\overline{f}})_* + 2(y_{\bar{x}\hat{x}}, \overline{f})_* + 2(y_{\bar{x}\hat{x}} + \overline{f}, \tau\overline{f}_t)_* - 2\tau(\overline{f}, f_t)_* \le -\|\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + \hat{\overline{f}}\|_*^2 + (1 + \tau)\|y_{\bar{x}\hat{x}} + \overline{f}\|_*^2 + \tau(1 + \tau)\|f_t\|_*^2$, учитывая которое в (1.12), приходим к оценке вида $\|\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + \hat{\overline{f}}\|_*^2 \le (1 + \tau)(\|y_{\bar{x}\hat{x}} + \overline{f}\|_*^2 + \tau\|\overline{f}_t\|_*^2) \le \ldots \le e^{t_n}(\|u_{0\bar{x}\hat{x}} + \overline{f}_0\|_*^2 + t_n \max_{0\le k\le n} \|f_{t,k}\|_*^2)$ или $\|\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + \hat{\overline{f}}\|_*^2 \le e^{0,5t_n}(\|u_{0\bar{x}\hat{x}} + \overline{f}_0\|_*^2 + \sqrt{t_n} \max_{0\le k\le n} \|f_{t,k}\|_*^2)$. Так как $\|\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + \hat{\overline{f}}\|_* \ge \|\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}}\|_* - \|\hat{\overline{f}}\|_*$, $\|u_{0\bar{x}\hat{x}} + \overline{f}_0\|_* \le \|u_{0\bar{x}\hat{x}}\|_* + \|\overline{f}_0\|_*$, то отсюда следует требуемая априорная оценка. Теорема доказана.

Для нахождения оценок точности, подставим $y = z + u$ в уравнения (1.4), (1.5). Получим задачу для погрешности $z_t + ((h_+ - h)/3)z_{t\bar{x}} = \widehat{z}_{\bar{x}\hat{x}} + \psi(\overline{x}, \hat{t})$, $z(x, 0) = 0$, $\widehat{z}_0 = \widehat{z}_N = 0$, где погрешность аппроксимации $\overline{\psi}$ определяется согласно (1.8). Воспользуемся для решения данной задачи априорными оценками (1.10), (1.9) и найдем в предположении существования соответствующих ограниченных производных следующую оценку скорости сходимости: $\max_{t\in\omega_\tau}\|z_{\bar{x}\hat{x}}\|_* \le c(h^2+\tau)$, $c = \text{const} > 0$.

Замечание 1. Разностная схема (1.4), (1.5) построена и исследована в случае сгущения пространственной сетки $\hat{\overline{\omega}}_h$ к началу отрезка: $h_+ \ge h$. При произвольном сгущении аппроксимацию производной $\partial u/\partial t$ следует проводить с учетом направленных разностей: $y_t + 0{,}5(\widetilde{h}+|\widetilde{h}|)y_{t\bar{x}} + 0{,}5(\widetilde{h}-|\widetilde{h}|)y_{tx} = \widehat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + f(\overline{x},\hat{t})$, где $\widetilde{h} = (h_+ - h)/3$.

Разностная схема “по потоку”. Рассмотрим схему второго порядка аппроксимации (по-прежнему полагаем $h_+ \ge h$)

$$y_t + ((h_+ - h)/3)y_{tx} = y^{(\sigma)}_{\bar{x}\hat{x}} + \varphi, \quad \varphi = f^{(\sigma)}(\overline{x},t); \tag{1.13}$$

здесь $v^{(\sigma)} = \sigma\hat{v} + (1-\sigma)v$.

Для исследования данной схемы воспользуемся общей теорией устойчивости операторно-разностных схем [5]. Для этого определим сеточные операторы A и A_1: $(Ay)_i = -y_{\bar{x}\hat{x},i}$, $i = 1,2,\ldots,N-1$, $y_0 = y_N = 0$; $(A_1y)_i = ((h_{i+1}-h_i)/3)y_{x,i}$, $i = 1,2,\ldots,N-1$, $y_0 = y_N = 0$. Пусть $\mathring{\Omega}_h$ — множество сеточных функций, заданных при каждом $t \in \overline{\omega}_\tau$ на $\hat{\overline{\omega}}_h$ и равных нулю на границе. Определим вектор $y = y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{N-1}(t))^{\mathrm{T}}$ и линейное пространство $H = \Omega_h$ как множество таких векторов со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_*$ и нормой $\|\cdot\|_* = \sqrt{(\cdot,\cdot)_*}$. Так как $A = A^* > 0$, то через H_A обозначим гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства H и снабженное скалярным произведением и нормой

$$\|y\|_A^2 = (Ay,y)_* = \|y_{\bar{x}}]|^2 = \sum_{i=1}^{N} h_i y_{\bar{x},i}^2.$$

Тогда разностная схема (1.13), (1.5) может быть записана в каноническом виде

$$By_t + Ay = \varphi, \qquad y_0 = u_0, \tag{1.14}$$

$$B = D + \sigma\tau A, \qquad D = E + A_1. \tag{1.15}$$

Лемма 1. *При произвольных соотношениях на сеточные шаги и $h_+ \ge h$ имеет место операторное неравенство $A_1 \ge -(2/3)E$.*

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение

$$(Dy,y)_* = \|y\|_*^2 + \left(\frac{h_+ - h}{3h_+}, y_+y - y^2\right)_* = \left(\frac{2h_+ + h}{3h_+}, y^2\right)_* + \left(\frac{h_+ - h}{3h_+}y_+, y\right)_*. \tag{1.16}$$

Так как при $h_+ \ge h$ $(-\hbar_-/\hbar \ge -1)$ $\left(\frac{h_+ - h}{3h_+}y_+, y\right)_* \ge -\left(\frac{h_+ - h}{6h_+}, y^2\right)_* - \left(\frac{h - h_-}{6h}, y^2\right)_*$, то из (1.16) находим $(Dy,y)_* \ge ((2h_+h + 3h^2 + h_+h_-)/(6hh_+), y^2)_* \ge \|y\|_*^2/3$, откуда, учитывая, что $D = E + A_1$, и следует требуемое неравенство.

Для получения оценок устойчивости в H_A, воспользуемся следующим результатом [5, с. 369].

Лемма 2. *Пусть в схеме (1.14) линейные постоянные операторы $A, B : H \to H$ удовлетворяют условиям*

$$B > 0, \quad A = A^* > 0, \quad B \ge 0{,}5\tau A. \tag{1.17}$$

Тогда схема устойчива по начальным данным, правой части и для решения задачи (1.14) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A \le \|y_0\|_A + \|\varphi_0\|_{A^{-1}} + \|\varphi_n\|_{A^{-1}} + \sum_{k=1}^{n} \tau\|\varphi_{\bar{t},k}\|_{A^{-1}}. \tag{1.18}$$

Для самосопряженного оператора $Ay = -y_{\bar{x}\hat{x}}$ используем известные оценки [5]: $E \ge A/\|A\|$, $\|A\| \le \max_{1\le i\le N-1} 4/(h_ih_{i+1}) \le 4/h_{\min}^2$, $h_{\min} = \min_i h_i$. Проверка достаточного условия устойчивости (1.17) для схемы (1.14), (1.15) $B - 0{,}5\tau A \ge (1/3)E + (\sigma - 0{,}5)\tau A \ge (1/(3\|A\|) + (\sigma - 0{,}5)\tau)A \ge (h^2_{\min}/12 + (\sigma - 0{,}5)\tau)A \ge 0$ приводит к следующему ограничению на σ:

$$\sigma \ge (1/2) - h^2_{\min}/(12\tau). \tag{1.19}$$

Итак, нами доказана

Теорема 2. *Разностная схема (1.13), (1.5) при $h_+ \ge h$, выполнении условия (1.19) устойчива по начальным данным, правой части и для ее решения имеет место априорная оценка (1.18).*

Из (1.19) следует, что явная схема ($\sigma = 0$) устойчива в H_A при $\tau \le h^2_{\min}/6$.

Консервативные схемы. На неравномерной сетке $\omega = \widehat{\omega}_h \times \omega_\tau$ рассмотрим класс разностных схем с весами [1]

$$y_t + (h^2 y_{t\bar{x}}/6)_{\hat{x}} = y^{(\sigma)}_{\bar{x}\hat{x}} + f^{(\sigma)}(\overline{x}, t). \tag{1.20}$$

Так как на гладких решениях $u_t + (h^2 u_{t\bar{x}}/6)_{\hat{x}} = u_t + ((h_+ - h)/3)u_{tx} + h^2 u_{t\bar{x}\hat{x}}/6 = \partial u(\overline{x}, t)/\partial t + O(\hbar^2 + \tau)$, то на основании (1.8) заключаем, что схема (1.20) имеет второй порядок аппроксимации по пространственной переменной $\overline{\psi} = O(\hbar^2 + \tau)$.

Определим сеточный оператор $(A_2 y)_i = (h^2 y_{\bar{x}})_{\hat{x},i}$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $y_0 = y_N = 0$. Тогда схема (1.20), (1.5) преобразуется к каноническому виду (1.14) с самосопряженными операторами B и A: $B = D + \sigma\tau A$, $D = E + A_2$. Покажем, что при $h_{i+1} \ge h_i$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, оператор $D > 0$ положительный. Действительно,

$$(Dy, y)_* = \|y\|^2_* - (h^2/6, y^2_{\bar{x}}] = \|y\|^2_* - (1/6)\|y - y_-]|^2. \tag{1.21}$$

Поскольку $-(1/6)\|y - y_-]|^2 \ge -(2/3)\|y\|^2$, то из (1.21) следует требуемое неравенство $(Dy, y)_* = ((3h_+ - h)/(6\hbar), y^2)_* > 0$. Следовательно, операторное неравенство $B - 0{,}5\tau A = D + \tau(\sigma - 0{,}5)A \ge 0$ выполнено при всех $\sigma \ge 0{,}5$ и консервативная разностная схема (1.20), (1.5) безусловно устойчива при $h_+ \ge h$ в энергетической норме H_A.

Случай переменных коэффициентов. Вместо (1.1) рассмотрим теперь более общее уравнение вида

$$\partial u/\partial t = k(x)\,\partial^2 u/\partial x^2 + r(x)\partial u/\partial x + f(x, t), \tag{1.22}$$

которое на неравномерной сетке $\omega = \widehat{\omega}_h \times \omega_\tau$ аппроксимируем разностным уравнением (для простоты по-прежнему полагаем $h_+ \ge h$)

$$y_t + ((h_+ - h)/3)y_{t\bar{x}} = k(\overline{x})\widehat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + r(\overline{x})\widehat{y}_{\overset{\circ}{x}} + f(\overline{x}, \hat{t}), \tag{1.23}$$

где $y_{\overset{\bullet}{x}} = (y_{\bar{x}} + y_x + y_{\overset{\circ}{x}})/3$, $y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h_i$, $y_x = (y_{i+1} - y_i)/h_{i+1}$, $y_{\overset{\circ}{x}} = (y_{i+1} - y_{i-1})/(h_{i+1} + h_i)$. Покажем, что на произвольной неравномерной по пространству сетке разностная схема (1.23) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (1.22) со вторым порядком $O(\hbar^2 + \tau)$. Для этого достаточно доказать [7], что $u_{\overset{\bullet}{x}} - \partial u(\overline{x}, t)/\partial x = O(\hbar^2)$. Действительно, разлагая разностные производные $u_{\bar{x}}$, u_x, $u_{\overset{\circ}{x}}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(\overline{x}_i, t)$, получаем

$$u_{\bar{x},i} = \frac{\partial u}{\partial x}(\overline{x}_i, t) - \frac{2h_{i+1} + h_i}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\overline{x}_i, t) + O(\hbar_i^2), \quad u_{x,i} = \frac{\partial u}{\partial x}(\overline{x}_i, t) + \frac{h_{i+1} + 2h_i}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\overline{x}_i, t) + O(\hbar_i^2),$$

$$u_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{\partial u}{\partial x}(\overline{x}_i, t) + \frac{h_{i+1} - h_i}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\overline{x}_i, t) + O(\hbar_i^2).$$

Отсюда $u_{\overset{\bullet}{x},i} - \partial u(\overline{x}_i, t)/\partial x = (u_{\bar{x},i} + u_{x,i} + u_{\overset{\circ}{x},i})/3 - \partial u(\overline{x}_i, t)/\partial x = O(\hbar_i^2)$. Следовательно, в силу (1.6), (1.7) невязка схемы (1.23) $\psi(\overline{x}, \hat{t}) = -(u_t + ((h_+ - h)/3)u_{t\bar{x}}) + k(\overline{x})\widehat{u}_{\bar{x}\hat{x}} + r(\overline{x})\widehat{u}_{\overset{\bullet}{x}} + f(\overline{x}, \hat{t}) = O(\hbar^2 + \tau)$ имеет второй порядок по пространственной переменной.

2. Разностные схемы для двумерного уравнения. Пусть в области $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0 \le t \le T]$, где $\overline{\Omega} = \{0 \le x_1 \le l_1,\ 0 \le x_2 \le l_2\}$ — прямоугольник с границей Γ, требуется найти функцию $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющую начально-краевой задаче

$$\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2 + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega;\quad u|_\Gamma=0,\quad t\in(0,T]. \tag{2.2}$$

В прямоугольнике $\overline{\Omega}$ введем произвольную неравномерную сетку $\widehat{\overline{\omega}}_h=\{x=x_{i_1i_2}=(x_1^{i_1},x_2^{i_2});$ $x_\alpha^{i_\alpha}=x_\alpha^{i_\alpha-1}+h_\alpha^{i_\alpha},\ i_\alpha=1,2,\ldots,N_\alpha-1,\ x_\alpha^0=0,\ x_\alpha^{N_\alpha}=l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$, для которой $\sum\limits_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}h_\alpha^{i_\alpha}=l_\alpha$, $\alpha=1,2$. Через $\widehat{\omega}_h$ обозначим множество внутренних узлов сетки $\widehat{\overline{\omega}}_h$, а через γ_h — множество граничных узлов. Пространственно-временная сетка в области $\overline{Q}_T$ вводится стандартным образом: $\widehat{\overline{\omega}}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$, $\overline{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,\ldots,N_0;\ \tau N_0=T\}=\omega_\tau\cup\{T\}$.

Простейшая разностная схема первого порядка аппроксимации на нерегулярном шаблоне "крест" имеет вид [5] $y_t=\widehat{y}_{\bar{x}_1\hat{x}_1}+\widehat{y}_{\bar{x}_2\hat{x}_2}+f(x,\hat{t})$, $(x,t)\in\omega$,

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h;\qquad \widehat{y}|_{\gamma_h}=0,\quad t\in\omega_\tau. \tag{2.3}$$

Здесь использованы стандартные безындексные обозначения теории разностных схем [5]: $y_{\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha}=(y_{x_\alpha}-y_{\bar{x}_\alpha})/\hbar_\alpha$, $y_{x_\alpha}=(y^{(+1_\alpha)}-y)/h_{\alpha+}$, $h_{\alpha\pm}=h_\alpha^{i_\alpha\pm1}$, $y_{\bar{x}_\alpha}=(y-y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha$, $\hbar_\alpha=0{,}5(h_\alpha+h_{\alpha+})$, $v^{(\pm1_1)}=v_{i_1\pm1i_2}$, $v^{(\pm1_2)}=v_{i_1i_2\pm1}$.

Разностная схема второго порядка аппроксимации на неравномерной сетке $\overline{\omega}$ имеет вид

$$y_t+\widetilde{h}_1y_{t\bar{x}_1}+\widetilde{h}_2y_{t\bar{x}_2}=\widehat{y}_{(2)\bar{x}_1\hat{x}_1}+\widehat{y}_{(1)\bar{x}_2\hat{x}_2}+f(\overline{x},\hat{t}), \tag{2.4}$$

где $\overline{x}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, $\overline{x}_\alpha=x_\alpha+\widetilde{h}_\alpha$, $\widetilde{h}_\alpha=(h_{\alpha+}-h_\alpha)/3$, $y_{(1)}=y(\overline{x}_1,x_2)=y+h_1^+y_{x_1}+h_1^-y_{\bar{x}_1}$, $y_{(2)}=y(x_1,\overline{x}_2)=y+h_2^+y_{x_2}+h_2^-y_{\bar{x}_2}$, $h_\alpha^\pm=0{,}5(\widetilde{h}_\alpha\pm|\widetilde{h}_\alpha|)$. Отметим, что значения искомой сеточной функции y в неузловых точках $(\overline{x}_1,x_2)$, $(x_1,\overline{x}_2)$ усредняются по формулам второго порядка аппроксимации с учетом направленных разностей. Аналогично можно было бы аппроксимировать и производную по времени. В случае равномерной сетки $h_\alpha^\pm=0$ и схема (2.4) преобразуется в классическую чисто неявную схему второго порядка точности по пространственной переменной $y_t=\widehat{y}_{\bar{x}_1x_1}+\widehat{y}_{\bar{x}_2x_2}+f(x,\hat{t})$.

П о г р е ш н о с т ь а п п р о к с и м а ц и и. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $f(x)$, $u_0(x)$ таковы, что решение задачи (2.1), (2.2) существует, единственно и является достаточно гладкой функцией. Невязку схемы представим в виде

$$\psi=\psi_1+\psi_2, \tag{2.5}$$

$\psi_1=\partial u(\overline{x},\hat{t})/\partial t-(u_t+\widetilde{h}_1u_{t\bar{x}_1}+\widetilde{h}_2u_{t\bar{x}_2})$, $\psi_2=(\widehat{u}_{(2)}-u(x_1,\overline{x}_2,\hat{t}))_{\bar{x}_1\hat{x}_1}+(u(x_1,\overline{x}_2,\hat{t}))_{\bar{x}_1\hat{x}_1}-\partial^2u(\overline{x},\hat{t})/\partial x_1^2+(\widehat{u}_{(1)}-u(\overline{x}_1,x_2,\hat{t}))_{\bar{x}_2\hat{x}_2}+(u(\overline{x}_1,x_2,\hat{t}))_{\bar{x}_2\hat{x}_2}-\partial^2u(\overline{x},\hat{t})/\partial x_2^2$. На основании соотношений $\psi_3=u_t(\overline{x},t)-(u_t+\widetilde{h}_1u_{t\bar{x}_1}+\widetilde{h}_2u_{t\bar{x}_2})=\mathrm{O}\,(\hbar_1^2+\hbar_2^2)$, $\psi_4=\partial u(\overline{x},\hat{t})/\partial t-u_t(\overline{x},t)=\mathrm{O}\,(\tau)$ заключаем, что $\psi_1=\mathrm{O}\,(\hbar_1^2+\hbar_2^2+\tau)$. Для оценки выражения $\xi_1=(\widehat{u}_{(2)}-u(x_1,\overline{x}_2,\hat{t}))_{\bar{x}_1\hat{x}_1}$ воспользуемся следующими разложениями:

$$u_{x_2}=\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{h_{2+}}{2}\overline{\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}},\quad u_{\bar{x}_2}=\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{h_2}{2}\overline{\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}},$$

где черта сверху означает, что значения аргументов берутся в соответствующих промежуточных точках (в данном случае на интервалах (x_2,x_2+h_{2+}) и (x_2-h_2,x_2)). В силу этого

$$\widehat{u}_{(2)}=\widehat{u}+\widetilde{h}_2\frac{\partial\widehat{u}}{\partial x_2}+r_0,\quad r_0=\frac{h_2^+h_{2+}}{2}\overline{\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial x_2^2}}-\frac{h_2^-h_{2-}}{2}\overline{\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial x_2^2}}=\mathrm{O}\,(\hbar_2^2).$$

Учитывая, что $u(x_1,\overline{x}_2,\hat{t})=\widehat{u}+\widetilde{h}_2\dfrac{\partial\widehat{u}}{\partial x_2}+r_1$, $r_1=\dfrac{\widetilde{h}_2^2}{2}\overline{\dfrac{\partial^2\widehat{u}}{\partial x_2^2}}$, для ξ_1 получим представление $\xi_1=r_{2\bar{x}_1\hat{x}_1}$, $r_2=r_0-r_1=\mathrm{O}\,(\hbar_2^2)$. Так как

$$|r_{2\bar{x}_1\hat{x}_1}|=\left|\frac{1}{\hbar_1}\int\limits_0^1\int\limits_{x_1-\xi h_1}^{x_1+\xi h_{1+}}\frac{\partial^2r_2(\eta,x_2,\hat{t})}{\partial\eta^2}\,d\eta\,d\xi\right|\le\hbar_2^2\left\|\frac{\partial^4\widehat{u}}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right\|_{C(\overline{Q}_T)},$$

то $\xi_1 = O(\hbar_2^2)$. Аналогично показывается, что

$$|\xi_2| = |(\widehat{u}_{(1)} - u(\overline{x}_1, x_2, \hat{t}))_{\bar{x}_2\hat{x}_2}| \le \hbar_1^2 \|\partial^4 \widehat{u}/(\partial x_1^2 \partial x_2^2)\|_{C(\overline{Q}_T)}.$$

Далее с учетом (1.6) получим $u(x_1, \overline{x}_2, \hat{t})_{\bar{x}_1\hat{x}_1} - \partial^2 u(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \hat{t})/\partial x_1^2 = O(\hbar_1^2)$, $u(\overline{x}_1, x_2, \hat{t})_{\bar{x}_2\hat{x}_2} - \partial^2 u(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \hat{t})/\partial x_2^2 = O(\hbar_2^2)$. На основании изложенного выше делаем вывод, что если четвертые производные решения $u(x,t)$ ограничены, то погрешность аппроксимации является величиной первого порядка малости по τ и второго относительно $|h| = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$, $h_\alpha = \max\limits_{i_\alpha} h_\alpha^{i_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, т.е. существует постоянная M_1, не зависящая от h_1, h_2, τ и такая, что

$$\|\psi\|_{C(\omega)} \le M_1(h_1^2 + h_2^2 + \tau). \tag{2.6}$$

Априорные оценки. Для простоты дальнейших исследований ограничимся рассмотрением случая сгущения сеток по переменным x_1 и x_2 к началу соответствующего отрезка. Тогда

$$h_\alpha^{i_\alpha+1} - h_\alpha^{i_\alpha} \ge 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{2.7}$$

и схема (2.4) примет более простой вид

$$y_t + ((h_{1+} - h_1)/3) y_{t\bar{x}_1} + ((h_{2+} - h_2)/3) y_{t\bar{x}_2} + \widetilde{A}\widehat{y} = \varphi, \tag{2.8}$$

где $\widetilde{A} = A + A_0$, $A = A_1 + A_2$, $A_k y = -y_{\bar{x}_k\hat{x}_k}$, $A_0 y = ((h_{2+} - h_2)/3) A_1 y_{x_2} + ((h_{1+} - h_1)/3) A_2 y_{x_1}$, $\varphi = f(\overline{x}, \hat{t})$.

Ниже воспользуемся стандартными обозначениями теории разностных схем [5] для скалярных произведений и норм:

$$(v,y)_* = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \hbar_1^{i_1} \hbar_2^{i_2} v_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2} = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \hbar_1 \hbar_2 v y, \quad \|y\|_*^2 = (y,y)_*, \quad \|y\|_C = \max_{x \in \widehat{\omega}_h} |y(x)|.$$

Для сеточного оператора Лапласа на неравномерной сетке положим

$$\|y\|_{A_1}^2 = (A_1 y, y) = \|y_{\bar{x}_1}]|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1^{i_1} \hbar_2^{i_2} y_{\bar{x}_1, i_1 i_2}^2, \quad \|y\|_{A_2}^2 = \|y_{\bar{x}_2}]|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \hbar_1^{i_1} h_2^{i_2} y_{\bar{x}_2, i_1 i_2}^2,$$

$$\|y\|_A^2 = \|y\|_{A_1}^2 + \|y\|_{A_2}^2 = \|y_{\bar{x}_1}]|^2 + \|y_{\bar{x}_2}]|^2, \quad \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_1^{i_1} h_2^{i_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2, i_1 i_2}^2.$$

Приведем вспомогательные результаты, которые нам понадобятся при использовании метода энергетических неравенств.

Лемма 3. *Для произвольной сеточной функции $y(x)$, заданной на неравномерной прямоугольной сетке $\widehat{\omega}_h$ и обращающейся в нуль на границе γ_h, справедливы соотношения*

$$(A_1 y, y) = \|y_{\bar{x}_1}]|^2, \quad (A_2 y, y) = \|y_{\bar{x}_2}]|^2, \quad \|y\|_A^2 = \|y_{\bar{x}_1}]|^2 + \|y_{\bar{x}_2}]|^2, \tag{2.9}$$

$$\|Ay\|_*^2 = \|y_{\bar{x}_1\hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}\|_*^2 = \|y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}\|_*^2 + 2\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2. \tag{2.10}$$

Доказательство. Применяя первую разностную формулу Грина в одномерном случае [5]

$$(y, v_{\bar{x}\hat{x}})_* = -(y_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] + y_N v_{\bar{x},N} - y_0 v_{\bar{x},1}, \tag{2.11}$$

получим выражение

$$-\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \hbar_1 y_{\bar{x}_1\hat{x}_1} y = \sum_{i_1=1}^{N_1} h_1 y_{\bar{x}_1}^2,$$

умножив которое на $\hbar_2$ и просуммировав по всем $i_2 = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$, приходим к первому тождеству (2.9). Второе равенство доказывается аналогично. Последнее равенство в (2.9) является алгебраическим следствием первых двух. Далее по определению $\|\cdot\|_*$ имеем

$$\|y_{\bar{x}_1\hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}\|_*^2 = \|y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}\|_*^2 + 2(y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}, y_{\bar{x}_2\hat{x}_2})_*. \tag{2.12}$$

Применяя формулу Грина (2.11) по переменной x_1 и учитывая, что сеточная функция $y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}$ обращается в нуль при $i_1 = 0, N_1$, находим, что

$$(y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}, y_{\bar{x}_2\hat{x}_2})_* = -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1\hbar_2 y_{\bar{x}_1} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2\hat{x}_2}.$$

Применяя к последнему равенству формулу Грина по переменной x_2 и учитывая, что $y_{\bar{x}_1} = 0$ при $i_2 = 0, N_2$, приходим к энергетическому соотношению $(y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}, y_{\bar{x}_2\hat{x}_2})_* = \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2$, подставляя которое в (2.12), получаем тождество (2.10). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (2.7). Тогда для произвольной сеточной функции $y(x_1, x_2)$, заданной на неравномерной прямоугольной сетке $\hat{\bar{\omega}}_h$ и обращающейся в нуль на границе γ_h, справедливо неравенство*

$$\left(\frac{h_{2+}-h_2}{3}A_1 y_{x_2}, A_1 y\right)_* + \left(\frac{h_{1+}-h_1}{3}A_2 y_{x_1}, A_2 y\right)_* \geq -\frac{2}{3}(\|A_1 y\|_*^2 + \|A_2 y\|_*^2), \qquad (2.13)$$

а при дополнительном предположении

$$\frac{h_k - h_{k-}}{2h_k} + \frac{h_{k+} - h_k}{6h_k} \leq \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2; \quad i_k = 1, 2, \ldots, N_k, \quad h_k^1 = h_k^0, \qquad (2.14)$$

имеет место оценка вида

$$\left(\frac{h_{2+}-h_2}{3}A_1 y_{x_2}, A_2 y\right)_* + \left(\frac{h_{1+}-h_1}{3}A_2 y_{x_1}, A_1 y\right)_* \geq -\frac{4}{3}\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2. \qquad (2.15)$$

Доказательство. Неравенство (2.13) доказывается аналогично одномерному случаю (см. лемму 1). Обратимся к выводу оценки (2.15). Применяя разностную формулу Грина по направлению x_1 и алгебраическое неравенство $-(a-b)a \geq -3a^2/2 - b^2/2$, получаем

$$\left(\frac{h_{2+}-h_2}{3}A_1 y_{x_2}, A_2 y\right) = -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1\hbar_2 y_{\bar{x}_1 x_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2\hat{x}_2} = -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 \frac{h_{2+}-h_2}{3} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{(+1_2)}(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{(+1_2)} - y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) \geq$$

$$\geq -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 \frac{h_{2+}-h_2}{3}\left(\frac{3}{2}(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{(+1_2)})^2 + \frac{1}{2}y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2\right) =$$

$$= -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=2}^{N_2} h_1 h_2 \frac{h_2 - h_{2-}}{2h_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2 - \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 \frac{h_{2+}-h_2}{6h_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2.$$

Согласно условию леммы (2.14) при $k = 2$, находим, что $(((h_{2+} - h_2)/3)A_1 y_{x_2}, A_2 y)_* \geq -(2/3)\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что и $(((h_{1+} - h_1)/3)A_2 y_{x_1}, A_1 y)_* \geq -(2/3)\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2$. Складывая два последних неравенства, приходим к требуемой оценке (2.15).

Замечание 2. Пусть сетка по направлению x_k сгущается по закону геометрической прогрессии $h_k^{i_k+1} = q_k h_k^{i_k}$ с константой $q_k \geq 1$. Рассмотрим, при каких q_k выполняется условие леммы (2.14). С учетом сформулированных предположений имеем $(h_k - \hbar_{k-})/(2h_k) + (h_{k+} - h_k)/(6h_k) - 2/3 = (q_k^2 - 2q_k - 3)/(6q_k)$. Следовательно, неравенство (2.14) выполнено при всех $1 \leq q_k \leq 3$.

Применим доказанные выше леммы 3, 4 к исследованию устойчивости разностной схемы по входным данным.

Теорема 3. *Пусть выполнены неравенства (2.7), (2.14) и*

$$\tau \geq c_0 \max_k \|h_{k+} - h_k\|_C^2, \quad \max_{1\leq i_k \leq N_k - 1}(\hbar_k^{i_k}/h_k^{i_k}) \leq c_0. \qquad (2.16)$$

Тогда разностная схема (2.8), (2.3) устойчива по начальным данным, правой части и имеет место оценка

$$\max_{t\in\bar{\omega}_\tau}\|y(t)\|_1 \leq \|y(0)\|_1 + 3\sqrt{T}\max_{t\in\omega_\tau}\|f\|_*, \qquad (2.17)$$

где $\|y\|_1^2 = \|y\|_A^2 + (\tau/3)\|Ay\|_*^2$.

Доказательство. Умножая уравнение (2.8) скалярно на $2\tau A\widehat{y}$ и применяя лемму 3, тождество $2\tau(v_t, \widehat{v})_* = \|\widehat{v}\|_*^2 - \|v\|_*^2 + \tau^2\|v_t\|_*^2$, получаем энергетическое соотношение

$$\|\widehat{y}\|_A^2 - \|y\|_A^2 + \tau^2\|y_t\|_A^2 + 2\tau\left(\frac{h_{1+} - h_1}{3} y_{t\bar{x}_1} + \frac{h_{2+} - h_2}{3} y_{t\bar{x}_2}, A\widehat{y}\right)_* + 2\tau(\widetilde{A}\widehat{y}, A\widehat{y})_* = 2\tau(\varphi, A\widehat{y})_*, \quad (2.18)$$

в котором, применяя неравенство Коши с ε, второе условие (2.16), оценим

$$2\tau\left(\frac{h_{1+} - h_1}{3} y_{t\bar{x}_1} + \frac{h_{2+} - h_2}{3} y_{t\bar{x}_2}, A\widehat{y}\right)_* \geq -\frac{2}{9}\tau\|A\widehat{y}\|_*^2 - \tau(\|(h_{1+} - h_1)y_{t\bar{x}_1}\|_*^2 + \|(h_{2+} - h_2)y_{t\bar{x}_2}\|_*^2) \geq$$

$$\geq -\frac{2}{9}\tau\|A\widehat{y}\|_*^2 - \tau c_4 \max_k \|h_{k+} - h_k\|_C^2 \|y_t\|_A^2.$$

Учитывая теперь тождество (2.10), неравенства (2.13), (2.15), получаем

$$2\tau(\widetilde{A}\widehat{y}, A\widehat{y}) = 2\tau\left\{\|A\widehat{y}\|_*^2 + \left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1\widehat{y}_{x_2}, A_1\widehat{y}\right)_* + \left(\frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2\widehat{y}_{x_1}, A_2\widehat{y}\right)_* + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1\widehat{y}_{x_2}, A_2\widehat{y}\right)_* + \left(\frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2\widehat{y}_{x_1}, A_1\widehat{y}\right)_*\right\} \geq \frac{2}{3}\tau\|A\widehat{y}\|_*^2.$$

Нам осталось оценить скалярное произведение, содержащее правую часть, т.е. $2\tau(\varphi, A\widehat{y})_* \leq (\tau/9)\|A\widehat{y}\|_*^2 + 9\tau\|\varphi\|_*^2$. Подставляя полученные оценки в (2.18), приходим к неравенству $\|y_{n+1}\|_1^2 \leq \|y_n\|_1^2 + 9\tau\|\overline{f}_{n+1}\|_*^2$. Отсюда и следует требуемая оценка устойчивости (2.17). Теорема доказана.

Для нахождения оценок точности подставим $y = z + u$ в уравнения (2.8), (2.3). Получим задачу для погрешности

$$z_t + ((h_{1+} - h_1)/3)z_{t\bar{x}_1} + ((h_{2+} - h_2)/3)z_{t\bar{x}_2} + \widetilde{A}\widehat{z} = \psi, \quad (2.19)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \widehat{\overline{\omega}}_h, \qquad \widehat{z}\big|_{\gamma_h} = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad (2.20)$$

где погрешность аппроксимации определяется согласно (2.5). При выполнении условий теоремы 3 для решения задачи (2.19), (2.20) имеет место априорная оценка $\|z\|_1 \leq 3\sqrt{T} \max_{t\in\omega_\tau} \|\psi\|_*$, подставляя в которую неравенство (2.6), получаем $\|z\|_A^2 + (\tau/3)\|Az\|_*^2 \leq c(h_1^2 + h_2^2 + \tau)^2$, т.е. решение разностной схемы (2.8), (2.3) сходится к решению дифференциальной задачи (2.1), (2.2) в норме $\|\cdot\|_1$ со скоростью $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau)$.

Работа выполнена при поддержке Российского (проект 96 — 01 — 00657) и Белорусского (проект Ф 96 — 173) фондов фундаментальных исследований.

Литература

1. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 2. С. 313 — 322.
2. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П.* // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 5. С. 9 — 14.
3. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 3. С. 413 — 424.
4. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П., Зыль А. Н.* // Докл. АН Беларуси. 1998. Т. 42, № 1. С. 13 — 17.
5. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1977.
6. *Берковский Б. М., Полевиков В. К.* Вычислительный эксперимент в конвекции. Минск, 1988.
7. *Ананич С. Э.* Монотонные консервативные разностные схемы второго порядка аппроксимации на неравномерных сетках для уравнения Фоккера — Планка. Минск, 1996. (Препринт / Ин-т математики АН Беларуси: 9 (521)).

Институт математического моделирования РАН,
Институт математики НАН Беларуси

Поступила в редакцию
21 октября 1997 г.