ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1998, том 38, № 2, с. 207–219

УДК 519.633.6

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ[1)]

© 1998 г. П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский

(125047 Москва, Миусская, 4, ИММ РАН)

Поступила в редакцию 09.09.96 г.

Исследуется устойчивость разностных схем для модельной двумерной задачи конвекции–диффузии в прямоугольнике. Используются симметричные аппроксимации конвективных слагаемых центральными разностями. Показана безусловная устойчивость классических схем с весами, разностных схем расщепления типа переменных направлений. Отдельно рассмотрены схемы с явным конвективным и неявным диффузионным переносом. Исследование базируется на общей теории устойчивости операторно-разностных схем.

Задачи конвекции–диффузии являются базовыми при моделировании проблем гидродинамики и тепломассообмена [1], [2]. При численном решении основное внимание уделяется вопросам аппроксимации конвективных слагаемых. Широко используются схемы с направленными разностями, гибридные схемы, схемы с направленными разностями высокого порядка. Основной недостаток классических схем второго порядка аппроксимации с помощью центральных разностей связывается с нарушением устойчивости.

В настоящее время свойства тех или иных разностных схем исследуются в основном экспериментально на основе численных расчетов по решению некоторых тестовых задач [3], [4]. Теоретическое исследование обычно проводится с помощью принципа максимума. Используются также методы на основе преобразования Фурье [5], [6], метод Неймана [7]. На этом пути удается рассмотреть разностные схемы лишь для простейших одномерных задач конвекции–диффузии с постоянными коэффициентами.

Для широкого класса разностных схем [8], [9] развита общая теория устойчивости операторно-разностных схем, которые рассматриваются в соответствующих конечномерных гильбертовых пространствах. Получены неулучшаемые (совпадающие необходимые и достаточные условия) устойчивости широкого класса двух- и трехслойных разностных схем. Конструктивность этой теории обусловлена тем, что условия устойчивости формулируются в виде легко проверяемых операторных неравенств.

Данная работа посвящена исследованию разностных схем для задач конвекции–диффузии на основе общей теории устойчивости разностных схем. Рассматривается модельная первая краевая задача Дирихле для нестационарного уравнения конвекции–диффузии в прямоугольнике. Конвективные слагаемые берутся в симметричном виде (полусумма конвективных слагаемых в дивергентном и недивергентном видах) и аппроксимируются со вторым порядком соответствующими центральными разностными производными. Устанавливаются основные свойства разностных операторов конвективного переноса [10], на основе которых исследуется устойчивость различных разностных схем для задачи конвекции–диффузии. Данное исследование примыкает к работе [11], где рассмотрены стационарные задачи конвекции–диффузии. Устойчивость в сеточных пространствах L_1 и L_∞ рассматривается в [12].

1. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

Проблемы построения, исследования и решения задач конвекции–диффузии удобно рассмотреть на простейших задачах, которые сохраняют основную специфику общих многомерных задач механики сплошной среды. В прямоугольнике

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95-01-01298, 96-01-00657).

ищется решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - k\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \tag{1}$$

Здесь $k = \text{const}$ – коэффициент диффузии, $v_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, – компоненты скорости, определяющие стационарный конвективный перенос в недивергентной форме. Уравнение (1) дополним простейшими однородными граничными условиями I рода

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Уравнение (1) с недивергентными конвективными слагаемыми является основным при рассмотрении краевых задач для параболических уравнений второго порядка [13]. С точки зрения прикладного математического моделирования большего внимания заслуживают задачи с конвективными слагаемыми в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial (v_\alpha(x)u)}{\partial x_\alpha} - k\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \tag{4}$$

В дивергентной (консервативной) форме (4) уравнение конвекции–диффузии явно выражает соответствующий закон сохранения.

При рассмотрении задач гидродинамики часто можно ограничиться приближением несжимаемости среды. Использовав условие несжимаемости

$$\operatorname{div} v \equiv \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad x \in \Omega,$$

можем переписать уравнение (1) в эквивалентном виде (4), и наоборот. Для таких задач особого внимания заслуживает запись конвективных членов в симметричной форме, когда уравнение конвекции–диффузии имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[v_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial (v_\alpha(x)u)}{\partial x_\alpha}\right] - k\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0. \tag{5}$$

В этом случае комбинируются конвективные слагаемые в дивергентном и недивергентном видах.

Решение разностных задач должно наследовать основные свойства поставленной дифференциальной задачи (1)–(3) (задач (2)–(4) и (2), (3), (5)), разностные операторы должны иметь те же основные свойства, что и дифференциальные операторы. Это относится прежде всего к устойчивости в соответствующих нормах. Поэтому наше рассмотрение начнем с получения простейших априорных оценок для дифференциальной задачи.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(v, w) = \int_\Omega v(x)w(x)dx$$

для функций $v(x)$ и $w(x)$, обращающихся в ноль на $\partial\Omega$, и нормой $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Задачу конвекции–диффузии (1)–(3) запишем как задачу Коши для эволюционного уравнения первого порядка:

$$du/dt + \mathcal{C}u + \mathcal{D}u = 0. \tag{6}$$

Оператор диффузионного переноса

$$\mathcal{D}u = -k\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \tag{7}$$

самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq k\lambda_0 E, \tag{8}$$

где E – тождественный оператор, $\lambda_0 > 0$ – минимальное собственное значение оператора Лапласа.

Для оператора конвективного переноса имеем

$$\mathcal{C}u = \mathcal{C}_1 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}. \tag{9}$$

При использовании уравнения конвекции–диффузии в форме (4) получим

$$\mathcal{C}u = \mathcal{C}_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial(v_\alpha(x)u)}{\partial x_\alpha}. \tag{10}$$

Для оператора конвективного переноса в симметричном виде (уравнение (5)) имеем

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 = 0.5(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2). \tag{11}$$

Принимая во внимание однородные граничные условия (2), имеем

$$(\mathcal{C}_1 u, w) = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_\Omega v_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}w\,dx = -\sum_{\alpha=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial(v_\alpha w)}{\partial x_\alpha}u\,dx = -(u, \mathcal{C}_2 w).$$

Тем самым устанавливается сопряженность с точностью до знака операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах друг другу и кососимметричность оператора конвективного переноса в симметричной форме, т.е.

$$\mathcal{C}_1^* = -\mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_0 = -\mathcal{C}_0^*. \tag{12}$$

При выполнении условия несжимаемости кососимметричными будут и операторы конвективного переноса в недивергентном (9) и дивергентном (10) видах. Принципиальным при построении дискретных аппроксимаций операторов конвективного переноса является то, что свойство кососимметричности для операторов $\mathcal{C}_0$ имеет место для любых $v_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, в том числе и не удовлетворяющих условию несжимаемости.

Для операторов конвективного переноса (9), (10) имеем

$$(\mathcal{C}_1 u, u) = -(\mathcal{C}_2 u, u) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_\Omega v_\alpha\frac{\partial u^2}{\partial x_\alpha}dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{v}u^2 dx$$

и поэтому

$$|(\mathcal{C}_\alpha u, u)| \leq 0.5\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_C\|u\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \tag{13}$$

где

$$\|w\|_C = \max_{x\in\Omega}|w(x)|.$$

Таким образом, для операторов конвективного переноса, определяемых в соответствии с (9), (10) ($\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$), имеем

$$|(\mathcal{C}u, u)| \leq \mathcal{M}_1\|u\|^2, \tag{14}$$

где постоянная $\mathcal{M}_1$ зависит только от $\operatorname{div}\mathbf{v}$ и определена согласно (13).

Приведем также оценку подчиненности оператора конвективного переноса оператору диффузии:

$$\|\mathcal{C}u\|^2 \leq \mathcal{M}_2(\mathcal{D}u, u) \tag{15}$$

с постоянной $\mathcal{M}_2$, зависящей от скорости. Для недивергентного оператора конвекции (9) имеем

$$\|\mathcal{C}_1 u\|^2 = \int_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx \le 2 \sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega v_\alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx \le$$

$$\le 2 \max_\alpha \{ \|v_\alpha^2\|_C \} \frac{1}{k} \sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega k \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx \le \frac{2}{k} \max_\alpha \{ \|v_\alpha^2\|_C \} (\mathcal{D}u, u),$$

т.е. в неравенстве (15) при $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ имеем

$$\mathcal{M}_2 = \frac{2}{k} \max_\alpha \{ \|v_\alpha^2\|_C \}.$$

При $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ (см. (10)) получим

$$\|\mathcal{C}_2 u\|^2 = \int_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \operatorname{div} \mathbf{v}\, u \right)^2 dx \le 2 \int_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 + 2 \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 u^2 dx.$$

Принимая во внимание неравенство Фридрихса [14]

$$\int_\Omega u^2 dx \le \mathcal{M}_0 \sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx,$$

где постоянная $\mathcal{M}_0$ зависит только от области и для прямоугольника Ω

$$\mathcal{M}_0^{-1} = \pi^2 (l_1^{-2} + l_2^{-2}),$$

получаем при $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ оценку (15) с

$$\mathcal{M}_2 = \frac{2}{k} (2 \max_\alpha \{ \|v_\alpha^2\|_C \} + \mathcal{M}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_C^2).$$

Аналогично, для случая $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ имеем

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{k} (4 \max_\alpha \{ \|v_\alpha^2\|_C \} + \mathcal{M}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_C^2).$$

Приведенные оценки (14), (15) служат ориентиром при исследовании разностных аналогов оператора конвективного переноса.

Для получения априорной оценки домножим уравнение (6) скалярно в $\mathcal{H}$ на u; принимая во внимание приведенные выше оценки (8), (14), получаем

$$d\|u\|/dt + (k\lambda_0 - \mathcal{M}_1)\|u\| \le 0. \tag{16}$$

Это приводит к оценке

$$\|u(x,t)\| \le \exp[(\mathcal{M}_1 - k\lambda_0)t] \|u(x,0)\|, \tag{17}$$

обеспечивающей устойчивость решения задачи конвекции–диффузии по начальным данным. Для того чтобы не загромождать изложение, ограничиваемся случаем

$$\mathcal{M}_1 - k\lambda_0 \le 0.$$

Можно ориентироваться на неравенство подчиненности оператора конвективного переноса оператору диффузии (15), когда с учетом

$$-(\mathcal{C}u, u) \le \frac{\mathcal{M}_2}{4} \|u\|^2 + \frac{1}{\mathcal{M}_2} \|\mathcal{C}u\|^2$$

вместо (16) получим

$$\frac{d\|u\|}{dt} \le \frac{\mathcal{M}_2}{4} \|u\|$$

и поэтому

$$\|u(x, t)\| \le \exp\left(\frac{\mathcal{M}_2}{4}t\right)\|u(x, 0)\|. \tag{18}$$

Оценку (18) можно получить и в более сильной норме. Для этого домножим уравнение (6) скалярно на du/dt. С учетом независимости операторов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ от времени и неравенства

$$-\left(\mathcal{C}u, \frac{du}{dt}\right) \le \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \frac{\mathcal{M}_2}{4}(\mathcal{D}u, u)$$

имеем

$$\frac{d\|u\|_{\mathcal{D}}^2}{dt} \le \frac{\mathcal{M}_2}{2}\|u\|_{\mathcal{D}}^2, \quad \|u\|_{\mathcal{D}}^2 = (\mathcal{D}u, u),$$

и тем самым

$$\|u(x, t)\|_{\mathcal{D}} \le \exp\left(\frac{\mathcal{M}_2}{4}t\right)\|u(x, 0)\|_{\mathcal{D}}. \tag{19}$$

Можно использовать и другие формы операторов конвективного переноса. Примером является запись оператора $\mathcal{C}$ в виде [15]

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + 0.5\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}. \tag{20}$$

Аналогично можем положить

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 - 0.5\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}. \tag{21}$$

В этом случае также имеет место свойство кососимметричности оператора $\mathcal{C}$ при любых $\mathbf{v}$. Упрощаются и соответствующие оценки для решения задачи Коши для уравнения (6). Однако выбор симметричной формы (11) более удобен, чем (20), (21), для построения разностных операторов конвективного переноса, обладающих свойством кососимметричности.

3. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КОНВЕКЦИИ И ДИФФУЗИИ

В прямоугольнике Ω введем равномерную (для простоты) по обеим переменным разностную сетку с шагами h_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть ω – множество внутренних узлов сетки:

$$\omega = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\},$$

а $\partial\omega$ – множество граничных узлов. Разностное решение задачи конвекции–диффузии на момент времени t обозначим через $y(x, t)$, $x \in \omega \cup \partial\omega$, $t > 0$.

В стандартных безындексных обозначениях теории разностных схем [8] для правой и левой разностных производных имеем

$$w_x = \frac{w(x+h) - w(x)}{h}, \quad w_{\bar{x}} = \frac{w(x) - w(x-h)}{h},$$

а центральная разностная производная определяется выражением

$$w_{\mathring{x}} = \frac{1}{2}(w_x + w_{\bar{x}}) = \frac{w(x+h) - w(x-h)}{2h}.$$

Для сеточных функций, обращающихся в ноль на $\partial\omega$, определим гильбертово пространство H, скалярное произведение и норму в котором введем соотношениями

$$(y, w) = \sum_{x \in \omega} ywh_1h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Для $R = R^* > 0$ через H_R обозначим пространство H, снабженное скалярным произведением $(y, w)_R = (Ry, w)$ и нормой $\|y\| = \sqrt{(Ry, y)}$.

Разностный оператор диффузионного переноса на множестве функций $y \in H$ определим выражением

$$Dy = -k \sum_{\alpha=1}^{2} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}. \tag{22}$$

Оператор D самосопряжен в H и имеет место оценка типа (8):

$$D = D^* \geq k\delta E, \tag{23}$$

где

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2\left(\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}\right).$$

Полезна также [8], [16] оценка свержу для разностного оператора D:

$$D \leq 4k\Delta E, \quad \Delta = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2\left(\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}\right). \tag{24}$$

Конвективные слагаемые в уравнении конвекции–диффузии аппроксимируем со вторым порядком на основе использования центральных разностных производных. В соответствии с (9) положим

$$Cy = C_1 y = \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha y_{\mathring{x}_\alpha}. \tag{25}$$

В простейшем случае достаточно гладких компонент скорости и решения дифференциальной задачи положим, например, $b_\alpha(x) = v_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$. Для уравнения конвекции–диффузии с конвективными слагаемыми в дивергентной форме используется (см. (10)) разностный оператор

$$Cy = C_2 y = \sum_{\alpha=1}^{2} (b_\alpha y)_{\mathring{x}_\alpha}. \tag{26}$$

Аналогично (11) имеем

$$C = C_0 = 0.5(C_1 + C_2),$$

т.е.

$$C_0 y = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} [b_\alpha y_{\mathring{x}_\alpha} + (b_\alpha y)_{\mathring{x}_\alpha}]. \tag{27}$$

Большей осторожности требует построение разностных конвективных операторов на основе использования (20), (21). В частности, в этом можно убедиться, например, при исследовании свойств кососимметричности разностного оператора

$$Cy = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[b_\alpha y_{\mathring{x}_\alpha} + \frac{1}{2}(b_\alpha)_{\mathring{x}_\alpha} y \right].$$

Отметим теперь основные свойства введенных разностных операторов конвективного переноса в H. Для нахождения сопряженного к C_1 оператора рассмотрим выражение

$$(C_1 y, w) = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{x \in \omega} b_\alpha(x) y_{\mathring{x}_\alpha} w(x) h_1 h_2.$$

На множестве сеточных функций, обращающихся в ноль на $\partial\omega$, имеем

$$\sum_{x \in \omega} b_1(x) y_{\mathring{x}_1} w(x) h_1 h_2 = \frac{1}{2} \sum_{x \in \omega} b_1(x)[y(x_1 + h_1, x_2) - y(x_1 - h_1, x_2)] w(x) h_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{x\in\omega} y(x)[b_1(x_1-h_1,x_2)w(x_1-h_1,x_2) - b_1(x_1+h_1,x_2)w(x_1+h_1,x_2)]h_2 = -\sum_{x\in\omega} y(x)(b_1(x)w)_{\mathring{x}_1}h_1h_2.$$

В силу этого

$$C_1^* y = -\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x)y)_{\mathring{x}_\alpha},$$

т.е., как и в непрерывном случае для (25), (26),

$$C_1^* = -C_2, \quad C_0 = -C_0^*. \tag{28}$$

Непосредственными выкладками нетрудно убедиться, что на разностном уровне нет аналога оценки (13) для рассматриваемых разностных операторов конвективного переноса. Поэтому использование симметричных аппроксимаций (27) конвективного переноса является более предпочтительным. Приходится ограничиваться более грубыми оценками сверху оператора конвективного переноса в дивергентной и недивергентной форме. Принимая во внимание

$$(b_1(x)y_{\mathring{x}_1}, y) = \frac{1}{2h_1}(b_1(x)[y(x_1+h_1,x_2) - y(x_1-h_1,x_2)], y) \le \frac{1}{h_1}\max_{x\in\omega\cup\partial\omega}|b_1(x)|\|y\|^2,$$

получаем

$$|(C_\alpha y, y)| \le \sum_{\beta=1}^{2}\frac{1}{h_\beta}\|b_\beta(x)\|_C\|y\|^2, \quad \alpha = 1,2, \tag{29}$$

где теперь

$$\|w(x)\|_C = \max_{x\in\omega\cup\partial\omega}|w(x)|.$$

Тем самым приходим к разностному аналогу неравенства (14):

$$|(Cy, y)| \le M_1\|y\|^2, \tag{30}$$

где постоянная M_1 определяется в соответствии с (28), (29).

Получим также разностный аналог неравенства подчиненности (15):

$$\|Cy\|^2 \le M_2(Dy, y). \tag{31}$$

Для недивергентного разностного оператора конвективного переноса имеем

$$\|C_1y\|^2 = \sum_{x\in\omega}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(x)y_{\mathring{x}_\alpha}\right]^2 h_1h_2 \le 2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{x\in\omega} b_\alpha^2(x)(y_{\mathring{x}_\alpha})^2h_1h_2 \le 2\max_\alpha\{\|b_\alpha^2\|_C\}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{x\in\omega}\frac{1}{4}(y_{x_\alpha}+y_{\bar{x}_\alpha})^2h_1h_2 \le$$

$$\le \max_\alpha\{\|b_\alpha^2\|_C\}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{x\in\omega}[(y_{x_\alpha})^2 + (y_{\bar{x}_\alpha})^2]h_1h_2 \le \frac{2}{k}\max_\alpha\{\|b_\alpha^2\|_C\}(Dy, y).$$

Поэтому при $C = C_1$ в неравенстве подчиненности (31) можем положить

$$M_2 = \frac{2}{k}\max_\alpha\{\|b_\alpha^2\|_C\}.$$

При $C = C_2$ оценку (31) получим на основе равенства

$$(b_1(x)y)_{\mathring{x}_1} = 0.5b_1(x_1+h_1,x_2)y_{x_1} + 0.5b_1(x_1-h_1,x_2)y_{\bar{x}_1} + y(x)(b_1(x))_{\mathring{x}_1}.$$

Как и в непрерывном случае, имеем

$$\|C_2y\|^2 = \sum_{x\in\omega}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x)y)_{\mathring{x}_\alpha}\right]^2 h_1h_2 \le \frac{4}{k}\max_\alpha\|b_\alpha^2(x)\|_C(Dy, y) + 2\left\|\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x))_{\mathring{x}_\alpha}\right\|_C^2\|y\|^2.$$

Имеет место [17] разностное неравенство Фридрихса

$$\|y\|^2 \le M_0\left(-\sum_{\alpha=1}^{2} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, y\right),$$

где постоянная M_0 не зависит от шагов сетки:

$$M_0^{-1} = 9(l_1^{-2}+l_2^{-2}).$$

Поэтому приходим к искомому неравенству (31) для $C = C_2$ с

$$M_2 = \frac{2}{k}(2\max_\alpha\{\|b_\alpha^2\|_C\} + M_0)\left\|\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x))_{\mathring{x}_\alpha}\right\|_C^2.$$

Аналогично для $C = C_0$ в неравенстве (31)

$$M_2 = \frac{1}{k}(4\max_\alpha\{\|b_\alpha^2\|_C\} + M_0)\left\|\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x))_{\mathring{x}_\alpha}\right\|_C^2.$$

Тем самым для разностных операторов конвективного переноса имеют место оценки подчиненности (31) с постоянными M_2, полностью согласованными с непрерывным случаем при условии, что для аппроксимации дивергенции используются центральные разностные производные.

При аппроксимации конвективных слагаемых в дивергентном и недивергентном видах постоянная M_1 зависит от сетки (см. (29)). Тем самым проблемы аппроксимации конвективных слагаемых в дивергентной и недивергентной формах требуют дополнительного рассмотрения. Естественно пытаться строить аппроксимации, для которых постоянная M_1 в условии (30) была бы согласована с постоянной $\mathcal{M}_1$ в неравенстве (13).

Принимая во внимание соотношения (20), (21), определяем конвективные операторы в недивергентной и дивергентной формах следующими соотношениями:

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 - 0.5\mathrm{div}\mathbf{v}, \tag{32}$$

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_0 + 0.5\mathrm{div}\mathbf{v}. \tag{33}$$

В соответствии с (32), (33) положим

$$C_1 = C_0 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x))_{\mathring{x}_\alpha}, \tag{34}$$

$$C_2 = C_0 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x))_{\mathring{x}_\alpha}. \tag{35}$$

При аппроксимациях (34), (35) имеет место неравенство (30) с постоянной

$$M_1 = \frac{1}{2}\left\|\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x))_{\mathring{x}_\alpha}\right\|_C^2,$$

которая не зависит уже от расчетной сетки и полностью согласована с постоянной $\mathcal{M}_1$ для непрерывного случая.

В вычислительной практике (см., например, [1], [2]) широкое распространение получили схемы для задач конвекции–диффузии, в которых компоненты скоростей задаются на сдвинутых на полшага в различных направлениях сетках. Приведем соответствующие центрально-разностные аппроксимации конвективных слагаемых. Для оператора конвективного переноса в симметричной форме можно положить

$$C_0 y = \frac{b_1(x_1+h_1/2, x_2)y(x_1+h_1, x_2) - b_1(x_1-h_1/2, x_2)y(x_1-h_1, x_2)}{2h_1} +$$

$$+\frac{b_2(x_1, x_2+h_2/2)y(x_1, x_2+h_2) - b_2(x_1, x_2-h_2/2)y(x_1, x_2+h_2)}{2h_2}.$$

По этому оператору строятся аппроксимации конвективного переноса в недивергентной и дивергентной формах. Например, аналогично (34), (35) положим

$$C_1 = C_0 - \frac{1}{2}\frac{b_1(x_1 + h_1/2, x_2) - b_1(x_1 - h_1/2, x_2)}{h_1} - \frac{b_2(x_1, x_2 + h_2/2) - b_2(x_1, x_2 - h_2/2)}{h_2},$$

$$C_2 = C_0 + \frac{1}{2}\frac{b_1(x_1 + h_1/2, x_2) - b_1(x_1 - h_1/2, x_2)}{h_1} - \frac{b_2(x_1, x_2 + h_2/2) - b_2(x_1, x_2 - h_2/2)}{h_2}.$$

В этом случае сохраняется второй порядок аппроксимации и имеют место основные неравенства (30), (31) при соответствующем задании постоянной M_1.

4. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

После дискретизации по пространству приходим к решению дифференциально-разностного уравнения

$$dy/dt + Cy + Dy = 0, \quad x \in \omega, \quad t > 0, \tag{36}$$

с начальным условием

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega. \tag{37}$$

Для решения задачи (36), (37) имеют место оценки типа (17), (19):

$$\|y(x, t)\| \le \exp[(M_1 - k\delta)t]\|y(x, 0)\|, \tag{38}$$

$$\|y(x, t)\|_D \le \exp\left(\frac{M_2}{4}t\right)\|y(x, 0)\|_D, \tag{39}$$

где M_1, M_2 – постоянные в (30) и (31) соответственно.

Постоянная M_1 в (30) равна нулю при использовании симметричной аппроксимации конвективных слагаемых (27). Для задач с недивергентным и дивергентным операторами конвективного переноса необходимо ориентироваться на аппроксимации (34), (35) с целью оптимизации постоянной M_1. Построим и исследуем на устойчивость разностные схемы для приближенного решения задачи (36), (37) при $C = C_0$, т.е. ограничившись задачей с конвективными слагаемыми в симметричной форме.

Обозначим через y_n разностное решение на момент времени $t_n = n\tau$, где $\tau > 0$ – шаг по времени. Запишем для (36), (37) двухслойную разностную схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + C_0[\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1)y_n] + D[\sigma_2 y_{n+1} + (1 - \sigma_2)y_n] = 0, \tag{40}$$

$$x \in \omega, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

которая дополняется начальным условием

$$y_0(x) = u_0(x), \quad x \in \omega. \tag{41}$$

Для исследования устойчивости запишем схему (40) в каноническом виде [8], [9]:

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{42}$$

Здесь сеточные операторы B и A имеют вид

$$B = E + \sigma_1\tau C_0 + \sigma_2\tau D, \quad A = C_0 + D. \tag{43}$$

Рассматриваемая схема с весами характеризуется тем, что оба оператора A и B являются несамосопряженными.

Рассмотрим класс схем (40), (41), когда веса одинаковы:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma. \tag{44}$$

Теорема 1. *Разностная схема* (40), (41), (44) *устойчива в H при*

$$\tau \le \tau_0 = [\nu(0.5 - \sigma)]^{-1}, \tag{45}$$

где

$$\nu = 2M_2 + 2k\Delta, \tag{46}$$

а постоянные M_2 и Δ определены согласно (31) *и* (24).

Доказательство. В силу (43), (44) имеем

$$B = E + \sigma\tau A, \quad A \neq A^*. \tag{47}$$

Разностная схема с весами (42), (47) с $A > 0$ является [9] устойчивой в H (см. (38)) и в H_R, $R = BB^*$, при выполнении операторного неравенства

$$A + (\sigma - 0.5)\tau A^* A \geq 0. \tag{48}$$

Очевидно, что неравенство (48) будет выполнено при $\sigma \geq 0.5$, т.е. в этом случае имеем абсолютно устойчивую разностную схему. При $\sigma < 0.5$ имеет место условная устойчивость. Предположим, что имеет место оценка

$$\|Ay\|^2 \leq \nu(Ay, y). \tag{49}$$

Тогда неравенство (48) будет выполнено при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu\tau}$$

или при выполнении (45). Конкретизируем условия (45) при использовании схемы (40), (44). С учетом оценки оператора диффузии сверху (24) и неравенства подчиненности (31) имеем

$$\|Ay\|^2 = \|(C_0 + D)y\|^2 \leq 2(\|C_0 y\|^2 + \|Dy\|^2) \leq 2M_2(Dy, y) + 2k\Delta(Dy, y).$$

Принимая во внимание кососимметричность оператора C_0, получаем для постоянной ν выражение (49), т.е. постоянная $\nu = O(h_1^{-2} + h_2^{-2})$ и зависит от самой скорости конвективного переноса. Из (45), (46) следуют, например, достаточные условия устойчивости явной схемы ($\sigma = 0$).

Среди схем с весами (40), (41) заслуживает отдельного рассмотрения схема, когда конвективные слагаемые берутся с предыдущего временно́го слоя, т.е.

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma. \tag{50}$$

В явно-неявной схеме (40), (50) на верхний временной слой выносится только симметричный оператор диффузии

$$B = E + \sigma\tau D, \quad A = C_0 + D. \tag{51}$$

Рассмотрим условия устойчивости схемы (42), (51).

Теорема 2. *Для разностной схемы* (40), (41), (50) *при* $\sigma \geq 0.5$ *верна оценка*

$$\|y_{n+1}\|_D \leq \left(1 + \frac{M_2}{4}\tau\right)\|y_n\|_D. \tag{52}$$

Доказательство. В силу кососимметричности оператора C_0 и симметричности оператора D, схема (42), (51) соответствует схеме (42) при выборе оператора

$$B = E + \sigma\tau A_0, \quad A = A_0 + A_1, \tag{53}$$

где A_0 и A_1 – симметричная и кососимметричная части оператора A:

$$A_0 = 0.5(A + A^*), \quad A_1 = 0.5(A - A^*).$$

Исследование устойчивости схемы (42), (53) проведем в достаточно общих условиях при дополнительном условии подчиненности кососимметричной части оператора A:

$$\|A_1 y\|^2 \leq M(A_0 y, y). \tag{54}$$

Покажем, что для разностной схемы (42), (53) при $A_0 > 0$, выполнении неравенства (54) и

$$B - \frac{\tau}{2}A \geq \varepsilon E, \quad \varepsilon > 0, \tag{55}$$

верна оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A_0} \leq \left(1 + \frac{M}{4\varepsilon}\tau\right)\|y_n\|_{A_0}. \tag{56}$$

Скалярно умножим (42) на $2\tau y_t = 2(y_{n+1} - y_n)$ и получим энергетическое тождество

$$\tau((2B - \tau A)y_t, y_t) + (A_0 y_{n+1}, y_{n+1}) - (A_0 y_n, y_n) + 2\tau(A_1 y_n, y_t) = 0. \quad (57)$$

Принимая во внимание равенство (57) и условие (55), имеем неравенство

$$2\tau\varepsilon(y_t, y_t) + (A_0 y_{n+1}, y_{n+1}) - (A_0 y_n, y_n) \le 2\tau|-(A_1 y_n, y_t)|. \quad (58)$$

Правая часть оценивается с учетом (54) следующим образом:

$$|-(A_1 y_n, y_t)| \le \varepsilon\|y_t\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|A_1 y_n\|^2 \le \varepsilon\|y_t\|^2 + \frac{M}{4\varepsilon}(A_0 y_n, y_n). \quad (59)$$

Подстановка (59) в (58) дает

$$(A_0 y_{n+1}, y_{n+1}) \le \left(1 + \frac{M}{2\varepsilon}\tau\right)(A_0 y_n, y_n).$$

Отсюда с учетом неравенства

$$\left(1 + \frac{M}{2\varepsilon}\tau\right)^{1/2} \le 1 + \frac{M}{4\varepsilon}\tau$$

и следует искомая оценка устойчивости (56).

Используем теперь доказанное утверждение для исследования явно-неявной разностной схемы (40), (41), (50). Она записывается в каноническом виде (42), (51). Имеем $A_0 = D$, $A_1 = C_0$ и, в силу (31), в неравенстве (54) будет $M = M_2$. При $\sigma \ge 0.5$ в неравенстве (55) можем положить $\varepsilon = 1$. Поэтому при $\sigma \ge 0.5$ справедлива оценка (52) для явно-неявной схемы (40), (41), (50). Оценка (52) обеспечивает безусловную ρ-устойчивость явно-неявной схемы и полностью согласуется с оценкой (39) для решения дифференциально-разностной задачи.

Отметим некоторые возможности построения частично монотонизированных разностных схем для задачи конвекции–диффузии (36), (37), когда в схеме с центральными разностями выделяется часть конвективных слагаемых с направленными разностями и выносится на верхний временно́й слой (см., например, [1]).

Для простоты ограничимся случаем, когда обе компоненты скоростей знакопостоянны и, например, $v_\alpha(x) \le 0$, $x \in \Omega$, $\alpha = 1, 2$. Для оператора конвективного переноса C_1, определяемого согласно (25), используем представление

$$C_1 = C_1^+ + C_1^-, \quad (60)$$

где

$$C_1^+ y = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha y_{x_\alpha}, \quad C_1^- y = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}.$$

Аналогично определяется разложение

$$C_2 = C_2^+ + C_2^- \quad (61)$$

для оператора конвективного переноса в дивергентной форме (26). При сформулированных предположениях о знаке компонент скоростей слагаемых C_α^+, $\alpha = 1, 2$, в (60), (61) определяют монотонные составляющие – для них выполняется принцип максимума для недивергентных и дивергентных разностных уравнений соответственно [18]. Непосредственными выкладками убеждаемся в том, что для введенных операторов

$$(C_1^+)^* = -C_2^-, \quad (C_2^+)^* = -C_1^-. \quad (62)$$

С учетом (27) и (60), (61) положим

$$C_0 = C_0^+ + C_0^-, \quad C_0^+ = 0.5(C_1^+ + C_2^+), \quad C_0^- = 0.5(C_1^- + C_2^-). \quad (63)$$

Принимая во внимание (61), для разложения (63) получаем $(C_0^+)^* = -C_0^-$.

Для приближенного решения задачи (36), (37) будем использовать разностную схему

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+C_0^+y_{n+1}+C_0^-y_n+D[\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)y_n]=0,\quad x\in\omega,\quad n=0,1,\ldots. \tag{64}$$

Теорема 3. *Для разностной схемы* (64) *верна априорная оценка*

$$\left(\left[E+\frac{\tau}{2}(2\sigma-1)D+C_0^+-C_0^-\right]y_{n+1},\,y_{n+1}\right)\le\left(\left[E+\frac{\tau}{2}(2\sigma-1)D+C_0^+-C_0^-\right]y_n,\,y_n\right). \tag{65}$$

Доказательство. Перепишем (64) в виде

$$\left[E+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau D\right]\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+C_0^+y_{n+1}+C_0^-y_n+\frac{1}{2}D(y_{n+1}+y_n)=0$$

и домножим это уравнение скалярно на $y_{n+1}+y_n$. С учетом $(C_0^+)^*=-C_0^-$ получим априорную оценку (65), обеспечивающую безусловную устойчивость схемы (64).

5. ОБОБЩЕНИЯ

Подобным образом рассматриваются и другие классы разностных схем для задач конвекции–диффузии. Это относится, в частности, к построению экономичных схем для многомерных задач при расщеплении по пространственным переменным, трехслойным схемам. Здесь мы ограничимся упоминанием схем расщепления по физическим процессам.

Рассмотрим задачу (36), (37) при $C=C_0$ и выделим схемы с поочередным расчетом конвективного и диффузионного переносов. Эти схемы строятся на основе факторизованных схем, схем переменных направлений, которые хорошо исследованы в теории разностных схем [8]. Например, для задачи конвекции–диффузии можно использовать схему второго порядка по времени (аналог классической схемы Писмена–Рекфорда)

$$\frac{y_{n+1/2}-y_n}{0.5\tau}+C_0y_{n+1/2}+Dy_n=0, \tag{66}$$

$$\frac{y_{n+1}-y_{n+1/2}}{0.5\tau}+C_0y_{n+1/2}+Dy_{n+1}=0. \tag{67}$$

На первом этапе (66) на верхний временной слой выносится конвективный перенос, на втором (67) – диффузионный. Схема (66), (67) безусловно устойчива, и для разностного решения справедлива априорная оценка

$$\left\|\left(E+\frac{\tau}{2}D\right)y_{n+1}\right\|\le\left\|\left(E+\frac{\tau}{2}D\right)y_n\right\|.$$

Аналогично строятся и другие безусловно устойчивые схемы расщепления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roache P.J.* Computational fluid dynamics. Albuquerque, N. M.: Hermosa, 1982.
2. *Patankar S.V.* Numerical heat transfer and fluid flow. Washington, DC: Hemisphere, 1980.
3. *Patel M.K., Marcatos N.C.* An evaluation of eight discretization schemes for two-dimensional convection-diffusion equations // Int. J. Numer. Methods Fluids. 1986. V. 6. P. 129–154.
4. *Shyy W. A.* study of finite difference approximations to steady-state, convection-dominated flow problems // J. Comput. Phys. 1985. V. 57. P. 415–438.
5. *Siemieniuch J. E., Gladwell I.* Analysis of explicit difference methods for a diffusion-convection equation // Int. J. Numer. Meths. Engng. 1978. V. 12. P. 899–916.
6. *Morton K.W.* Stability of finite difference aproximations to a diffusion-convection equation // Int. J. Numer. Meths. Engng. 1980. V. 15. P. 677–683.
7. *Richtmyer R.D., Morton K.W.* Difference methods for initial-value problems. New York: Wiley, 1967.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
9. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

10. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational heat transfer. Chichester: Wiley, 1995.
11. *Вабищевич П.Н.* Разностные схемы с центральными разностями для задач конвекции–диффузии: Препринт № 17. М.: ИММ РАН, 1993.
12. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Об устойчивости разностных схем для задач конвекции–диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37, № 2. С. 188–192.
13. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. New Jersey: Englewood-Cliffs, 1964.
14. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
15. *Temam R.* Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland, 1979.
16. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
17. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
18. *Вабищевич П.Н.* Монотонные разностные схемы для задач конвекции–диффузии // Дифференц. ур-ния. 1994. Т. 30. С. 503–513.