ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1998, том 38, № 3, с. 413–424

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ[1)]

© 1998 г. П. Н. Вабищевич*, П. П. Матус**, А. А. Самарский*

(*125047 Москва, Миусская пл., 4а, ИММ РАН;
**220072 Минск, Сурганова, 11, Институт матем. НАН Беларуси)

Поступила в редакцию 18.10.96 г.
Переработанный вариант 30.09.97 г.

Построены схемы повышенного порядка локальной аппроксимации для двумерного уравнения Пуассона на произвольной неравномерной прямоугольной сетке. Исследованы свойства монотонности и консервативности, установлены оценки по начальным данным и правой части, оценки сходимости в сеточных нормах W_2^1, W_2^2, C. Отмечены возможности перенесения результатов на более общие задачи.

При математическом моделировании прикладных задач с особенностями, численном решении многомерных уравнений в областях сложной геометрии часто приходится ориентироваться на использование неравномерных сеток. При этом порядок локальной погрешности аппроксимации обычно [1] понижается.

В ряде работ (см., например, [2]) указывается на возможность повышения точности метода за счет аппроксимации исходного дифференциального уравнения не в узлах расчетной сетки, а в некоторых промежуточных точках. В [3] без увеличения шаблона построены и исследованы различные схемы повышенного порядка аппроксимации для одномерных параболических и гиперболических уравнений. Отметим также [4], в которой за счет перехода к аппроксимации в неузловой точке строятся безусловно монотонные схемы для стационарного уравнения конвекции-диффузии. В [5] методом баланса строятся разностные схемы повышенного (второго и даже третьего) порядка аппроксимации. Однако монотонность таких схем имеет место при очень жестких ограничениях на шаги сеток – фактически речь идет о квазиквадратных сетках.

В настоящей статье для многомерного уравнения Пуассона на произвольной прямоугольной неравномерной сетке построены монотонные консервативные схемы второго порядка локальной аппроксимации. Доказана устойчивость схемы по граничным условиям, правой части и получены соответствующие априорные оценки в сеточных нормах W_2^1, W_2^2, C.

1. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

1. Пусть $\overline{G} = \{0 \le x_1 \le l_1, 0 \le x_2 \le l_2\}$ – прямоугольник с границей Γ. Требуется найти решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \quad u(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1.1}$$

В $\overline{G}$ введем произвольную неравномерную сетку

$$\hat{\overline{\omega}} = \{x = x_{i_1 i_2} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}) \colon x_\alpha^{i_\alpha} = x_\alpha^{i_\alpha - 1} + h_\alpha^{i_\alpha}, i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, x_\alpha^0 = 0, x_\alpha^{N_\alpha} = l_\alpha; \alpha = 1, 2\}, \tag{1.2}$$

удовлетворяющую условию

$$\sum_{i_\alpha = 1}^{N_\alpha} h_\alpha^{i_\alpha} = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского (код проекта 96-01-00657) и Белорусского (код проекта Ф96-173) фондов фундаментальных исследований.

Через $\hat{\omega}$ обозначим множество внутренних узлов сетки $\hat{\bar{\omega}}$, через γ – множество граничных узлов.

Простейшая разностная схема первого порядка аппроксимации на нерегулярном шаблоне "крест" имеет вид [1]

$$y_{\bar{x}_1\hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2\hat{x}_2} = -f(x), \quad x \in \hat{\omega}, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma, \tag{1.3}$$

где в стандартных безындексных обозначениях теории разностных схем имеем

$$y_{\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha} = \frac{1}{\hbar_\alpha}(y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha}), \quad y_{x_\alpha} = \frac{1}{h_{\alpha+}}(y^{(+1_\alpha)} - y), \quad h_{\alpha\pm} = h_\alpha^{i_\alpha \pm 1},$$

$$y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}(y - y^{(-1_\alpha)}), \quad \hbar_\alpha = 0.5(h_\alpha + h_{\alpha+}), \quad v^{(\pm 1_1)} = v_{i_1 \pm 1 i_2}, \quad v^{(\pm 1_2)} = v_{i_1 i_2 \pm 1}.$$

На основе разложения функции u по формуле Тейлора получаем (см. [1])

$$u_{\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha^2} = \frac{h_{\alpha+} - h_\alpha}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O(\hbar_\alpha^2), \tag{1.4}$$

и поэтому схема (1.3) на произвольной сетке имеет первый порядок локальной аппроксимации.

Разностная схема второго порядка аппроксимации на неравномерной сетке $\hat{\bar{\omega}}$ имеет вид

$$y_{(2)\bar{x}_1\hat{x}_1} + y_{(1)\bar{x}_2\hat{x}_2} = -f(\bar{x}), \quad x \in \hat{\omega}, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma. \tag{1.5}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad \bar{x}_\alpha = x_\alpha + \tilde{h}_\alpha, \quad \tilde{h}_\alpha = (h_{\alpha+} - h_\alpha)/3,$$

$$y_{(1)} = y(\bar{x}_1, x_2) = y + h_1^+ y_{x_1} + h_1^- y_{\bar{x}_1}, \quad y_{(2)} = y(x_1, \bar{x}_2) = y + h_2^+ y_{x_2} + h_2^- y_{\bar{x}_2},$$

$$h_\alpha^\pm = 0.5(\tilde{h}_\alpha \pm |\tilde{h}_\alpha|).$$

Отметим, что значения искомой сеточной функции y в неузловых точках $(\bar{x}_1, x_2)$, $(x_1, \bar{x}_2)$ усредняются по формулам второго порядка аппроксимации с учетом направленных разностей. В случае равномерной сетки $h_\alpha^\pm = 0$ и схема (1.5) преобразуется в классическую схема "крест" второго порядка точности:

$$y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x), \quad x \in \omega, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma.$$

2. При исследовании погрешности аппроксимации будем предполагать $f(x)$, $\mu(x)$ такими, что решение задачи (1.1) существует, единственно и является достаточно гладкой функцией. Невязку схемы

$$\psi = u_{(2)\bar{x}_1\hat{x}_1} + u_{(1)\bar{x}_2\hat{x}_2} + f(\bar{x})$$

запишем в виде

$$\begin{aligned}\psi = {} & (u_{(2)} - u(x_1, \bar{x}_2))_{\bar{x}_1\hat{x}_1} + (u(x_1, \bar{x}_2))_{\bar{x}_1\hat{x}_1} - \frac{\partial^2 u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1^2} + \\ & + (u_{(1)} - u(\bar{x}_1, x_2))_{\bar{x}_2\hat{x}_2} + (u(\bar{x}_1, x_2))_{\bar{x}_2\hat{x}_2} - \frac{\partial^2 u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2^2}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Для оценки выражения $\xi_1 = (u_{(2)} - u(x_1, \bar{x}_2))_{\bar{x}_1\hat{x}_1}$ воспользуемся следующими разложениями:

$$u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{h_{2+}}{2}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}}, \quad u_{\bar{x}_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{h_2}{2}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}},$$

где черта сверху означает, что берутся значения аргументов в соответствующих промежуточ-

ных точках (в данном случае – на интервалах $(x_2, x_2 + h_{2+})$ и $(x_2 - h_2, x_2)$). В силу этого,

$$u_{(2)} = u + \tilde{h}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + r_0(x), \quad r_0(x) = \frac{h_2^+ h_{2+}}{2} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}} - \frac{h_2^- h_{2-}}{2} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}} = O(\hbar_2^2).$$

Учитывая, что

$$u(x_1, \bar{x}_2) = u + \tilde{h}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + r_1(x), \quad r_1(x) = \frac{\tilde{h}_2^2}{2} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}},$$

для ξ_1 получаем представление

$$\xi_1 = r_{2\bar{x}_1\hat{x}_1}, \quad r_2(x) = r_0(x) - r_1(x) = O(\hbar_2^2).$$

Так как

$$|r_{2\bar{x}_1\hat{x}_1}| = \left| \frac{1}{\hbar_1} \int_0^1 \int_{x_1 - \xi h_1}^{x_1 + \xi h_{1+}} \frac{\partial^2 r_2(\eta, x_2)}{\partial \eta^2} d\eta\, d\xi \right| \le \hbar_2^2 \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right\|_{C(\bar{G})},$$

то $\xi_1 = O(\hbar_2^2)$. Аналогично показывается, что

$$|\xi_2| = |(u_{(1)} - u(\bar{x}_1, x_2))_{\bar{x}_2\hat{x}_2}| \le \hbar_1^2 \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right\|_{C(\bar{G})}.$$

Далее воспользуемся разложением (1.4) в виде

$$u(x_1, \bar{x}_2)_{\bar{x}_1\hat{x}_1} - \frac{\partial^2 u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1^2} = O(\hbar_1^2), \quad u(\bar{x}_1, x_2)_{\bar{x}_2\hat{x}_2} - \frac{\partial^2 u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1^2} = O(\hbar_2^2).$$

На основании изложенного делаем вывод, что если четвертые производные решения $u(x_1, x_2)$ ограничены, то погрешность аппроксимации является величиной второго порядка малости относительно $|h| = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$, $h_\alpha = \max\limits_{i_\alpha} h_\alpha^{i_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, т.е. существует постоянная M_1, не зависящая от h_1, h_2 и такая, что

$$\|\psi\|_{C(\hat{\omega})} \le M_1(h_1^2 + h_2^2). \tag{1.7}$$

3. Для простоты дальнейших исследований ограничимся рассмотрением случая сгущения сеток по переменным x_1 и x_2 к началу соответствующего отрезка. Тогда $h_\alpha^{i_\alpha + 1} - h_\alpha^{i_\alpha} > 0$, $h_\alpha^- = 0$, $\alpha = 1, 2$, и схема (1.5) примет более простой вид:

$$\left(y + \frac{h_{2+} - h_2}{3} y_{x_2}\right)_{\bar{x}_1\hat{x}_1} + \left(y + \frac{h_{1+} - h_1}{3} y_{x_1}\right)_{\bar{x}_2\hat{x}_2} = -f(\bar{x}), \quad x \in \hat{\omega}, \tag{1.8}$$

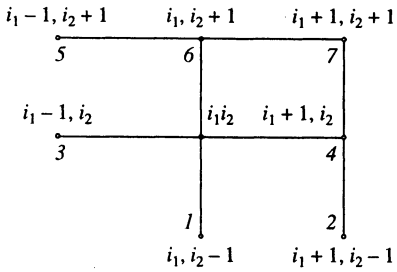
$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma. \tag{1.9}$$

Заметим, что схема (1.8) может быть преобразована к схеме с переменными по пространству весовыми множителями вида

$$y_{(\sigma_2)\bar{x}_1\hat{x}_1} + y_{(\sigma_1)\bar{x}_2\hat{x}_2} = -f(\bar{x}), \tag{1.10}$$

где

$$y_{(\sigma_k)} = \sigma_k y^{(+1_k)} + (1 - \sigma_k) y, \quad \sigma_k = \frac{h_{k+} - h_k}{3h_{k+}} \ge 0, \quad 1 - \sigma_k = \frac{h_k + 2h_{k+}}{3h_{k+}} > 0. \tag{1.11}$$



Фигура.

Для применения принципа максимума схему (1.8) приведем к каноническому виду (см. [1])

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \hat{\omega}, \tag{1.12}$$

и проверим следующие достаточные условия на коэффициенты:

$$A(x) > 0, \quad B(x,\xi) > 0, \quad D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) \geq 0, \quad x \in \hat{\omega}. \tag{1.13}$$

Здесь $Ш'(x) = Ш(x)\backslash\{x\}$, $Ш(x)$ – шаблон схемы.

В рассматриваемом нами случае шаблон схемы 8-точечный и состоит из узлов, изображенных на фигуре. Узлы шаблона пронумеруем согласно фигуре. Тогда для схемы (1.8)

$$\sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) = \sum_{n=1}^{7} B_n.$$

Для того чтобы выписать коэффициенты A, B, F, необходимо записать схему (1.8) в индексной форме. После элементарных преобразований находим

$$A(x) = \frac{2}{h_1 h_{1+}}\left(1 - \frac{h_2^+}{h_{2+}}\right) + \frac{2}{h_2 h_{2+}}\left(1 - \frac{h_1^+}{h_{1+}}\right) = \frac{2}{h_1 h_{1+}}\frac{h_2 + 2h_{2+}}{3h_{2+}} + \frac{2}{h_2 h_{2+}}\frac{h_1 + 2h_{1+}}{3h_{1+}} > 0,$$

$$B_1 = B(x, x_{i_1, i_2-1}) = \frac{1}{\hbar_2 h_2}\frac{h_1 + 2h_{1+}}{3h_1} > 0, \quad B_2 = \frac{h_1^+}{h_{1+}\hbar_2 h_2} > 0,$$

$$B_3 = \frac{1}{\hbar_1 h_1}\frac{h_2 + 2h_{2+}}{3h_2} > 0, \quad B_4 = \frac{1}{h_{1+}h_{2+}}\left(\frac{h_2 + 2h_{2+}}{3\hbar_1} - \frac{2h_1^+}{h_2}\right),$$

$$B_5 = \frac{h_2^+}{h_{1+}\hbar_1 h_1} > 0, \quad B_6 = \frac{1}{h_{1+}h_{2+}}\left(\frac{h_1 + 2h_{1+}}{3\hbar_2} - \frac{2h_2^+}{h_1}\right),$$

$$B_7 = \frac{1}{h_{1+}h_{2+}}\left(\frac{h_2^+}{\hbar_1} + \frac{h_1^+}{\hbar_2}\right) > 0, \quad F(x) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad D(x) = A(x) - \sum_{n=1}^{7} B_n = 0.$$

Очевидно, что

$$B_4 > 0 \text{ при } h_2^2 + 2h_2 h_{2+} > h_{1+}^2 - h_1^2, \tag{1.14}$$

$$B_6 > 0 \text{ при } h_1^2 + 2h_1 h_{1+} > h_{2+}^2 - h_2^2. \tag{1.15}$$

Теорема 1. *Пусть при всех $x \in \hat{\omega}$ выполнены условия положительности коэффициентов* (1.14), (1.15)

$$h_2^2 + 2h_2 h_{2+} > h_{1+}^2 - h_1^2, \quad h_1^2 + 2h_1 h_{1+} > h_{2+}^2 - h_2^2.$$

Тогда разностная схема (1.8), (1.9) *устойчива по правой части и граничным условиям и имеет место оценка*

$$\|y\|_{C(\hat{\bar{\omega}})} \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{4}\|f\|_{C(\hat{\omega})} + \|\mu\|_{C(\gamma)}.$$

Доказательство. Запишем задачу (1.8), (1.9) в виде

$$Ly(x) = F(x), \quad x \in \hat{\omega}, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma,$$

и представим ее решение $y(x)$ в виде суммы $y(x) = \tilde{y}(x) + \bar{y}(x)$, где $\tilde{y}(x)$ – решение однородного уравнения с неоднородным граничным условием:

$$L\tilde{y}(x) = 0, \quad x \in \hat{\omega}, \quad \tilde{y}(x) = \mu, \quad x \in \gamma, \tag{1.16}$$

и $\bar{y}(x)$ – решение неоднородного уравнения с однородным граничным условием:

$$L\bar{y}(x) = F(x), \quad x \in \hat{\omega}, \quad \bar{y}(x) = 0, \quad x \in \gamma. \tag{1.17}$$

Для задачи (1.16) выполняются все условия принципа максимума, и, в силу следствия 3 из [6, с. 299], для ее решения справедлива оценка

$$\|\tilde{y}\|_{C(\hat{\bar{\omega}})} \le \|\mu\|_{C(\gamma)}.$$

Для оценки решения неоднородного уравнения (1.17) строится обычным образом [6] мажорантная функция

$$Y(x) = k(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad k = \frac{1}{4}\|F\|_{C(\hat{\omega})},$$

удовлетворяющая краевой задаче

$$LY(x) = 4k, \quad x \in \hat{\omega}, \quad Y(x) = \bar{\mu}(x), \quad x \in \gamma. \tag{1.18}$$

Применяя теорему сравнения в случае первой краевой задачи [6, с. 299] для схем (1.17), (1.18), приходим к оценке

$$\|\bar{y}\|_{C(\hat{\bar{\omega}})} \le \max_{x \in \hat{\bar{\omega}}} Y(x) \le k(l_1^2 + l_2^2) \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{4}\|f\|_{C(\hat{\omega})}.$$

Из неравенства треугольника $\|y\|_C \le \|\tilde{y}\|_C + \|\bar{y}\|_C$ следует требуемая оценка устойчивости. Теорема доказана.

Монотонность рассматриваемых схем повышенного порядка аппроксимации устанавливается при ограничениях (см. условие теоремы 1) на шаги сетки. Однако эти ограничения во многих случаях не являются обременительными. Для рассматриваемой разбегающейся сетки ($h_{\alpha+} \ge h_\alpha$, $\alpha = 1, 2$) имеем

$$h_\alpha^2 + 2h_\alpha h_{\alpha+} \le 3\hbar_\alpha^2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Поэтому условия монотонности будут выполнены при

$$\frac{h_{1+} - h_1}{\hbar_1} < \frac{3}{2}\left(\frac{\hbar_2}{\hbar_1}\right)^2, \quad \frac{h_{2+} - h_2}{\hbar_2} < \frac{3}{2}\left(\frac{\hbar_1}{\hbar_2}\right)^2.$$

Тем самым ограничение на скорость изменения сетки от узла к узлу по одному направлению связывается с шагами сетки по другому направлению.

4. Для исследования сходимости обозначим $z_{i_1 i_2} = y_{i_1 i_2} - u(x_1^{i_1}, x_2^{i_2})$, где y – решение разностной задачи (1.8), (1.9) и $u(x_1, x_2)$ – решение дифференциальной задачи (1.1). Подставляя $y = z + u$ в уравнение (1.8), получаем для погрешности задачу

$$(z + \tilde{h}_2 z_{x_2})_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + (z + \tilde{h}_1 z_{x_1})_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -\psi, \quad x \in \hat{\omega}, \quad z(x) = 0, \quad x \in \gamma. \tag{1.19}$$

Заметим, что задача (1.19) отличается от разностной схемы (1.8), (1.9) только правыми частями в основном уравнении и в граничных условиях. Поэтому, на основании априорной оценки устой-

чивости по правой части и граничным условиям, оценки погрешности аппроксимации (1.7) при выполнении условия теоремы 1, для погрешности z справедливо неравенство

$$\|z\|_{C(\hat{\bar{\omega}})} \le M_2(h_1^2 + h_2^2), \tag{1.20}$$

где $M_2 = 0.25M_1(l_1^2 + l_2^2)$ – постоянная, не зависящая от h_1, h_2. Из оценки (1.20) следует, что схема (1.8), 1.9) сходится и имеет второй порядок точности.

5. Аналогично строятся монотонные разностные схемы второго порядка локальной аппроксимации для p-мерного ($p > 2$) оператора Лапласа, когда рассматривается краевая задача

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_p) \in G, \quad u(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma,$$

где теперь $G = \{x\colon 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$. На произвольной неравномерной сетке

$$\omega \cup \gamma =$$
$$= \{x = x_{i_1 \ldots i_p} = (x_1^{i_1}, \ldots, x_p^{i_p});\ x_\alpha^{i_\alpha} = x_\alpha^{i_\alpha - 1} + h_\alpha^{i_\alpha},\ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1,\ x_\alpha^0 = 0,\ x_\alpha^{N_\alpha} = l_\alpha;\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$$

соответствующая разностная схема будет иметь вид

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne \alpha}}^{p} (y/2 + h_k^+ y_{x_k} + h_k^- y_{\bar{x}_k})_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = -f(\bar{x}), \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p),$$

где

$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha + \tilde{h}_\alpha, \quad \tilde{h}_\alpha = \frac{h_{\alpha+} - h_\alpha}{3}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Условия монотонности формулируются в виде ограничений на скорость изменения сетки, которые полностью аналогичны сформулированным выше в теореме 1.

2. МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

1. К недостатку принципа максимума можно отнести тот факт, что он позволяет устанавливать оценки точности разностной схемы вида (1.20) при завышенных требованиях к соотношениям на шаги сетки. В данном разделе на основе доказанной теоремы вложения для неравномерной сетки и техники метода энергетических неравенств будут установлены соответствующие оценки точности схем второго порядка локальной аппроксимации на неравномерной сетке в сеточных пространствах W_2^1, W_2^2, C при значительно более слабых ограничениях.

Здесь используются стандартные обозначения теории разностных схем [1] для скалярных произведений и норм:

$$(v, y)_* = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \hbar_1^{i_1} \hbar_2^{i_2} v_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2} = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \hbar_1 \hbar_2 v y,$$

$$\|y\|_*^2 = (y, y)_*, \quad \|y\|_C = \max_{x \in \hat{\bar{\omega}}} |y(x)|.$$

Для оператора Лапласа на неравномерной сетке

$$Ay = -y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} - y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}, \quad A_k y = -y_{\bar{x}_k \hat{x}_k}, \quad A = A_1 + A_2,$$

положим

$$\|y\|_{A_1}^2 = (A_1 y, y)_* = \|y_{\bar{x}_1}]|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1^{i_1} \hbar_2^{i_2} y_{\bar{x}_1, i_1 i_2}^2,$$

$$\|y\|_{A_2}^2 = \|y_{\bar{x}_2}]|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2} \hbar_1^{i_1} h_2^{i_2} y_{\bar{x}_2, i_1 i_2}^2,$$

$$\|y\|_A^2 = \|y\|_{A_1}^2 + \|y\|_{A_2}^2 = \|y_{\bar{x}_1}]|^2 + \|y_{\bar{x}_2}]|^2,$$

$$\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2} h_1^{i_1} h_2^{i_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2, i_1 i_2}^2.$$

Исследуемую разностную схему (1.8), (1.9) запишем (при отмеченных выше упрощениях $h_\alpha^{i_\alpha+1} - h_\alpha^{i_\alpha} \geq 0$, $\alpha = 1, 2$, $i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1$), в виде

$$\tilde{A}y = \varphi(x), \tag{2.1}$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma, \tag{2.2}$$

где $\varphi(x) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и

$$\tilde{A} = A + A_0, \quad A_0 y = \frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2} + \frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2 y_{x_1}.$$

Здесь и далее исследования проводятся в предположении однородности граничных условий $\mu(x) = 0$ при $x \in \gamma$.

2. Приведем вспомогательные результаты, которые понадобятся при использовании метода энергетических неравенств.

Лемма 1. *Для произвольной сеточной функции $y(x)$, заданной на неравномерной прямоугольной сетке $\hat{\bar{\omega}}$ и обращающейся в ноль на границе γ, справедливы соотношения*

$$(A_1 y, y) = \|y_{\bar{x}_1}]|^2, \tag{2.3}$$

$$(A_2 y, y) = \|y_{\bar{x}_2}]|^2, \tag{2.4}$$

$$(Ay, y) = \|y_{\bar{x}_1}]|^2 + \|y_{\bar{x}_2}]|^2, \tag{2.5}$$

$$\|Ay\|_*^2 = \|y_{\bar{x}_1\hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}\|_*^2 = \|y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}\|_*^2 + 2\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2. \tag{2.6}$$

Доказательство. Применяя первую разностную формулу Грина в одномерном случае [7, с. 35]

$$(y, (av_{\bar{x}})_{\hat{x}})_* = -(y_{\bar{x}}, av_{\bar{x}}] + y_N a_N v_{\bar{x}, N} - y_0 a_1 v_{\bar{x}, 1}, \tag{2.7}$$

получаем выражение

$$-\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \hbar_1 y_{\bar{x}_1\hat{x}_1} y = \sum_{i_1=1}^{N_1} h_1 y_{\bar{x}_1}^2. \tag{2.8}$$

Умножая (2.8) на $\hbar_2$ и суммируя по всем $i_2 = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$, приходим к тождеству (2.3). Аналогично доказывается и второе утверждение леммы. Равенство (2.5) является алгебраическим следствием (2.3) и (2.4). По определению $\|\cdot\|_*$ имеем

$$\|y_{\bar{x}_1\hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}\|_*^2 = \|y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}\|_*^2 + 2(y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}, y_{\bar{x}_2\hat{x}_2})_*. \tag{2.9}$$

Применяя формулу Грина (2.7) по переменной x_1 и учитывая, что сеточная функция $y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}$ обращается в ноль при $i_1 = 0, N_1$, находим

$$(y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}, y_{\bar{x}_2\hat{x}_2})_* = -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 \hbar_2 y_{\bar{x}_1} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2\hat{x}_2}. \tag{2.10}$$

Используя в (2.10) ту же формулу по переменной x_2 и учитывая, что $y_{\bar{x}_1} = 0$ при $i_2 = 0, N_2$, приходим к энергетическому соотношению

$$(y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}, y_{\bar{x}_2\hat{x}_2})_* = \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.9), приходим к тождеству (2.6). Лемма доказана.

Лемма 2 (см. [7, с. 36]). *Для произвольной сеточной функции $y(x)$, заданной на неравномерной сетке $\hat{\bar{\omega}} = \{x_i = x_{i-1} + h_i, i = 1, 2, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$ и обращающейся в ноль при $x = 0$, $x = l$, имеет место вложение*

$$\|y\|_C^2 \le \frac{l}{2}\|y_{\bar{x}}]|^2. \tag{2.12}$$

Лемма 3. *Для любой сеточной функции $y(x_1, x_2)$, заданной на неравномерной прямоугольной сетке $\hat{\bar{\omega}}$ и обращающейся в ноль на границе γ, справедливо неравенство*

$$\|y\|_{C(\hat{\omega})}^2 \le \frac{l_1 l_2}{8}\|Ay\|_*^2. \tag{2.13}$$

Доказательство. Принимая во внимание лемму 2 и тождество (2.6), имеем

$$\max_{1 \le i_1 \le N_1 - 1} |y_{i_1 i_2}|^2 \le \frac{l_1}{2}\sum_{i_1=1}^{N_1} h_1^{(i_1)} y_{\bar{x}_1, i_1 i_2}^2 \le \frac{l_1}{2}\sum_{i_1=1}^{N_1} h_1^{(i_1)} \max_{1 \le i_2 \le N_2 - 1} |y_{\bar{x}_1, i_1 i_2}|^2 \le$$

$$\le \frac{l_1}{2}\sum_{i_1=1}^{N_1} h_1 \left(\frac{l_2}{2}\sum_{i_2=1}^{N_2} h_2 y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2\right) \le \frac{l_1 l_2}{8}(\|y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}_2\hat{x}_2}\|_*^2 + 2\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2) = \frac{l_1 l_2}{8}\|Ay\|_*^2.$$

В силу произвольности i_2, из последнего неравенства следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Для шагов прямоугольной неравномерной сетки $\hat{\bar{\omega}}$, сгущающейся к началу координат:*

$$h_k^{i_k+1} - h_k^{i_k} \ge 0, \quad k = 1, 2, \tag{2.14}$$

выполнены неравенства

$$\frac{h_{k+} - h_k}{2h_{k+}} + \frac{(h_k + h_{k-})(h_k - h_{k-})}{6h_k(h_k + h_{k+})} \le \delta_k, \quad k = 1, 2, \tag{2.15}$$

$$\delta_k = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{h_k}{h_{k+}} + \frac{h_{k-}}{3h_k}\right), \quad \max_k \max_{i_k} \delta_k \le \delta, \quad 0 \le \delta < \frac{2}{3},$$

причем $\delta_k = \delta = 0$ в случае равномерной сетки.

Доказательство леммы следует из неравенства

$$\frac{h_{k-} + h_k}{h_k + h_{k+}} \le 1. \tag{2.16}$$

Лемма 5. *Для всякой сеточной функции $y(x_1, x_2)$, заданной на неравномерной прямоугольной сетке $\hat{\bar{\omega}}$ и обращающейся в ноль на границе γ, справедливы неравенства*

$$\frac{1}{6}\|h_1 y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2 \le \frac{2}{3}\|y_{\bar{x}_2}]|^2, \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{6}\|h_2 y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2 \le \frac{2}{3}\|y_{\bar{x}_1}]|^2. \tag{2.18}$$

Доказательство. Применяя ε-неравенство Коши, получаем

$$\frac{1}{6}\|h_1 y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|^2 = \frac{1}{6}\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2} h_1 h_2 (y_{\bar{x}_2} - y_{\bar{x}_2}^{(-1_1)})^2 \le$$

$$\le \frac{1}{3}\left(\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2} \hbar_1 h_2 \frac{h_1}{\hbar_1} y_{\bar{x}_2}^2 + \sum_{i_1=2}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2} \hbar_{1-} h_2 \frac{h_1}{\hbar_{1-}} y_{\bar{x}_2}^{(-1_1)^2}\right) \le \frac{1}{3}\left(\frac{h_1 + h_{1+}}{\hbar_1}, y_{\bar{x}_2}^2\right] = \frac{2}{3}\|y_{\bar{x}_2}]|^2.$$

Аналогично доказывается и неравенство (2.18). Отметим, что доказательство соответствующих неравенств в случае равномерной сетки можно найти в [8].

3. Получим априорные оценки устойчивости разностной схемы (2.1), (2.2).

Теорема 2. *Разностная схема* (2.1), (2.2) *устойчива по правой части, и имеет место оценка*

$$\|y\|_A \le \frac{1}{1-\delta}\|\varphi\|_{A^{-1}}, \tag{2.19}$$

где $\delta = 2/3$ *и* $\delta = 0$ *в случае равномерной сетки.*

Доказательство. Умножив уравнение (2.1) скалярно на y и воспользовавшись тождеством (2.5), получим

$$\|y\|_A^2 + (A_0 y, y)_* = (\varphi, y)_*. \tag{2.20}$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(A_0 y, y)_* = \left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2} + \frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2 y_{x_1}, y\right)_*.$$

Нетрудно заметить, что

$$\left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2}, y\right)_* = \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 \hbar_2 \sigma_2 (y_{\bar{x}_1}^{(+1_2)} - y_{\bar{x}_1}) y_{\bar{x}_1} \ge -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 \hbar_2 \sigma_2 \left(\frac{3}{2} y_{\bar{x}_1}^2 + \frac{1}{2} y_{\bar{x}_1}^{(+1_2)^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}(\sigma_2, y_{\bar{x}_1}^2] - \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-2} h_1 \hbar_{2+} \left(\frac{\hbar_2 \sigma_2}{2\hbar_{2+}} y_{\bar{x}_1}^{(+1_2)^2}\right) = -\frac{3}{2}(\sigma_2, y_{\bar{x}_1}^2] - \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=2}^{N_2-1} h_1 \hbar_2 \left(\frac{\hbar_{2-}\sigma_{2-}}{2\hbar_2} y_{\bar{x}_1}^2\right) =$$

$$= -\sum_{i_1=1}^{N_1} h_1 \hbar_2^1 \frac{h_2^2 - h_2^1}{2h_2^2} y_{\bar{x}_1, i_1 1}^2 - \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=2}^{N_2-1} h_1 \hbar_2 \left(\frac{h_{2+} - h_2}{2h_{2+}} + \frac{\hbar_{2-}(h_2 - h_{2-})}{6h_2 \hbar_2}\right) y_{\bar{x}_1}^2.$$

Применяя теперь лемму 4 и учитывая, что $(h_2^2 - h_1^2)/(2h_2^2) \le \delta_{21}$, получаем оценку

$$\left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2}, y\right)_* \ge -(\delta_2, y_{\bar{x}_1}^2] \ge -\delta\|y\|_{A_1}^2. \tag{2.21}$$

Аналогично,

$$\left(\frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2 y_{x_1}, y\right)_* \ge -\delta\|y\|_{A_2}^2. \tag{2.22}$$

Объединяя неравенства (2.21) и (2.22), находим

$$(A_0 y, y)_* \ge -\delta\|y\|_A^2. \tag{2.23}$$

В силу обобщенного неравенства Коши

$$(x, y)_A \le \|x\|_A \|y\|_A, \tag{2.24}$$

скалярное произведение $(\varphi, y)_*$ можно оценить следующим образом:

$$(\varphi, y)_* = (A^{-1}\varphi, Ay)_* = (y, A^{-1}\varphi)_A \le \|y\|_A \|\varphi\|_{A^{-1}}. \tag{2.25}$$

Подставляя (2.23), (2.25) в (2.20), приходим к требуемой оценке (2.19). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия*:

$$\frac{h_k - h_{k-}}{2h_k} + \frac{h_{k+} - h_k}{6h_k} \le \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \quad i_k = 2, 3, \ldots, N_k - 1. \tag{2.26}$$

Тогда разностная схема (2.1), (2.2) *устойчива по правой части и имеют место оценки*

$$\|Ay\|_* \le 3\|\varphi\|_*, \tag{2.27}$$

$$\|y\|_C \le \frac{3\sqrt{l_1 l_2}}{2\sqrt{2}}\|\varphi\|_*. \tag{2.28}$$

Доказательство. Умножая уравнение (2.1) скалярно на Ay, получаем

$$\|Ay\|_*^2 + (A_0 y, Ay)_* = (\varphi, Ay)_*, \tag{2.29}$$

где

$$(A_0 y, Ay)_* = \left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2} + \frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2 y_{x_1}, A_1 y + A_2 y\right)_*. \tag{2.30}$$

Учитывая, что $\delta < 2/3$, аналогично (2.21) находим оценку

$$\left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2}, A_1 y\right)_* + \left(\frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2 y_{x_1}, A_2 y\right)_* \ge -\frac{2}{3}(\|A_1 y\|_*^2 + \|A_2 y\|_*^2). \tag{2.31}$$

Применяя разностную формулу Грина по направлению x_1, приходим к неравенству

$$\left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2}, A_2 y\right)_* = -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} \frac{h_{2+} - h_2}{3} h_1 \hbar_2 y_{\bar{x}_1 x_2} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \hat{x}_2} = -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 \frac{h_{2+} - h_2}{3} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^{(+1_2)} (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^{(+1_2)} - y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}) \ge$$

$$\ge -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 \frac{h_{2+} - h_2}{3}\left(\frac{3}{2}(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^{(+1_2)})^2 + \frac{1}{2} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2\right) = -\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=2}^{N_2} h_1 h_2 \frac{h_2 - h_{2-}}{2h_2} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 - \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 \frac{h_{2+} - h_2}{6h_2} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2.$$

Используя теперь условие (2.26), окончательно получаем

$$\left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2}, A_2 y\right)_* \ge -\frac{2}{3}\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}]|^2. \tag{2.32}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что

$$\left(\frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2 y_{x_1}, A_1 y\right)_* \ge -\frac{2}{3}\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}]|^2. \tag{2.33}$$

Подставляя оценки (2.31)–(2.33) в энергетическое равенство (2.30) и используя тождество (2.6), получаем

$$(A_0 y, Ay)_* \ge -\frac{2}{3}\|Ay\|_*^2. \tag{2.34}$$

Для оценки правой части (2.29) применим неравенство Коши–Буняковского

$$(\varphi, Ay)_* \le \|\varphi\|_* \|Ay\|_*. \tag{2.35}$$

С учетом оценок (2.34), (2.35) выражение (2.29) можно переписать в виде

$$\frac{1}{3}\|Ay\|_*^2 \le \|\varphi\|_* \|Ay\|_*.$$

Итак, требуемая оценка (2.27) доказана. Неравенство (2.28) является следствием (2.27) и вложения (2.13). Теорема доказана.

Замечание. Пусть сетка по направлению x_k сгущается по закону $h_k^{i_k+1} = q_k h_k^{i_k}$, $q_k \geq 1$ – константа для всех $i_k = 1, 2, \ldots, N_k - 1$. Рассмотрим, при каких q_k выполняется условие теоремы 3. С учетом сформулированных предположений имеем

$$\frac{h_k - h_{k-}}{2h_k} + \frac{h_{k+} - h_k}{6h_k} - \frac{2}{3} = \frac{q_k^2 - 2q_k - 3}{6q_k}.$$

Следовательно, условия теоремы выполнены при всех $1 \leq q_k \leq 3$.

4. На основании полученных оценок устойчивости по правой части (2.27), (2.28) может быть доказана

Теорема 4. *Если существуют ограниченные производные решения $u(x_1, x_2)$ до четвертого порядка включительно и выполнены условия* (2.26), *то решение разностной схемы* (1.8), (1.9) *сходится к точному решению дифференциальной задачи и для погрешности метода z справедливы оценки*

$$\|Az\|_* \leq c_1(h_1^2 + h_2^2), \quad \|z\|_C \leq c_2(h_1^2 + h_2^2), \tag{2.36}$$

где положительные постоянные $c_1 = 3M_1\sqrt{l_1 l_2}$, $c_2 = 3M_1 l_1 l_2/(2\sqrt{2})$ не зависят от шагов сетки.

Доказательство. Так как задача для погрешности разностной схемы имеет вид (1.19) и аналогична (2.1), (2.2), то на основании теоремы 3 имеем

$$\|Az\|_* \leq 3\|\psi\|_*, \quad \|z\|_C \leq \frac{3\sqrt{l_1 l_2}}{2\sqrt{2}}\|\psi\|_*. \tag{2.37}$$

В силу (1.7) получим

$$\|\psi\|_* = \left(\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} \hbar_1\hbar_2\psi^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_{1+}h_{2+}\|\psi\|_C^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{l_1 l_2}M_1(h_1^2 + h_2^2). \tag{2.38}$$

Подставляя (2.38) в (2.37), приходим к требуемым оценкам точности (2.36).

3. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С САМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Рассмотрим следующий класс разностных схем, аппроксимирующих задачу Дирихле (1.1) на неравномерной сетке $\hat{\bar{\omega}}$:

$$A_0 y = \varphi(x), \quad y(x) = 0, \quad x \in \gamma. \tag{3.1}$$

Здесь снова $\varphi(x) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, а оператор A_0 определяется следующим образом:

$$A_0 y = -\left(y + \left(\frac{h_2^2}{6}y_{\bar{x}_2}\right)_{\hat{x}_2}\right)_{\bar{x}_1\hat{x}_1} - \left(y + \left(\frac{h_1^2}{6}y_{\bar{x}_1}\right)_{\hat{x}_1}\right)_{\bar{x}_2\hat{x}_2}.$$

Очевидно, что $A_0 = A_0^*$ – самосопряженный оператор. Рассмотрим вопрос о погрешности аппроксимации. Так как оператор A_0 можно представить в виде

$$A_0 = \tilde{A} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{6}A_1 A_2,$$

то разностная схема (3.1) аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком:

$$O(h_1^2 + h_2^2), \quad h_k = \max_{i_k} h_k^{(ik)}.$$

Теорема 5. *Разностная схема* (3.1) *устойчива по правой части, и имеет место оценка*

$$\|y\|_A \leq 3\|\varphi\|_{A^{-1}}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Умножим уравнение (3.1) скалярно на y и воспользуемся тождеством (2.5) и разностной формулой Грина. Это даст равенство

$$\|y\|_A^2 - \left(\frac{h_1^2 + h_2^2}{6}, y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2\right] = (\varphi, y)_*. \tag{3.3}$$

В силу леммы 5 имеет место неравенство

$$-\left(\frac{h_1^2 + h_2^2}{6}, y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2\right] \geq -\frac{2}{3}\|y\|_A^2.$$

Применяя к скалярному произведению $(\varphi, y)_*$ неравенство (2.25) и подставляя найденные оценки в энергетическое тождество (3.3), приходим к оценке (3.2). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. *Берковский Б.М., Полевиков В.К.* Вычислительный эксперимент в конвекции. Минск: Университетское, 1988.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы повышенного порядка точности на неравномерных сетках // Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 2. С. 265–274.
4. *Гущин В.А., Щенников В.В.* Об одной монотонной разностной схеме второго порядка точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 3. С. 789–792.
5. *Ильин В.П.* Балансные аппроксимации повышенной точности для уравнения Пуассона // Сибирский матем. ж. 1996. Т. 37. № 1. С. 151–169.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
8. *Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.