МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, т.8, № 9, с. 74-84

Устойчивость трехслойных проекционно-разностных схем

© *А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич*

Москва

Реферат. Формулируются общие условия устойчивости трехслойных проекционно-разностных схем (схем конечных элементов) для приближенного решения линейных нестационарных задач в виде неравенств для соответствующих билинейных форм. Рассмотрены условия ρ-устойчивости таких схем с проивольным ρ. Приведены оценки устойчивости по начальным данным и правой части в различных нормах. Для эволюционного уравнения первого порядка исследуется устойчивость трехслойных схем с весами. Аналогично могут быть перенесены и другие основные результаты общей теории устойчивости операторно-разностных схем на схемы конечных элементов.

Введение

При приближенном решении нестационарных задач математической физики получил широкое распространение подход с конечно-элементной аппроксимацией по пространству и разностной аппроксимацией по времени [1], [2]. Для таких проекционно-разностных схем принципиальной является проблема устойчивости приближенного решения по начальным данным и правой части. В работе [3] развивается общая теория устойчивости проекционно-разностных схем, которая в своей основе тесно примыкает к общей теории устойчивости разностных схем [4], [5].

В работе [3] приведены общие условия устойчивости и ρ-устойчивости двухслойных проекционно-разностных схем. Формулируются достаточные условия устойчивости схем с весами, получены оценки устойчивости по правой части. В данной работе рассматривается класс трехслойных разностных схем.

1. Каноническая форма трехслойных проекционно-разностных схем

Рассматривается приближенное решение некоторой начально-краевой задачи в области Ω с границей $\partial\Omega$. Пусть $(\cdot,\cdot), \|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$, т. е.

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx, \quad \|u\| = (u,u)^{1/2}.$$

С симметричной билинейной положительно определенной формой $d(u,v)$, для которой

$$d(u,v) = d(v,u), \quad d(u,u) \geq \delta\|u\|^2, \quad \delta > 0,$$

связывается гильбертово пространство H_d со скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_d = d(u, v), \quad \|u\|_d = \Big(d(u, u)\Big)^{1/2}.$$

Пусть $t = t_n = nt$, $n = 0, 1, \dots$, где $\tau > 0$ — шаг по времени. Для величин на временном слое t_n будем использовать нижний индекс n. Обозначим через $\mathcal{V}^h$ конечномерное пространство конечных элементов. Приближенное решение на момент времени $t = t_n$ обозначим $y_n (y_n \in \mathcal{V}^h)$.

В соответствии с общей теорией устойчивости разностных схем [4], [5] запишем трехслойную проекционно-разностную схему в следующем каноническом виде

$$\begin{aligned} &b_n\left(\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau}, v\right) + r_n(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}, v) + a_n(y_n, v) = (f_n, v), \\ &\forall v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $b_n(\cdot, \cdot)$, $r_n(\cdot, \cdot)$, $a_n(\cdot, \cdot)$ — некоторые вещественные билинейные формы. Необходимо найти приближенное решение y_n, $n = 2, 3, \dots$ из (1.1) при условии, что y_0 и y_1 известны.

Ограничимся случаем постоянных, независящих от n, билинейных форм в (1.1). Будем рассматривать проекционно-разностную схему

$$\begin{aligned} &b\left(\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau}, v\right) + r(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}, v) + a(y_n, v) = 0, \\ &\forall v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{1.2}$$

т. е. вначале будем исследовать устойчивость по начальным данным.

2. Устойчивость схемы по начальным данным

При рассмотрении трехслойных разностных схем [4], [5] устойчивость устанавливается в некоторых достаточно сложных нормах. Получим априорную оценку для схемы (1.2), которая выражает устойчивость по начальным данным.

Положим

$$u_n = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}), \quad w_n = y_n - y_{n-1} \tag{2.1}$$

и с учетом тождества

$$y_n = \frac{1}{4}(y_{n+1} + 2y_n + y_{n-1}) - \frac{1}{4}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})$$

перепишем схему (1.2) в виде

$$\begin{aligned} b\left(\frac{w_{n+1} + w_n}{2\tau}, v\right) &+ r(w_{n+1} - w_n, v) - a(w_{n+1} - w_n, v) \\ &+ a\left(\frac{u_{n+1} + u_n}{2}, v\right) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.2}$$

Выбирая в (2.2)

$$v = 2(u_{n+1} - u_n) = w_{n+1} + w_n,$$

получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau}b(w_{n+1} + w_n, w_{n+1} + w_n) + r(w_{n+1} - w_n, w_{n+1} + w_n) \\ - \frac{1}{4}a(w_{n+1} - w_n, w_{n+1} + w_n) + a(u_{n+1} + u_n, u_{n+1} - u_n) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для симметричных билинейных форм $r(\cdot,\cdot)$ $(r(u,v) = r(v,u))$ и $a(\cdot,\cdot)$ и неотрицательной формы $b(\cdot,\cdot)$ $(b(v,v) \geq 0)$ из (2.3) следует неравенство

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq \mathcal{E}_n, \tag{2.4}$$

где с учетом обозначений (2.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1} = \frac{1}{4}a(y_{n+1} + y_n, y_{n+1} + y_n) + r(y_{n+1} - y_n, y_{n+1} - y_n) \\ - \frac{1}{4}a(y_{n+1} - y_n, y_{n+1} - y_n). \end{aligned} \tag{2.5}$$

При некоторых ограничениях величина $\mathcal{E}_n$, определяемая согласно (2.5), задает норму, и поэтому неравенство (2.4) обеспечивает устойчивость проекционно-разностной схемы по начальным данным. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в проекционно-разностной схеме (1.2) билинейные формы $r(\cdot,\cdot)$ и $a(\cdot,\cdot)$ симметричны. Тогда при выполнении условий*

$$\begin{aligned} & b(v,v) \geq 0, \\ & a(v,v) > 0, \\ & r(v,v) - \tfrac{1}{4}a(v,v) > 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^h \end{aligned} \tag{2.6}$$

имеет место априорная оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\|y_{n+1} + y_n\|_a^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_r^2 - \frac{1}{4}\|y_{n+1} - y_n\|_a^2 \\ \leq \frac{1}{4}\|y_n + y_{n-1}\|_a^2 + \|y_n - y_{n-1}\|_r^2 - \frac{1}{4}\|y_n - y_{n-1}\|_a^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

т. е. проекционно-разностная схема (1.2) устойчива по начальным данным.

Особенностью рассматриваемых трехслойных схем является именно сложная конструкция нормы (см. (2.5)). В некоторых важных случаях при сужении класса проекционно-разностных схем можно подобно [5] перейти к более простым нормам.

3. Переход к двухслойной схеме

Исследование многослойных разностных схем удобно проводить [5] на основе перехода к эквивалентной двухслойной схеме. Для двухслойных схем получены наиболее глубокие (в частности, совпадающие необходимые и достаточные условия устойчивости) результаты. Отметим некоторые возможности в этом направлении для трехслойных проекционно-разностных схем (1.2).

Обозначим через H^2 прямую сумму пространств H: $H^2 = H \oplus H$. Для векторов $U = \{u^1, u^2\}$ сложение и умножение в H^2 определяется покоординатно, а скалярное произведение

$$(U,V) = (u^1,v^1) + (u^2,v^2).$$

На H^2 определим билинейные формы с помощью соотношений

$$\mathcal{D}(U,V) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} d_{\alpha\beta}(u,v).$$

С симметричной положительно определенной формой $\mathcal{D}(\cdot,\cdot)$ свяжем гильбертово пространство $H^2_{\mathcal{D}}$ в котором скалярное произведение и норма есть

$$(U,V)_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(U,V), \quad \|U\| = \Big(\mathcal{D}(U,U)\Big)^{1/2}.$$

Мы хотим трехслойную проекционно-разностную схему (1.2) записать в виде двухслойной векторной схемы

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}\left(\frac{Y^{n+1}-Y^n}{\tau}, V\right) + \mathcal{A}(Y^n, V) = 0, \quad n = 1,2,\dots, \\ &V = \{v^1, v^2\}, \qquad\qquad\qquad\qquad \forall v^\alpha \in \mathcal{V}^h, \quad \alpha = 1,2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

при соответствующем определении векторов Y^n, $n = 1,2,\dots$ Для исследования двухслойной проекционно-разностной (3.1) могут привлекаться результаты работы [3].

В соответствии с вышеизложенным для каждого $n = 1,2,\dots$ определим вектор

$$Y^n = \left\{\frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}), y_n - y_{n-1}\right\}. \tag{3.2}$$

В условиях теоремы 1 полученной оценке устойчивости (2.7) в новых обозначениях можно придать вид

$$\|Y^{n+1}\|_{\mathcal{D}} \le \|Y^n\|_{\mathcal{D}}, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned} &d_{11}(u,v) = a(u,v), \\ &d_{12}(u,v) = d_{21}(u,v) = 0, \\ &d_{22}(u,v) = r(u,v) - \frac{1}{4}a(u,v). \end{aligned} \tag{3.4}$$

В обозначениях (2.1) двухслойная векторная схема (3.1), (3.2) расписывается следующим образом

$$\begin{aligned} b_{11}\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}, v^1\right) &+ b_{12}\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}, v^2\right) + b_{21}\left(\frac{w_{n+1}-w_n}{\tau}, v^1\right) \\ &+ b_{22}\left(\frac{w_{n+1}-w_n}{\tau}, v^2\right) + a_{11}(u_n, v^1) + a_{12}(u_n, v^2) \\ &+ a_{21}(w_n, v^1) + a_{22}(w_n, v^2) = 0, \quad \forall v^\alpha \in \mathcal{V}^h, \ \alpha = 1,2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) сопоставляется с трехслойной проекционно-разностной схемой в форме (2.2). Принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}+u_n}{2} &= u_n + \frac{u_{n+1}-u_n}{2}, \\ 2(u_{n+1}-u_n) &= w_{n+1} + w_n, \end{aligned}$$

перепишем (2.2) в более удобном виде

$$\begin{aligned} b\Big(\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}, v\Big) + r\Big(\frac{w_{n+1}-w_n}{\tau}, v\Big) - \frac{1}{4}a(w_{n+1}-w_n, v) \\ +\frac{\tau}{2}a\Big(\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}, v\Big) + a(u_n, v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для того чтобы от (3.5) перейти к (3.6), положим $v^1 = v$ и

$$\begin{aligned} &b_{11}(u,v) = b(u,v) + \frac{\tau}{2}a(u,v), \quad && b_{21}(u,v) = \tau r(u,v) - \frac{\tau}{4}a(u,v), \\ &a_{11}(u,v) = a(u,v), && a_{21}(u,v) = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Слагаемые с v^2 не дают вклада в (3.6). Ориентируясь на двухслойные проекционно-разностные схемы (3.1) с симметричной положительной формай $a(\cdot,\cdot)$, определим

$$\begin{aligned} &b_{12}(u,v) = -\tau d(u,v), \quad && b_{22}(u,v) = \frac{\tau}{2}d(u,v), \\ &a_{12}(u,v) = 0, && a_{22}(u,v) = d(u,v), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $d(\cdot,\cdot)$ — некоторая симметричная положительная билинейная форма.

При выборе (3.7), (3.8) для билинейных форм двухслойной проекционно-разностной схемы (3.1) имеем

$$\mathcal{B}(U,V) = \frac{\tau}{2}\mathcal{A}(U,V) + \mathcal{C}(U,V), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} &c_{11}(u,v) = b(u,v), \quad && c_{12}(u,v) = \tau r(u,v) - \frac{\tau}{4}a(u,v), \\ &c_{21}(u,v) = -\tau d(u,v), && c_{22}(u,v) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

На основе такой записи в условиях теоремы 1 устанавливается устойчивость проекционно-разностной схемы (1.2), т. е. оценка (3.3), (3.4). Двухлойная векторная проекционно-разностная схема (3.1) при симметричной и положительной форме $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ устойчива по начальным данным [3] в $H^2_{\mathcal{A}}$, если

$$\mathcal{B}(U,U) \geq \frac{\tau}{2}\mathcal{A}(U,U). \tag{3.11}$$

Принимая во внимание (3.9), условие (3.11) будет выполнено при

$$\mathcal{C}(U,U) \geq 0.$$

Это условие будет всегда выполнено для билинейной формы $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$, определяемой (3.10), при $b(u,u) \geq 0$ и выборе

$$d(u,v) = r(u,v) - \frac{1}{4}a(u,v). \tag{3.12}$$

При (3.12) устойчивость в $H^2_{\mathcal{A}}$ соответствует выполнению (3.3), (3.4).

4. ρ-устойчивость трехслойных схем

Допуская уменьшение или рост нормы решения проекционно-разностной задачи, будем ориентироваться на ρ-устойчивые схемы, когда условие устойчивости по начальным данным имеет вид

$$\|Y^{n+1}\|_{\mathcal{D}} \le \rho \|Y^n\|_{\mathcal{D}}, \tag{4.1}$$

где $\rho > 0$.

Теорема 2. *Пусть в проекционно-разностной схеме (1.2) билинейные формы $r(\cdot,\cdot)$ и $a(\cdot,\cdot)$ симметричны. Тогда при выполнении условий*

$$\begin{aligned} & b(v,v) + \frac{\tau}{2}\frac{\rho-1}{\rho+1}a(v,v) \ge 0, \\ & a(v,v) > 0, \\ & r(v,v) - \frac{1}{4}a(v,v) > 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^h \end{aligned} \tag{4.2}$$

с $\rho > 1$ имеет место априорная оценка (4.1), (3.4), т. е. проекционно-разностная схема (1.2) ρ-устойчива по начальным данным.

Двухслойная векторная проекционно-разностная схема (3.1) ρ-устойчива с $\rho > 1$ при [3] выполнении неравенства

$$\mathcal{B}(U,U) \ge \frac{\tau}{\rho+1}\mathcal{A}(U,U). \tag{4.3}$$

Принимая во внимание (3.9), неравенство (4.3) переписывается в виде

$$\mathcal{C}(U,U) + \frac{\tau}{2}\frac{\rho-1}{\rho+1}\mathcal{A}(U,U) \ge 0. \tag{4.4}$$

В условиях теоремы выполнение неравенства (4.4) проверяется непосредственно.

В несколько более общих условиях устанавливаются оценки ρ-устойчивости (4.1) с произвольным $\rho > 0$, если допустить использование норм (билинейных форм D), зависящие от ρ. В проекционно-разностной схеме (1.2) введем новые неизвестные соотношением $y_n = \rho^n z_n$, что дает

$$\begin{aligned} & b\Big(\frac{\rho z_{n+1} - \rho^{-1}z_{n-1}}{2\tau}, v\Big) + r(\rho z_{n+1} - 2z_n + \rho^{-1}z_{n-1}, v) + a(z_n, v) = 0, \\ & \forall v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4.5}$$

Схему (4.5) запишем в канонической форме

$$\begin{aligned} & \tilde{b}\Big(\frac{z_{n+1} - z_{n-1}}{2\tau}, v\Big) + \tilde{r}(z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}, v) + \tilde{a}(z_n, v) = 0, \\ & \forall v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4.6}$$

Непосредственные выкладки дают

$$\begin{aligned} \tilde{b}(u,v) &= \frac{\rho^2+1}{2}b(u,v) + \tau(\rho^2-1)r(u,v), \\ \tilde{r}(u,v) &= \frac{\rho^2-1}{4\tau}b(u,v) + \frac{\rho^2+1}{2}r(u,v), \\ \tilde{a}(u,v) &= \frac{\rho^2-1}{2\tau}b(u,v) + (\rho-1)^2 r(u,v) + \rho a(u,v). \end{aligned} \tag{4.7}$$

На основании теоремы 1 при

$$\begin{aligned} & \tilde{b}(u,v) \le 0, \\ & \tilde{a}(u,v) > 0, \\ & \tilde{r}(u,v) - \frac{1}{4}\tilde{a}(v,v), \quad \forall v \in \mathcal{V}^h, \end{aligned} \tag{4.8}$$

имеет место устойчивость схемы (4.6) по начальным данным, а именно, верна оценка

$$\|Z^{n+1}\|_{\mathcal{D}} \le \|Z^n\|_{\mathcal{D}}, \tag{4.9}$$

где (см. (3.2))

$$Z^n = \left\{\frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}), z_n - z_{n-1}\right\}.$$

С учетом этого определим теперь вектор

$$Y^n = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}y_n + y_{n-1}\right), \frac{1}{\rho}y_n - y_{n-1}\right\}. \tag{4.10}$$

Тогда оценка (4.9) примет вид

$$\|Y^{n+1}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \le \rho\|Y^n\|_{\tilde{\mathcal{D}}}, \tag{4.11}$$

т. е. исходная проекционно-разностная схема (1.2) ρ-устойчива по начальным данным.

Норма в (4.11) определяется билинейной формой $\tilde{\mathcal{D}}(\cdot,\cdot)$, для которой

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{11}(u,v) &= \tilde{a}(u,v), \\ \tilde{d}_{12}(u,v) &= \tilde{d}_{21}(u,v) = 0, \\ \tilde{d}_{22}(u,v) &= \tilde{r}(u,v) - \frac{1}{4}\tilde{a}(u,v). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Условия устойчивости формулируются на основе (4.7), (4.8).

Теорема 3. *Пусть в проекционно-разностной схеме (1.2) билинейные формы $r(\cdot,\cdot)$ и $a(\cdot,\cdot)$ симметричны. Тогда при выполнении условий*

$$\begin{aligned} &\frac{\rho^2+1}{2}b(v,v) + \tau(\rho^2-1)r(v,v) \ge 0, \\ &\frac{\rho^2-1}{2\tau}b(v,v) + (\rho-1)^2 r(v,v) + \rho a(v,v) > 0, \\ &\frac{\rho^2-1}{2\tau}b(v,v) + (\rho+1)^2 r(v,v) - \rho a(v,v) > 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

с $\rho > 0$ имеет место априорная оценка (4.10)–(4.12), т. е. проекционно-разностная схема (1.2) ρ-устойчива по начальным данным в $H^2_{\tilde{\mathcal{D}}}$.

Условия ρ-устойчивости (4.13) можно использовать при исследовании трехслойных проекционно-разностных схем для некорректных эволюционных задач [6], для которых типичной является ситуация с отрицательной билинейной формой $a(\cdot,\cdot)$ и $\rho > 1$.

5. Оценки в более простых нормах

Устойчивость рассматриваемых проекционно-разностных схем установлена в гильбертовых пространствах со сложной составной нормой (см. (2.4), (2.5)). При исследовании устойчивости трехслойных разностных схем получены [4], [5] оценки устойчивости в более простых чем (2.5) нормах. Достигается это за счет несколько более жестких условий устойчивости. Полностью аналогична ситуация и в случае проекционно-разностных схем. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 4. *Пусть в проекционно-разностной схеме (1.2) билинейные формы* $r(\cdot,\cdot)$ *и* $a(\cdot,\cdot)$ *симметричны. Тогда при выполнении условий*

$$\begin{aligned} &b(v,v) \geq 0, \\ &a(v,v) > 0, \\ &r(v,v) - \frac{1+\varepsilon}{4} a(v,v) > 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^h \end{aligned} \tag{5.1}$$

с $\varepsilon > 0$ *имеют место априорные оценки*

$$\|y_{n+1}\|_a^2 \leq 2\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\Big(\|y_0\|_0^2 + \|y_1 - y_0\|_r^2\Big), \tag{5.2}$$

$$\|y_{n+1}\|_a^2 + \|y_n - y_{n-1}\|_r^2 \leq \frac{4+3\varepsilon}{\varepsilon}\Big(\|y_0\|_a^2 + \|y_1 - y_0\|_r^2\Big). \tag{5.3}$$

В безиндексных обозначениях $y_n = y$, $y_{n+1} = \hat{y}$, $\hat{y} - y = \tau y_t$ для $\mathcal{E}_{n+1}$, определяемого согласно (2.5), имеем

$$\mathcal{E}_{n+1} = \frac{1}{4}a(\hat{y}+y, \hat{y}+y) + \tau^2 r(y_t, y_t) - \frac{\tau^2}{4} a(y_t, y_t) = a(\hat{y}, y) + \tau^2 r(y_t, y_t). \tag{5.4}$$

Подстановка $\hat{y} = y + \tau y_t$ дает

$$\mathcal{E}_{n+1} = a(y,y) + \tau a(y, y_t) + \tau^2 r(y_t, y_t) \leq \|y\|_a^2 + \tau \|y\|_a \|y_t\|_a + \tau^2 \|y_t\|_r^2.$$

Принимая во внимание третье неравенство (5.1), получим

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq \|y\|_a^2 + \frac{2\tau}{(1+\varepsilon)^{1/2}} \|y\|_a \|y_t\|_r + \tau^2 \|y_t\|_r^2 \leq 2\Big(\|y\|_a^2 + \tau^2 \|y_t\|_r^2\Big).$$

Тем самым установлена оценка снизу для составной нормы

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq 2\Big(\|y_n\|_a^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_r^2\Big). \tag{5.5}$$

Оценка сверху устанавливается аналогично. Положим в (5.4) $y = \hat{y} - \tau y_t$ и с учетом (5.1) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1} &= a(\hat{y}, \hat{y}) - \tau a(\hat{y}, y_t) + \tau^2 r(y_t, y_t) \geq \|\hat{y}\|_a^2 - \tau \|\hat{y}\|_a \|y_t\|_a + \tau^2 \|y_t\|_r^2 \\ &\geq \|\hat{y}\|_a^2 - \frac{2\tau}{(1+\varepsilon)^{1/2}} \|\hat{y}\|_a \|y_t\|_r + \tau^2 \|y_t\|_r^2. \end{aligned}$$

Для произвольного $\beta > 0$ получим

$$\mathcal{E}_{n+1} \geq (1-\beta)\|\hat{y}\|_a^2 + \left(1 - \frac{1}{\beta(1+\varepsilon)}\right)\tau^2 \|y_t\|_r^2. \tag{5.6}$$

Полагая $\beta = 1/(1+\varepsilon)$, из (5.6) имеем

$$\mathcal{E}_{n+1} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \|y_{n+1}\|_a^2. \tag{5.7}$$

Принимая во внимание (5.5) и (5.7), из оценки устойчивости (2.4) получим доказываемую оценку (5.2) устойчивости трехслойной проекционно-разностной схемы (1.2) в H_a.

Для доказательства оценки (5.3) положим $\beta = (1+\varepsilon)^{-1/2}$, так что

$$1-\beta = \frac{(1+\varepsilon)^{1/2}-1}{(1+\varepsilon)^{1/2}} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+(1+\varepsilon)^{1/2}}.$$

С учетом неравенства $(1+\varepsilon)^{1/2} < 1 + 0.5\varepsilon$ от (5.6) приходим ко второй оценке составной нормы снизу

$$\mathcal{E}_{n+1} > \frac{2\varepsilon}{4+3\varepsilon}\Big(\|y_{n+1}\|_a^2 + \|y_{n+1}-y_n\|_r^2\Big). \tag{5.8}$$

Из (2.4), (5.5) и (5.8) вытекает оценка (5.3).

Оценки типа (5.2) естественны при рассмотрении трехслойных схем для эволюционных уравнений первого порядка (уравнение теплопроводности), а оценки типа (5.3) — для уравнений второго порядка (уравнение колебаний).

6. Устойчивость по правой части

Приведем некоторые простейшие оценки устойчивости трехслойных проекционно-разностных схем по начальным данным и правой части. Вместо (1.2) рассматривается схема

$$\begin{gathered} b\Big(\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2\tau}, v\Big) + r(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}, v) + a(y_n, v) = (f_n, v), \\ \forall v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{6.1}$$

Теорема 5. *Пусть в проекционно-разностной схеме (6.1) билинейные формы $r(\cdot,\cdot)$ и $a(\cdot,\cdot)$ симметричны. Тогда при выполнении условий*

$$\begin{gathered} b(v,v) \ge \varepsilon(v,v), \\ a(v,v) > 0, \\ r(v,v) - \frac{1}{4}a(v,v) > 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^h \end{gathered} \tag{6.2}$$

с постоянной $\varepsilon > 0$ для решения справедливы априорные оценки

$$\mathcal{E}_{n+1} \le \mathcal{E}_1 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\tau\|f_k\|^2, \tag{6.3}$$

$$\mathcal{E}_{n+1} \le \mathcal{E}_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\tau\|f_k\|_{*,b}^2, \tag{6.4}$$

где $\|\cdot\|_{*,b}$ - норма сопряженного к H_b пространства.

Аналогично доказательству теоремы 1 (см. (2.3)) получим равенство

$$\frac{1}{2\tau}b(w_{n+1}+w_n, w_{n+1}+w_n) + \mathcal{E}_{n+1} = (f_n, w_{n+1}+w_n) + \mathcal{E}_n.$$

Для получения оценки (6.3) при $\varepsilon > 0$ и условиях (6.2) привлекается неравенство

$$(f_n, w_{n+1} + w_n) \le \frac{1}{2\tau}\varepsilon\|w_{n+1} + w_n\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|f_n\|^2.$$

Аналогично при доказательстве (6.4) используется

$$(f_n, w_{n+1} + w_n) \le \frac{1}{2\tau}\|w_{n+1} + w_n\|_b^2 + \frac{\tau}{2}\|f_n\|_{*,b}^2.$$

Некоторые другие оценки устойчивости трехслойных проекционно-разностных схем (6.1) можно получить (см. [4], [5]), ориентируясь на оценки (5.2), (5.3) при несколько более жестких ограничениях на билинейную форму $r(\cdot,\cdot)$.

7. Схема с весами для эволюционного уравнения первого порядка

В качестве примера приложения полученных результатов рассмотрим условия устойчивости для задачи Коши для уравнения

$$c\left(\frac{du}{dt}, v\right) + a(u,v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^h, \quad 0 < t \le T \tag{7.1}$$

с симметричными и положительно определенными билинейными формами $c(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$. Для (7.1) будем использовать следующую трехслойную схему

$$\begin{gathered} c\left(\theta\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + (1-\theta)\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau}, v\right) \\ +a\Big(\sigma_1 u_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)u_n + \sigma_2 u_{n-1}, v\Big) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^h. \end{gathered} \tag{7.2}$$

с весовыми параметрами θ, σ_1 и σ_2.

Трехслойная проекционно-разностная схема (7.2) записывается в каноническом виде (1.2) с

$$\begin{aligned} b(u,v) &= c(u,v) + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau a(u,v), \\ r(u,v) &= \frac{\theta - 0.5}{\tau}c(u,v) + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}a(u,v). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Условия устойчивости (2.6) будут выполнены при

$$\sigma_1 \ge \sigma_2, \quad \theta \ge \frac{1}{2}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}.$$

Условия устойчивости схемы (1.2), (7.3) уточняются при использовании неравенства

$$a(v,v) \le \Delta c(v,v), \quad \forall v \in \mathcal{V}^h \tag{7.4}$$

с некоторой постоянной Δ, зависящей, например, от конечноэлементного разбиения. Схема (1.2), (7.3), (7.4) будет устойчива при выполнении неравенств

$$\sigma_1 - \sigma_2 \ge -\frac{1}{\Delta\tau}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2} - \frac{2\theta - 1}{\Delta\tau}.$$

Аналогично (см. [4], [5]) формулируются условия устойчивости схем с весами и для эволюционного уравнения второго порядка (уравнение колебаний).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93–012–801). Авторы выражают глубокую благодарность А. В. Гулину за обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. Стренг Г., Фикс Дж. *Теория метода конечных элементов.* М.: Мир, 1977.
2. Флетчер К. *Численные методы на основе метода метода Галеркина.* М.: Мир, 1988.
3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Устойчивость проекционно-разностных схем для нестационарных задач математической физики.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **35**(7) (1995).
4. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1989.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973.
6. Samarskii, A. A., Vabishchevich, P. N. *Regularized difference schemes for evolutionary second order equations.* Math. Models and Methods in Applied Sciences **2**(3) (1992), pp. 295–315.