

УДК 517.957+519.62/64

## МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ В ПРОБЛЕМЕ БЮРГЕРСА

© 1993 г. В. И. Мажукин, академик А. А. Самарский, А. В. Шапранов

Поступило 10.06.93 г.

1. Точность решения уравнений в частных производных зависит от того, насколько хорошо согласуется распределение узлов сетки с особенностями искомого решения. Принцип оптимального распределения узлов положен в основу методов построения адаптирующихся к решению сеток. К настоящему времени сформировалось несколько направлений построения адаптирующихся сеток [1, 2].

В нестационарных задачах адаптивные сетки должны строиться с учетом того, что особенности решения эволюционных уравнений (большие градиенты, сильные и слабые разрывы, контактные и фазовые границы) могут возникать, перемещаться и исчезать во всей области определения решения. Одним из наиболее важных требований, предъявляемых к методам адаптации в нестационарных уравнениях, является требование оптимальной скорости движения узлов, что во многом определяется степенью согласованности процедуры определения численного решения с механизмом перестройки сетки. При тесной взаимосвязи положение узлов сетки необходимо переопределять на каждом временном шаге. Подобная согласованность характерна для алгоритмов с динамической адаптацией сеток [3, 4].

В основу метода динамической адаптации положена идея перехода к произвольной нестационарной системе координат, в которой неизвестными являются не только сеточные функции, но и координаты узлов сетки. Для их определения строится расширенная система дифференциальных уравнений, в которой одна часть уравнений описывает физические явления, а другая часть – динамику узлов сетки. Уравнения для определения координат узлов составляются таким образом, что скорость движения узлов зависит от эволюции решения уравнений, описывающих физические процессы. Выбор конкретной системы координат в методе динамической адаптации осуществляется посредством задания функции  $Q$ , которая должна учитывать особенности искомого решения. Для этих целей обычно используется само решение или его производные. Несмотря на целый ряд

успешных применений метода динамической адаптации [5, 6], вопрос о выборе оптимальной функции преобразования оставался открытым.

В данной работе на примере решения нелинейного уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$x_0 < x < x_R, \quad t > 0,$$

рассматривается способ определения оптимальной функции преобразования  $Q$ . Оптимальность функции  $Q$  подтверждается анализом дифференциального приближения и численными примерами.

Переход к произвольной нестационарной системе координат, рассматриваемый в данной работе, позволяет адаптировать сетки к разнообразным особенностям решения, в том числе к большим градиентам [3, 5], подвижным границам [6] и разрывным решениям [4].

Пусть  $(x, t)$  – исходные независимые переменные. Переход к произвольной нестационарной системе координат осуществим с помощью замены переменных общего вида  $x = f(q, \tau)$ ,  $t = \tau$ , имеющей обратное невырожденное преобразование  $q = \varphi(x, t)$ ,  $\tau = t$ .

Уравнение Бюргерса (1) в переменных  $(q, \tau)$  принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{Q}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \frac{1}{\Psi} \left( \frac{\partial \mu}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial q} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \Psi = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (3)$$

$$q_0 < q < q_R, \quad \tau > 0,$$

где (3) – уравнение обратного преобразования,  $\Psi$  – метрический коэффициент,  $\mu$  – коэффициент вязкости. Функция  $Q$  фактически является параметром управления движением узлов. Как уже отмечалось, для полной согласованности механизма адаптации с искомым решением функция преобразования  $Q$  должна быть тесно связана с решением уравнения (2).

Для определения  $Q$  воспользуемся предположением, что при переходе к новой системе координат будет выбрана такая нестационарная систе-

ма координат, в которой временные производные решения будут равны нулю или достаточно малы. Квазистационарность представляется наиболее важным моментом, так как из анализа качества разностных схем известно, что временные производные играют важную роль в диссипативных и дисперсионных свойствах конечно-разностных схем.

Предположим, что найдена система координат, в которой  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Тогда из уравнения (2) можно определить функцию  $Q$ :

$$\frac{Q}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right); \quad (4)$$

$$Q = - \left( u - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \right) - \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \right) \frac{\partial u}{\partial q}. \quad (5)$$

Полученное выражение для функции  $Q$  и эффективность его применения подлежат аналитическому и численному анализу.

Рассмотрим три разностные схемы для уравнения Бюргерса (4).

1) Схема с центральными разностями:

$$\frac{Q}{\Psi} u_{\bar{q}} + \frac{1}{2\Psi} (u^2)_{\bar{q}} - \frac{\mu}{\Psi} \left( \frac{1}{\Psi} u_{\bar{q}} \right) = 0. \quad (6)$$

2) Схема с конечными разностями вперед:

$$\frac{Q}{\Psi} u_q + \frac{1}{2\mu} (u^2)_q - \frac{\mu}{\Psi} \left( \frac{1}{\Psi} u_{\bar{q}} \right) = 0. \quad (7)$$

3) Схема с конечными разностями назад:

$$\frac{Q}{\Psi} u_{\bar{q}} + \frac{1}{2\Psi} (u^2)_{\bar{q}} - \frac{\mu}{\Psi} \left( \frac{1}{\Psi} u_{\bar{q}} \right) = 0, \quad (8)$$

где

$$f u_{\bar{q}} = f_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad f u_{\bar{q}} = f_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{2h},$$

$$f u_q = f_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}.$$

Схема (6) имеет второй порядок аппроксимации  $O(h^2)$ , а две другие (7) и (8) – первый  $O(h)$ .

Независимость разностных схем от переменной по времени  $\tau$  означает, что, с точки зрения адаптации, явные и неявные схемы оказываются равнозначными. Покажем, что при правильно выбранной адаптации порядок аппроксимации также не играет столь существенной роли, как в разностных схемах с фиксированными узлами.

С этой целью выпишем для разностных схем (6) - (8) их дифференциальные приближения [7, 8]:

для схемы с центральными разностями (6)

$$\frac{Q}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Psi} \left[ \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \beta_1 \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} + \gamma_1 \frac{\partial^4 u}{\partial q^4} + \delta_1 \frac{\partial^3}{\partial q^3} \left( \frac{1}{\Psi} \right) \right], \quad (9)$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{h^2}{8} \left( 4 \frac{\partial u}{\partial q} - \mu \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left( \frac{1}{\Psi} \right) \right),$$

$$\beta_1 = \frac{h^2}{6} \left( \mu \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\Psi} \right) - u - Q \right),$$

$$\gamma_1 = \mu \frac{h}{12} \frac{1}{\Psi}, \quad \delta_1 = \mu \frac{h^2}{24} \frac{\partial u}{\partial q};$$

для схем с разностями вперед (7) и назад (8) дифференциальные приближения различаются только знаками в правых частях:

$$\frac{Q}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right) =$$

$$= \left[ \alpha_{2,3} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \beta_{2,3} \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} + \gamma_{2,3} \frac{\partial^4 u}{\partial q^4} + \right.$$

$$\left. + \delta_{2,3} \frac{\partial^3}{\partial q^3} \left( \frac{1}{\Psi} \right) + \epsilon_{2,3} \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 \right] / \Psi, \quad (10)$$

где

$$\alpha_{2,3} = \alpha_0 + \alpha_1, \quad \alpha_0 = \mp \frac{h}{2} (Q + u),$$

$$\beta_{2,3} = \beta_1, \quad \gamma_{2,3} = \gamma_1, \quad \delta_{2,3} = \delta_1, \quad \epsilon_{2,3} = \mp \frac{h}{2}.$$

В этих выражениях индекс 2 соответствует уравнению для схемы (7), а индекс 3 – модифицированному уравнению для схемы (8). Верхний знак в коэффициентах  $\alpha_{2,3}$  и  $\epsilon_{2,3}$  относится к первому индексу, а нижний – ко второму.

Из исследований дифференциальных приближений известно [9, 10], что наиболее важную роль играют члены в правой части со второй и третьей производными, характеризующие соответственно диссипацию и дисперсию разностной схемы. Проанализируем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , стоящие перед второй и третьей производными. Отметим, что оба коэффициента зависят от параметров адаптации. Это означает, что диссипация и дисперсия разностных схем зависят от способа адаптации и могут быть изменены в нужную сторону, причем коэффициент  $\beta$  имеет один и тот же вид для всех разностных схем и соответствующим выбором функции  $Q$  его можно обратить в нуль. Тем самым можно полностью избавиться от ап-

проксимационной дисперсии разностной схемы. Коэффициенты  $\beta_{1, 2, 3}$  обращаются в нуль, если функция  $Q$  имеет вид

$$Q = -\left(u - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \right)\right). \quad (11)$$

Заметим, что выражение (11) содержит на одно слагаемое меньше, чем выражение (5).

Проанализируем, с учетом поведения дисперсионной составляющей, диссипативные свойства разностных схем (6) - (8). Из трех разностных схем наименьшую диссипацию имеет схема с центральными разностями (6). В соответствующем ей дифференциальном приближении (9) коэффициент перед диссипативным членом  $\alpha_1$  пропорционален  $h^2$ . С учетом выбора функции  $Q$  в виде (11) разностная схема (6) по формальным признакам обладает наиболее высокими качествами: малой схемной вязкостью и отсутствием дисперсии. В случае разностных схем с фиксированными узлами для уравнения Бюргерса малость аппроксимационной вязкости играет отрицательную роль, так как из-за нескомпенсированности дисперсионной составляющей малая схемная вязкость не в состоянии подавлять паразитные колебания решения. В схемах первого порядка с  $O(h)$  (7), (8) диссипативная составляющая пропорциональна  $h$ , так как  $\alpha_{2, 3} \sim h$ . Однако и в этих случаях схемная вязкость не будет большой и не будет играть столь значительную роль, как в схемах с фиксированными узлами. Коэффициенты  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  в дифференциальном приближении (10) представляют собой сумму, состоящую из  $\alpha_1 \sim h^2$  и некоторой

добавки  $\alpha_0 = \mp \frac{h}{2} (Q + u) \sim h$ , зависящей от функции преобразования  $Q$ . В случае задания  $Q$  согласно (11) коэффициент  $\alpha_0$ ,

$$\alpha_0 = \mp \frac{h}{2} \left( \mu \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\Psi} \right) \right),$$

оказывается пропорциональным коэффициенту физической вязкости  $\mu$ . В наиболее интересных случаях, когда  $\mu$  очень мало, добавка  $\alpha_0$  будет исчезающе мала и разностные схемы (7), (8) по своим качествам будут аналогичны схемам (6). При больших  $\mu$  схемная вязкость не играет большой роли, так как при этом решение не содержит крутых градиентов из-за большой физической вязкости.

Из выполненного анализа следует:

1) оптимальную функцию преобразования  $Q$  можно определить из условия стационарности процессов в новой нестационарной системе координат;

2) динамическая адаптация может с одинаковым успехом применяться как к полностью явным, так и к полностью неявным схемам;

3) динамическая адаптация существенно повышает качество разностных схем. С ее помощью для широкого класса схем можно полностью устранить дисперсию при одновременном уменьшении их диссипативных свойств.

Выводы теоретического анализа подтверждаются вычислительными экспериментами, результаты которых приводятся ниже.

Рассмотрим две типичные постановки задач, наиболее часто встречающиеся при решении уравнения Бюргерса [10, 11]. В обеих задачах из-за малой физической вязкости  $\mu = 10^{-4}$  решение стремится к разрывному. Из-за специального выбора начального пространственного профиля  $u^0(x)$  в первом случае квазиразрывное решение возникает в середине области, а во втором – на границе.

**Пример 1.** Выберем начальное распределение функции  $u^0(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  в виде асимметричной синусоиды

$$u^0(x) = u(x, 0) = \sin(2\pi x) + 0.5 \sin(\pi x). \quad (12)$$

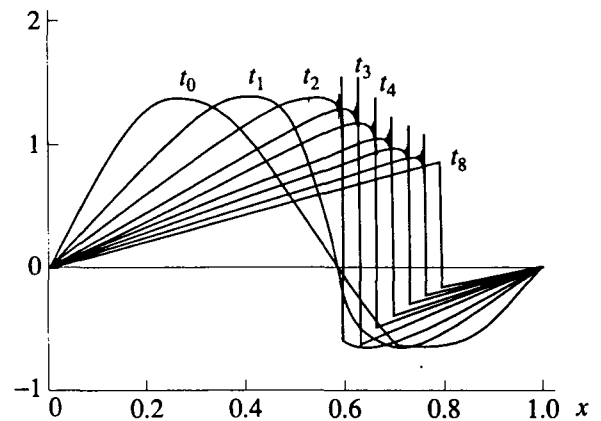


Рис. 1. Решение на сетке с 1000 узлами.  $\mu = 10^{-4}$ ;  $t_0 = 0.0$ ;  $t_1 = 0.1$ ;  $t_2 = 0.2$ ;  $t_3 = 0.3$ ;  $t_4 = 0.4$ ;  $t_8 = 0.8$ .

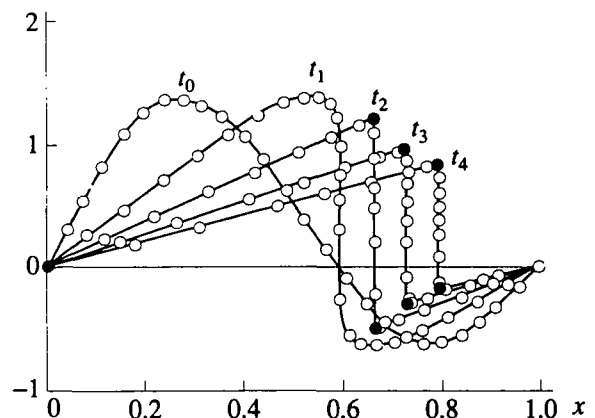


Рис. 2. Решение на адаптивной сетке с 25 узлами.  $\mu = 10^{-4}$ ;  $t_0 = 0.0$ ;  $t_1 = 0.2$ ;  $t_2 = 0.4$ ;  $t_3 = 0.6$ ;  $t_4 = 0.8$ .

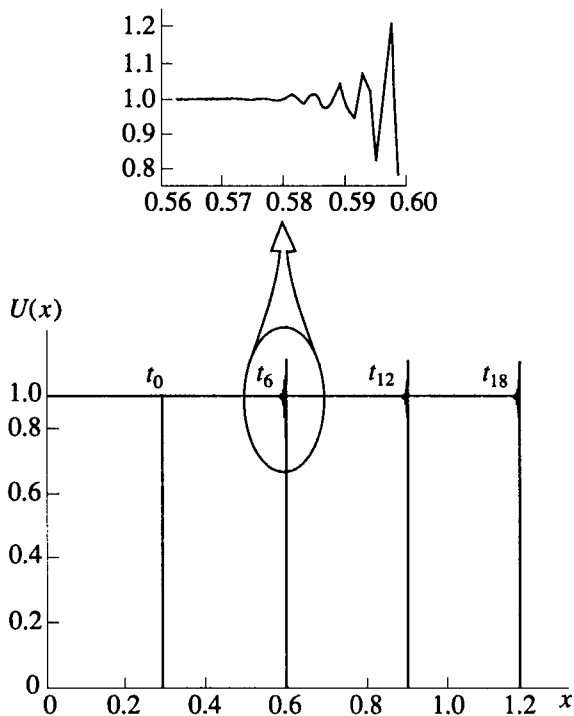


Рис. 3. Эйлера сетка; 1500 узлов.

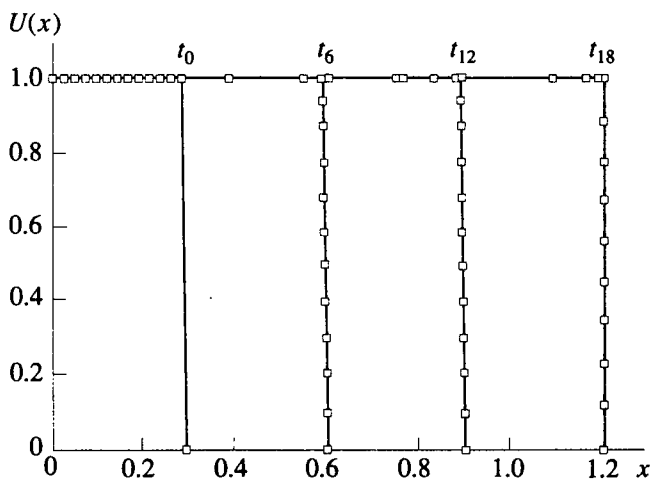


Рис. 4. Адаптирующаяся сетка; 16 узлов.

Вначале уравнение Бюргера (1) решалось на сетке с фиксированными узлами. Расчеты показали, что на сетках с числом узлов менее ста численное решение фактически неустойчиво. На рис. 1 представлено решение, полученное на сетке с  $10^3$  узлами. Движущиеся навстречу две полуволны синусоиды быстро формируют крутой фронт, на котором возникают паразитные осцилляции. При числе узлов менее 500 подобные осцилляции наблюдаются и на отрицательной стороне фронта. Увеличение числа узлов до  $10^4$  позволяет уменьшить амплитуду колебаний, но не

избавиться от них полностью. Наблюдаемый эффект свидетельствует о чрезвычайно сильной дисперсии используемых разностных схем.

Применение динамической адаптации, т.е. переход к решению системы (2), (3), позволило получать решения, свободные от осцилляций, при числе узлов  $N > 15$ . На рис. 2 представлено решение, полученное на адаптивной сетке с общим числом узлов  $N = 25$ , на те же моменты времени, что и на рис. 1. Полное отсутствие колебаний достигается за счет согласованного с решением движения узлов, которое, как было показано, может приводить к полному исчезновению внутренней дисперсии разностных схем. Благодаря этому свойству сетки с динамической адаптацией позволяют использовать в расчетах небольшое число узлов. Как и ожидалось, неявные схемы  $O(\Delta t + h^2)$  и  $O(\Delta t^2 + h^2)$  дают идентичные результаты. Единственное отличие состояло в том, что при прочих равных условиях схемы второго порядка допускают примерно в два раза больший шаг интегрирования  $\Delta t$ .

**Пример 2.** Зададим начальное распределение функции  $u^0(x)$  в виде ступеньки, форма которой близка к прямоугольной (рис. 3). Правая сторона ступеньки распространяется вдоль оси  $x$  по нулевому фону. В отличие от первого примера в рассматриваемой проблеме, квазиразрывное решение существует в начальный момент времени и распространяется затем в виде фронта по нулевому фону.

Как и в предыдущей проблеме, уравнение Бюргера вначале решалось в переменных  $(x, t)$ . На рис. 3 представлено решение, полученное в различные моменты времени на сетке с 1500 фиксированными узлами. За короткое время решение выходит на стационарный уровень и распространяется в виде прямоугольной ступеньки. На подвижном фронте возникают значительные колебания, от которых, как и в предыдущем случае, не удастся избавиться простым увеличением числа узлов. Решение уравнения Бюргера в переменных  $(q, \tau)$  позволило получить решение, свободное от осцилляций уже на сетке с 15 узлами (рис. 4). Таким образом, и в рассматриваемой проблеме можно говорить о полной компенсации дисперсии разностных схем за счет согласованного с решением движения узлов.

Для обоих примеров проводились серии вспомогательных расчетов с целью определения чувствительности метода к виду функции  $Q$  и влияния порядка аппроксимации разностных схем на качество численного решения.

Вычислительные эксперименты показали невысокую чувствительность способа адаптации к виду функции преобразования  $Q$ . Так, применение формулы (5) позволяет углам двигаться более плавно в областях быстрого изменения первой и второй производных решения. В то же время функ-

ция  $Q$  в виде (11) много проще в использовании и поэтому ей отдавалось предпочтение в расчетах.

Расчеты также подтвердили теоретические предпосылки о том, что динамическая адаптация с одинаковым успехом может использоваться как для явных, так и неявных разностных схем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thompson J.F.* Numerical grid generation. Amsterdam: North-Holland, 1982. 909 p.
2. *Лисейкин В.Д.* // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. В. 3. С. 31 - 45.
3. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* // ДАН. 1988. Т. 298. № 1. С. 64 - 68.
4. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А.* // ДАН. 1988. Т. 302. № 5. С. 1078 - 1081.
5. *Мажукин В.И., Такоева Л.Ю.* // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 101 - 118.
6. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 57. № 1. С. 107 - 114.
7. *Warming R.E., Hyett B.J.* // J. Comp. Phys. 1974. V. 14. P. 159 - 179.
8. *Шокин Ю.И.* Первое дифференциальное приближение. Новосибирск: Наука, 1979.
9. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения. М.: Наука, 1992. 423 с.
10. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.
11. *Gelinas R.J., Doss S.K., Miller K.* // J. Comp. Phys. 1981. V. 40. P. 202 - 249.