является решением уравнения (I), причем в G^-: $a_{10} = 1$, $a_{01} = b_{10} = b_{01} = a_0 = b_0 = f \equiv 0$, а потому там выполнено условие а).

Следствие. *Если в точках области* $\overline{G^+} = \overline{G}$ *выполнено условие* $||a|^2 - |b|^2| > |a\bar{c} - d\bar{b}| + |a\bar{d} - c\bar{b}|$, *то уравнение* (III, 1) *однозначно разрешимо для любой функции* $f \in L_p(\overline{G})$, *а если в области* $\overline{G}$ *выполнено условие* $||d|^2 - |c|^2| > |a\bar{c} - d\bar{b}| + |a\bar{d} - c\bar{b}|$, *а на контуре* Γ $\beta(t) = a(t)\overline{d(t)} - c(t)\overline{b(t)} \neq 0$, *то для уравнения* (III, 1) *справедлива теорема Нётера, причем его индекс равен* $2\,\mathrm{Ind}_\Gamma \beta(t)$, *а неоднородное уравнение* (III, 1) *имеет в* $L_p(\overline{G})$ *решение тогда и только тогда, когда* f *ортогональна*, $\mathrm{Re} \iint_G f(z)\overline{\nu(z)}\,dx\,dy = 0$, *решениям сопряженного уравнения*

$$\overline{a(z)}\nu + b(z)\bar{\nu} - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{c(\zeta)}\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d(\zeta)\overline{\nu(\zeta)}}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}\,d\xi\,d\eta +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{a_0(\zeta)}\nu(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{b_0(\zeta)\overline{\nu(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Математический институт с Вычислительным центром Академии наук ТаджССР Душанбе

Поступило 3 IV 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1959. 2. *Джураев А.* – ДАН, 1971, т. 197, № 6, с. 1251–1255. 3. *Джураев А.* Метод сингулярных интегральных уравнений. М., 1987. 4. *Бойматов К., Джангибеков Г.* – УМН, 1988, т. 43, вып. 3 (261), с. 171–172.

УДК 518.5 МАТЕМАТИКА

© В.Л. МАКАРОВ, академик А.А. САМАРСКИЙ

ТОЧНЫЕ ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

1. Точные трехточечные разностные схемы (т.т.р.с.) для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка были введены в [1]. В данной работе впервые доказано существование точной трехточечной разностной схемы для краевой задачи вида

$$(1)\qquad \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x, u(x)), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B,$$
$$0 < C_1 \leqslant k(x), \quad |f(x,u) - f(x,v)| \leqslant L|u - v|, \quad \forall x \in [0, 1],$$
$$u, v \in \Omega_u;$$
$$(2)\qquad k(x) \in C^{(1)}[0,\eta] \cup C^{(1)}[\eta, 1], \quad f_u(x) = f(x,u) \in C[0,\eta] \cup C[\eta, 1],$$
$$\eta \in (0, 1), \quad \forall u \in \Omega_u,$$

где Ω_u – некоторая окрестность решения задачи (1), (2), которая будет определена ниже (см. замечание 2), в точке разрыва η требуется выполнение обычных условий согласования

$$u(\eta-0)=u(\eta+0),\quad k(\eta-0)\frac{du(\eta-0)}{dx}=k(\eta+0)\frac{du(\eta+0)}{dx}.$$

На основании т.т.р.с. построены однородные трехточечные разностные схемы (т.р.с) m-го порядка точности как в отношении приближения функции, так и ее потока $k\dfrac{du}{dx}$ в узлах сетки ω_h. Статья является естественным развитием идей предыдущей работы авторов [2] на нелинейный случай. Предложенные т.р.с. m-го порядка точности для своего построения требуют для каждого $j\in 1,\ldots,N-1$ решения двух нелинейных задач Коши на отрезках $[x_{j-1},x_j]$ (вперед), $[x_j,x_{j+1}]$ (назад), что осуществляется с помощью какого-либо одношагового метода (Рунге–Кутта или разложения в ряд Тейлора) за один шаг.

Заметим, что попытка построения для задачи (1) т.р.с. 4-го порядка точности была предпринята в [3], но обоснование дано только для $k(x)=\exp(bx/a)$. Предложенная в [3] методика не может быть использована даже для этого случая для построения т.р.с. более высокого порядка точности (>4).

2. Для простоты ограничимся равномерной сеткой $\omega_h=\{x_j=jh\colon j=1,\ldots$ $\ldots,N-1,\ h=1/N\}$ и одной точкой разрыва η, совпадающей с i-м узлом сетки x_i. Введем функции $w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)$, $l_\alpha^j(x,u,b_\alpha)$, $\alpha=1,2$, являющиеся решением следующих двух задач Коши:

$$\frac{d}{dx}w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)=\frac{l_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{k(x)},\quad \frac{d}{dx}l_\alpha^j(x,u,b_\alpha)=-f(x,\hat u(x)+b_\alpha v_\alpha^j(x)+$$

$$+w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)),\quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha}, \tag{3}$$

$$w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha)=l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha)=0,\quad \alpha=1,2,$$

где

$$\hat u(x)=[u(x_j)v_1^j(x)+u(x_{j-1})v_2^{j-1}(x)]\cdot[v_1^j(x_j)]^{-1},\quad x\in[x_{j-1},x_j],$$

$$v_1^j(x)=\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{dt}{k(t)},\quad v_2^j(x)=\int\limits_{x}^{x_{j+1}}\frac{dt}{k(t)}.$$

Свяжем решения левой и правой задач Коши в точке x_j через параметры b_α, $\alpha=1,2$, условиями

$$\hat u(x_j)+b_1v_1^j(x_j)+w_1^j(x_j,u,b_1)=\hat u(x_j)+b_2v_2^j(x_j)+w_2^j(x_j,u,b_2),$$

$$\left\{k(x)\frac{d}{dx}[\hat u(x)+b_1v_1^j(x_j)+w_1^j(x_j,u,b_1)]\right\}_{x_j-0}= \tag{4}$$

$$=\left\{k(x)\frac{d}{dx}[\hat u(x)+b_2v_2^j(x)+w_2^j(x,u,b_2)]\right\}_{x_j+0}.$$

Если задача (3), (4) имеет решение, то будем его обозначать $w_\alpha^j(x,u)$, $l_\alpha^j(x,u)$; при этом параметры b_α будут иметь вид

$$b_\alpha=b_\alpha^j(u)=[v_1^j(x_{j+1})]^{-1}\{(-1)^{\alpha+1}[w_2^j(x_j,u)-w_1^j(x_j,u)]+ \tag{5}$$

$$+v_{3-\alpha}^j(x_j)[h(au_{\bar x})_x+l_2^j(x_j,u)-l_1^j(x_j,u)]\},\quad \alpha=1,2,$$

$$a(x_j)=\left[\frac{1}{h}v_1^j(x_j)\right]^{-1}. \tag{6}$$

Имеет место следующая

Л е м м а 1. *Пусть задача* (1), (2) *имеет единственное решение* $u(x)$ *и* $\max\{h_0/c_1, Lh_0(3+2h_0/c_1)\} = 1$, *тогда* $\forall h \in (0, h_0)$ *задача* (3), (4) *имеет единственное решение* $w_\alpha^j(x, u), l_\alpha^j(x, u), \alpha = 1, 2$, *причем*

$$(7)\qquad u(x) = \hat{u}(x) + b_\alpha v_\alpha^j(x) + w_\alpha^j(x, u), \qquad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \qquad \alpha = 1, 2.$$

С помощью леммы 1 доказывается

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1; *тогда* $\forall h \in (0, h_0)$ *для задачи* (1), (2) $\exists$ *т.т.р.с. вида*

$$(8)\qquad (au_{\bar{x}})_x = -T^x(f(\xi, u(\xi))), \quad x \in \omega_h, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B,$$

где

$$T^{x}j(w(\xi)) = [hv_1^j(x_j)]^{-1} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi)w(\xi)d\xi + [hv_2^j(x_j)]^{-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi)w(\xi)d\xi,$$

функция $u(\xi)$ *в правой части* (8) *определяется согласно формуле* (7) *и зависит только от* $u(x_{j\pm1}), u(x_j)$.

З а м е ч а н и е 1. Достаточным условием существования и единственности решения задачи (1), (2) является

$$(9)\qquad L/C_1 < 1.$$

Существование и единственность решения нелинейной т.т.р.с. (8) утверждается в следующей лемме.

Л е м м а 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и* (9); *тогда* $\exists h_1 \in (0, h_0)$, *что* $\forall h \in (0, h_1]$ *т.т.р.с.* (8) *будет иметь единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений*

$$(10)\qquad (au_{\bar{x}}^{(n)})_x = -T^\alpha(f(\xi, u^{(n-1)}(\xi))), \quad x \in \omega_h, \quad u^{(n)}(0) = A, \quad u^{(n)}(1) = B,$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad u^{(0)}(x) = A(1-x) + Bx$$

с оценкой погрешности

$$(11)\qquad \|u - u^{(n)}\|_{1,\infty,\omega_h} =$$
$$= \max\{\|u - u^{(n)}\|_{0,\infty,\omega_h}, \quad \|u_{\bar{x}} - u_{\bar{x}}^{(n)}\|_{0,\infty,\,\omega_h^+}\} \leqslant q^n\kappa/(1-q),$$

где $\kappa = \|u^{(1)} - u^{(0)}\|_{0,\infty,\omega_h}, \quad q < 1, \quad q \neq q(h)$.

З а м е ч а н и е 2. Условие (9), т.е. $|f(x, u) - f(x, v)| \leqslant L < C_1$ должно выполняться только $\forall u, v \in \Omega_u = \{v(x) : \|v - u^{(0)}\|_{0,\infty\,(0,1)} \leqslant \kappa/(1-q)\}$, а не $\forall u, v \in \mathbf{R}_1$.

Справедлива

Л е м м а 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2, *тогда* $\exists h_1 \in (0, h_0)$, *что* $\forall h \in (0, h_1]$ *т.т.р.с.* (8) *будет иметь единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений* (10) *и помимо оценки* (11) *будет справедлива оценка*

$$\left\| k\frac{du}{dx} - k\frac{du^{(n)}}{dx} \right\|_{0,\infty,\omega_h} \leqslant M\|u - u^{(n)}\|_{1,\infty,\omega_h} \leqslant M_1q^n.$$

3. Перейдем к построению алгоритмической реализации т.т.р.с. (8) для задачи (1), (2). Прежде всего учтем, что, согласно [2],

$$(12)\qquad \varphi(x, u) = T^x(f(\xi, u(\xi))) = h^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left[l_\alpha^j(x_j, u) + (-1)^\alpha \frac{w_\alpha^j(x_j, u)}{v_\alpha^j(x_j)} \right],$$

$m_\alpha^j(x) \equiv (-1)^{\alpha+1}$. Тогда $\forall\, x_j \in \omega_h$ для построения т.т.р.с. (8), (6), (12) необходимо решить две задачи Коши (3), (5): одну ($\alpha = 1$) вперед, на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$, а другую ($\alpha = 2$) назад на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$, причем обе имеют гладкие коэффициенты. Применим для их решения какой-либо одношаговый метод: разложения в ряд Тейлора или Рунге–Кутта $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$-го порядка точности. Для определенности изложение будем вести для метода разложения в ряд Тейлора. Алгоритм имеет следующий вид:

$$w_\alpha^{(s)j}(x_j, u) = -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \sum_{p=3}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s+1-p)})}{dx^p},$$

$$s = 2, 3, \ldots, \bar{m}, \quad \sum_{p=3}^{2} = 0, \quad w_\alpha^{(1)j}(x_j, u) = 0,$$

$$l_\alpha^{(s)j}(x_j, u) = (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \sum_{p=2}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s-p)})}{dx^p}, \tag{13}$$

$$s = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{p=2}^{1} = 0, \quad l_\alpha^{(0)j}(x_j, u) = 0,$$

$$b_\alpha^{(s-2)} = b_\alpha^{(s-2)j}(u) = [v_1^{(s-1)j}(x_{j+1})]^{-1}\{(-1)^{\alpha+1}[w_2^{(s-1)j}(x_j, u) - w_1^{(s-1)j}(x_j, u)] + v_{3-\alpha}^{(s-1)j}(x_j)[h(a^{(s-1)}u_{\bar{x}})_x + l_2^{(s-2)j}(x_j, u) - l_1^{(s-2)j}(x_j, u)]\}, \quad s = 2, 3, \ldots, m+1.$$

Имеет место

Лемма 4. *Пусть* $0 < C_1 \leqslant k(x)$, $k(x) \in W_\infty^{m+1}(0, x_i) \cup W_\infty^{m+1}(x_i, 1)$, $f(x, u) \in W_\infty^m((0, x_i) \times \Omega_u) \cup W_\infty^m((x_i, 1) \times \Omega_u)$; *тогда будут справедливы соотношения*

$$v_\alpha^j(x_j) = v_\alpha^{(m)j}(x_j) + O(h^{m+1}) = \sum_{p=1}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\left[\frac{d^p}{dx^p}\frac{1}{k(x)}\right]_{x_{j+(-1)^\alpha}} + O(h^{m+1}),$$

$$w_\alpha^j(x_j, u) = w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) + (1 - \bar{m} + m)\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^{m+1}} + O(h^{m+2}),$$

$$l_\alpha^j(x_j, u) = l_\alpha^{(m)j}(x_j, u) + O(h^{m+1}),$$
$$b_\alpha^j(u) = b_\alpha^{(m-1)j}(u) + O(h^m).$$

Вместо т.т.р.с. (8), (6), (12) можно теперь воспользоваться т.т.р.с. вида

$$(a^{(m)}y_{\bar{x}}^{(m)})_x = -\varphi^{(m)}(x, y^{(m)}), \quad x \in \omega_h, \quad y^{(m)}(0) = A, \quad y^{(m)}(1) = B,$$

$$a^{(m)}(x_j) = \left[\frac{1}{h}v_1^{(m)j}(x_j)\right]^{-1}, \tag{14}$$

$$\varphi^{(m)}(x_j, y^{(m)}) = h^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[l_\alpha^{(m)j}(x_j, y^{(m)}) + (-1)^\alpha\frac{w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, y^{(m)})}{v_\alpha^{(m)j}(x_j)}\right].$$

Для доказательства существования и единственности решения т.т.р.с. (14), а также установления ее точности понадобиться следующая

Л е м м а 5. *Пусть выполнены условия леммы* 4; *тогда будут иметь место оценки*

$$| a^{(m)}(x_j) - a(x_j) | \leqslant Mh^m,$$

$$| \varphi^m(x_j, u) - \varphi(x_j, u) | \leqslant Mh^{\widetilde{m}(i,j)}, \quad \forall u \in \Omega_u,$$

$$| \varphi^{(m)}(x_j, u) - \varphi^{(m)}(x_j, v) | \leqslant (L + Mh) \| u - v \|_{1,\infty,\omega_h}, \quad \forall u,\ v \in \Omega_u,$$

$$\widetilde{m}(i, j) = \begin{cases} m - \delta(i, j), & m = 2r, \\ m, & m = 2r + 1, \end{cases}$$

где постоянная M *не зависит от* h,

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

На основании предыдущих утверждений доказывается следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1, (9) *и леммы* 4, *тогда т.р.с.* (14), (13) *имеет единственное решение, точность которого характеризуется оценкой*

$$\| u - y^{(m)} \|^*_{1,\infty,\omega_h} =$$

$$= \max \left\{ \| u - y^{(m)} \|_{0,\infty,\omega_h}, \quad \left\| k \frac{du}{dx} - k \frac{dy^{(m)}}{dx} \right\|_{0,\infty,\omega_h} \right\} \leqslant Mh^m,$$

$$k(x_j) \frac{dy^{(m)}(x_j)}{dx} = \frac{h y^{(m)}_{\bar{x},j}}{v_1^{(m)j}(x_j)} + b_1^{(m-1)j}(y^{(m)}) + l_1^{(m)j}(x_j, y^{(m)}).$$

Решение нелинейной т.р.с. m-го порядка точности (14), (13) может быть найдено методом последовательных приближений.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2; *тогда* $\exists h_1 \in (0, h_0)$, *что* $\forall h \in (0, h_1]$ *метод последовательных приближений*

$$(a^{(m)} y^{(m,n)}_{\bar{x}})_x = -\varphi^{(m)}(x, y^{(m,n-1)}), \quad x \in \omega_h, \quad y^{(m,n)}(0) = A,$$

$$y^{(m,n)}(1) = B, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad y^{(m,0)}(x) = A(1 - x) + Bx$$

сходится и имеет место оценка

$$\| u - y^{(m,n)} \|^*_{1,\infty,\omega_h} \leqslant M(h^m + q^n),$$

где постоянная M *не зависит от* h, m, n, *а величина* $q < 1$, $q \approx L/C_1$.

З а м е ч а н и е 3. Леммы 4, 5 и теоремы 2, 3 остаются справедливыми, если формулы (13) построить на основе одного шага метода Рунге–Кутта $\overline{m}$-го порядка точности.

З а м е ч а н и е 4. В данной работе в связи с нелинейностью задачи (1) в качестве основы был взят метод линеаризации (условие (9)) и принцип сжатых отображений. Можно было бы взять в качестве основы метод монотонных операторов или монотонных в главной части (см. [4]).

Замечание 5. Результаты работы остаются справедливыми для уравнения $[k(x)u']' = -f(x, u(x), u'(x))$ с условием $|f(x, u, \tau) - f(x, v, \sigma)| \leqslant L(|u - v| + |\tau - \sigma|)$.

Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко

Инстнтут прикладной математики им. М.В. Келдыша Академии наук СССР Москва

Поступило 14 III 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* – ДАН, 1958, т. 122, № 4, с. 562–565. 2. *Самарский А.А., Макаров В.Л.* – ДАН, 1990, т. 312, № 3. 3. *Jyengar S.R.K., Pillai A.C.R.* – Appl. Math. Modelling, 1989, vol. 13, № 1, p. 58–62. 4. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.