



Ордена Ленина
 ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
 имени М.В. Келдыша
 Академии наук СССР

ПРЕПР.
 И-88

В.В. Беликов, В.М. Головинин, М.Ф. Каневский,
 А.А. Самарский, С.Ю. Чернов

КОНТРОЛЬНЫЙ ЭКЗЕМПЛЯР

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АДАПТИРУЮЩИХСЯ СЕТОК
 ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ
 ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Препринт № 138 за 1988г.

Москва

УДК: 517;949:536.12

АННОТАЦИЯ.

Предложена разностная схема для уравнений газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, обладающая свойством транспортности при скоростях движения узлов сетки, превышающих локальную скорость среды.

Для построения подвижных адаптирующихся сеток применяется простой и эффективный алгоритм, позволяющий сгущать узлы в области больших градиентов какой-либо из рассчитываемых функции и контролировать экстремальные размеры ячеек.

Продемонстрирована возможность использования разностных схем ГД на подвижных сетках для решения автомоделных задач.

На примере практической задачи о распространении и распаде светодетонационной волны показаны преимущества использования подвижных адаптирующихся сеток.

ВВЕДЕНИЕ.

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой предложена консервативная разностная схема для решения уравнений ГД с использованием адаптирующихся сеток, а также простой и эффективный алгоритм построения одномерных адаптирующихся сеток, сгущающихся в области больших градиентов какой-либо из рассчитываемых функций.

В настоящей работе описаны модификации явной, частично трехслойной, полностью консервативной разностной схемы (ПКРС) ГД в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных [2], обобщающие на двумерный случай алгоритм вычисления потоков импульса, предложенный в [1]. Необходимость модификаций обусловлена проявлением некоторых недостатков схемы [2] при движении узлов сетки со скоростями, превышающими локальные скорости среды, а такие движения узлов являются типичными при использовании адаптирующихся сеток. Кроме того, изменены выражения потоков массы и внутренней энергии. Эти потоки определяются через потоки "объема", а последние аппроксимированы таким образом, что в полученной схеме выполнен еще один закон сохранения - закон сохранения объема, без выполнения которого при движении сетки по неподвижному фоновому газу этот фон нарушается.

В качестве примера использования предложенной схемы приведен расчет автомодельной задачи о дифракции ударной волны на тупом двугранном угле. В этом расчете использовался простейший алгоритм движения сетки, при котором узлы расчетной сетки, начиная с момента установления характерной картины дифракции движутся с постоянными скоростями и сетка изменяется, оставаясь подобной начальной. Таким образом автомодельное решение задачи получается без использования специальных методик в автомодельных переменных.

Для построения двумерных адаптирующихся сеток предложен алгоритм, в котором одно семейство криволинейных координатных линий фиксировано, а адаптация осуществляется вдоль линий этого семейства, с использованием модификации одномерной методики, предложенной в [1]. Такой простой и эффективный алгоритм можно применять для достаточно широкого класса

прикладных задач.

Возможность и эффективность применения адаптирующихся сеток демонстрируется на примере практической задачи о распространении и распаде двумерной светодетонационной волны (СДВ). Показано, что использование адаптирующихся сеток позволяет примерно на порядок уменьшить расчетное время и используемую оперативную память, что существенно для ЭВМ с ограниченными ресурсами.

I. Двумерные разностные уравнения СЭЛ ГД.

В работе [2] предложена полностью консервативная разностная схема ГД, которая состоит из двух этапов: первый - лагранжев, второй - переинтерполяции величин на новую сетку. Такое расщепление повышает устойчивость схемы [3,4], а также является удобным с алгоритмической точки зрения.

Для компактности записи, разностные уравнения будем записывать на локальных шаблонах III1 и III2 (рис.2)

Динамические и кинематические уравнения аппроксимируются на шаблоне III2:

$$M_0 \frac{\bar{u}_0 - \check{u}_0}{2\tau_n} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial V_k}{\partial x_0} P_k^* \tag{1}$$

$$M_0 \frac{\bar{v}_0 - \check{v}_0}{2\tau_n} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial V_k}{\partial y_0} P_k^*$$

$$M_0 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 m_k$$

$$\frac{\bar{x}_0 - x_0}{\tau_n} = \frac{\bar{u}_0 + u_0}{2}; \quad \frac{\bar{y}_0 - y_0}{\tau_n} = \frac{\bar{v}_0 + v_0}{2} \tag{2}$$

Остальные уравнения аппроксимируются на шаблоне III1:

$$m_0 \frac{\bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0}{\tau_n} = - P_0^* V_0 \langle \text{div}(u, v) \rangle_0 \tag{3}$$

$$P_0^* = P_0 - \xi_0 \langle \text{div}(u^s, v^s) \rangle_0 \tag{4}$$

$$\langle \text{div}(u, v) \rangle_0 = \frac{1}{V_0} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_k} u_k + \frac{\partial V_0}{\partial y_k} v_k \right) \quad (5)$$

$$P_0 = P(P_0, \varepsilon_0) \quad (6)$$

$$m_0 = \rho_0 V_0 \quad (7)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \chi_0 c_0 \rho_0 d_0 \{1 - \text{sign}(\langle \text{div}(u, v) \rangle_0)\} \quad (8)$$

V_0 - аппроксимация объема разностной ячейки:

$$V_0 = V(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) \quad (9)$$

При аппроксимации временных производных приняты обозначения

$$a = a(t_n); a^+ = a(t_{n+1}); a^- = a(t_{n-1}); a^s = \delta a + (1-\delta)a$$

$\{t_n, n=0, 1, \dots\}$ - разностная сетка на временной оси $t \in [t_0, \infty)$;

$\tau_n = t_{n+1} - t_n$ - шаг сетки.

Координаты (x, y) , скорости (u, v) , импульсы (P^x, P^y) и относительные скорости (N^x, N^y) относятся к узлам расчетной сетки, а термодинамические функции ρ, m, ε, P - к центрам ячеек

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{\varepsilon}, \bar{x}, \bar{y}$ - промежуточные значения физических величин, вычисляемые на первом этапе. Если расчет ведется в чисто лагранжевых переменных, то $\hat{u} = \bar{u}$, $\hat{v} = \bar{v}$ и т.д., а второй этап отсутствует.

В определении коэффициента искусственной вязкости (8):

χ_0 - безразмерный коэффициент порядка единицы,

$c_0 = \sqrt{\gamma(\gamma-1)\varepsilon_0}$ - адиабатическая скорость звука,

d_0 - характерный размер ячейки.

Уравнения (1)-(9) образуют замкнутую систему первого этапа.

На втором этапе производится учет конвективных потоков с использованием уже найденных промежуточных значений.

Разностные уравнения второго этапа удобно записать в потоковой форме. Для сокращения индексных выражений воспользуемся вновь локальной индексацией на шаблонах III и III' (рис. 2).

Уравнение неразрывности аппроксимируется на шаблоне III₁₁:

$$\frac{\hat{m}_0 - m_0}{\tau_n} + F_{12}^r + F_{23}^r - F_{34}^r - F_{14}^r = 0 \quad (10)$$

здесь потоки массы F_{km}^r относятся к середине соответствующей грани (K, M) ячейки и вычисляются по формулам:

$$F_{км}^* = (\vec{W}_{км} \vec{N}_{км}) \rho_{км}^* \quad (II)$$

где $\vec{W}_{км}$ - вектор относительной скорости переноса, относящийся к центрам грани (К,М) и равный

$$\vec{W}_{км} = \frac{1}{2} \{W_k^* + W_m^*, W_k^* + W_m^*\} \quad (I2)$$

$\vec{N}_{км}$ - вектор нормали к грани (К,М), равный по величине площади этой грани:

$$\vec{N}_{км} = \frac{1}{2} (x_k^{t-1} + x_m^{t-1}) \{y_m - y_k, x_k - x_m\}$$

В качестве $\rho_{км}^*$ берется значение плотности в одной из двух прилегающих к грани ячеек, а именно, из той ячейки, откуда идет поток газа через эту грань. Такой алгоритм соответствует методу "донорных ячеек" [5] и обеспечивает в (9) первый порядок аппроксимации ("вверх по потоку") уравнения сохранения массы.

Значение плотности $\hat{\rho}$ на новом слое по времени находится из

$$(7) : \hat{\rho} = M \hat{V}, \text{ где новые координаты узлов } (x, y), \text{ входящие в}$$

выражение (9) для \hat{V} , задаются по какому-либо алгоритму

движения сетки. В частности, положив $\hat{x}_{i,j} = x_{i,j}, \hat{y}_{i,j} = y_{i,j}$, получим чисто эйлерову сетку. В остальных случаях сетка будет подвижной

Так, если в качестве \hat{x}, \hat{y} взять координаты \bar{x}, \bar{y} , найденные из (2) после решения уравнений первого этапа, сетка переходит в лагранжеву, движущуюся вместе с газом.

Аналогично (10) записывается и разностное уравнение изменения внутренней энергии :

$$\frac{(\hat{m} \hat{\epsilon})_o - (\hat{m} \bar{\epsilon})_o}{\tau_n} + F_{12}^e + F_{23}^e - F_{34}^e - F_{14}^e = 0 \quad (I3)$$

где потоки $F_{км}^e$ внутренней энергии через грани ячейки (К,М) определяются формулой (II) с заменой $\rho_{км}^*$ на величину $(\rho \epsilon)_{км}^*$ вычисляемую, например, по алгоритму, описанному выше для $\rho_{км}^*$.

Уравнения переноса импульса аппроксимируются в узлах сетки на шаблоне $\Pi 2_{i,j}$ (рис.2) :

$$\frac{\hat{\mathcal{P}}_0^x - \hat{\mathcal{P}}_0^x}{\tau_n} + \langle F_{01}^u \rangle + \langle F_{03}^u \rangle - \langle F_{05}^u \rangle - \langle F_{07}^u \rangle = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\hat{\mathcal{P}}_0^y - \hat{\mathcal{P}}_0^y}{\tau_n} + \langle F_{01}^v \rangle + \langle F_{03}^v \rangle - \langle F_{05}^v \rangle - \langle F_{07}^v \rangle = 0 \quad (15)$$

где

$$\hat{\mathcal{P}}_0^x = \frac{\hat{M}_0}{2}(\hat{U}_0 + U_0); \quad \hat{\mathcal{P}}_0^y = \frac{\hat{M}_0}{2}(\hat{U}_0 + U_0) \quad (16)$$

$$\bar{\mathcal{P}}_0^x = \frac{\bar{M}_0}{2}(\bar{U}_0 + U_0); \quad \bar{\mathcal{P}}_0^y = \frac{\bar{M}_0}{2}(\bar{U}_0 + U_0)$$

Уравнения (10)-(16) образуют полную систему для второго этапа, если в (14) и (15) задать потоки импульса $\langle F_{km}^{u,v} \rangle$, относящиеся к середине ребер (K, M) на шаблоне \mathbb{H}_{1j} (рис. 2).

В работе [2] предложена аппроксимация потока импульса, при которой разностная схема обладает свойством полной консервативности. Эта аппроксимация имеет вид:

$$\langle F_{km}^u \rangle = \langle F_{km}^r \rangle \frac{U_k + U_m}{2}; \quad \langle F_{km}^v \rangle = \langle F_{km}^r \rangle \frac{U_k + U_m}{2} \quad (17)$$

где $\langle F_{km}^r \rangle$ - поток массы относящийся к ребру (K, M) (шаблон \mathbb{H}_{1j}), например:

$$\langle F_{03}^r \rangle = \frac{1}{4} (F_{10}^r + F_{23}^r + F_{34}^r + F_{05}^r)$$

(для остальных граней - аналогично).

2. Модификации двумерной полностью консервативной разностной схемы ГД в СЭЛ переменных.

ПКРС ГД в СЭЛ переменных, описанная в предыдущем пункте, хорошо зарекомендовала себя при расчетах различных ГД задач на неподвижных сетках, при лагранжевом и некоторых промежуточных движениях сетки. Однако при расширении класса движений сетки стали проявляться и некоторые недостатки схемы (I)-(17). Ниже приведены модификации выражений для конвективных потоков массы, импульса и энергии, их устраняющие.

2.1. Аппроксимация потоков объема.

Применение схемы (I)-(17) в случае движения криволинейной сетки в области, занятой неподвижным газом с постоянной

плотность и давлением, приводит к искажению этого фона. Действительно, сократив уравнение (10) на постоянную плотность ρ_0 , приходим к уравнению изменения объема:

$$\frac{\hat{V}_0 - \bar{V}_0}{\tau_n} + F_{12}^{v_0^2} + F_{23}^{v_0^2} - F_{34}^{v_0^2} - F_{14}^{v_0^2} = 0 \quad (18)$$

где $F_{km}^{v_0^2} = (\vec{W}_{km} \vec{N}_{km})$ (см. (11)-(12)), при выполнении которого фон сохранится.

Однако аппроксимации (11)-(12) в случае криволинейных сеток не удовлетворяют этому уравнению. Изменение объема ячейки при движении сетки не согласовано с изменением массы и фон нарушается. Для устранения описанного эффекта аппроксимацию

потока объема $(\vec{W}_{km} \vec{N}_{km})$ необходимо выбирать в виде:

$$(\vec{W}_{km} \vec{N}_{km}) = F_{km}^{v_0^2} = V(\hat{x}_k, \hat{x}_m, \hat{y}_k, \hat{y}_m) / \tau_n \quad (19)$$

Это выражение имеет смысл объема, заматаемого гранью (K, M) , когда ее узлы движутся от лагранжевых координат (\hat{x}_k, \hat{y}_k) и (\hat{x}_m, \hat{y}_m) к координатам сетки на следующем временном шаге (\hat{x}_k, \hat{y}_k) и (\hat{x}_m, \hat{y}_m) .

При такой аппроксимации потоков объемов, в отличие от принятой в [2] выполняется закон сохранения объема (27), потоки массы и энергии согласованы с потоками объема и при движении сетки по газу с постоянной плотностью и энергией этот фон не возмущается.

2.2. Аппроксимация потоков импульса.

Как показали одномерные расчеты [1], при полностью консервативной аппроксимации потоков импульса вида (17) в случае подвижных сеток, движущихся быстрее лагранжевых, происходит проникновение возмущений в область неподвижного газа, искажается фон плотности, и этот эффект может оказать существенное влияние на результат при расчетах практических задач.

В связи с этим предпринята модификация потоков импульса, обобщающая на двумерный случай выражения, предложенные в [1].

Рассмотрим ячейку (i, j) (шаблон III_{1,1}) и определим вклад от этой ячейки в потоки импульсов узлов, т.е. потоки импульса через грани, одним из узлов которых является центр ячейки, а

другим - центр стороны. Обозначим через $\langle F_{км} \rangle$ поток через грань, соединяющую центр O ячейки и середину стороны (K, M) . Осуществим коррекцию потока импульса аналогично тому, как это делалось в одномерной методике [1], и для начала вычислим "полностью консервативную" и "транспортивную" аппроксимации потока импульса. В качестве примера рассмотрим потоки $\langle F_{14} \rangle$ (остальные рассматриваются аналогично).

"Полностью консервативная" аппроксимация (ср. (17)):

$$\langle F_{14}^{u, \text{нк}} \rangle = \frac{1}{4} (F_{12}^r + F_{34}^r) \frac{u_1 + u_4}{2} \quad (20)$$

$$\langle F_{14}^{v, \text{нк}} \rangle = \frac{1}{4} (F_{12}^r + F_{34}^r) \frac{v_1 + v_4}{2}$$

здесь $F_{км}^r$ - поток массы через грань ячейки (K, M) (11) с учетом модификации (19) потоков объема.

"Транспортивная" аппроксимация:

$$\langle F_{14}^{u, \text{тпн}} \rangle = \rho_0 \frac{F_{12}^{v, \text{об}} + F_{34}^{v, \text{об}}}{2} u_{14}^* = \rho_0 \langle F_{14}^{v, \text{об}} \rangle u_{14}^* \quad (21)$$

$F_{км}^{v, \text{об}}$ - потоки объема через грань ячейки (K, M) (19), а

$$u^* = \begin{cases} \frac{u_4 + \bar{u}_4}{2}; & \text{если } \langle F_{14}^{v, \text{об}} \rangle > 0 \\ \frac{u_1 + \bar{u}_1}{2}; & \text{если } \langle F_{14}^{v, \text{об}} \rangle < 0 \end{cases} \quad (22)$$

Окончательный, скорректированный поток импульса определим из сравнения "полностью консервативного" и "транспортивного" значений, как и в одномерном случае [1]:

$$\langle F_{14}^u \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle F_{14}^{u, \text{нк}} \rangle \langle F_{14}^{u, \text{тпн}} \rangle < 0 \\ \langle F_{14}^{u, \text{нк}} \rangle, & \text{если } \langle F_{14}^{u, \text{нк}} \rangle \text{sign}(\langle F_{14}^{u, \text{тпн}} \rangle) < (1+q) |\langle F_{14}^{u, \text{тпн}} \rangle| \\ (1+q) \langle F_{14}^{u, \text{тпн}} \rangle, & \text{если } \langle F_{14}^{u, \text{нк}} \rangle \text{sign}(\langle F_{14}^{u, \text{тпн}} \rangle) > (1+q) |\langle F_{14}^{u, \text{тпн}} \rangle| \end{cases} \quad (23)$$

Потоки через остальные грани и другой компоненты импульса определяются аналогично.

Для сохранения полной энергии уравнение для внутренней энергии второго этапа (13) необходимо видоизменить следующим образом:

$$\frac{(\hat{m}\hat{\epsilon})_0 - (m\bar{\epsilon})_0}{\tau_n} + F_{12}^e + F_{23}^e - F_{34}^e - F_{14}^e =$$

$$\begin{aligned}
&= (\langle F_{14}^u \rangle - \langle F_{14}^{u \text{ НК}} \rangle)(U_1 - U_4) + (\langle F_{14}^v \rangle - \langle F_{14}^{v \text{ НК}} \rangle)(U_1 - U_4) + \\
&+ (\langle F_{23}^u \rangle - \langle F_{23}^{u \text{ НК}} \rangle)(U_2 - U_3) + (\langle F_{23}^v \rangle - \langle F_{23}^{v \text{ НК}} \rangle)(U_2 - U_3) + \quad (24) \\
&+ (\langle F_{34}^u \rangle - \langle F_{34}^{u \text{ НК}} \rangle)(U_3 - U_4) + (\langle F_{34}^v \rangle - \langle F_{34}^{v \text{ НК}} \rangle)(U_3 - U_4) + \\
&+ (\langle F_{12}^u \rangle - \langle F_{12}^{u \text{ НК}} \rangle)(U_2 - U_1) + (\langle F_{12}^v \rangle - \langle F_{12}^{v \text{ НК}} \rangle)(U_2 - U_1)
\end{aligned}$$

Параметр q в (23) определяет относительную важность при расчетах свойств "транспортности" или "полной консервативности". Так, при уменьшении q , во все меньшем числе ячеек допускается нарушение свойства полной консервативности.

3. Использование подвижных сеток для решения автомодельной задачи о дифракции ударной волны на двугранном угле.

Опишем пример возможности использования подвижных сеток - решение с помощью СЭЛ ГД автомодельных задач.

Рассмотрим задачу о дифракции ударной волны на выпуклом двугранном угле OAB (рис.3(a)) [6].

Расчетная область представляет собой параллелограмм $ABCD$ одна сторона которого AB совпадает со сторонами двугранного угла, а другая AD - перпендикулярна стороне OA двугранного угла. Такой выбор области облегчает постановку граничных условий на стороне DC .

Граничные условия ставились следующим образом. На входе ударной волны в область (стороне AD) заданы скорость, плотность и удельная внутренняя энергия втекающего газа - $U_1, \rho_1, \varepsilon_1$.

На границе BC (и во всей области в начальный момент времени) держится фон ($\rho = \rho_0, \varepsilon = \varepsilon_0, U = 0$).

Граничные условия газодинамических величин вдоль границы CD определяются простым сносом этих величин из расчетной области вверх (в силу выбора области ударная волна на границе невозмущена). На стороне AB заданы условия непротекания.

Разностная сетка (рис.3(a)) получена делением сторон параллелограмма на равные отрезки и проведением линий, параллельных сторонам. Тем самым все ячейки области - равные друг другу параллелограммы.

Расчет дифракции ударной волны осуществлялся следующим образом. До времени $t = t_0$ установления характерной картины

сетка неподвижна. Далее сетка начинает двигаться, оставаясь подобной начальной, так, что относительное расположение картины дифракции не меняется, т.е. узлы разностной сетки двигаются по следующему закону:

$$x_{ij}(t) = \begin{cases} x_{ij}^0, & t < t_0 \\ \frac{x_{ij}^0 t}{t_0}, & t > t_0 \end{cases} \quad y_{ij}(t) = \begin{cases} y_{ij}^0, & t < t_0 \\ \frac{y_{ij}^0 t}{t_0}, & t > t_0 \end{cases}$$

Следует отметить некоторые особенности этой задачи.

Во-первых, расчет по лагранжевым методикам здесь невозможен вследствие наличия втекающих и вытекающих масс газа, а расчет в эйлеровых переменных можно осуществлять лишь до момента прихода ударной волны на границу области.

Во-вторых, начиная со времени t_0 скорости всех узлов сетки превышают локальные скорости газа, сетка "обгоняет" среду. При расчете по немодифицированной схеме (I)-(I7) фон впереди ударной волны существенно искажается, а коррекция конвективных потоков (23) ликвидирует этот негативный эффект.

В третьих, автомодельное решение получается без использования специальных методик, по стандартной газодинамической программе.

Результаты расчета варианта с параметрами

$$\alpha = 65^\circ; \rho_0 = 1; \varepsilon_0 = 1; \gamma = 1.4$$

$$\rho_1 = 4.90; \varepsilon_1 = 5.25; v_1 = 2.80 \text{ (Mach=4.7)}$$

представлены на рис. 4. Рис. 4(а) - линии уровня плотности при $t=3.01$, рис. 4(б) - линии уровня плотности при $t=7.73$, рис. 4(в) - линии уровня плотности при $t=10.87$.

На рис. 4(б, в) сплошной линией отмечено первоначальное положение границы области при $t < t_0 = 3.01$.

3. Квазиодномерный алгоритм построения адаптирующихся сеток.

Пусть G - односвязная область с границей Γ , Ω - ее отображение в области СЭЛ переменных (α, β) задаваемое функциями (рис. I) :

$$x = x(\alpha, \beta)$$

$$y = y(\alpha, \beta)$$

(25)

Криволинейную сетку в области G :

$$(x_{ij}, y_{ij}; i=1, \dots, N; j=1, \dots, M)$$

будем определять значениями сеточных функций (34) в области параметров:

$$\alpha_i = \frac{i-1}{N-1}; \quad \beta_j = \frac{j-1}{M-1}$$

$$x_{ij} = x(\alpha_i, \beta_j); \quad y_{ij} = y(\alpha_i, \beta_j)$$

Построение разностной, неравномерной и адаптирующейся сетки в произвольной криволинейной области G - сложная самостоятельная задача, разные подходы при решении которой достаточно полно изложены, например, в обзоре [7].

Вместе с тем, существует большой класс двумерных задач, где одно семейство координатных линий, например линии $\beta = \text{const}$, можно зафиксировать и перестройку сетки осуществлять вдоль линий этого семейства, модифицируя одномерную методику, изложенную в [1]. Такой подход существенно упрощает проблему, и затраты машинного времени на построение адаптирующейся сетки незначительны по сравнению с затратами на расчеты газодинамических параметров.

Пусть $x_i = x(\alpha_i); y_i = y(\alpha_i); i=1, \dots, N$ линия разностной сетки при $\beta = \beta_j = \text{const}$.

Определим:

$$l_i = \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

имеющую смысл длины линии, отсчитываемой от точки (x_1, y_1) до точки (x_i, y_i) вдоль ломаной $\{(x_i, y_i), i=1, \dots, N\}$

Применим одномерную методику, изложенную в [1], полагая, что управляющая адаптацией функция U задана на сетке $\{l_i, i=1, \dots, N\}$ и

$$U(l) = [u_i, l \in [l_i, l_{i+1}], i=1, \dots, N-1].$$

Определим кусочно-линейную функцию $\mathcal{J}(l)$:

$$\mathcal{J}(l) = A_k + u_k(l - l_k); \quad l \in [l_k, l_{k+1}]$$

$$A_k = \sum_{i=1}^{k-1} u_i(l_{i+1} - l_i)$$

Новая неравномерная сетка $\hat{x}_i = x(\alpha_i)$ и $\hat{y}_i = y(\alpha_i)$ при $\alpha_i = (i-1)/(N-1); i=1, \dots, N$ определяется следующим образом.

Пусть K - номер такой, что

$$A_K < A_{K+1} < A_{K+2} = A_K + u_K(l_{K+1} - l_K)$$

тогда

$$\alpha^* = \frac{A_N \alpha_1 - A_k}{A_{k+1} - A_k}$$

$$\hat{x}_i = (1 - \alpha^*) x_k + \alpha^* x_{k+1}$$

$$\hat{y}_i = (1 - \alpha^*) y_k + \alpha^* y_{k+1}$$

Такая процедура применяется для всех $j = 1, \dots, M$, тем самым новая разностная сетка \hat{x}_i, \hat{y}_i построена.

При решении нестационарных задач управляющая функция может зависеть от решения и разностная сетка также будет изменяться со временем. При надлежащем выборе управляющей функции сетка может сгущаться в области, где требуется большая точность.

4. Решение задачи об обтекании сферы спутным потоком с использованием адаптирующихся сеток.

Рассмотрим задачу об обтекании сферы неравномерным потоком, образующимся в сверхзвуковом дальнем следе за осесимметричным телом (рис. 3(б)) [8].

Параметры набегающего потока следующие:

$$P(z) = 1$$

$$u(z) = 0$$

$$v(z) = v(\infty) [1 - a_0 \exp(-b_0 z^2)] \quad (26)$$

$$\varepsilon(z) = \varepsilon(0) \left[1 + c_0 \left[1 - \frac{v^2(z)}{v^2(0)} \right] \right]$$

где

P - давление,

u и v - x и z компоненты скорости,

ε - удельная внутренняя энергия,

a_0, b_0, c_0 - параметры, характеризующие неравномерность набегающего потока.

Ось Oz - горизонтальна, Oz - вертикальна. Поток набегаёт сверху.

Стационарное решение определялось методом установления.

Граничные условия ставились следующим образом. На сфере AD и оси симметрии AB (рис. 3(б)) ставятся условия непротекания. На границе BC значения втекающих величин определялись набегающим потоком согласно формулам (26). На границе DC ставились простейшие условия вытекания.

После установления стационарного решения сетка подстраивалась вдоль линий $i = \text{const}$ (линии, перпендикулярные сфере) согласно вышеизложенной методике.

Результаты расчета обтекания неравномерным потоком с $U_0=0.1$, $V_0=7.2$, $C_0=3$ представлены на рис.5(а-г). В этом варианте в районе набегания потока на сферу образуется вихревая область. На рис.5(а) представлены линии уровня давления при расчете на неадаптированной сетке. Результаты применения адаптации сетки представлены на рис.5(б,в) (в - разностная сетка, б - линии уровня давления). Линии тока для этого варианта демонстрирует рис.5(г). Для наглядности представления вихря расход газа между соседними линиями в вихре сделан меньше расхода между линиями в остальной части области.

Следует отметить, что без применения модификаций, описанных в п.2, качество решения при применении адаптирующихся сеток было существенно хуже - в области набегавшего потока за ударной волной появлялись осцилляции плотности и внутренней энергии.

5. Расчет двумерной СДВ.

В полупространстве $z > 0$ находится газ аргон при атмосферном давлении. На поверхности $\{z=0, z \in [0, R_n]\}$ задан тонкий слой плазмы, моделирующий инициацию пробоя (r, z - цилиндрические координаты). Сверху падает пучок света заданной интенсивности и углом сходимости α , радиус пучка на поверхности равен R_n , интенсивность на поверхности - I_n (рис.3(в)). Можно подобрать такие параметры плазмы и пучка [9], что навстречу лучу от поверхности будет распространяться СДВ (поглощение света для поддержания ударной волны происходит в узкой пространственной зоне).

Для описания среды используются уравнения газовой динамики. Ионизационный состав, уравнение состояния, коэффициент поглощения лазерного излучения и другие характеристики аргонной плазмы рассчитаны в приближении локального термодинамического равновесия.

Распределение света описывается уравнением геометрической

оптики для интенсивности - при условии прямолинейного распространения света с поглощением:

$$\operatorname{div} (I \vec{n}) = \mu I$$

I - интенсивность света,

\vec{n} - единичный вектор в направлении распространения луча,

μ - коэффициент поглощения света в плазме.

В выбранной области параметров $I = 10^7$ вт/см², $T = 20000^\circ$ длина поглощения $1/\mu = 10^{-3}$ см, скорость распространения СДВ $v = 10^5$ см/сек, $\Delta t = 10$ мкс - для корректного расчета на равномерной сетке требуется 10^3 ячеек разностной сетки в направлении распространения СДВ. При использовании неравномерных адаптирующихся сеток можно существенно ослабить это требование, уменьшить затраты расчетного времени и памяти ЭВМ.

Для упрощения разностной аппроксимации уравнения переноса и поглощения света, занимающего лишь часть расчетной области, воспользуемся возможностью выбора расчетной сетки, которую нам представляют СЭЛ переменные, следующим образом.

Линии $i = \text{const}$ - прямые $\{z_{1j}, z_{2j}, j=1, \dots, M\}$ расположим по направлению распространения лучей (где они есть). В области где нет света, эти линии (также прямые), располагаем приблизительно перпендикулярно распространению ударной волны в газе.

Расчетная сетка для варианта с $\text{tg} \alpha = 0$ приведена на рис. 6(а).

Выпишем аппроксимацию уравнения переноса излучения на выбранной сетке. Будем считать интенсивности заданными в центрах горизонтальных граней (1-4 и 2-3 на шаблоне III₁₄). В силу выбора сетки, потоки излучения через грани (1-2) и (3-4) отсутствуют. Воспользуемся следующей аппроксимацией уравнения переноса излучения:

$$I_{14} S_{14} = I_{23} S_{23} \exp(-\mu_0 \Delta Z_0)$$

$$S_{14} = (z_1^2 - z_4^2) / 2; \quad S_{23} = (z_2^2 - z_3^2) / 2;$$

$$\Delta Z_0 = \frac{1}{2} (z_3 + z_2 - z_1 - z_4)$$

Объемный источник для уравнения внутренней энергии

определяется из выражения:

$$Q_{\text{вот}} = \frac{I_{23} S_{23} - I_{14} S_{14}}{V_0}$$

где V_0 - объем ячейки.

Такая аппроксимация источника является консервативной и приводит к правильным вкладам энергии даже при больших коэффициентах поглощения μ .

В работе [9] динамика распространения и распада СДВ просчитана на эйлеровой сетке до времени, когда ударная волна дошла до границы расчетной области. Расчет до более поздних времен затруднителен, т.к. увеличение числа ячеек невозможно из-за ограниченности оперативной памяти, а размеры ячеек выбраны максимально возможными для достижения приемлемой точности. Использование подвижных, адаптирующихся сеток позволяет сетку в области ударной волны сгущать за счет увеличения размеров ячеек в остальной части области и тем самым просчитывать динамику распространения и распада на большие времена без существенной потери точности, или увеличить точность расчетов без увеличения затрат памяти ЭВМ и расчетного времени.

Результаты расчета СДВ при различных значениях угла фокусировки α (рис. 3(в)) представлены на рис. 6.

В приведенных расчетах использовался следующий алгоритм движения разностной сетки. До некоторого времени ($t=t_0$) сетка неподвижна (рис. 6(а)). За это время оценивается скорость распространения УВ на осях OZ и OZ (U_0 и U_0). Начиная с момента $t=t_0$ верхние граничные узлы $\{z_{1,m}; z_{1,m}; i=1, \dots, N\}$ двигаются следующим образом. В области занятой светом они двигаются вдоль прямых линий распространения света со скоростью U_0 . Граничный узел на оси OZ движется со скоростью U_0 : $z_{1,m}(t_0 + \Delta t) = z_{1,m}(t_0) + U_0 \Delta t$.

Остальные узлы верхней границы расчетной области $\{z_{1,m}; z_{1,m}; i=2, \dots, N-1\}$ разбрасывались по определенному закону вдоль четверти эллипса с полуосями $Z_{1,m}$ и $Z_{1,m}$. Узлы $\{z_{1,1}; z_{1,1}; i=1, \dots, N\}$ - неподвижны.

Таким образом определены граничные узлы

$$\{z_{1,1}; z_{1,1}; z_{1,m}; z_{1,m}; i=1, \dots, N\}$$

Остальные узлы сетки $\{z_{1,j}; z_{1,j}; j=2, \dots, M-1\}$ при

фиксированных t определялись в соответствии с алгоритмом квазиодномерной адаптации сетки, изложенном в п.2. В качестве управляющей функции при этом использовался градиент плотности. Разностная сетка сгущалась до такой степени, чтобы размеры ячеек в области ударной волны в направлении ее распространения приблизительно сохранялись неизменными (способ управления экстремальными свойствами адаптирующихся сеток изложен в [1]).

На рис.6 (а-б) представлены результаты расчета варианта с $\text{tg}\alpha = 0.0$, $I_n = 1.5 \cdot 10^7$. Рис.6(а) демонстрирует изменение (движение и адаптацию) расчетной сетки. Чтобы не загромождать рисунок, нарисована лишь каждая вторая линия $i = \text{const}$ и $j = \text{const}$. На рис.6(б) представлены линии уровня плотности.

В этом варианте развала СДВ не происходит, вся световая энергия поглощается в узкой зоне за ударной волной.

На рис.6(в,г) представлены результаты расчета СДВ в сфокусированном луче. На рис.6(в) для варианта с $\text{tg}\alpha = 0.1$, $I_n = 1.5 \cdot 10^7$ на моменты времени $t = 0.552$, $t = 1.402$, $t = 2.986$ мкс отмечена зона поглощения световой энергии: верхняя граница заштрихованной области - начало зоны поглощения, показывает где на каждом луче поглотился 1% падающей энергии, нижняя - конец зоны поглощения, показывает где поглотилось 99% падающей энергии.

Как видно из рис.6(в) развал начинается у края луча: на момент $t = 2.986$ у края наблюдается полное просветление и свет доходит до плоскости $z = 0$.

Аналогичная картина происходит при распаде сфокусированного луча с параметрами $\text{tg}\alpha = 0.3$, $I_n = 5 \cdot 10^7$ (рис.6(г)). Как видно из рисунка, просветление здесь, как и в варианте с $\text{tg}\alpha = 0.1$ начинается с края, однако происходит немонотонно: в момент времени $t = 3.006$ хорошо заметен второй "язык" просветления.

Следует отметить следующие особенности проведенных расчетов. Так как использовалось уравнение состояния реального аргона, расчеты требовали значительных затрат машинного времени. Так общее время расчета варианта с $\text{tg}\alpha = 0$ (рис.3(в)) - около 30 часов на машине БЭСМ-6. Вместе с тем, расчет на неподвижной сетке с ячейками таких же размеров, как и в начальной сетке (при $t = 0.58$, рис.6(а)), и на те же времена

был бы, во-первых невозможен из-за нехватки памяти (ее потребовалось бы приблизительно раз в 10 больше), а во-вторых, даже при наличии памяти, потребовал бы и примерно десятикратных затрат процессорного времени (т.е. уже сотен часов на вариант).

Таким образом при использовании подвижных, адаптирующихся сеток расширяется класс задач, которые можно решить на конкретной ЭВМ, а также существенно экономятся вычислительные ресурсы.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Беликов В.В., Головизнин В.М., Каневский М.Ф., Чернов С.Ю. О расчетах одномерных светодетонационных волн на адаптирующихся сетках. //-Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1988, №
2. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Чернов С.Ю. Двумерная полностью консервативная разностная схема газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных //-Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1985, №II.
3. Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds. //-J. Comp. Phys., 14, 1974, 227.
4. Герасимов Б.П., Семушин С.А. Расчет на неподвижной эйлеровой сетке обтекания тел изменяющейся формы. //-Д.У., Минск, 1981, т.17, с.1214-1221.
5. Роч П. Вычислительные методы в гидродинамике. //-М., Мир, 1980.
6. Нестационарные взаимодействия ударных и детонационных волн в газах.-Под ред. В.П.Коробейникова, //-Москва, "Наука", 1986 г.
7. Томпсон Дж. Ф. Методы расчета сеток в вычислительной гидродинамике. //-Аэрокосмическая техника. т.3, №8, 1985г. стр.141-171.
8. Головачев Ю.П., Леонтьева Н.В. Численное исследование обтекания затупленного тела, расположенного в области сверхзвукового следа. //-Препринт ФТИ им. А.Ф. Иоффе,

№918, Ленинград, 1984.

9. Арутюнян Р.В., Большов Л.А., Головизнин В.М., Каневский М.Ф., Чернов С.Ю. Влияние пространственно-временной структуры излучения на динамику детонационной волны в сфокусированном луче. //ЖТФ, т. 57, №7, с. 1479-1481., 1987.

Рис. I

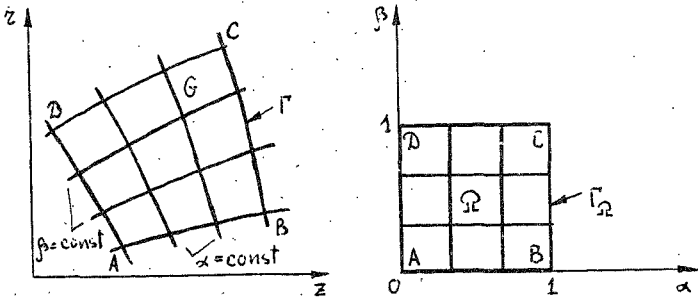


Рис. 2

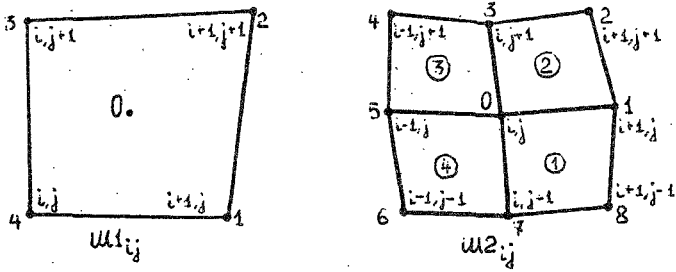
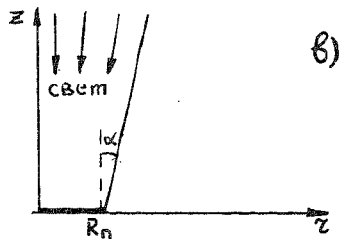
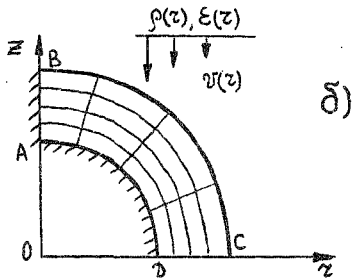
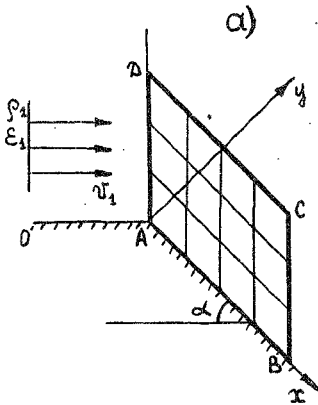


Рис. 3



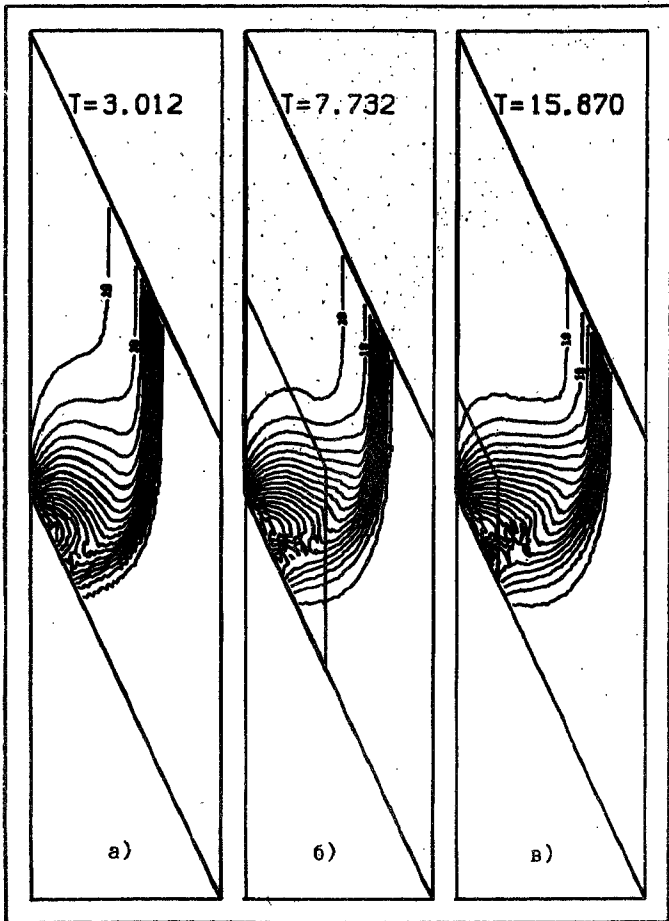
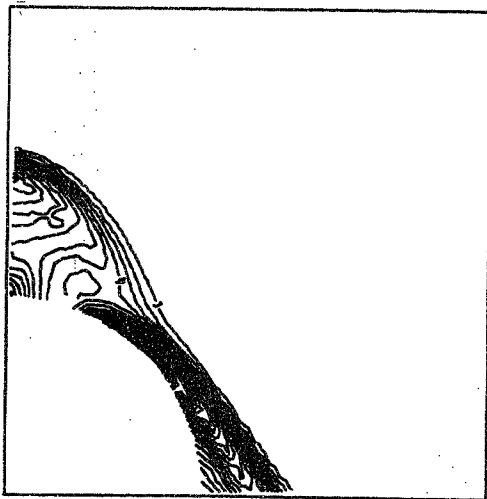


Рис. 4

a)



б)

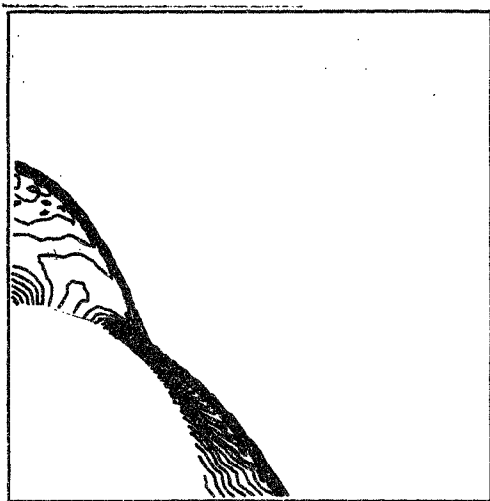
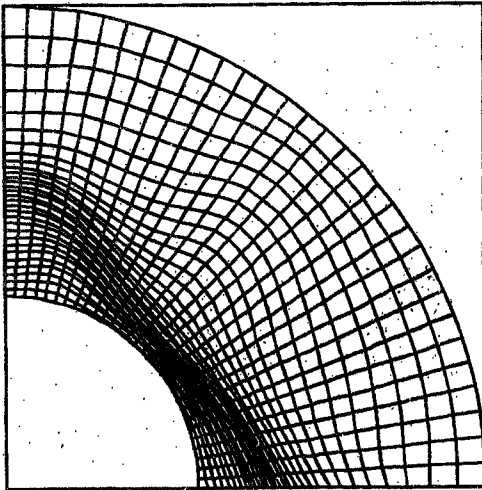


Рис. 5

в)



г)

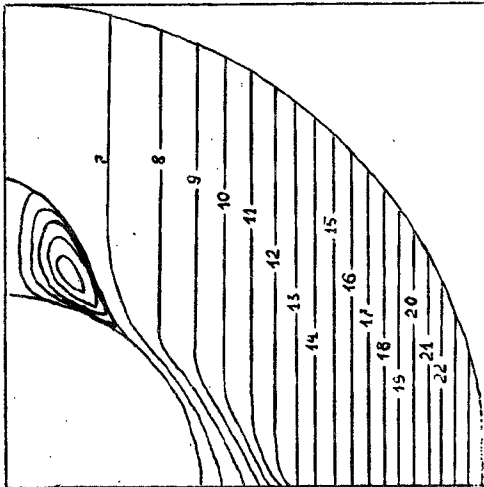
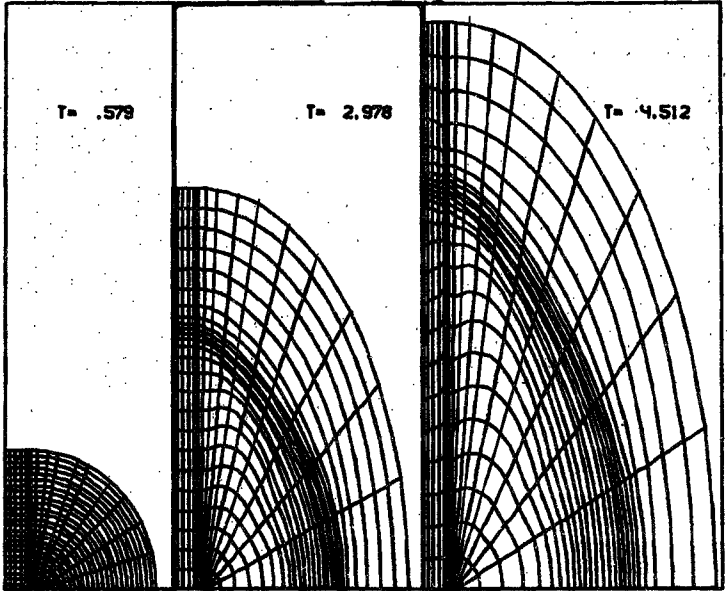
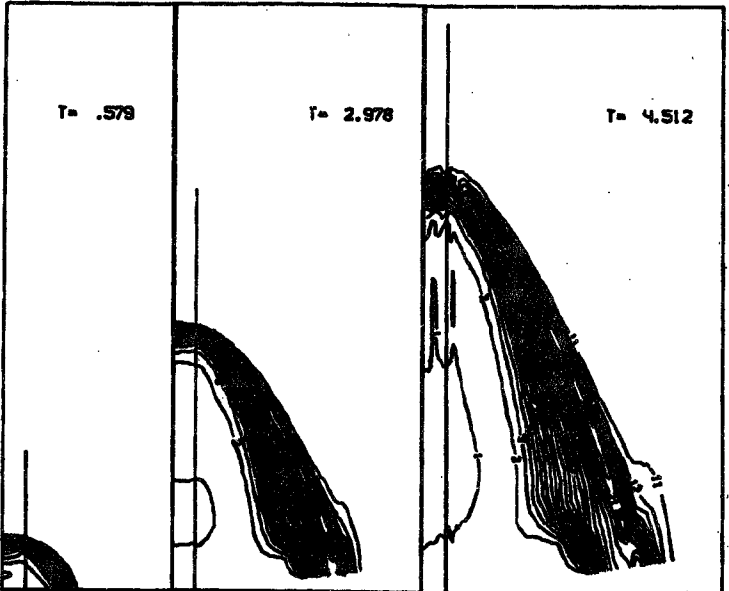


Рис. 5

a)



b)



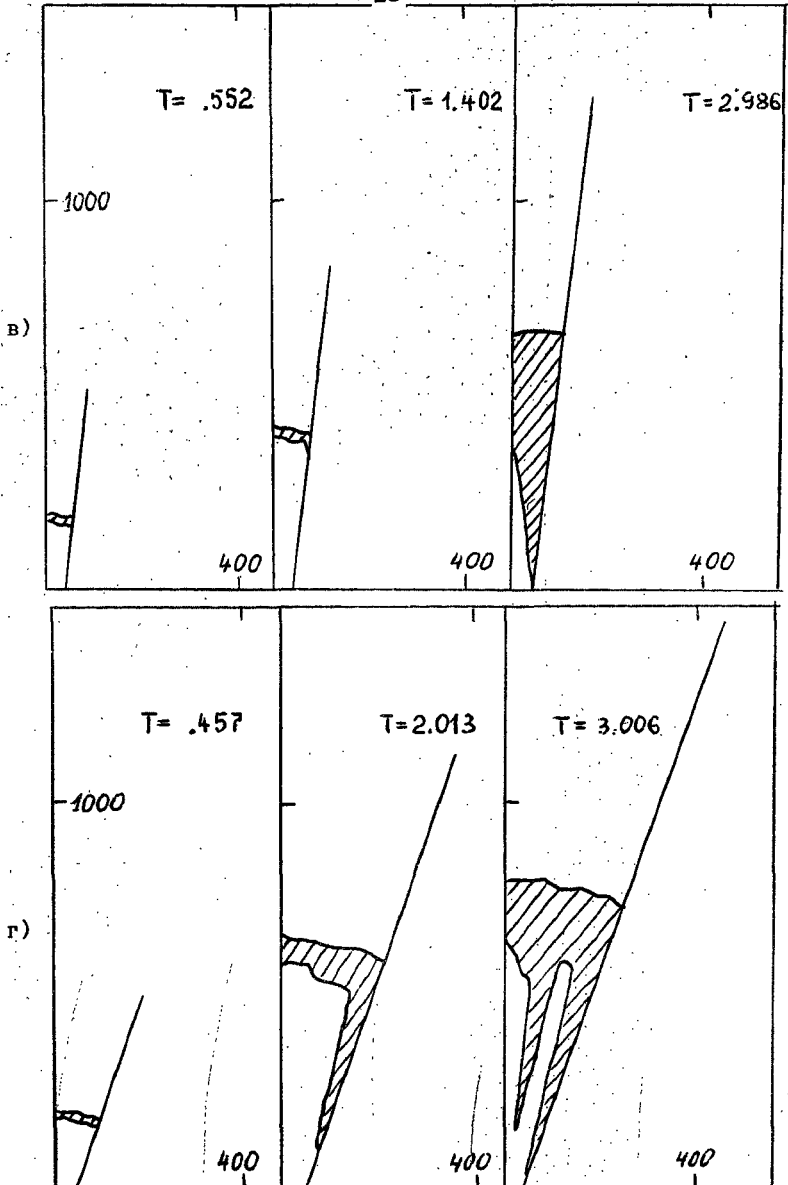


Рис. 6