



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Академии наук СССР

Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин, А.А. Самарский

КОНЕЧНО – РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДАПТИВНЫХ СЕТОК

Преприят № 115 за 1987 г.

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША АКАДЕМИИ НАУК СССР

Н.А.Дарьин, В.И.Мажукин, А.А.Самарский

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ
ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДАПТИВНЫХ СЕТОК

Москва 1987 г.

АННОТАЦИЯ

Предлагается конечно-разностный метод решения одномерных нестационарных задач газовой динамики на адаптивных сетках, динамически связанных с решением. В основу метода положена идея автоматического преобразования координат с помощью искомого решения. Рассмотрен ряд известных задач, на примере решения которых продемонстрированы возможности предлагаемого подхода.

Метод позволяет получать более высокую точность решения по сравнению с решением на фиксированной сетке с тем же числом узлов; выделять контактные границы, положение, момент возникновения и распространение ударных волн; генерировать и уничтожать узлы сетки.

Введение

Правильный выбор расчетной сетки в задачах математической физики всегда являлся важнейшим компонентом численного решения. Особенно важна эта проблема в задачах газовой динамики, решения которых отличаются большим количеством особенностей. Разнообразие решений газодинамических задач обусловлено в первую очередь множеством физических явлений, которые они описывают. При их численном решении встречается ряд специфических трудностей, связанных с наличием следующих факторов:

- возникновение больших градиентов внутри рассматриваемой области или на ее границе (проблемы типа пограничного слоя);
- наличие контактных или свободных границ;
- генерация и распространение ударных волн.

Дополнительные трудности возникают при рассмотрении трансзвуковых течений.

Изначально при разработке методов численного решения уравнений газовой динамики наметились два подхода: лагранжев и эйлеров [1].

В лагранжевых методах [2,3] ячейки расчетной сетки перемещаются вместе с жидкостью, и, таким образом, скорость движения узлов определяется скоростью гидродинамического течения. Такой способ адаптации оказался удобным для относительно гладких течений, в которых отсутствуют большие деформации. Наиболее эффективно его применение в задачах со свободными поверхностями и поверхностями раздела. Кроме того, различные схемы в лагранжевых переменных обладают низкой схемной вязкостью. Однако наличие постоянных связей между движущимися ячейками накладывает естественные ограничения на область применимости лагранжева подхода. При значительных деформациях течения происходит сильное искажение ячеек сетки, что вызывает снижение точности расчетов и уменьшение шага интегрирования. Слишком большие амплитуды возмущающих сил могут вызвать так называемое выворачивание части ячеек, что приводит к утрате физического смысла результатов расчета. Существует ряд механизмов регуляризации расчетных сеток лагранжева типа (см., например, [4,5]), с помощью которых удастся расширить область использования этих методов, однако полностью устранить недостатки лагранжева подхода не удастся.

В численных методах, базирующихся на эйлеровом подходе [6,7] узлы расчетной сетки фиксированы и не изменяются в процессе рас-

четов, что позволяет рассматривать течения с сильными деформациями. Но в задачах с неизвестным заранее поведением решения расстановка узлов может оказаться не оптимальной, что потребует применения сетки с весьма мелким шагом. Частично данный недостаток может быть скомпенсирован предварительным неравномерным распределением координатных линий, если известна некоторая априорная информация о поведении решения. Однако само построение неравномерных сеток в многомерных задачах со сложной геометрией области решения представляет собой непростую задачу. Для построения наиболее простых сеток, учитывающих только форму границ области и не изменяющихся при их движении, был предложен ряд методов, основанных либо на геометрическом подходе [8,9], либо использующих идею автоматического преобразования координат [0-12]. Методы, основанные на геометрическом подходе, просты, наглядны и построение расчетных сеток при их использовании осуществляется с помощью алгебраических формул, как правило связанных с различными видами интерполяции. Среди методов, использующих преобразование координат, наиболее известным является, по-видимому, [11], согласно которому распределение узлов сопряжено с решением системы уравнений Лапласа [11] или Пуассона [12]. Наибольшее распространение эти методы получили в стационарных задачах, в которых сетку можно построить до начала интегрирования уравнений.

Оба подхода использовались для разработки методов построения сеток, учитывающих подвижность границ расчетной области. С этой целью в методах, использующих преобразование координат [13], предлагается дифференцирование по времени эллиптической системы уравнений. В методах, основанных на геометрическом подходе [7,14,15], вводятся подвижные сетки, жестко связанные с движением границы или одной из особенностей решения. С их помощью в [7] осуществлялось, в частности, выделение головной ударной волны.

Попытки объединения преимуществ обоих подходов привели к разработке смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) [16-29] и квазилагранжевых [30-34] методов.

В смешанном эйлерово-лагранжевом подходе имеются две разновидности его реализации. В одной из них характер течения принципиально разный в различных направлениях, и узлы сетки в них движутся вдоль одного из координатных направлений со скоростью течения (лагранжев подход), а вдоль другого — неподвижны (эйлеров под-

ход) [16-18]. С помощью этих методов решались, в частности, задачи о движении жидкости в длинных гибких каналах [18] и задачи ЛТС [19,20].

Другая разновидность методов СЭД [21-29] использует подвижные сетки, скорость движения узлов которых может не совпадать со скоростью течения. В работе [29] механизм перестройки сетки не конкретизируется, а в [21-28] исходную систему уравнений предлагается представлять в каскадной форме [22] и решение производить в два этапа. На первом - лагранжевом - рассчитывается действие сил, определяемых тензором вязких напряжений (правые части уравнений). На втором - эйлеровом - рассчитываются процессы конвективного переноса и производится перестройка сетки. Для ряда задач эти методы имеют весомые преимущества перед другими.

Квазилагранжев метод [30-34] использовался для описания гидродинамических течений с объемными источниками массы и его, в частности, можно рассматривать как способ распространения массовых лагранжевых координат на область задач с изменяющейся массой. Однако, использование в этом методе лагранжева подхода предполагает наложение запрета на обмен массой между элементами течения. Изменение массы, а соответственно и размеров ячейки, определяется мощностью источника в данной ячейке. Одним из достоинств квазилагранжева подхода является возможность уменьшения размерности задачи [33,34].

Стремление к использованию всех преимуществ, которыми обладают методы подвижных сеток, лагранжев, эйлеров и смешанный эйлерово-лагранжев подходы привели в конечном итоге к разработке и использованию методов адаптивных сеток, динамически связанных с решением, см. обзор [35-37].

Разработка методов построения адаптивных сеток в настоящее время находится в стадии интенсивного развития, и поэтому пока невозможно какому-либо из них отдать предпочтение. Ключевой проблемой всех методов построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, является выбор характеристики численного решения, используемой в качестве параметра, управляющего перемещением узлов сетки. Точность расчетов также зависит от того, как взаимосвязаны разностная схема и способ построения расчетной сетки. С учетом этих требований различными авторами был предложен ряд эмпирических подходов к построению расчетных сеток с управляемым распределением узлов.

В методах подвижных конечных элементов [38-40] для этих целей используется система разностных уравнений, получаемых с помощью проекционного метода Галеркина. Другие способы построения подвижных конечных элементов рассмотрены в [41,42]. В каждой из этих работ, наряду с различными модельными задачами, рассматривалось уравнение Бургерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu - \text{малый параметр,}$$

типичное решение которого имеет крутой фронт. Решение этой задачи традиционными конечно-разностными методами или методами конечных элементов сталкивается с естественными трудностями. Применение методов конечных элементов на сетке с динамическим распределением узлов во всех случаях приводило к положительному эффекту. Без увеличения общего числа узлов точность решения за счет их концентрации в области сингулярности значительно возросла. При этом в [41] высказывалось мнение, что методы подвижных конечных элементов имеют неоспоримое преимущество перед конечно-разностными, использующими адаптивные сетки.

В [43,44] рассматривается ряд теоретических положений, относящихся к методам подвижных конечных элементов.

Еще большим разнообразием отличаются способы построения адаптивных сеток в конечно-разностных методах [45-65]. Основная часть этих работ посвящена проблемам аэромеханики [45-55] и тепло-массообмена [53,64,65]. Наибольшее распространение в конечно-разностных методах получили способы построения адаптирующихся сеток, основанные на вариационных подходах [45-49], эквидистантном распределении зависимых переменных [50-52], механических аналогах сетки [53,54], учете погрешности аппроксимации [55,56] и градиентов численного решения [57,58] и др. [59-62].

К недостаткам перечисленных подходов следует отнести то, что процессы определения решения и движения узлов в них как бы разделены и реализуются автономно. Кроме того, взаимосвязь между используемыми разностной схемой и способом перестройки сетки задается эмпирически и, как правило, весьма грубо. Как нам представляется, именно в силу этих причин при решении задач нередко возникают осцилляции сетки, либо связанные колебания решения и сетки, неоднократно отмечавшиеся в различных работах [57]. Более того, произвольная трактовка этих явлений привела [63] к заклю-

чению, что их появление свойственно всем методам построения расчетных сеток, использующих системы уравнений эллиптического, параболического или гиперболического типа. Для устранения этих явлений в [63] предлагается расчетные сетки строить не на каждом шаге по времени, а через значительно большие отрезки времени, а затем улучшать их свойства оптимизационными методами.

Представляется также не совсем рациональным определять решения в областях сингулярности с помощью концентрации в них узлов сетки. Выделение с помощью такого приема, например, ударной волны [61] требует более чем 10^2 узлов.

В настоящей работе предлагается свободный от указанных недостатков метод решения нестационарных одномерных задач газовой динамики на адаптивной сетке, динамически связанной с решением. Излагаемый подход представляет собой распространение на газодинамические задачи метода решения краевых нестационарных задач [64] и задач типа Стефана [65] на адаптивных сетках.

§ 2. Дифференциальная постановка задачи.

Нахождение численного решения уравнений газовой динамики с помощью адаптивной сетки, динамически связанной с решением, определим как способ решения, при котором нахождение сеточных функций и координат узлов неразрывно взаимосвязано. Основные отличия предлагаемого подхода от ранее рассматривавшихся заключаются в следующем:

1. Построение адаптивной сетки производится с помощью автоматического преобразования координат. Конкретный вид преобразования задается с помощью некоторой функции Q , конкретный вид которой определяется особенностями решения исследуемой задачи.

2. Тесная взаимосвязь между искомым решением и способом перестройки расчетной сетки вводится на уровне дифференциальной модели, представляющей собой в общем случае нелинейную систему уравнений в частных производных. В этой системе часть уравнений описывает непосредственно исследуемое явление, а вторая часть — динамику расчетной сетки, определяемую в свою очередь эволюцией решения. В предельных случаях из этих уравнений получаются сетки либо в эйлеровых, либо в лагранжевых переменных.

Отметим, что конкретный вид связи между уравнениями газовой динамики и уравнением для перестройки сетки задавался по аналогии с квазилагранжевым подходом [30].

В качестве исходной системы координат, в которой производится математическая формулировка исследуемого явления, используем декартову систему x, t . Затем с помощью преобразования общего вида $x=f(q,t)$ осуществим переход из физического пространства в расчетное. Система нестационарных уравнений газовой динамики в одномерном приближении в эйлеровых переменных имеет вид:

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (p u).$$

В новых переменных q и t система уравнений (1)–(3) запишется в виде:

$$(4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial q},$$

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\psi u) = -\frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} (Q u),$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right] = -\frac{\partial}{\partial q} (p u) - \frac{\partial}{\partial q} \left[Q \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right],$$

$$(7) \quad \psi = \rho \frac{\partial x}{\partial q},$$

$$(8) \quad Q = -\left(u - \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

Конкретный вид функции Q определяется выбранным законом преобразования координат, т.е. видом функции f . Отметим, что в лагранжевом, квазилагранжевом и смешанном эйлерово-лагранжевом подходах функция $\frac{\partial f}{\partial t}$ считается известной. Для построения адаптивной сетки, динамически связанной с решением, необходимо чтобы закон преобразования координат (функция $f(q,t)$) определялся искомым решением. В силу этого для полного определения системы (4)–(8) необходимо задать функцию Q .

Выражения (4)–(6) представляют собой уравнения неразрывности, движения и энергии, (7) – уравнение связи между переменными x и q .

Уравнения (7), (8) можно использовать для определения эйлеровой переменной $x(q,t)$ и изменения плотности ρ . Однако в вычислительном отношении более удобно вместо уравнения (8) использовать другое уравнение. Для его получения продифференцируем левую и правую часть (8) по пространственной переменной q и, используя

(7), получим уравнение для определения изменения ξ :

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Psi}{\xi} \right) = \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{Q}{\xi} \right).$$

Окончательно система уравнений газовой динамики в переменных q , t записывается в виде (5-7), (9). Уравнение (4) в дальнейшем будет использоваться для построения расчетной сетки.

§ 3. Выбор функции Q .

Построение функции Q должно производиться с учетом особенностей решения рассматриваемой задачи. Так, построение адаптивной сетки для решения задачи Стефана [65] с выделением положения фазовой границы в простейшем сл. случае требует равномерного распределения узлов в каждой фазовой подобласти. Величины пространственных шагов в этих подобластях, как правило, сильно отличаются между собой и зависят от скорости движения фазового фронта. Ближкое к равномерному распределение узлов на каждый момент времени в обеих подобластях (с неизменным общим количеством на всем отрезке интегрирования по t) достигалось при помощи задания функции Q в виде диффузионного потока $Q = -D \frac{\partial \Psi}{\partial q}$, где D - коэффициент, величина которого подбирается в ходе расчета.

Существует класс задач, решение которых внутри области или на ее границе характеризуется наличием больших градиентов, требующих для достижения необходимой точности численного решения более мелкой сетки, чем внутри остальной области. Автоматического сгущения сетки можно достичь посредством концентрации в них узлов с помощью функции Q , задаваемой в виде

$$Q = -Q_0 \frac{\partial}{\partial q} \left(\Psi \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right).$$

Отток узлов из области слабого изменения решения может привести к сильно неравномерной сетке в этой области. Во избежание этого явления следует применять механизм разглаживания. Для этого в задачах с большими градиентами функция Q задавалась в виде комбинации [64]: $Q = -D \frac{\partial \Psi}{\partial q} - Q_0 \frac{\partial}{\partial q} \left(\Psi \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right)$.

В задачах, описывающих сложные процессы, вид функции Q должен, по-видимому, определяться доминирующим процессом. Отметим, что в эволюционных задачах вид уравнения, используемого для перестройки сетки, также должен быть эволюционного типа.

Задачи газовой динамики отличаются большим разнообразием решений и поэтому затруднительно указать некоторый универсальный вид функции Q , удовлетворявший бы всем задачам. Некоторые способы задания функции Q в задачах газовой динамики рассмотрим на примере решения ряда конкретных задач.

§ 4. Разностная схема.

В расчетном пространстве $\Omega_{q,t}$ введем расчетную сетку ω с постоянным шагом h по переменной q и шагом τ по переменной t : $\omega = \{(q_i, t^j), (q_{i+1/2}, t^j), q_{i+1} = q_i + h, q_{i+1/2} = q_i + 0.5h, t^{j+1} = t^j + \tau, i = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$

На этой сетке система уравнений (9)–(13) аппроксимируется с помощью семейства разностных схем, в которых функции $\Psi, \rho, u, P, \varepsilon$ вычисляются в полужелтых точках $(q_{i+1/2}, t^j)$, а в целых (q_i, t^j) – значения x и Q .

Семейство разностных схем имеет вид:

$$\frac{\Psi_{i+1/2}^{j+1} - \Psi_{i+1/2}^j}{\tau} = - \frac{Q_{i+1}^{(\sigma)} - Q_i^{(\sigma)}}{h},$$

$$\frac{\left(\frac{\Psi}{\rho}\right)_{i+1/2}^{j+1} - \left(\frac{\Psi}{\rho}\right)_{i+1/2}^j}{\tau} = \frac{u_{i+1}^{(\sigma)} - u_i^{(\sigma)}}{h} - \left(\frac{Q}{\rho}\right)_{i+1}^{(\sigma)} + \left(\frac{Q}{\rho}\right)_i^{(\sigma)},$$

$$(10) \quad \frac{[\Psi(\varepsilon + \frac{u^2}{2})]_{i+1/2}^{j+1} - [\Psi(\varepsilon + \frac{u^2}{2})]_{i+1/2}^j}{\tau} = - \frac{(\rho u)_{i+1}^{(\sigma)} - (\rho u)_i^{(\sigma)}}{h} - \frac{[Q(\varepsilon + \frac{u^2}{2})]_{i+1}^{(\sigma)} - [Q(\varepsilon + \frac{u^2}{2})]_i^{(\sigma)}}{h},$$

$$\frac{(\rho u)_{i+1/2}^{j+1} - (\rho u)_{i+1/2}^j}{\tau} = - \frac{P_{i+1}^{(\sigma)} - P_i^{(\sigma)}}{h} - \frac{(Q u)_{i+1}^{(\sigma)} - (Q u)_i^{(\sigma)}}{h}, \quad \frac{x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}}{h} = \left(\frac{\Psi}{\rho}\right)_{i+1/2}^{j+1}$$

Значения функций $\Psi, \rho, u, P, \varepsilon$ в целых узлах определялись по интерполяционным формулам $\psi_i = \frac{\Psi_{i+1/2} + \Psi_{i-1/2}}{2}$, $\rho_i = \frac{\rho_{i+1/2} + \rho_{i-1/2}}{2}$, $u_i = \frac{u_{i+1/2} + u_{i-1/2}}{2}$. При $\sigma = 0, I$ разностная схема (14) имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$, при $\sigma = 0,5$ – $O(\tau^2 + h^2)$. В последующих расчетах использовались схемы (10) с $\sigma = 0,5, I$. Неявные схемы (10) решались с помощью метода простых итераций.

Рассмотрим решение некоторых нестационарных одномерных по пространству задач газовой динамики. Выбор этих задач определяется стремлением наиболее полно продемонстрировать возможности предлагаемого метода решения.

§ 5. Задача о распространении ударной волны.

Рассмотрим задачу о скатии газа поршнем, движущемся с постоянной скоростью $U(t) = 0,75$. В момент времени $t = 0$ газ неподвижен $u(x, 0) = 0$ и имеет постоянную плотность $\rho(x, 0) = I$ и температуру $T(x, 0) = 0$.

Расчет начинается с момента времени $t = 0,01$. На отрезке $0 \leq x \leq 0,01$ были поставлены автомоделные профили ударной волны - полочки $U = 0,75$, $\varrho = 4$, $P = 3$. Для расчетов использовалась полностью неявная разностная схема (10) с $G = 1$. Общее число узлов сетки равнялось 40. Фронт ударной волны помещался в узел с номером $i = 21$. На разрыве определялось значение потока массы $Q_{21} = (\varrho U)_{20} - (\varrho U)_{21}$. Переток массы вещества из одной области в другую позволяет в физическом пространстве определять изменение геометрических размеров обеих областей. Учитывая, что решение данной задачи представляет собой простую кусочно-постоянную функцию и ее численное определение можно производить на простейшей равномерной сетке, функция Q задавалась в виде диффузионного потока $Q = -D_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$, где D_0 - постоянная, равная в данном расчете 10^2 .

На рис. I представлены результаты расчета на два момента времени t_1 и t_2 . Пунктирная линия соответствует положению поршня. Сравнение численного решения с точным показало, что отличие не превышает 0.5%.

§ 6. Задача о формировании ударной волны.

Рассмотрим более сложную задачу о зарождении и распространении ударной волны на примере движения ускоряющегося поршня. В момент времени $t = 0$ поршень занимает положение $x = 0$, а затем двигается в трубу, заполненную политропным газом, по закону $x = \alpha t^2$ ($\alpha > 0$). В процессе развития волны сжатия градиенты решения в этой зоне увеличиваются и в некоторый критический момент времени $t = t_k$ обращаются в бесконечность. Происходит так называемая градиентная катастрофа, т.е. образование разрыва. Момент наступления градиентной катастрофы можно определить [66] по формуле $t_k = \frac{U_c}{(k+1)\alpha}$, где U_c - скорость звука в газе, γ - отношение удельных теплоемкостей, α - константа в законе движения поршня. Для $U_c = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 5/3$ время $t_k = 0.484$.

При временах $t \gg t_k$ решение должно выходить на автомоделное решение задачи о сжатии холодного неподвижного газа поршнем, движущимся по закону [67] $U = U_0 t$, $U_0 = 2$.

До момента наступления градиентной катастрофы течение представляет собой простую задачу сжатия со слабым разрывом в месте ее соединения с постоянным течением. Была осуществлена попытка определения момента образования разрыва из численного решения

системы конечно-разностных уравнений (10) с $\sigma = 0,5$ и $\sigma = 1$ на фиксированной сетке ($Q \neq 0$) с общим числом узлов $M = 60$. На рис. 2, 3 представлены пространственные профили скорости u на различные моменты времени, полученные по неявной разностной схеме ($\sigma = 1$) с первым порядком точности (рис. 2) и по схеме со вторым порядком точности ($\sigma = 0,5$, рис. 3). Численное решение показано пунктирными линиями, точное — сплошными. Положение узлов сетки отмечено кружками. Полученные результаты (рис. 2, 3) свидетельствуют о том, что определить момент образования ударной волны из численных расчетов на фиксированной сетке практически невозможно. Решения, полученные по схеме первого порядка, рис. 2, не передают крутых фронтов из-за большой аппроксимационной вязкости схемы. Схема со вторым порядком дает колебания в области больших градиентов, рис. 3.

Качественный анализ влияния аппроксимационной вязкости на получаемые решения исследовался с помощью метода дифференциального приближения [68]. В качестве примера рассмотрим первое дифференциальное приближение для разностного уравнения движения из системы (10) с $\sigma = 0,5$:

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\psi u) + \frac{\partial p}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}(Qu) = -\frac{i}{3!} \left[\frac{\tau^2}{4} \frac{\partial^3(p+Qu)}{\partial t^2 \partial q} + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^3(p+Qu)}{\partial q^3} \right]$$

Отметим следующее: колебательный характер поведения u при $Q \equiv 0$ определяется, по-видимому, первым слагаемым в правой части. Оба слагаемых в правой части являются функциями производных по пространственной координате q . Отсюда следует предположение, что при решении задачи на адаптивной сетке для узлов желательно задать такой закон движения, при котором производные в правой части, выражения (11) вблизи больших градиентов решения были бы малы. Как известно [69], в решениях задач газовой динамики, представляемых в виде простой волны, все величины являются функциями только одной величины, которая на характеристиках сохраняет постоянное значение. Естественно полагать, что функцию Q следует выбрать такой, чтобы координаты узлов сетки в физическом пространстве двигались вдоль соответствующего семейства характеристик. В рассматриваемой задаче это должно быть семейство

C_+ -характеристик, уравнение которых записывается в виде:

$$(12) \quad \frac{dx}{dt} = u + u_c, \quad u_c - \text{скорость звука.}$$

Сравнивая выражение (12) с уравнением (8), получаем, что эйлерова координата x будет двигаться вдоль C_+ -характеристики,

если значение функции Q выбрать в виде: (13) $Q = -\rho u c$.

Момент перехода волны сжатия в ударную волну можно определить, руководствуясь следующими соображениями. Из метода характеристик [69] известно, что градиентная катастрофа в простой волне сжатия означает пересечение двух характеристик соответствующего семейства. В рассматриваемой задаче при выборе потока Q в виде (13) каждый узел сетки будет двигаться вдоль C_+ характеристики. Тогда положение и момент образования разрыва будет определяться обращением в нуль величины Ψ в ячейке между двумя пересекающимися характеристиками. Последующие расчеты подтвердили высказанные предположения. Результаты их представлены на Рис.4-9.

Образование ударной волны и процесс ее дальнейшего распространения связан с рядом важных аспектов:

1. Легко показать, что градиентная катастрофа происходит у основания волны сжатия при пересечении характеристик, одна из которых выходит от поршня в момент $t = 0$, т.е. из начала координат. При использовании равномерной по q сетки и начальных значениях $\Psi_i = I$ такой характеристики в расчетах не окажется, что может вызвать заметную погрешность в определении значения t_k . В наших расчетах при использовании равномерной сетки для аппроксимации характеристики, выходящей от поршня, в первой ячейке первоначальное значение Ψ_1 выбиралось много меньше, чем в остальных: $\Psi_1 = 10^{-4}$, $\Psi_i = I$, $i = 2, \dots, N-1$. Условием образования ударной волны считалось выполнение неравенства $\Psi_l \leq 0.1$ в некоторой ячейке l . В наших расчетах, при выбранных u_c , α , γ , оно выполнялось в момент времени $t_k = 0.475$, что близко к расчетному $t_k = 0.484$, $\Delta t \approx 2\%$.

2. На границах $q = q_0$ и $q = q_R$ расчетной области $q_0 < q < q_R$ должны выполняться граничные условия $Q(q_0, t) = Q(q_R, t) = 0$. Поэтому при выборе притока массы в виде (13) крайняя левая ячейка будет неограниченно расти, а крайняя правая за конечное время сложится в точку. Для предотвращения указанных явлений в численном алгоритме был предусмотрен механизм генерации новых ячеек вблизи поршня и уничтожения мелких ячеек на правом конце области. Критерием уничтожения или рождения служило значение величины Ψ соответствующей ячейки. В новых ячейках значения P и u определялись с помощью интерполяции. Плотность ρ находилась из требования сохранения энтропии, функция Ψ определялась из закона сохранения массы. На Рис.4,5 представлены траектории движения узлов сетки. Точками отмечены узлы, используемые

в расчетах, генерируемые узлы отмечены кружками, уничтожаемые — крестиками. Кружком, внутри которого находится крестик, отмечен момент образования ударной волны, Рис.5. Первоначальная сетка может состоять из минимального числа ячеек равного двум, что и представлено на Рис.4. Начальные значения функции Ψ для этих ячеек отличаются на несколько порядков. К концу расчетов число узлов достигает 40, Рис.5.

3. После того, как сильный разрыв сформировался, возникает непростой вопрос о способе расчета распространения нестационарной ударной волны. Существуют две возможности выделения области сингулярности решения при расчетах на адаптивных сетках. С достаточной степенью точности пространственно-временной профиль разрыва можно передавать, концентрируя в этой области сколь угодно большое число узлов N , не позволяя при этом схлопываться ячейкам. Однако такой путь представляется не совсем рациональным по двум причинам. Во-первых, требуется большое общее число узлов, во-вторых, чрезмерное сгущение сетки по пространственной переменной может вызвать существенное уменьшение шага интегрирования во времени. И как результат возникает вопрос об эффективности метода.

Более перспективным представляется второй путь, когда особенности решения выделяются в явном виде по типу решения задачи Стефана [65], в которой разрыв помещается в узел сетки. На разрыве выписываются граничные условия в виде законов сохранения, один из которых позволяет установить поток массы через разрыв. Значение этого потока использовалось затем для построения адаптирующейся сетки.

Выделение сильного разрыва означает, что он располагается в некотором узле $i = l$, в котором величины S_e , U_e , P_e , E_e слева и справа от узла имеют различные значения. На этом разрыве, как известно, должны выполняться соотношения Рюгонно.

В расчетном пространстве эти соотношения записывались в виде, исключающем появление разностных источников:

$$\begin{aligned}
 U_{e2} - \frac{Q_e}{S_{e2}} &= U_{e1} - \frac{Q_e}{S_{e1}}, \\
 P_{e2} + Q_e U_{e2} &= P_{e1} + Q_e U_{e1}, \\
 P_{e2} \cdot U_{e2} + Q_e \left(E_{e2} + \frac{U_{e2}^2}{2} \right) &= P_{e1} U_{e1} + Q_e \left(E_{e1} + \frac{U_{e1}^2}{2} \right),
 \end{aligned}$$

индексы 1,2 обозначают величины перед и за ударной волной соот-

ветственно.

Численные расчеты оказались устойчивыми, если на поверхность разрыва экстраполировались значения из области постоянного течения ρ_{e_1} , u_{e_1} , ε_{e_1} и одна из величин, например, u_{e_2} из области за фронтом ударной волны. После образования ударной волны, положению фронта которой соответствует фиксированный узел расчетной сетки, справа и слева от него происходило уничтожение ячеек по методике, описанной выше.

4. Одним из наиболее важных аспектов численного решения задач газовой динамики является выбор разностной схемы. Известно [1-3], что на фиксированных сетках неявные схемы первого порядка точности интенсивно размывают слабые разрывы в газодинамическом течении. Схемы второго порядка, как правило, содержат в разностном решении паразитические осцилляции.

Использование адаптивных сеток, динамически связанных с решением, существенным образом меняют эти качества разностных схем. Расчеты по схеме (10) первого порядка точности ($\sigma = 1$) и схемам 2-го порядка точности ($\sigma = 0.5$) показали, что в обоих случаях практически исчезают эффекты размывания и осцилляции. Рис. 6-10. Отличие численных решений от точных не превышало $1+2\%$. На Рис. 6, 7 представлены профили u , ρ , полученные в различные моменты времени по схеме (10) с первым порядком. На Рис. 8, 9 показаны результаты расчетов, полученные по схеме второго порядка точности. Точное решение показано сплошными линиями, численное - пунктирными, положение и количество используемых узлов отмечено маркерами. Сравнение показало, что обе схемы дают практически мало отличающиеся друг от друга результаты. В обоих случаях с одинаковой точностью определялся момент возникновения сильного разрыва. Обе схемы четко передают область разрыва, используя при этом не более 40 узлов.

Чтобы убедиться в том, что эти положительные явления свойственны и другим разностным схемам, для сравнения в расчетах использовалась одна из широко распространенных схем типа предиктор-корректор второго порядка точности, схема Лакса-Вендрофа [1]. Результаты, полученные по этой схеме показаны на Рис. 10. Как качественно, так и количественно они практически не отличаются от результатов, полученных по схемам (10).

Таким образом, выполненное сравнение разностных схем позволяет сформулировать важный вывод о том, что применение для реше-

ния задач газовой динамики метода, основанного на использовании адаптивных сеток, снижает требования к разностным схемам.

Исследование других качеств предлагаемого метода проводилось на примере задач, допускающих автомодельные решения.

§ 7. Задача о распространении ударной волны по фону с экспоненциально возрастающей плотностью [70].

На примере этой задачи выполним дополнительное экспериментальное исследование точности численного решения, получаемого на сетке, построенной с помощью механизмов генерации и адаптации узлов, описанных в предыдущем параграфе.

В начальный момент времени $t = t_0$ значения газодинамических функций имеют вид [28]:

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & , x \geq x_0, \\ \Delta(1 - \xi_0)/t_0 & , x \leq x_0, \end{cases}$$

$$\varepsilon(x, t_0) = \begin{cases} 0 & , x \geq x_0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{t_0}\right)^2 (1 + 2\xi_0) & , x \leq x_0, \end{cases}$$

$$\rho(x, t_0) = \begin{cases} \rho_0 \exp[(x - x_0)/\Delta] & , x \geq x_0, \\ 3\rho_0(1 + 2\xi_0)^{-5/2} & , x \leq x_0. \end{cases}$$

Здесь $\xi_0 = (x_0 - x)/\Delta$; x_0 - положение разрыва в момент t_0 ; ρ_0 - невозмущенная фоновая плотность при $x = x_0$, Δ - характерный масштаб ширины импульса.

Автомодельное решение при $t > t_0$ имеет вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & , x \geq x_F(t), \\ \Delta(1 - \xi)/t & , x \leq x_F(t), \end{cases}$$

$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 0 & , x \geq x_F(t), \\ \left(\frac{\Delta}{t}\right)^2 (1 + 2\xi)/2 & , x \leq x_F(t), \end{cases}$$

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_0 \exp[(x - x_0)/\Delta] & , x \geq x_F(t), \\ 3\rho(x_F)(1 + 2\xi)^{-5/2} & , x \leq x_F(t). \end{cases}$$

Здесь $x_F(t) = x_0 + 1.5\Delta \ln(t/t_0)$ - положение фронта в момент t ; $\xi = (x_F(t) - x)/\Delta$.

Числовые значения параметров следующие: $t_0 = 2$, $x_0 = 6$, $\rho_0 = 1$,
 $\Delta = 4$, $\gamma = 2$.

На рис. II представлены результаты расчетов по указанной выше методике с рождением и уничтожением ячеек как вблизи границ области, так и в окрестности фронта ударной волны. В первом случае в начальный момент сетка состояла из 31 узла, причем в области, охваченной движением - 11 узлов. Во втором случае общее число узлов в начальный момент - 61, из них 41 узел приходится на область $x \leq x_0$. В обоих случаях ошибка в определении плотности не превышала 5%. Для сравнения отметим, что в [28] для аналогичных расчетов использовались сетки с общим числом узлов $M = 37+150$.

§ 8. Задача о распаде сильного разрыва.

Среди решений системы уравнений газовой динамики встречаются решения, содержащие либо стационарную ударную волну, либо стационарный контактный разрыв [69]. В задаче о распаде сильного разрыва присутствуют одновременно оба вида разрывов, движущихся с постоянными скоростями. Различными авторами [23], [28], [71-74] эта задача широко использовалась для анализа качества разностных схем.

Сформулируем задачу в следующем виде: при $t = 0$ положим $P_\lambda = 480$, $\rho_\lambda = 8$, $u_\lambda = 0$; $P_\pi = 1$, $\rho_\pi = 1$, $u_\pi = 0$, где индексами "л" и "п" отмечены значения справа и слева от разрыва в точке $x = 0$. Рассматриваемая задача является автомодельной по переменной $\xi = x/t$. Диаграмма движения слабых и сильных разрывов решения показана на Рис. 12. Автомодельные координаты разрывов имеют следующий вид: $\xi_\lambda = -10$, $\xi_\pi = 1.0933$, $\xi_{к.р.} = 8.32$, $\xi_{y.в.} = 11.24$ ($\gamma = 5/3$).

Точное решение в областях I-IV описывается следующим формулами:

- А) область V: $\rho = 1$, $u = 0$, $P = 1$,
- Б) область IV: $\rho = 3.85$, $u = 8.32$, $P = 94.52$,
- В) область III: $\rho = 3.0193$, $u = 8.32$, $P = 94.52$,
- Г) область II: $\rho = (2 - \frac{u}{15})^3$, $u = \frac{3}{4}(\xi + 10)$, $P = 15 \rho^{5/3}$,
- Д) область I: $\rho = 8$, $u = 0$, $P = 480$.

В численных расчетах в каждой из областей I-V выбиралось по 5 ячеек. В области II узлы сетки двигались по C_+ -характеристиками, т.е. поток Q выбирался в виде $Q = \rho u_c$. В областях кусочно-постоянных решений выбирался диффузионный меха-

низм расталкивания узлов: $Q = -D_0 \frac{\partial \Psi}{\partial q}$. На рис. 13, 14 представлены профили плотности на различные моменты времени. Сплошными линиями показано точное решение. Маркерами обозначено численное решение. Количество и положение маркеров соответствует количеству и положению узлов сетки. Максимальная погрешность наблюдалась в области волны разрежения и составила 0.5%.

Для сравнения отметим, что для решения данной задачи обычно выбирались сетки с $N = 100 + 150$ [23, 72-74].

Заключение

Анализ решения ряда хорошо известных тестовых задач (§§ 5-7) позволяет сформулировать следующие утверждения.

Предложен конечно-разностный метод решения нестационарных одномерных по пространству задач газовой динамики. Метод основывается на использовании адаптирующихся сеток, получаемых преобразованием координат, которое в свою очередь определяется искомым решением.

На основе предложенного метода построен эффективный вычислительный алгоритм, позволяющий существенно повысить точность расчетов (погрешность по отношению к точному решению для различных задач составляет 1-5%), при одновременном уменьшении общего числа узлов сетки в 2-5 раз по сравнению с другими методами.

Метод позволяет с большой точностью определять местоположение и момент образования разрывных решений.

С помощью метода можно производить практически точное выделение фронтов сильных, слабых и контактных разрывов.

Метод экономичен, позволяет легко вводить механизм генерации узлов.

Метод снижает требования к качеству разностных схем. Использование в методе адаптивных сеток, динамически связанных с решением, приводит к снижению аппроксимационной вязкости и подавлению паразитических осцилляций.

Эффективность предлагаемого метода можно повысить с помощью различных оптимизационных процедур, которые в данной работе не производились.

Литература

1. Рихтмадер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. - М.: Мир, 1972, 418 с.
2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. - М.: Наука, 1980, 352 с.
3. Шульц В.Д. Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа. Сб. Вычислительные методы в гидродинамике. - М.: Мир, 1972, с.9-54.
4. Батлер Р. Развитие метода *L I N G*. Сб. Численные методы в механике жидкостей. - М.: Мир, 1973, с.146-155.
5. Кроули У. *F L A G* - свободно-лагранжев метод для численного моделирования гидродинамических течений в двух измерениях. Сб. Численные методы в механике жидкостей. - М.: Мир, 1973, с.135-145.
6. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. - М.: Наука, 1984, 520 с.
7. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. - М.: Наука, 1976, 400 с.
8. Кокوشинская Н.С., Павлов Б.М., Пасконов В.М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. - М.: Изд-во МГУ, 1980, 246 с.
9. Пасконов В.М. Разностные схемы на самоорганизующемся множестве расчетных точек в двумерных односвязных областях произвольной формы. - *ЖВММФ*, 1971, т.11, № 3, с.776-782.
10. Сидоров А.Ф. Об одном алгоритме расчета криволинейных сеток, близких к равномерным. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1977, т.8, № 4, с. 149-156.
11. Thompson J.F., Thames F.S., Mastin C.W. Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies. - *J.Comp.Physics*, 1974, v.15, pp.229-319.
12. Steger J.L. Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries. - *AIAA J.*, 1978, v.16, pp.679-686.
13. Hindman R.G., Kutler P., Anderson D. Two-Dimensional Unsteady Euler Equation Solver for Arbitrarily Shaped Flow Region. - *AIAA J.*, 1981, v.19, No. 4, pp.424-431.

14. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. - *ЖВММФ*, 1961, т. I, № 6, с. 1020-1050.
15. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах. - *ЖВММФ*, 1972, т. I2, № 2, с. 429-440.
16. Нох Е. СЭД - совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. Сб. "Вычислительные методы в гидродинамике". - М.: Мир, 1967, с. 128-139.
17. Херт Г. Произвольный лагранжево-эйлеров численный метод. Сб. "Численные методы в механике жидкостей", - М.: Мир, 1973, с. 156-164.
18. Hirt G.W., Amsden A.A., Cook J.L. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds. - *J.Comp. Physics*, 1974, v.14, pp.227-253.
19. Волкова Р.А., Круглякова Л.В., Мышцкая Е.Е., Тишкин В.Ф., Тюрина Н.Н., Фаворский А.П., Пашков М.Ю. Программа решения двумерных задач управляемого лазерного синтеза. Инст-т Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1985, 63 с.
20. Тишкин В.Ф. Учет физических процессов при численном моделировании двумерных течений лазерной плазмы. Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1979, № 7, 32 с.
21. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный принцип получения уравнений магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. - *ЖВММФ*, 1981, т. 21, № 2, с. 409-422.
22. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сороковикова О.С. Полностью консервативные дифференциально-разностные схемы газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1983, № 35, 24 с.
23. Головизнин В.М., Краушкин И.Е., Рязанов М.А., Самарский А.А. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой

- динамики с разнесенными скоростями. Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1983, № 105, 33с.
24. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Сорокичкина О.С. Об одном классе полностью консервативных разностных схем магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. - ЖВМиМФ, 1984, т. 24, № 4, с. 520-533.
 25. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Сорокичкина О.С. Разностные схемы газовой динамики со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков. - Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1984, № 56.
 26. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Чернов С.Ю. Полностью консервативные разностные схемы газовой динамики на криволинейных эйлеровых сетках. Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1985, № 39.
 27. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Чернов С.Ю. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1985, № II.
 28. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Сорокичкина О.С., Чернов С.Ю. Разностные схемы газовой динамики со сбалансированными конвективными потоками. - Вычислительные методы в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1986, с.5-41.
 29. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об одном подходе к расчету задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы. - Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1985, № 57, 14 с.
 30. Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Некоторые задачи газовой динамики при наличии источников. - ЖВМиМФ, 1978, т. 18, № 4, с. 1048-1056.
 31. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для задач газовой динамики при наличии источников массы. - Препринт Инст-та Прикладной математики им. М.В.Келдыша АН СССР, 1982, № 160, 14 с.
 32. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений механики сплошной среды в квазилагранжевых переменных при наличии гравитационных и магнитогидродинамических процессов. - Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1985, № 55, 41 с.

33. Волосевич П.П., Дарьин Н.А., Карпов В.Я., Круковский А.Ю. К расчету задач магнитной гидродинамики со стоками массы в квазилагранжовых координатах. - Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1984, № 7, 21 с.
34. Волосевич П.П., Галигузова И.И., Дарьин Н.А. и др. Вычислительные эксперименты по тета-пинчу с учетом торцевых потерь. Препринт Инст-та Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1984, № 127, 21 с.
35. Thompson J.F., Numerical Grid Generation. - North-Holland, 1982, 909 p.
36. Thompson J.F. Grid Generation Techniques in Computation Fluid Dynamics. - AIAA J., 1984, v. 22, No. 11, pp.1505-1523.
37. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Boundary Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations - A Review. - J.Comp.Physics, 1982, v. 47, pp. 1-108.
38. Gelin R.J., Doss S.K., Miller K. The moving Finite Element Method: Applications to General Partial Differential Equations with Multiple Large Gradients. - J.Comp.Physics, 1981, v. 40, pp. 202-249.
39. Miller K., Miller R. Moving Finite Elements. I. - SIAM J. Numer.Anal., 1981, v. 18, No. 6, pp. 1019-1032.
40. Miller K. Moving Finite Elements. II. - SIAM J.Numer.Anal. 1981, v. 18, No. 6, pp. 1033-1057.
41. Cook A.E., Duncan R. A Node-Moving Algorithm with Application to Burgers' equation and the Moltz problem. - Appl. Math.Modelling, 1982, v. 6, pp. 463-466.
42. Caldwell J., Wanless P., Cook A.E. A Finite Element approach to Burgers' equation. - Appl.Math.Modelling, 1981, v. 5, pp. 189-193.
43. Babuska I., Gui W. Basic principles of feedback and adaptive approaches in the finite element method. - Comp.Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, v. 55, pp. 27-42.
44. Shephard M.S., Yerry M.A., Baehmann P.L. Automatic mesh generation allowing for efficient a priori and a posteriori mesh refinement. Comp.Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, v. 55, pp. 161-180.

45. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа. - *ЖВМиФФ*, 1979, т.19, № 1, с.174-188.
46. Brackbill J.U., Saltzman J.S. Adaptive Zoning for Singular Problems in Two Dimensions. - *J.Comp.Physics*, 1982, v.46, pp.342-368.
47. Kreis R.I., Thames F.C., Hassan H.A. Application of a variational Method for Generating Adaptive Grids. - *AIAA J.*, 1986, No. 3, pp.404-410.
48. Luchini P. An Adaptive-Mesh Finite-Difference Solution Method for the Navier-Stokes Equations. - *J.Comp.Physics*, 1987, v.68, No. 2, pp.283-306.
49. Bell J.B., Shubin G.R. An Adaptive Grid Finite Difference Method for Conservation Laws - *J.Comp.Physics*, 1983, v.52, pp.569-591.
50. Дегтярев Л.М., Дроздов В.В. Адаптирующиеся к решению сетки эллиптических задачах на плоскости. Дифференциальные уравнения, 1984, т.20, № 7, с.1194-1203.
51. Andrew B., White J.R. On selection of Equidistributing meshes for twopoint boundary-value problems. - *SIAM J.Numer. Anal.*, 1979, v.16, No.3, pp.472-502.
52. Smooke M.D., Koszykowski M.L. Two-Dimensional Fully Adaptive Solutions of Solid-Solid Alloying Reactions. - *J.Comp.Physic*, 1986, v.62, pp.1-25.
53. Gnoffo P.A. A Vectorized, Finite-Volume, Adaptive Grid Algorithm Applied to Planetary Entry Problems. - *AIAA J.*, 1983, v.21, pp.1249-1254.
54. Nakahashy K., Deiwert G.S. Three-Dimensional Adaptive Grid Method. - *AIAA J.*, 1986, No. 6, pp.948-954.
55. Rai M.M., Anderson D. Application of Adaptive Grid to Fluid-Flow Problems with Asymptotic Solutions. - *AIAA J.*, 1982, v.20, No.4, pp.469-502.
56. Дегтярев Л.М., Дроздов В.В., Иванова Т.С. Метод адаптивных к решению сеток в одномерных краевых задачах с пограничным слоем. Препринт Института Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1986, № 164, 26 с.
57. Dwyer H.A., Kee R.J., Sanders B.R. Adaptive Grid Method for Problems in Fluid Mechsnics and Heat Transfer. - *AIAA J.*, 1980, v.18, No.10, pp.1205-1212.

58. Dwyer H.A. Grid Adaption for Problems in Fluid Dynamics. - AIAA J., 1984, v.22, No.12, pp.1705-1712.
59. Ewing R.E. Efficient adaptive procedures for fluid-flow applications. - Comp.Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, v.55, pp.89-103.
60. Winkler K.-H.A., Mihalas D., Norman M.L. Adaptive-Grid Methods with Asymmetric Time-Filtering. - Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, Institut für Astrophysik, MPA-130, Mai, 1984, 42 p.
61. Winkler K.-H.A., Norman M.L., Newman M.J. Adaptive Mesh Techniques for Fronts in Star Formation. - Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, Institut für Astrophysik, MPA-94, Oktober, 1983, 41 p.
62. Mihalas D., Winkler K.-H.A., Norman M.L. Adaptive-Mesh Radiation Hydrodynamics.II. The Radiation and Fluid Equations in Relativistic Flows. - Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, Institut für Astrophysik, MPA-93, Oktober, 1983, pp. 21.
63. Kennon S.R., Dulikravich G.S. Generation of Computational Grids Using Optimization. - AIAA J., 1986, No.7, pp.1069-1073.
64. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Метод построения адаптивных сеток для одномерных краевых задач. Препринт Института Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1987, № 33, 26 с.
65. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке. - Дифференциальные уравнения, 1987, т.23, № 7.
66. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. - М.: Наука, 1981, 368 с.
67. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука, 1978, 420 с.
68. Шюкин Д.И. Метод дифференциального приближения. - Новосибирск: Наука, 1979, 380 с.
69. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. - М.: Наука, 1968, 520 с.
70. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. - М.: Наука, 1966, 480 с.

71. Boris J.P., Book D.L., Hain K. Flux-Corrected Transport IIa: Generalization of the Method. - J.Comp.Physics, 1975, v.18, pp.248-283.
72. Смакин А.И., Фурсенко А.А. Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета. ЖВМиМФ, 1980, т.20, № 4.
73. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений. Препринт Института Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1984, № 165, 23 с.
74. Симонович И.П. Некоторые результаты исследования квазигазодинамических уравнений для решения задач газовой динамики. Препринт Института Прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, № III, 16 с.

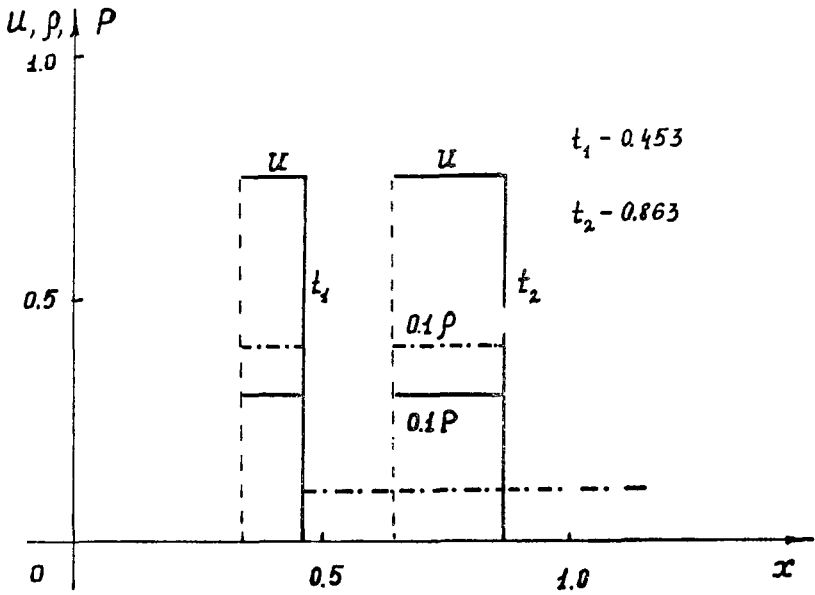
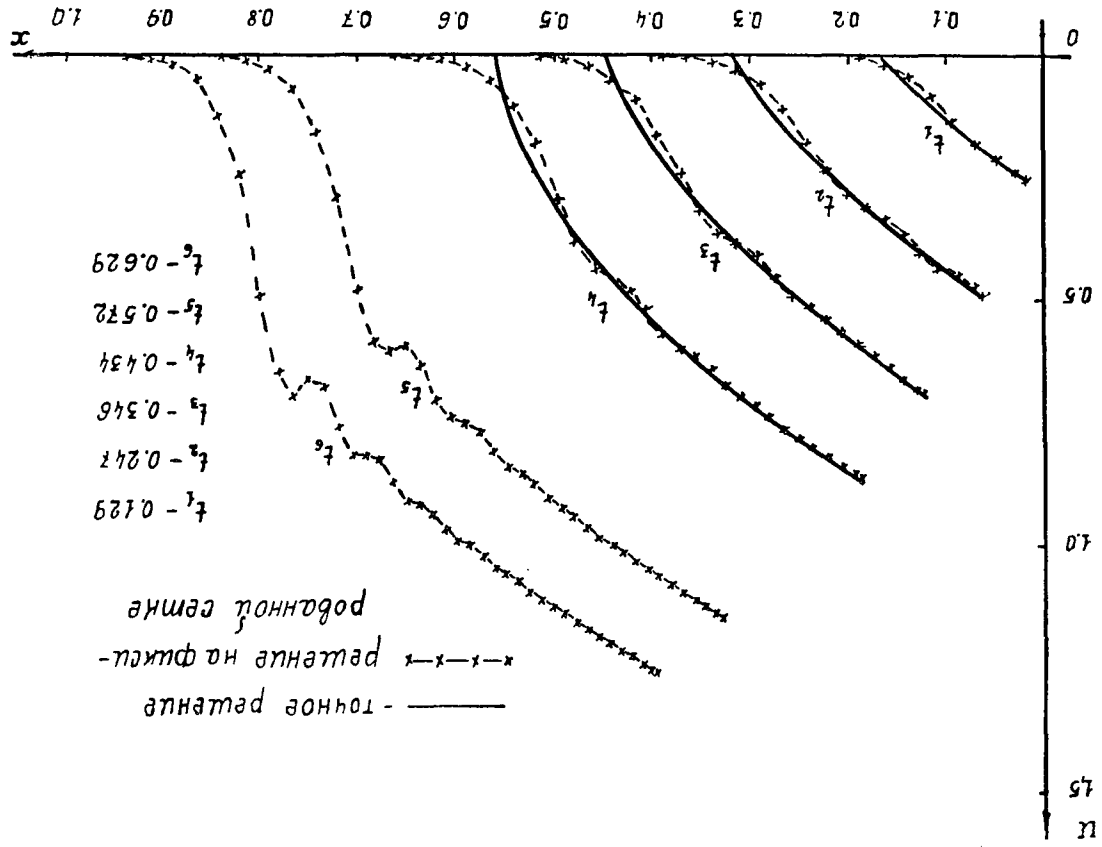


Рис. 1.

Рис. 3. Схема 2^{го} порядка



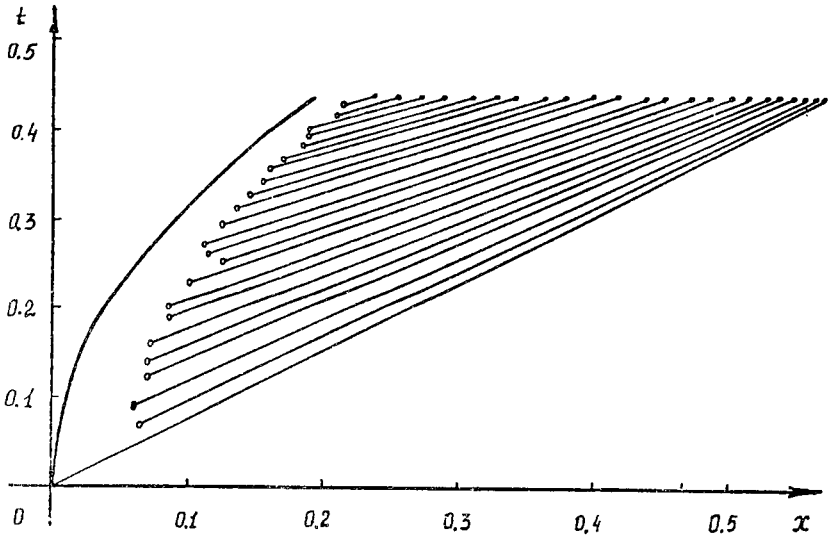


Рис. 4 $x-t$ - диаграмма

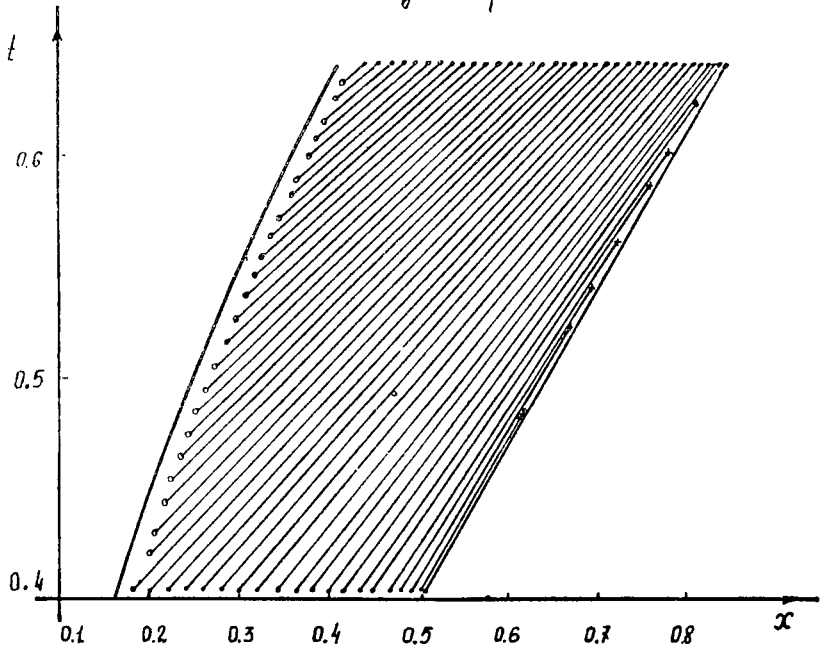
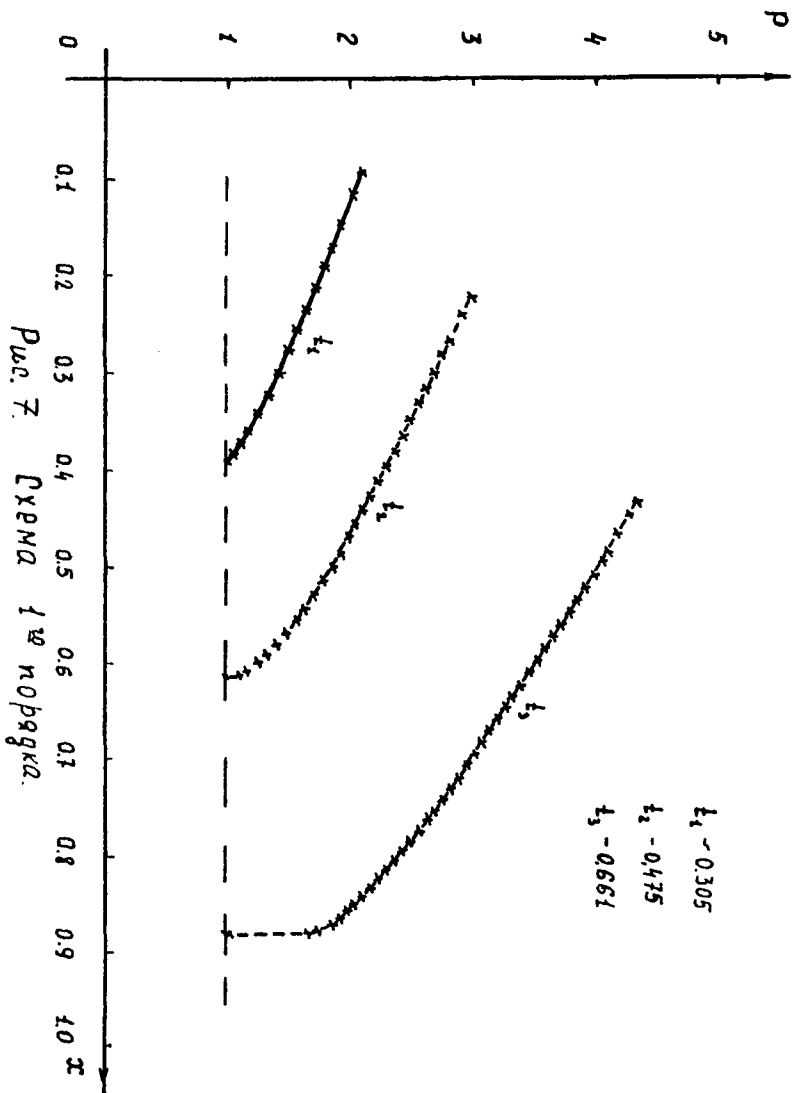
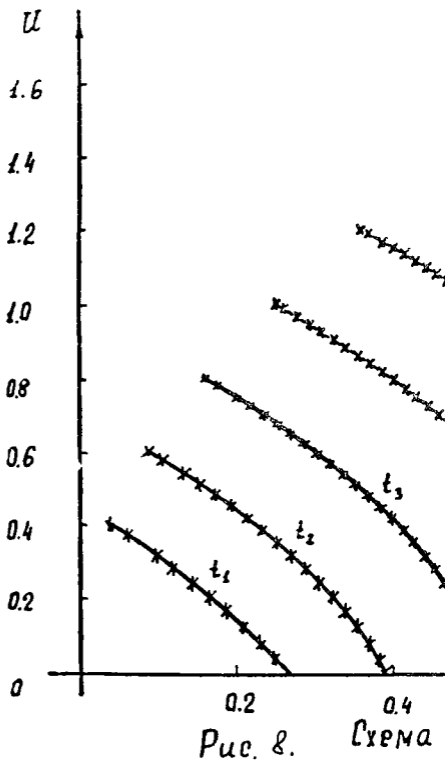


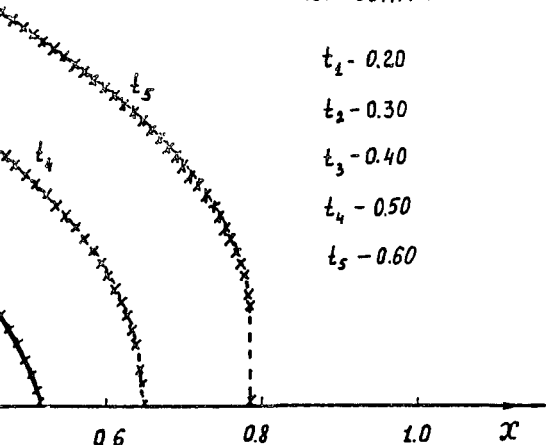
Рис. 5





решение

— ТОЧНОЕ
x-x-x- на адаптив-
ной сетке



$$t_1 - 0.20$$

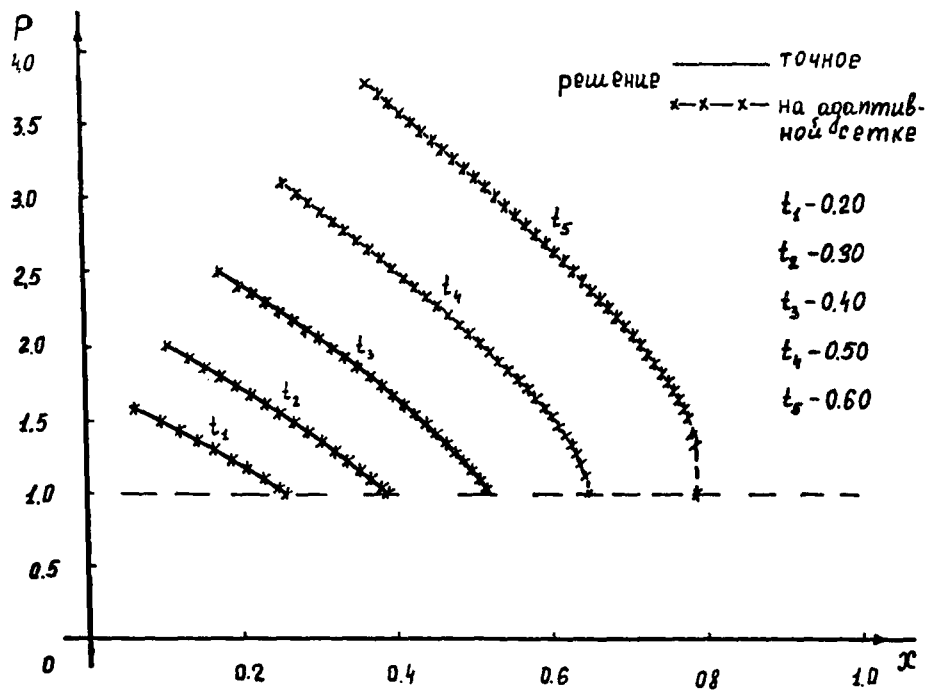
$$t_2 - 0.30$$

$$t_3 - 0.40$$

$$t_4 - 0.50$$

$$t_5 - 0.60$$

2^{10} порядок.

Рис. 9. Схема 2^{го} порядка

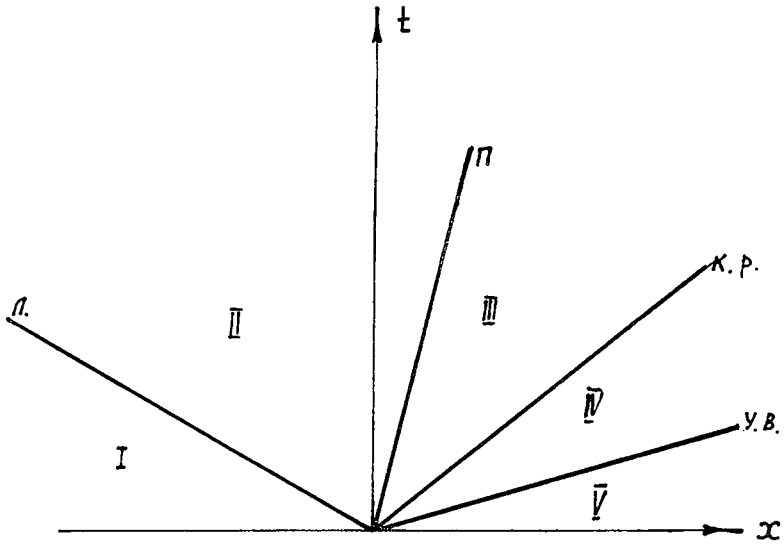


Рис. 12.

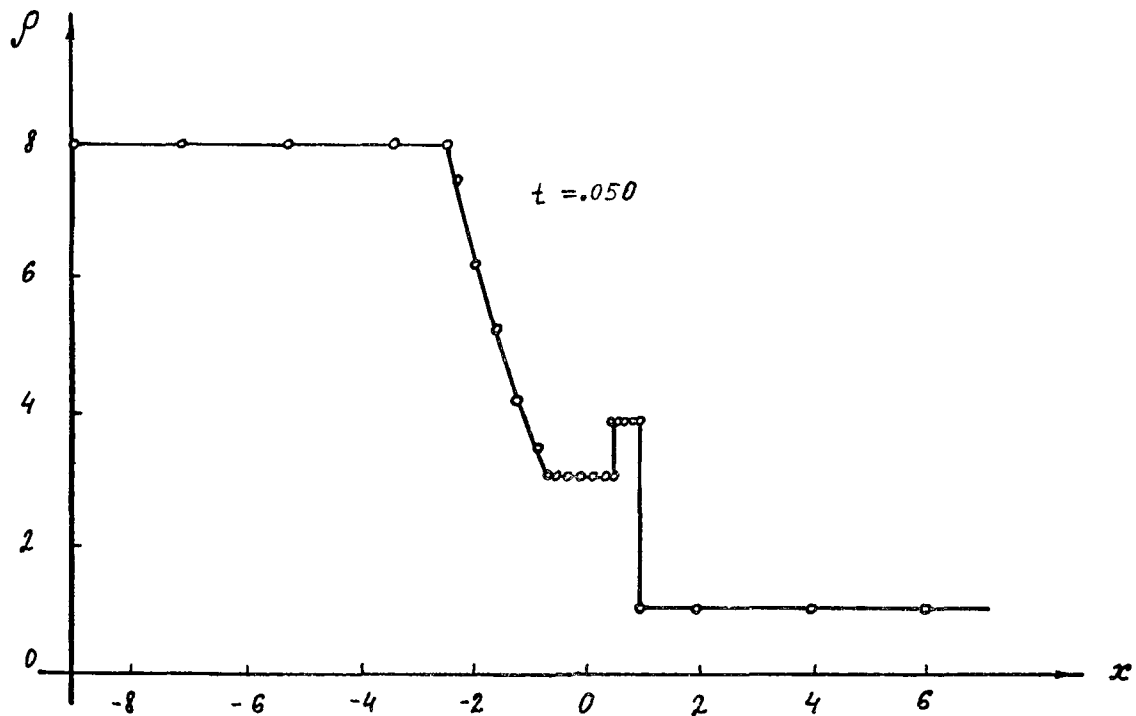


Рис. 13.

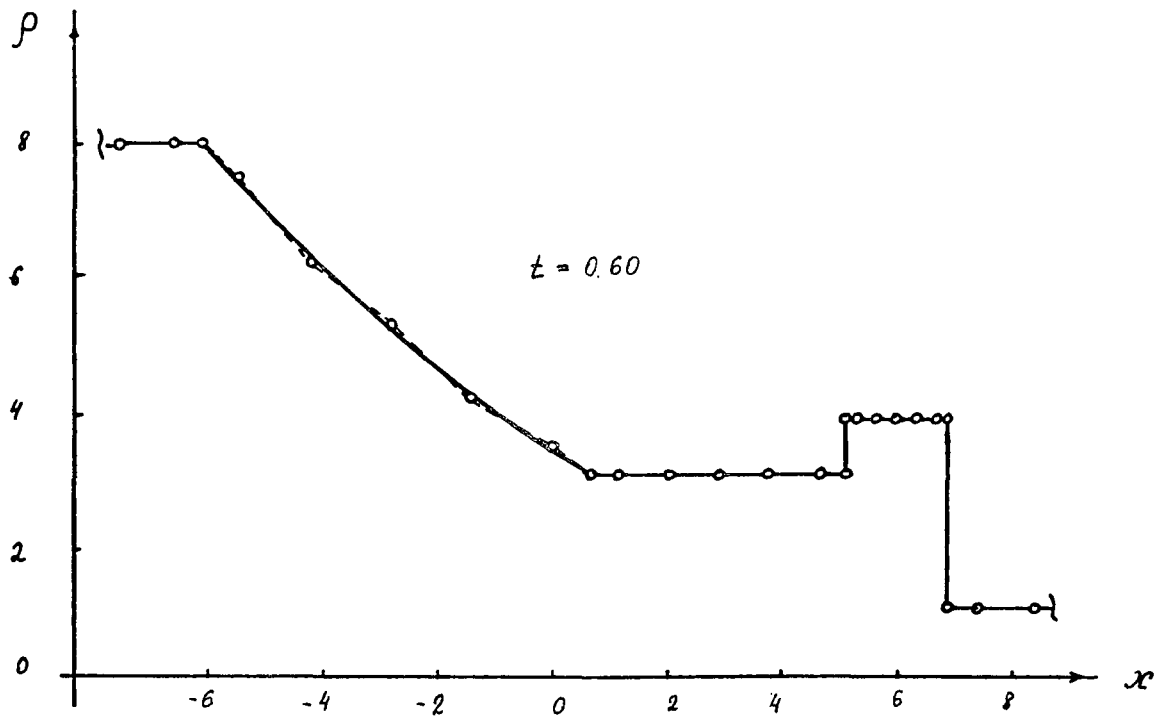


Рис. 14.

Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин, А.А. Самарский " Конечно - разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток."

Редактор С.А. Семушкин.

Корректор Н.Г. Чурбанова.

Подписано к печати 25.05.87г. № Т- 14105. Заказ № 244.

формат бумаги 60X90 1/16. Тираж 180 экз.

Объем 1,4 уч.-издл. Цена 20 коп.

055 (02).



Отпечатано на роталпринтах в Институте прикладной математики АН СССР

Москва, Миусская пл. 4.

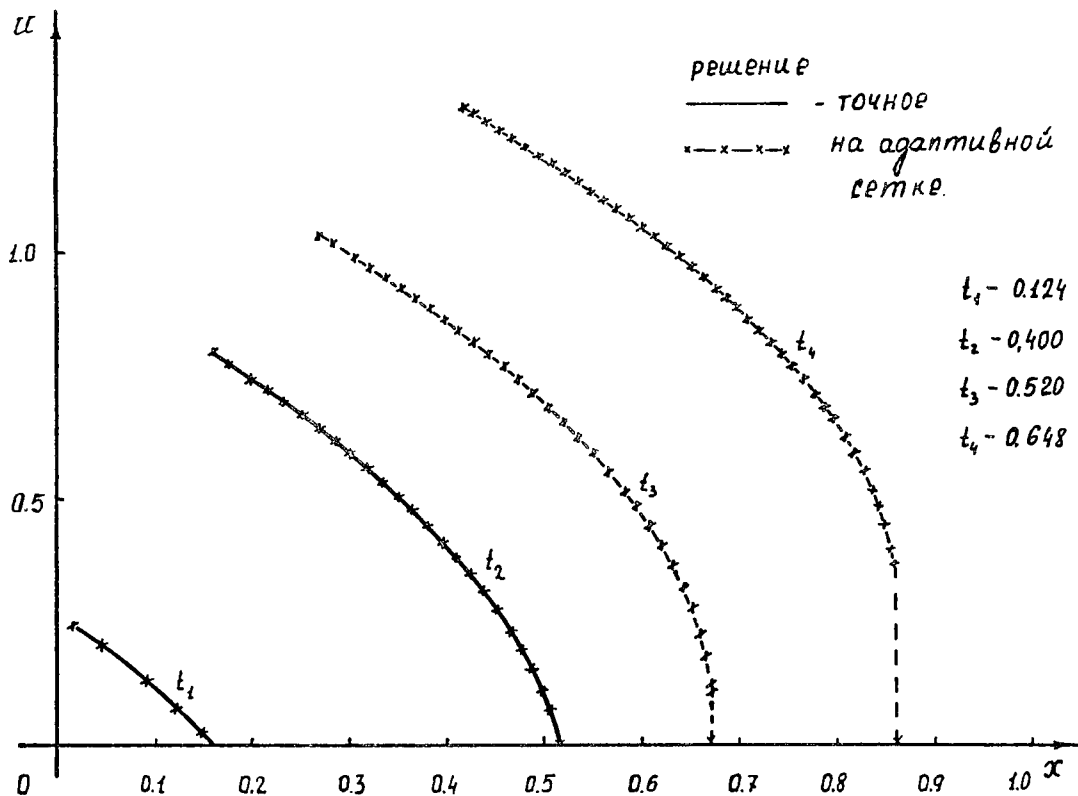
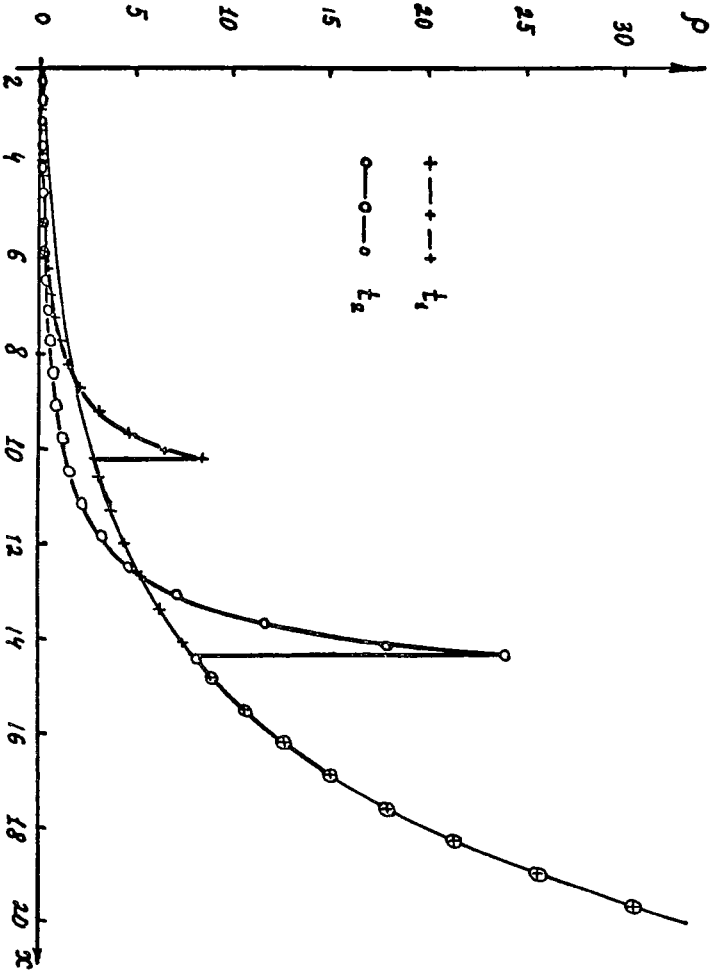


Рис. 10. Схема предиктор-корректор.



Puc. 11.

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Adress: USSR, I25047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.