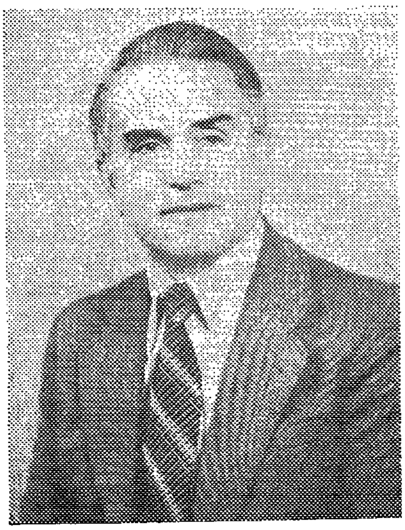
ДЕКАБРЬ 1986 г., ТОМ 22, № 12

АНДРЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ БИЦАДЗЕ

(К 70-летию со дня рождения)



22 мая 1986 г. исполнилось 70 лет выдающемуся советскому ученому, крупнейшему специалисту в области современного математического анализа и теории математических моделей, члену-корреспонденту АН СССР и академику АН Грузинской ССР Андрею Васильевичу Бицадзе.

С именем А. В. Бицадзе связаны первоклассные научные достижения по теории краевых задач для эллиптических уравнений и систем, по теории уравнений смешанного и смешанно-составного типа, по теории гиперболических систем, по теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, по теории нелокальных краевых задач, по теории квазилинейных уравнений и систем в частных производных, моделирующих многие явления, возникающие в естествознании, физике и технике.

Андрей Васильевич Бицадзе родился в селе Цхруквети Чиатурского района Грузинской ССР.

В 1931 г. А. В. Бицадзе окончил Чиатурский педагогический техникум и в течение нескольких лет преподавал математику и физику в неполных средних и средних школах сел Цхруквети, Чала и Нигозети Чиатурского района.

В 1935 г. А. В. Бицадзе поступил на физико-математический факультет Тбилисского государственного университета, который закончил с отличием по специальности «математика» в 1940 г.

В том же году Андрей Васильевич поступил в аспирантуру Тбилисского математического института, после окончания которой начал работать в этом же институте. Одновременно с 1941 по 1947 год А. В. Бицадзе вел педагогическую работу в Тбилисском государственном университете.

В 1948 г. А. В. Бицадзе был зачислен в докторантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. После защиты в 1951 г. докторской диссертации Андрей Васильевич становится старшим научным сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР.

В 1958 г. за выдающийся вклад в науку А. В. Бицадзе был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1969 г. академиком АН Грузинской ССР.

С 1959 по 1971 год Андрей Васильевич работал в Сибирском отделении АН СССР, где он возглавлял отдел теории функций Института математики СО АН СССР и одновременно заведовал кафедрой теории функций в Новосибирском государственном университете.

В июле 1971 г. по решению Президиума АН СССР А. В. Бицадзе был переведен из Новосибирска в Москву на должность заведующего отделом дифференциальных уравнений в частных производных Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Одновременно за активное участие в создании Новосибирского научного центра и многолетнюю плодотворную научную и научно-педагогическую деятельность ему была объявлена благодарность Президиума Сибирского отделения АН СССР.

С июля 1971 г. по настоящее время А. В. Бицадзе возглавляет отдел дифференциальных уравнений в частных производных Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и с сентября 1984 г. он профессор факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Кроме того, Андрей Васильевич в течение ряда лет возглавлял кафедру высшей математики и являлся профессором Московского инженерно-физического института и в 1979—1983 гг. был научным руководителем Института прикладной математики им. И. Н. Векуа (в Тбилиси).

Перейдем к краткой характеристике основных научных достижений А. В. Бицадзе.

Первые научные исследования Андрея Васильевича были посвящены математической теории упругости. Отметим в этом направлении найденное им в квадратурах решение обобщенной задачи Герца о местных деформациях двух плоских упругих тел.

Фундаментальный вклад внесен Андреем Васильевичем в теорию эллиптических уравнений и систем. Им построен интегральный оператор

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[\alpha(z, \bar{z})\varphi(z) + \int_0^z \beta(z, \bar{z}, t)\varphi(t)\,dt\right], \tag{1}$$

который осуществляет взаимно однозначное соответствие между регулярными в односвязной области D плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ решениями $u=(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ эллиптической системы

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \tag{2}$$

коэффициенты которой являются аналитическими квадратными матрицами порядка m, и аналитическими в области D векторами $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_m(z))$.

На основе интегрального представления (1) А. В. Бицадзе редуцировал краевую задачу об отыскании решения $u(x, y)$ системы (2) в ограниченной области D с краевым условием на ее границе ∂D вида

$$p_1\frac{\partial u}{\partial x} + p_2\frac{\partial u}{\partial y} + qu = r \tag{3}$$

в предположении, что ∂D — кривая типа Ляпунова, а квадратные матрицы p_1, p_2 и q и вектор r удовлетворяют условию Гёльдера, к эквивалентной системе одномерных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши. Это позволило А. В. Бицадзе сделать вывод о фредгольмовости задачи Дирихле

$$u(x, y) = r, \quad (x, y) \in \partial D \tag{4}$$

и о нётеровости задачи Пуанкаре

$$p_1\frac{\partial u}{\partial x} + p_2\frac{\partial u}{\partial y} = r, \quad (x, y) \in \partial D \tag{5}$$

в предположении, что $\det(p_1+ip_2) \neq 0$, и установить формулу для индекса $\varkappa$ задачи Пуанкаре (2), (5) $\varkappa = 2(p+m)$, в которой

$$p = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\det(p_1 - ip_2)\right]_{\partial D},$$

а квадратные скобки обозначают приращение стоящего в них выражения при однократном обходе точкой контура ∂D в положительном направлении.

В 1948 г. А. В. Бицадзе опубликовал замечательную работу, в которой было установлено, что в отличие от одного уравнения в случае системы уравнений требование равномерной эллиптичности, вообще говоря, не гарантирует ни фредгольмовости, ни нётеровости задачи Дирихле.

Так, например, однородная задача Дирихле для равномерно эллиптической системы

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}=0,\quad 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 \tag{6}$$

в круге $|z-z_0|<\varepsilon$ имеет бесконечно много линейно независимых решений $u_1+iu_2=[\varepsilon^2-|z-z_0|^2]\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая в круге $|z-z_0|<\varepsilon$ функция комплексного переменного $z=x+iy$.

Для этой же системы (6) в любой области D, граница которой содержит участок действительной оси $\operatorname{Im} z=0$, неоднородная краевая задача Дирихле (4) вообще не разрешима, хотя соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, причем неправильно было бы полагать, что причиной некорректности задачи Дирихле для системы (6) является кратность корней $\lambda=\pm i$ соответствующего этой системе характеристического уравнения $(\lambda^2+1)^2=0$.

Так однородная задача Дирихле в круге $|z-z_0|<\varepsilon$ для равномерно эллиптической системы

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\sqrt{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}=0,\quad \sqrt{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0$$

имеет бесконечное множество решений

$$u_1+iu_2=A_k\{[(\mu\zeta+\bar\zeta)^2-4\mu\varepsilon^2]^k-(\mu\zeta-\bar\zeta)^{2k}\},\quad k=1,2,\ldots,$$

где $\zeta=z-z_0$, $(1+\sqrt{2})\mu=i$, A_k — произвольные комплексные постоянные, хотя корни характеристического уравнения $\lambda^4+1=0$ этой системы все простые.

Андреем Васильевичем была рассмотрена также эллиптическая система с постоянными коэффициентами

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{7}$$

для которой было найдено общее комплексное представление регулярных в односвязной области решений. С помощью указанного представления было введено условие слабой связности системы (7), выполнение которого обеспечивает фредгольмовость задачи Дирихле (4) и нётеровость задачи Пуанкаре (5), а также условие нормальной разрешимости общей краевой задачи (3) по Хаусдорфу.

А. В. Бицадзе принадлежат выдающиеся результаты по теории уравнений смешанного и составного типов. В теории уравнений смешанного типа

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+ \\ +f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

обычно предполагалось, что ни в одной точке линии δ изменения типа, определяемой равенством $b^2-ac=0$, коэффициенты a, b и c одновременно в нуль не обращаются, т. е. порядок этого уравнения всюду равен двум.

В работах Андрея Васильевича впервые было установлено, что наличие вдоль кривой δ вырождения порядка и смены типа при переходе через δ вносит в теорию совершенно новый аспект.

А. В. Бицадзе досконально разработал теорию модельного уравнения

$$y^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{8}$$

в котором m — фиксированное натуральное число, а α — постоянная, изменяющаяся в пределах $\frac{1}{2}-m\leqslant\alpha<1$. При $\alpha=0$, $m=1$ уравнение (11) переходит в известное уравнение Трикоми, а при $\alpha=\frac{1}{2}-m$ уравнение (11) неособой заменой переменных

$$\xi=x,\ \ \eta=\frac{2}{2m+1}\,|y|^{\frac{2m+1}{2}}\operatorname{sgn} y,\ \ y\neq 0,$$

переводится в модельное уравнение смешанного типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\operatorname{sgn}\eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0,$$

которое теперь принято называть уравнением Лаврентьева — Бицадзе и которое было подробно исследовано в цикле работ Андрея Васильевича.

А. В. Бицадзе рассмотрел уравнение смешанного типа (8) в плоской области D, ограниченной гладкой кривой Жордана σ, лежащей в верхней полуплоскости $y\geqslant 0$ и имеющей концы в точках $(0,\ 0)$ и $(0,\ 1)$, и двумя характеристиками уравнения (8)

$$x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}=0\ \text{ и }\ x+\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}=1,\ \ 0<x<1,$$

обозначаемыми соответственно через σ_1 и σ_2.

А. В. Бицадзе доказал, что регулярное в области D решение уравнения (8), обращающееся в нуль на одной из характеристик σ_1 или σ_2, достигает своего экстремума на границе σ области D.

С помощью принципа экстремума А. В. Бицадзе были доказаны существование, единственность и устойчивость регулярного в области D решения $u(x,\ y)$ уравнения (8), удовлетворяющего условиям

$$\begin{cases} u(x,\ y)=\varphi(x,\ y)\ \text{на}\ \sigma, \quad u(x,\ y)=\psi(x,\ y)\ \text{на}\ \sigma_1,\\ \lim\limits_{y\to 0}\left[y^{\alpha}\,\dfrac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}\right]=\lim\limits_{y\to -0}\left[(-y)^{\alpha}\,\dfrac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}\right]\ \text{при}\ 0<x<1. \end{cases} \tag{9}$$

Андрей Васильевич доказал теорему существования и единственности регулярного в области D решения уравнения (8) и в гораздо более трудном случае, когда во втором условии (9) носителем данных является не характеристика σ_1, а некоторая выходящая из точки $(0,\ 0)$ монотонная кривая, лежащая в нижней полуплоскости $y<0$ правее σ_1 и взятая до пересечения с характеристикой σ_2.

Принципиальное значение имеет обнаруженная А. В. Бицадзе некорректность постановки задачи Дирихле в областях, где рассматриваемое уравнение является уравнением смешанного типа.

Андреем Васильевичем были найдены первые корректные постановки краевых задач при наличии замкнутых линий изменения типа в двумерных областях, а также для модельных уравнений смешанного типа в многомерных областях.

Андрею Васильевичу принадлежат также глубокие и оригинальные результаты по теории гиперболических уравнений и систем. Он впервые обнаружил, что наличие у гиперболического уравнения параболического вырождения вызывает некорректность в постановке классических задач. Кроме того, им было установлено, что даже такая классическая задача, как характеристическая задача Гурса, оказывается, вообще говоря, некорректно поставленной при переходе от одного гиперболического уравнения второго порядка к гиперболической системе второго порядка (даже при отсутствии у нее параболического вырождения!). Андрей Васильевич доказал, что для таких систем на правильную постановку характеристической задачи оказывают влияние коэффициенты при младших производных искомого решения.

Большой вклад внес А. В. Бицадзе в теорию многомерных сингулярных интегральных уравнений. Эта теория в его работах увязана с фундаментальными вопросами теории уравнений в частных производных (с многомерной задачей с наклонной производной, с линеаризованной задачей Навье — Стокса и с другими задачами).

В 1969 г. была опубликована открывшая новое научное направление совместная работа А. В. Бицадзе и А. А. Самарского, посвященная эллиптическим уравнениям с нелокальными краевыми условиями. Этой тематике был посвящен ряд последующих работ самого Андрея Васильевича и многочисленные работы других известных математиков. Задачи с нелокальными краевыми условиями оказались очень интересными как с чисто математической точки зрения, так и с точки зрения разработки теории математических моделей ряда актуальных прикладных задач.

В математическую литературу прочно вошел термин «нелокальные условия типа Бицадзе — Самарского».

Остановимся на большом цикле работ Андрея Васильевича, посвященных теории квазилинейных уравнений и систем в частных производных. Хорошо известно, что многие явления, изучаемые в естествознании, физике и технике, моделируются в терминах решений систем уравнений вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{l,s=1}^{m} b_k^{sl}(u_1, u_2, \ldots, u_m)\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right] = 0, \quad (10)$$

$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

А. В. Бицадзе установил, что если совокупность функций $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, ..., $\varphi_m(v)$ является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_k'' - \sum_{l,s=1}^{m} b_k^{ls}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)\varphi_l'\varphi_s' = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad (11)$$

то соотношения $u_k = \varphi_k(v)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, в которых $v(x) = v(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ — общее решение линейного уравнения в частных производных

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (12)$$

дают класс точных решений системы (10).

В частности, когда $m = 1$ и (10) представляет собой одно уравнение, вместо (11) получится одно обыкновенное дифференциальное уравнение $\varphi'' - b(\varphi)(\varphi')^2 = 0$, общее решение $\varphi = \varphi(v)$ которого задается в неявной записи равенством

$$v = \alpha \int_0^u \exp\left(-\int_0^\tau b(t)\,dt\right) d\tau + \beta, \quad (13)$$

в котором α и β — произвольные постоянные. В этом случае соотношение

$$u = \varphi(v) \tag{14}$$

дает общее представление решений рассматриваемого квазилинейного уравнения, т. е. если $v(x)$ — общее решение уравнения (12), то соотношение (14) дает все решения квазилинейного уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - b(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] = 0. \tag{15}$$

Стало быть, влияние характера нелинейности уравнения (15) на структурные и качественные свойства его решений полностью описывается соотношением (13), устанавливающим связь между $u(x)$ и $v(x)$. Таким образом, А. В. Бицадзе установил, что те или иные задачи (краевые, начальные, начально-краевые и т. д.— в зависимости от типа уравнения), поставленные для квазилинейного уравнения (15), порождают соответствующие задачи для уравнения (12), причем корректность постановки задачи для исходного квазилинейного уравнения (15) зависит от корректности задачи, полученной для уравнения (12), и от возможности обращения равенства (13) относительно $u(x)$. При этом наличие или отсутствие бифуркации решений уравнения (15) существенно зависит от структуры римановой поверхности, определяемой функциональной зависимостью (13) между $u(x)$ и $v(x)$.

Частными случаями системы вида (10) являются уравнения Максвелла — Эйнштейна, уравнения ферромагнетизма, уравнения калибровочных полей и другие. Разработанный А. В. Бицадзе метод позволил ему построить новые классы точных решений этих уравнений.

Большой интерес представляют и работы Андрея Васильевича, опубликованные в текущем 1986 г. и посвященные установлению связи между решениями задач Дирихле и Неймана для гармонических функций в областях специального вида, а также исследованию интегральных уравнений Фредгольма первого рода со слабыми сингулярностями (с ядрами Неймана).

Заканчивая краткий обзор многогранной и яркой научной деятельности Андрея Васильевича Бицадзе, отметим, что он является талантливым педагогом, создавшим большую научную школу. Среди его учеников 13 докторов и свыше 30 кандидатов физико-математических наук. Им написаны заслужившие всеобщее признание учебники «Уравнения математической физики» и «Основы теории аналитических функций».

Научная, педагогическая, научно-организаторская и общественная деятельность А. В. Бицадзе проникнуты духом партийной принципиальности и высокой гражданской ответственности.

Заслуги Андрея Васильевича высоко оценены: он награжден орденом Ленина, орденом Октябрьской революции, двумя орденами Трудового Красного Знамени, является лауреатом премии им. акад. Н. И. Мусхелишвили, заслуженным деятелем науки Грузинской ССР, почетным гражданином города Чиатура.

Пожелаем дорогому юбиляру новых выдающихся научных свершений, доброго здоровья и счастья.

А. А. ДОРОДНИЦЫН, Н. П. ЕРУГИН, В. А. ИЛЬИН, А. А. САМАРСКИЙ, А. Н. ТИХОНОВ

Список научных трудов А. В. Бицадзе

1. Касательная производная потенциала простого слоя, 1941 (включена в § 13 монографии Н. И. Мусхелишвили «Сингулярные интегральные уравнения»). М., 1946.
2. О местных деформациях при сжатии упругих тел // Сообщ. АН ГССР. 1942. Т. 3, № 5.

3. Об общем представлении решений эллиптических дифференциальных уравнений // Сообщ. АН ГССР. 1943. Т. 4, № 7.
4. Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Сообщ. АН ГССР. 1944. Т. 5, № 8.
5. Общее представление решений эллиптических систем дифференциальных уравнений и некоторые их приложения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тбил. мат. ин-т АН ГССР. 1944.
6. О некоторых применениях общего представления решений эллиптических дифференциальных уравнений // Сообщ. АН ГССР. 1946. Т. 7, № 6.
7. Задачи колебания равномерно сжатой тонкой упругой пластинки // Тр. Тбил. гос. ун-та. 1947. Т. 30а.
8. Общие представления решений системы дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа (включена в § 28, 29, 30 монографии И. Н. Векуа «Новые методы решения эллиптических уравнений»). М.; Л., 1948.
9. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, вып. 6 (28).
10. О так называемых площадно-моногенных функциях // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59, № 8.
11. Об одной системе функций // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, вып. 4 (38).
12. О единственности решения общей граничной задачи для уравнений смешанного типа // Сообщ. АН ГССР. 1950. Т. 11, № 4.
13. К проблеме уравнений смешанного типа (соавтор М. А. Лаврентьев) // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 3.
14. О некоторых задачах смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 4.
15. К общей задаче смешанного типа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78, № 4.
16. К проблеме уравнений смешанного типа: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М., 1950.
17. К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1953. Т. 61.
18. Об одном уравнении смешанного типа // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, вып. 1 (59).
19. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1953. Т. 17, № 6.
20. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения // Докл. АН СССР. 1954. Т. 93, № 3.
21. Обращение одной системы сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1954. Т. 93, № 4.
22. О двумерных интегралах типа Коши // Сообщ. АН ГССР. 1955. Т. 16, № 3.
23. Уравнения смешанного типа (на кит. яз.). Пекин, 1955.
24. Об одной задаче Франкля // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 6.
25. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110, № 6.
26. Линейные уравнения с частными производными смешанного типа // Тр. III Всесоюз. мат. съезда. 1956. Т. 3.
27. О единственности решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112, № 3.
28. Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112, № 6.
29. Об одном элементарном способе решения некоторых граничных задач теории голоморфных функций и связанных с ними особых интегральных уравнений // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5 (77).
30. Монография о математике (рецензия) // Природа. 1957. № 10.
31. Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus. Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1957.
32. Некоторые линейные задачи для линейных дифференциальных уравнений с частными производными (на кит. яз.). Пекин, 1958.
33. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // Докл. АН СССР. 1958. Т. 122, № 2.
34. Уравнения смешанного типа / Итоги науки. 1959, № 2.
35. К теории уравнений смешанно-составного типа (соавтор М. С. Салахитдинов) // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 1.
36. Об уравнениях смешанно-составного типа. Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, 1961.
37. К теории гармонических функций // Тр. Тбил. гос. ун-та. 1961. Т. 84.
38. Математическая жизнь в СССР. Михаил Алексеевич Лаврентьев (соавторы А. И. Маркушевич и Б. В. Шабат) // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, вып. 4 (100).
39. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 5.
40. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5.
41. Об однородной задаче наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 4.
42. К задаче наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях / Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1963.

43. Об одном частном случае задачи наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1964. Т. 155, № 4.
44. Задача наклонной производной с полиномиальными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 6.
45. Об одном классе многомерных сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159, № 5.
46. Equations of the mixed type. Pergamon Press Oxford. London; New York; Paris, 1964.
47. Нормально разрешимые эллиптические краевые задачи // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 6.
48. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., 1966.
49. Об одном критерии сходимости градиентов последовательности гармонических функций // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, № 4.
50. К лемме Шварца // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1967. Т. 33.
51. Лекции по теории аналитических функций комплексного переменного. Новосибирский гос. ун-т, 1967.
52. Илья Несторович Векуа. Тбилиси, 1967.
53. Boundary Value problems for second order eliptic equations. North Holland. Amsterdam, 1968.
54. Сергей Львович Соболев (соавторы М. А. Лаврентьев и Л. В. Канторович) // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, вып. 5 (143).
55. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач (соавтор А. А. Самарский) // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4.
56. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., 1969.
57. К теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1.
58. К теории нефредгольмовых краевых задач. Дифференциальные уравнения с частными производными // Тр. симпозиума, посвященного С. Л. Соболеву. М., 1970.
59. К теории одного класса уравнений смешанного типа. Некоторые проблемы математики и механики. Л., 1970.
60. Zur Theorie der Gleichungen vom gemischten Typus, elliptische Differentialgleichungen. Academie-Verlag. Berlin, 1971. Bd II.
61. Surlathéorie der problemes aux limites elliptiques nonfredholmiens. Actes du Congress International des Mathematiciens, 1970, Nice. Gauthier-Vilars. Paris, 1971.
62. К теории квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1971. Т. 112.
63. Об одном классе уравнений смешанного типа // Beiträge Anal., 1972. Heft 4.
64. К теории нефредгольмовых эллиптических краевых задач // Тр. Междунар. мат. конгресса в Ницце. М., 1972.
65. Основы теории аналитических функций комплексного переменного (2-е доп. изд.). М., 1972.
66. Лекции по уравнениям математической физики. Моск. инж.-физ. ин-т, 1972.
67. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменений типа. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. (К 80-летию Н. И. Мусхелишвили). М., 1972.
68. Об одной системе линейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5.
69. К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях (соавтор А. М. Нахушев) // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 6.
70. О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях (соавтор А. М. Нахушев) // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, № 1.
71. Дифференциальные уравнения в частных производных / Мат. энцикл., 1973.
72. Краевые задачи / БСЭ (3-е изд.). 1973. Т. 13.
73. Grundlagen der Theorie analitischer Functionen. Academie-Verlag. Berlin, 1973.
74. К теории уравнений Максвелла—Эйнштейна (соавтор В. И. Пашковский) // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216, № 2.
75. On an application of function-theoretical methods in the linearized Navier—Stokes boundary Value problem. Annals Akad. Sc. Fennicae. Series A. Mathematica. 1974. N 571.
76. Пропедевтический курс математического анализа. Моск. инж.-физ. ин-т, 1974.
77. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях (соавтор А. М. Нахушев) // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 10, № 12.
78. О некоторых классах решений уравнения Максвелла—Эйнштейна (соавтор В. И. Пашковский) // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1975. Т. 134.
79. Об одном уравнении гравитационного поля // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222, № 4.
80. К вопросу о постановке характеристической задачи для гиперболических систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 6.
81. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 1.
82. К применению методов теории функции в линеаризованной задаче Навье—Стокса, 5 Tagung Uber Problem und Method der Math. Physik. 1975.
83. Примерный набор упражнений по курсу уравнений математической физики. Моск. инж.-физ. ин-т, 1975.
84. Уравнения математической физики. М., 1976.

85. О современном состоянии теории уравнений смешанного типа. Beiträge Zur Analysis. 1976. Bd. 8.
86. К теории систем уравнений с частными производными // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1976. Т. 142.
87. On a class of the nonlinear partial differential equations. // Тр. симпозиума по применению функционально-теоретических методов в теории уравнений в частных производных. Дармштадт, 1976.
88. Об одном классе квазилинейных уравнений в частных производных. Проблемы математической физики и вычислительной математики. М., 1977.
89. Сборник задач по уравнениям математической физики (соавтор Д. Ф. Калиниченко). М., 1977.
90. О некоторых классах точных решений уравнений гравитационного поля // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, № 4.
91. Über einige klassen exakter Lösungen des Systems der Maxwell—Einsteinsche Gleichungen. Festakt 200 wiederkher des Geburtstages von Carl Friedrich Gauss. Berlin, 1977.
92. К задачам Дирихле и Неймана для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 2.
93. К задаче Трикоми для нелинейных уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 4.
94. К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 11.
95. Об одной краевой задаче для уравнения Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 6.
96. Волны в потоке жидкости переменной плотности // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 6.
97. Об одной системе нелинейных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7.
98. О точных решениях одного варианта уравнений гравитационного поля // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 2.
99. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1980.
100. Equations of mathematical Physicks. M., 1980.
101. A collection of Problems on the equations of mathematical Physicks. M., 1980.
102. О точных решениях одного класса систем квазилинейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 4.
103. Точные решения некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 10.
104. Точные решения некоторых вариантов уравнений гравитационного поля // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1981. Т. 157.
105. Об одном нелинейном уравнении параболического типа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 6.
106. К задаче Коши для одного класса нелинейных уравнений в частных производных первого порядка // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 1.
107. Уравнения математической физики (2-е перераб. изд.). М., 1982.
108. Новый класс точных решений уравнений Янга SU (2) калибровочных полей // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 4.
109. К теории автодуальных SU (3) калибровочных полей // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1.
110. К теории нелокальных краевых задач // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 1.
111. Równania fizyki matematycznej (на польск. яз.). Варшава, 1984.
112. Об одном классе точных решений Лоренц-ковариантных уравнений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 3.
113. Некоторые проблемы динамики Грузинского побережья Черного моря (соавторы Р. И. Саджая, Ш. Х. Топурия). // Сообщ. АН ГССР. 1984. Т. 113, № 1.
114. Основы теории аналитических функций: Учебник (2-е доп. изд.). М., 1984.
115. К построению точных решений некоторых классов нелинейных уравнений, описывающих нестационарные процессы / Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики. М., 1984.
116. Об одном классе условно разрешимых нелокальных задач для гармонических функций // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 3.
117. Сборник задач по уравнениям математической физики (соавтор Д. Ф. Калиниченко). 2-е доп. изд. М., 1985.
118. К задаче Коши для гармонических функций // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1.
119. О некоторых интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 6.
120. Сингулярные интегральные уравнения первого рода с ядрами Неймана // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5.