УДК 519.632

Однородные разностные схемы для одномерных задач с обобщенными решениями

Годев К. Н., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А.

§ 0. Введение

Настоящая работа посвящена построению и исследованию однородных разностных схем для одномерных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными решениями из класса W_2^1. Главное внимание уделяется построению точной трехточечной разностной схемы и исследованию точности усеченных схем m-го ранга.

Точные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-гладкими коэффициентами впервые были предложены А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским [1]—[3]. Ими же был предложен алгоритм приближенной реализации точных схем — усеченные схемы m-го ранга. Эти схемы имеют максимальный порядок точности — $O(h^{2(m+1)})$, так что за счет выбора достаточно большого m можно получить трехточечные схемы любого порядка.

В дальнейшем эти результаты были распространены на системы ОДУ второго порядка [4], уравнения четвертого порядка [5], задачи с вырождением и задачи Штурма—Лиувилля [6], [7], [8] и др. В этих работах исследовались существование и единственность точных схем, их приводимость к дивергентному виду и точность усеченных разностных схем для задач с кусочно-гладкими коэффициентами.

В данной работе мы рассматриваем уравнения второго порядка с обобщенными решениями из класса W_2^1. Коэффициенты уравнения являются производными (в смысле обобщенных функций) от функций из класса W_p^λ, $0<\lambda\leqslant 1$, $2\leqslant p\leqslant\infty$. В частности, здесь включаются случаи, когда коэффициенты — δ-функции ($p\lambda<1$) и кусочно-непрерывные ($p=\infty$, $\lambda=1$). Полученные нами усеченные схемы m-го ранга имеют точность $O(h^{2(m+1)-n})$, причем потеря порядка сходимости n зависит от гладкости коэффициентов. По мере увеличения этой гладкости повышается и скорость сходимости усеченных схем. В частности, когда коэффициенты кусочно-гладкие, полученные нами результаты совпадают с результатами из [1]—[3].

Отметим, что схемы нулевого ранга (случай $m=0$) совпадают с вариационно-разностными схемами, построенными с помощью базисных функций, которые на отдельных подынтервалах являются решениями уравнения $(k(x)u')'=0$. Эти функции известны в литературе как L-сплайны [9]. На этом пути близкие к нашим результаты для схем нулевого ранга получены в работе [10], где рассматривались задачи с обобщенными решениями из класса W_2^1.

Точные трехточечные разностные схемы для обыкновенного дифференциального уравнения $2m$-го порядка с участием, кроме значений решения в узлах сетки, и его производные в узлах до m-го порядка построены в [11].

§ 1. Точные и усеченные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

1. Постановка задачи. В работе dx, $d\xi$ и т. д. обозначают лебегову меру в $\mathbf{R}^1$ и все интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^\lambda(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $0<\lambda\leqslant 1$, если она имеет конечную норму

$$|u|_{W_p^\lambda(\Omega)}\equiv|u|_{\lambda,p,\Omega}=\begin{cases}\left(\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{1+\lambda p}}dxdy\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \sup\limits_{y,x\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda}, & p=\infty.\end{cases}$$

Если Ω — конечный интервал в $\mathbf{R}^1$, то $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть подмножество $W_2^1(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на концах интервала Ω.

Рассмотрим краевую задачу

$$L^{(k,q)}u\equiv\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u(x)=-f(x),\quad x\in(0,1)\equiv\Omega, \tag{1}$$

$$u(0)=0,\quad u(1)=0, \tag{2}$$

предполагая, что коэффициенты дифференциального уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям:

$$0<M_1\leqslant k(x)\leqslant M_2<\infty,\quad k(x)\text{ — измеримая функция}, \tag{3}$$

$$q(x)=Q'(x),\quad Q(x)\in W_p^\lambda(\Omega),\quad p\geqslant 2,\quad 0<\lambda\leqslant 1, \tag{4}$$

причем $-\int\limits_0^1 Q(x)v'(x)dx\geqslant 0,\quad \forall v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ v(x)\geqslant 0,$

$$f(x)=f_1'(x),\quad f_1(x)\in W_r^\theta(\Omega),\quad r\geqslant 2,\quad 0<\theta\leqslant 1. \tag{5}$$

Отметим, что представления q и f в виде (4), (5) и уравнение (1) понимаются в смысле равенства обобщенных функций.

Применяя лемму Лакса—Мильграма [13], нетрудно показать, что при предположениях (3)—(5) существует единственное из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ обобщенное решение задачи (1), (2), т. е. такая функция $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^1[k(\xi)u'(\xi)\eta'(\xi)-Q(\xi)(u(\xi)\eta(\xi))']d\xi=-\int\limits_0^1 f_1(\xi)\eta'(\xi)d\xi \tag{6}$$

для любой функции $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

2. Построение точной разностной схемы. Построим точную трехточечную разностную схему для задачи (1), (2) и покажем, что она единственна. Изложение проводим для случая равномерной сетки.

В интервале (0, 1) введем равномерную сетку

$$\omega=\{x_i=ih,\ i=1,\ldots,N-1,\ h=1/N\},\quad x_0=0,\ x_N=1 \tag{7}$$

и построим некоторую разностную схему для задачи (1), (2):

$$y(x_i)=A_iy(x_{i+1})+B_iy(x_{i-1})+F_i,\quad i=1,\ldots,N-1,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0, \tag{8}$$

где A_i, B_i и F_i — некоторые функционалы от коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ исходного дифференциального уравнения.

Трехточечную разностную схему вида (8) назовем точной для задачи (6), если выполняются условия:

а) $A_i=A_i(k, q)$, $B_i=B_i(k, q)$, $F_i=F(k, q, f)$ являются функционалами от функций k, q и f на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, причем F_i — линейный функционал от f;

б) $y(x)=u(x)$, $x\in\omega$, $u(x)$ — точное решение задачи (1), (2), а $y(x)$ — решение задачи (8).

Естественно возникает вопрос о существовании точной трехточечной схемы для задачи (6). Отметим, что этот вопрос имеет утвердительный ответ, если коэффициенты уравнения (1) кусочно-гладкие (см. [1], [3]). Для случая коэффициентов, удовлетворяющих условиям (3)—(5), ответ дает следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (3)—(5). *Тогда для задачи* (1), (2) *существует хотя бы одна точная трехточечная разностная схема.*

Доказательство. Точная схема строится подобно случаю кусочно-гладких коэффициентов при помощи функции Грина.

Рассмотрим вопрос об отыскании в каждом интервале (x_{i-1}, x_{i+1}), $i=1, \ldots, N-1$, функции $G_i(x, \xi)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(x_{i-1}, x_{i+1})$, которая является решением следующего интегрального тождества:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{k(\xi)\frac{\partial G_i'(x, \xi)}{\partial\xi}\eta'(\xi) - Q(\xi)\frac{\partial[G_i(x, \xi)\eta(\xi)]}{\partial\xi}\right\} d\xi = \eta(x),$$

$$\forall\eta(\xi)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(x_{i-1}, x_{i+1}), \tag{9}$$

где $x\in(x_{i-1}, x_{i+1})$. Согласно лемме Лакса—Мильграма $\forall x\in(x_{i-1}, x_{i+1})$ эта задача имеет единственное решение, которое будем называть функцией Грина.

Введем функцию

$$\eta(\xi)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\xi\leqslant x_{i-1},\\ G_i(x, \xi), & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant x_{i+1},\\ 0, & x_{i+1}\leqslant\xi\leqslant 1.\end{cases}$$

Очевидно, что $\eta(\xi)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$; используя ее в качестве пробной функции в интегральном тождестве (6), получим следующее соотношение, которому удовлетворяет решение $u(x)$:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [k(\xi)u'(\xi)G_i'(x, \xi) - Q(\xi)[u(\xi)G_i(x, \xi)]']\,d\xi =$$

$$= -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G_i'(x, \xi)f_1(\xi)\,d\xi \tag{10}$$

(штрих означает дифференцирование по ξ). При помощи решения $u(\xi)$ построим следующую функцию, которая принадлежит классу $\overset{\circ}{W}{}_2^1(x_{i-1}, x_{i+1})$:

$$\tilde{u}(\xi)=u(\xi)-\frac{\xi-x_{i-1}}{2h}u_{i+1}-\frac{x_{i+1}-\xi}{2h}u_{i-1}, \quad u_{i\pm1}=u(x_i\pm h).$$

Поскольку функция $G_i(x, \xi)$ является решением задачи (9), то, полагая в этом тождестве $\eta(\xi)=\tilde{u}(\xi)$, получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [k(\xi) G_i'(x, \xi) u'(\xi) - Q(\xi) [u(\xi) G_i(x, \xi)]'] d\xi -$$

$$- \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ k(\xi) G_i'(x, \xi) \frac{u_{i+1}-u_i}{2h} - Q(\xi) \left[\left(\frac{\xi - x_{i-1}}{2h} u_{i+1} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{x_{i+1}-\xi}{2h} u_{i-1} \right) G_i(x, \xi) \right]' \right\} d\xi = \tilde{u}(x), \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_{i+1}. \tag{11}$$

В этом соотношении положим $x=x_i$ и учтем, что $u(x)$ удовлетворяет равенству (10), а $\tilde{u}(x_i)=u_i-\frac{1}{2}(u_{i+1}-u_{i-1})$. Получим следующее соотношение:

$$- \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G_i'(x_i, \xi) f_1(\xi) d\xi - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k(\xi) G_i'(x_i, \xi) \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} d\xi +$$

$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Q(\xi) \left[\left(\frac{\xi - x_{i-1}}{2h} u_{i+1} + \frac{x_{i+1}-\xi}{2h} u_{i-1} \right) G_i(x_i, \xi) \right]' d\xi =$$

$$= u_i - \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_{i-1}),$$

которое можно записать в виде (8), причем

$$A_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [k(\xi) G_i'(x_i, \xi) - Q(\xi) [(\xi - x_{i-1}) G_i(x_i, \xi)]'] d\xi,$$

$$B_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [k(\xi) G_i'(x_i, \xi) + Q(\xi) [(x_{i+1} - \xi) G_i(x_i, \xi)]'] d\xi, \tag{12}$$

$$F_i = - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G_i'(x_i, \xi) f_1(\xi) d\xi.$$

Таким образом мы установили, что для $i=1, \ldots, N-1$ решение задачи (1), (2) удовлетворяет соотношениям (8), (12). Очевидно, функция Грина $G_i(x, \xi)$ зависит от значений коэффициентов k и q на интервале $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, а F_i зависит линейно от правой части f_1 дифференциального уравнения (1). Согласно данному определению, схема (8), (12) есть искомая точная трехточечная разностная схема для задачи (1), (2). Лемма 1 доказана.

3. Шаблонные функции и их свойства. Для доказательства единственности точной трехточечной разностной схемы и для ее приведения к дивергентному виду, а также для построения усеченных разностных схем, которые являются алгоритмической реализацией точных схем, введем шаблонные функции и получим их свойства.

Как видно из представления (12), коэффициенты точной схемы (8) выражаются через функцию Грина для оператора $L^{(k,q)}$ на интервалах (x_{i-1}, x_{i+1}), $i=1, \ldots, N-1$. Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функцию Грина можно выразить через линейно независимые решения однородного уравнения $L^{(k,q)}u=0$.

Определим шаблонные функции $v_1^i(x)$ и $v_2^i(x)$ как обобщенные из класса $W_2^1(x_{i-1}, x_{i+1})$ решения следующих задач Коши:

$$L^{(k,q)}v_k^i(x) \equiv \frac{d}{dx}\left(k\frac{dv_k^i}{dx}\right) - qv_k^i = 0, \quad x_{i-1} < x < x_{i+1},$$

$$v_1^i(x_{i-1}) = 0, \quad k(x_{i-1})(v_1^i)'(x_{i-1}) = 1, \tag{13}$$

$$v_2^i(x_{i+1}) = 0, \quad k(x_{i+1})(v_2^i)'(x_{i+1}) = -1. \tag{14}$$

Это означает, что $v_k^i(x) \in W_2^1(x_{i-1}, x_{i+1})$, $k=1$, 2 и для любых функций $\eta \in W_2^1(x_{i-1}, x_{i+1})$ удовлетворяют следующим интегральным тождествам:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [k(v_1^i)'\eta' - Q(v_1^i\eta)']\,d\xi + \eta(x_{i-1}) = 0, \quad v_1^i(x_{i-1}) = 0, \ \eta(x_{i+1}) = 0, \tag{15}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [k(v_2^i)'\eta' - Q(v_2^i\eta)']\,d\xi + \eta(x_{i+1}) = 0, \ v_2^i(x_{i+1}) = 0, \ \eta(x_{i-1}) = 0. \tag{16}$$

Покажем, что обобщенные из класса W_2^1 решения задач (15), (16) существуют и единственны. Сделаем это на примере задачи (15), показав, что она эквивалентна некоторому интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Действительно, беря в (15) в качестве пробной функции $\eta(\xi)$ следующую функцию:

$$\eta(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\xi}^{x} \frac{dx}{k(t)}, & x_{i-1} \leqslant \xi \leqslant x, \\ 0, & x \leqslant \xi \leqslant x_{i+1}, \end{cases}$$

где $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ фиксировано, получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x} \left[-(v_1^i(\xi))' - Q(\xi)(v_1^i(\xi))' \int_{\xi}^{x} \frac{dt}{k(t)} + Q(\xi)v_1^i(\xi)\frac{1}{k(\xi)}\right] d\xi + \int_{x_{i-1}}^{x} \frac{d\xi}{k(\xi)} = 0. \tag{17}$$

Левую часть преобразуем при помощи представления

$$\frac{Q(\xi)}{k(\xi)} = -\frac{d}{d\xi}\int_{\xi}^{x} \frac{Q(t)}{k(t)}\,dt$$

и формулы интегрирования по частям

$$\int_{x_{i-1}}^{x} \left\{-(v_1^i(\xi))' - Q(\xi)(v_1^i(\xi))' \int_{\xi}^{x} \frac{dt}{k(t)} - v_1^i(\xi)\frac{d}{d\xi}\int_{\xi}^{x} \frac{Q(t)}{k(t)}\,dt\right\} d\xi =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x} \left\{-(v_1^i(\xi))' - (v_1^i(\xi))' \int_{\xi}^{x} \frac{Q(\xi)}{k(t)}\,dt + (v_1^i(\xi))' \int_{\xi}^{x} \frac{Q(t)}{k(t)}\,dt\right\} d\xi =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x} \left\{-(v_1^i(\xi))' - (v_1^i(\xi))' \int_{\xi}^{x} \frac{Q(\xi) - Q(t)}{k(t)}\,dt\right\} d\xi =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x} \left\{-(v_1^i(t))' - \frac{1}{k(t)}\int_{x_{i-1}}^{t} [Q(\xi) - Q(t)](v_1^i(\xi))'\,d\xi\right\} dt.$$

Во втором члене последнего равенства переставим порядок интегрирования по ξ и t. Подставляя это тождество в (17), получим, что функция v_1^i удовлетворяет следующему интегродифференциальному уравнению:

$$v_1^i(x) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \frac{1}{k(t)} \int\limits_{x_{i-1}}^{t} [Q(\xi) - Q(t)] (v_1^i(\xi))' \, d\xi dt - \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \frac{dt}{k(t)} = 0. \quad (17_1)$$

Аналогичными рассуждениями получается, что v_2^i удовлетворяет уравнению

$$v_2^i(x) + \int\limits_{x}^{x_{i+1}} \frac{1}{k(t)} \int\limits_{x}^{x_{i+1}} [Q(\xi) - Q(t)] (v_2^i(\xi))' \, d\xi dt - \int\limits_{x}^{x_{i+1}} \frac{dt}{k(t)} = 0. \quad (17_2)$$

Дифференцируя интегродифференциальное уравнение для v_1^i по x, получим

$$-(v_1^i(x))' - \frac{1}{k(x)} \int\limits_{x_{i-1}}^{x} [Q(\xi) - Q(x)] (v_1^i(\xi))' \, d\xi + \frac{1}{k(x)} = 0. \quad (18)$$

Таким образом показали, что всякое решение интегрального тождества (15) является решением интегрального уравнения (18). Докажем обратное утверждение. Путь $v_1^{(i)}(\xi)$ является каким-либо решением уравнения (18) из класса $W_2^1(x_{i-1}, x_{i+1})$. Умножим обе части (18) на произвольную функцию $\eta(x) \in W_2^1(x_{i-1}, x_{i+1})$, где $\eta(x_{i+1}) = 0$, тогда после несложных преобразований придем к (15). Эквивалентность (15) и (18) установлена. Соотношение (18), которое понимается в смысле равенства функций из L_2, запишем в виде интегрального уравнения относительно функции $w(x) = k(x)(v_1^i(x))'$

$$w(x) = 1 + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} K(x, \xi) w(\xi) \, d\xi, \quad (19_1)$$

где $K(x, \xi) = \frac{1}{k(\xi)} [Q(x) - Q(\xi)]$.

Если учесть, что $|Q(x) - Q(\xi)|^2 \leqslant 2|Q(x)|^2 + 2|Q(\xi)|^2$ и тот факт, что $Q \in L_2(0, 1)$ и $k(x) \geqslant M_1 > 0$, то для ядра $K(x, \xi)$ получим оценку

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |K(x, \xi)|^2 \, dx d\xi = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{|Q(x) - Q(\xi)|^2}{|k(\xi)|^2} \, dx d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{M_1^2} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |Q(x)|^2 \, dx d\xi \leqslant \frac{8h}{M_1^2} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |Q(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Отсюда в силу общей теории интегральных уравнений второго рода типа Вольтерра следует, что существует единственное решение $w(x) \in L_2(x_{i-1}, x_{i+1})$ задачи (19_1). Поскольку $w = k(v_1^i)'$, то $(v_1^i)' \in L_2(x_{i-1}, x_{i+1})$, и, следовательно, существует единственное из класса W_2^1 решение задачи (15). Аналогично проводятся рассуждения и для функции v_2^i, которая есть решение задачи (16).

Таким образом, доказана

Лемма 2. *Существуют единственные из класса W_2^1 решения задач* (15) *и* (16).

В дальнейшем существенно будем использовать свойства шаблонных функций v_1^i и v_2^i, которые устанавливает следующая лемма.

Лемма 3. *Функция $v_1^i(x)>0$ при $x\in(x_{i-1}, x_{i+1}]$ и монотонно возрастает на этом интервале, а $v_2^i(x)>0$ при $x\in[x_{i-1}, x_{i+1})$ и монотонно убывает на этом интервале.*

Доказательство. Покажем сначала, что $v_k^i(x)$ являются знакопостоянными функциями на открытом интервале (x_{i-1}, x_{i+1}) и нигде не обращаются в нуль. Доказательство от противного проведем для функции $v_1^i(x)$. Допустим, что существует точка $\zeta\in(x_{i-1}, x_{i+1})$ такая, что $v_1^i(\zeta)=0$. Рассмотрим функцию

$$\eta(\xi)=\begin{cases} v_1^i(\xi), & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant\zeta,\\ 0, & \zeta<\xi\leqslant x_{i+1},\end{cases}$$

которая принадлежит пространству W_2^1 и $\eta(x_{i+1})=0$. Таким образом, эту функцию можно использовать в качестве пробной функции для интегрального тождества (15). Подставив эту функцию в (15), получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{\zeta}\{k(\xi)\,[(v_1^i(\xi))']^2-Q(\xi)\,[(v_1^i(\xi))^2]'\}\,d\xi=0.$$

Поскольку $Q(x)$ удовлетворяет условию (4), то из этого соотношения следует

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{\zeta}k(\xi)\,(v_1^i(\xi))'^2\,d\xi=0,\ \text{что даст}\ v_1^i(\xi)\equiv 0\ \text{для}\ x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant\zeta.$$

Тогда взяв в (15)

$$\eta(\xi)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{\xi}^{\zeta}\frac{dt}{k(t)}, & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant\zeta,\\ 0, & \zeta\leqslant\xi\leqslant x_{i+1},\end{cases}$$

получим $\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{\zeta}\frac{dt}{k(t)}=0$, что невозможно в силу условия (3). Полученное противоречие показывает, что шаблонная функция $v_1^i(x)$ не может обращаться в нуль на открытом интервале (x_{i-1}, x_{i+1}).

Чтобы показать положительность шаблонной функции $v_1^i(x)$ на интервале $(x_{i-1}, x_{i+1}]$, перепишем (17_1) в виде

$$\frac{v_1^i(x)}{\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\frac{dt}{k(t)}}=1+\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{x_{i-1}}^{t}\frac{Q(t)-Q(\xi)}{k(t)\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\frac{dt_1}{k(t_1)}}(v_1^i(\xi))'\,d\xi dt.$$

Отсюда получаем

$$\frac{v_1^i(x)}{\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\frac{dt}{k(t)}}\geqslant 1-\frac{M_2}{M_1}(x-x_{i-1})^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\frac{|Q(t)-Q(\xi)|}{|t-\xi|^{\lambda+1/p}}\,|t-\xi|^{\lambda+1/p}\,|(v_1^i(\xi))'|\,d\xi dt\geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{M_2}{M_1}(x-x_{i-1})^{\lambda-1/p+1/2}\,|v_1^i|_{1,2,e}\,|Q|_{\lambda,p,e}\quad\forall x\in(x_{i-1}, x_{i+1}).\qquad(19)$$

Но из (19) следует, что при x, достаточно близком к x_{i-1}, $v_1^i(x)>0$, а так как $v_1^i(x)$ — знакопостоянная функция на $(x_{i-1}, x_{i+1}]$, то $v_1^i(x)>0$, $\forall x\in(x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Для доказательства монотонного возрастания функции $v_1^i(x)$ достаточно показать, что $\forall \bar{\bar{x}}, \bar{x}\in[x_{i-1}, x_{i+1}]$ и таких, что $\bar{\bar{x}}<\bar{x}$, имеет место неравенство $v_1^{(i)}(\bar{\bar{x}})<v_1^{(i)}(\bar{x})$. С этой целью возьмем в (15) в качестве пробной функции выражение вида

$$\eta(\xi)=\begin{cases}\int\limits_{\xi}^{\bar{x}}\dfrac{dt}{k(t)}, & \bar{\bar{x}}\leqslant\xi\leqslant\bar{x},\\ 0, & \bar{x}\leqslant\xi\leqslant x_{i+1},\\ \int\limits_{\bar{\bar{x}}}^{\bar{x}}\dfrac{dt}{k(t)} & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant\bar{\bar{x}},\end{cases}$$

тогда получим

$$v_1^i(\bar{x})-v_1^{(i)}(\bar{\bar{x}})=-\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}Q(\xi)\,[v_1^{(i)}(\xi)\,\eta(\xi)]'\,d\xi+\int\limits_{\bar{\bar{x}}}^{\bar{x}}\frac{dt}{k(t)}.$$

Поскольку $v_1^{(i)}(\xi)\eta(\xi)\geqslant 0$, $\forall x\in[x_{i-1}, x_{i+1}]$ и $v_1^{(i)}(\xi)\eta(\xi)=0$ при $\xi=$ $=x_{i-1}, x_{i+1}$, то, взяв функцию $w(\xi)$ в виде

$$w(\xi)=\begin{cases}v_1^{(i)}(\xi)\,\eta(\xi), & \xi\in[x_{i-1}, x_{i+1}],\\ 0, & \xi\in[0, x_{i-1}],\\ 0, & \xi\in[x_{i+1}, 1],\end{cases}$$

будем иметь $w(\xi)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, 1)$, $w(\xi)\geqslant 0$, $\forall\xi\in[0, 1]$. В силу условий (4) имеем

$$-\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}Q(\xi)\,[v_1^{(i)}(\xi)\,\eta(\xi)]'\,d\xi=-\int\limits_{0}^{1}Q(\xi)\,w'(\xi)\,d\xi\geqslant 0$$

и монотонность доказана. Вторая часть леммы относительно свойств шаблонной функции $v_2^{(i)}(x)$ доказывается аналогично.

Отметим, что свойства положительности и монотонности шаблонных функций играют основную роль при исследовании сходимости усеченных разностных схем. В случае когда коэффициенты кусочно-гладкие, эти свойства сразу вытекают из самого определения шаблонных функций как решения задач (13) и (14).

Приведение точной схемы к дивергентному виду существенно использует следующие свойства шаблонных функций v_1^i и v_2^i:

Лемма 4. *Для шаблонных функций справедливы соотношения*:

$$v_1^i(x_{i+1})=v_2^i(x_{i-1}),\tag{20}$$

$$v_2^i(x_i)=v_1^{i+1}(x_{i+1}),\tag{21}$$

$$v_1^i(x_{i+1})=v_1^i(x)+v_2^i(x)-v_2^i(x)\int\limits_{x_{i-1}}^{x}(v_1^i(\xi))'\,Q(\xi)\,d\xi-v_1^i(x)\int\limits_{x}^{x_{i+1}}(v_2^i(\xi))'\,Q(\xi)\,d\xi,\tag{22}$$

где x — произвольная точка в интервале (x_{i-1}, x_{i+1}).

Доказательство. Равенство (20) устанавливается следующим способом: положим в (15) $\eta(\xi)=v_2^i(\xi)$, а в (16) — $\eta(\xi)=v_1^i(\xi)$ и вычтем полученные соотношения.

Для доказательства равенства (21) рассмотрим интегральное тождество (15) для индекса $i+1$. В этом тождестве положим

$$\eta(\xi)=\begin{cases} v_2^i(\xi), & x_i\leqslant\xi\leqslant x_{i+1},\\ 0, & x_{i+1}\leqslant\xi\leqslant x_{i+2},\end{cases}$$

а в тождестве (16) —

$$\eta(\xi)=\begin{cases} 0, & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant x_i,\\ v_1^{i+1}(\xi), & x_i\leqslant\xi\leqslant x_{i+1}.\end{cases}$$

Вычитая затем полученные выражения, приходим к соотношению (21).

Докажем соотношение (22). Положим в (15)

$$\eta(\xi)=\begin{cases} v_2^i(\xi)-v_2^i(x), & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant x,\\ 0, & x\leqslant\xi\leqslant x_{i+1},\end{cases}$$

а в (16) —

$$\eta(\xi)=\begin{cases} 0, & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant x,\\ v_1^i(\xi)-v_1^i(x), & x\leqslant\xi\leqslant x_{i+1},\end{cases}$$

и полученные выражения сложим. Получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\{k(v_1^i)'(v_2^i)'-Q[v_1^iv_2^i]'\}\,d\xi-v_2^i(x)\int\limits_{x_{i-1}}^{x}Q(v_1^i)'\,d\xi+v_2^i(x_{i-1})-v_2^i(x)+$$
$$+\int\limits_{x}^{x_{i+1}}\{k(v_1^i)'(v_2^i)'-Q[v_1^iv_2^i]'\}\,d\xi-v_1^i(x)\int\limits_{x}^{x_{i+1}}Q(v_2^i)'\,d\xi+v_1^i(x_{i+1})-v_1^i(x)=0. \tag{23}$$

Учтем, что v_1^i удовлетворяет интегральному тождеству (15) с $\eta=v_2^i$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[k(v_1^i)'(v_2^i)'-Q(v_1^iv_2^i)']\,d\xi+v_2^i(x_{i-1})=0.$$

Подставляя это соотношение в (23), получим искомое соотношение (22). Лемма доказана.

Функцию Грина $G_i(x,\xi)$, определенную интегральным тождеством (9), можно выразить через шаблонные функции $v_1^i(\xi)$ и $v_2^i(\xi)$. Имеет место представление

$$G_i(x,\xi)=\frac{1}{v_1^i(x_{i+1})}\begin{cases} v_1^i(\xi)\,v_2^i(x), & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant x,\\ v_1^i(x)\,v_2^i(\xi), & x\leqslant\xi\leqslant x_{i+1}.\end{cases} \tag{24}$$

Действительно, вычислим левую часть $I(x)$ тождества (9), предполагая, что G_i определена по формуле (24). Получим

$$I(x)=\frac{v_2^i(x)}{v_1^i(x_{i+1})}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\{k(v_1^i(\xi))'\eta'(\xi)-Q[v_1^i(\xi)\eta(\xi)]'\}\,d\xi+$$
$$+\frac{v_1^i(x)}{v_1^i(x_{i+1})}\int\limits_{x}^{x_{i+1}}\{k(v_2^i(\xi))'\eta'(\xi)-Q[v_2^i(\xi)\eta(\xi)]'\}\,d\xi.$$

Для вычисления выражения $I(x)$ для произвольной функции $\eta(x) \in \mathring{W}_2^1(x_{i-1}, x_{i+1})$ поступим следующим образом: построим функцию

$$\tilde{\eta}(\xi) = \begin{cases} \eta(\xi) - \eta(x), & x_{i-1} \leqslant \xi \leqslant x, \\ 0, & x \leqslant \xi \leqslant x_{i+1} \end{cases}$$

и используем ее в качестве пробной функции в тождестве (15). Тогда получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x} [k(v_1^i)' \eta' - Q(v_1^i \eta(\xi))'] \, d\xi = -\eta(x) \int_{x_{i-1}}^{x} Q(\xi)(v_1^i(\xi))' \, d\xi + \eta(x).$$

Аналогичным образом из тождества (16) можно получить следующее интегральное соотношение:

$$\int_{x}^{x_{i+1}} [k(v_2^i)' \eta' - Q(v_2^i \eta(\xi))'] \, d\xi = -\eta(x) \int_{x}^{x_{i+1}} Q(\xi)(v_2^i(\xi))' \, d\xi + \eta(x).$$

Используя полученные выше соотношения, выражение $I(x)$ преобразуем к виду

$$I(x) = \frac{\eta(x)}{v_1^i(x_{i+1})} \left[v_1^i(x) + v_2^i(x) - v_2^i(x) \int_{x_{i-1}}^{x} Q(v_1^i)' \, d\xi - v_1^i(x) \int_{x}^{x_{i+1}} Q(v_2^i)' \, d\xi \right].$$

Заметим, что в силу (22) выражение в средних скобках равняется $v_1^i(x_{i+1})$, что дает $I(x) = \eta(x)$, т. е. функция $G_i(x, \xi)$ из (24) удовлетворяет (9). Таким образом представление функции Грина в виде (24) доказано.

В конце этого пункта докажем, что точная трехточечная разностная схема единственна.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (3)—(5). *Тогда точная трехточечная разностная схема* (8) *для задачи* (1), (2) *единственна.*

Доказательство будем вести от противного. Пусть существуют две точные трехточечные схемы, т. е.

$$u_i = A_i^{(k)} u_{i+1} + B_i^{(k)} u_{i-1} + F_i^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \; k = 1, 2.$$

Фиксируем i, $1 \leqslant i \leqslant N-1$, и берем в качестве функции $f(x)$ в (1) следующую функцию:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f_1'(x), & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \\ f_1'(x) + g_1, & 0 < x < x_{i-1}, \\ f_1'(x) + g_2 & x_{i+1} < x < 1, \end{cases} \tag{25}$$

где g_1 и g_2 — некоторые постоянные, находящиеся в нашем распоряжении. В силу определения точной схемы коэффициенты A_i, B_i и F_i (при так зафиксированном i) не изменяются при любых изменениях параметров g_1 и g_2.

Выберем сначала g_1 и g_2 так, чтобы решение $\tilde{u}(x)$ задачи (1), (2) с правой частью $\tilde{f}(x)$ удовлетворяло условиям $\tilde{u}(x_{i-1}) = \tilde{u}(x_{i+1}) = 0$. Покажем, что это возможно.

Функцию Грина $G(x, \xi)$ для задачи (1), (2) определим как функцию, которая при любом фиксированном $x \in (0, 1)$ как функция пере-

менной ξ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 [kG'(x, \xi)\eta'(\xi) - Q(G(x, \xi)\eta(\xi))']\, d\xi = \eta(x) \tag{26}$$

для любой функции $\eta(\xi) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Как и в случае функции Грина $G_i(x, \xi)$, определенной на интервале (x_{i-1}, x_{i+1}) и представимой в виде (24), можно показать, что $G(x, \xi)$ представляется в виде

$$G(x, \xi) = \frac{1}{v_1(1)} \begin{cases} v_1(\xi) v_2(x), & 0 \leqslant \xi \leqslant x, \\ v_1(x) v_2(\xi), & x \leqslant \xi \leqslant 1, \end{cases} \tag{27}$$

где v_1 и v_2— слабые решения из $W_2^1(\Omega)$ следующих задач Коши:

$$L^{(k,q)} v_k(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad k = 1, 2,$$

$$v_1(0) = 0, \; k(0) v_1'(0) = 1, \; v_2(1) = 0, \; k(1) v_2'(1) = -1.$$

По аналогии с леммами 2 и 3 справедливо утверждение: существуют единственные из класса $W_2^1(\Omega)$ решения этих задач Коши, причем $v_1(x) > 0$ и монотонно возрастающая функция, а $v_2(x) > 0$ и монотонно убывающая функция.

Положим теперь в тождестве (6) $f = \tilde{f}$ и $\eta(\xi) = G(x, \xi)$, $x \in \omega$, а $G(x, \xi)$ определим по формуле (27). Получим

$$\int_0^1 \{k\tilde{u}'(\xi) G'(x, \xi) - Q(\tilde{u}(\xi) G(x, \xi))'\}\, d\xi =$$

$$= -\int_0^1 f_1(\xi) G'(x, \xi)\, d\xi + g_1 \int_0^{x_{i-1}} G(x, \xi)\, d\xi + g_2 \int_{x_{i+1}}^1 G(x, \xi)\, d\xi.$$

Поскольку для любого $x \in (0, 1)$ функция Грина $G(x, \xi)$ удовлетворяет тождеству (26), то, полагая в (26) последовательно $x = x_{i-1}$ и $x = x_{i+1}$ и $\eta(\xi) = \tilde{u}(\xi)$, приходим к следующим соотношениям:

$$\tilde{u}(x_{i+1}) = -\int_0^1 f_1(\xi) G'(x_{i+1}, \xi)\, d\xi + g_1 \int_0^{x_{i-1}} G(x_{i+1}, \xi)\, d\xi + g_2 \int_{x_{i+1}}^1 G(x_{i+1}, \xi)\, d\xi,$$

$$\tilde{u}(x_{i-1}) = -\int_0^1 f_1(\xi) G'(x_{i-1}, \xi)\, d\xi + g_1 \int_0^{x_{i-1}} G(x_{i-1}, \xi)\, d\xi + g_2 \int_{x_{i+1}}^1 G(x_{i-1}, \xi)\, d\xi. \tag{28}$$

Требования $\tilde{u}(x_{i-1}) = \tilde{u}(x_{i+1}) = 0$ приводят к линейной системе относительно свободных параметров g_1 и g_2. Если воспользоваться представлением функции Грина в виде (27), то можно показать, что определитель Δ_i этой системы имеет вид

$$\Delta_i = \frac{1}{(v_1(1))^2} \int_0^{x_{i-1}} v_1(\xi)\, d\xi \int_{x_{i+1}}^1 v_2(\xi)\, d\xi\, [v_2(x_{i-1}) v_1(x_{i+1}) - v_1(x_{i-1}) v_2(x_{i+1})].$$

Из неотрицательности и монотонности функций v_1 и v_2 следует, что $\Delta_i > 0$ и, следовательно, существуют единственные постоянные g_1 и g_2 такие, что $\tilde{u}_{i+1} = \tilde{u}_{i-1} = 0$.

Из сделанного в начале предположения следует, что $\tilde{u}_i = F_i^{(k)}$, $k = 1, 2$, т. е. $F_i^{(1)} = F_i^{(2)} = F_i$. Далее выберем g_1 и g_2 так, чтобы $\tilde{u}(x_{i+1}) = 1$

и $\tilde{u}(x_{i-1})=0$. Это возможно сделать, ибо система линейных алгебраических уравнений относительно g_1 и g_2 будет отличаться от соответствующей системы предыдущего случая только правыми частями. Таким образом получим $\tilde{u}_i=A_i^{(k)}+F_i$, $k=1, 2$, т. е. $A_i^{(1)}=A_i^{(2)}$. Наконец, выбирая g_1 и g_2 так, чтобы $\tilde{u}_{i+1}=0$, $\tilde{u}_{i-1}=1$, получим $B_i^{(1)}=B_i^{(2)}$.

Так как i выбрано произвольно, $1\leqslant i\leqslant N-1$, то $A_i^{(1)}=A_i^{(2)}$, $B_i^{(1)}=B_i^{(2)}$, $F_i^{(1)}=F_i^{(2)}$, $1\leqslant i\leqslant N-1$, т. е. коэффициенты любых точных трехточечных схем совпадают. Лемма полностью доказана.

4. Консервативность точной разностной схемы. Консервативность разностных схем играет важную роль при исследовании их сходимости. Как показано А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским в конце 50-х годов, консервативность трехточечных схем является необходимым и достаточным условием их сходимости для класса разрывных коэффициентов. Кроме того, консервативные схемы для симметричных задач имеют симметричную матрицу, что весьма желательно при численном решении соответствующей системы алгебраических уравнений.

В этом пункте покажем, что точную схему (8), (12) можно преобразовать к консервативному виду. Используя представление функции Грина в виде (24), из (12) получим

$$A_i=\frac{1}{2}-\frac{1}{2h}\frac{v_2^i(x_i)}{v_1^i(x_{i+1})}\left\{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}k(v_1^i)'\,d\xi-\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}Q[(\xi-x_{i-1})v_1^i(\xi)]'\,d\xi\right\}-$$
$$-\frac{1}{2h}\frac{v_1^i(x_i)}{v_1^i(x_{i+1})}\left\{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}k(v_2^i)'\,d\xi-\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}Q[(\xi-x_{i-1})v_2^i(\xi)]'\,d\xi\right\}. \qquad (29)$$

Воспользуемся теперь определениями (15) и (16) обобщенных решений v_1^i и v_2^i, выбрав в качестве пробных функций соответственно

$$\eta(\xi)=\begin{cases}\xi-x_i, & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant x_i,\\ 0, & x_i\leqslant\xi\leqslant x_{i+1},\end{cases} \qquad (30)$$

$$\eta(\xi)=\begin{cases}0, & x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant x_i,\\ \xi-x_i, & x_i\leqslant\xi\leqslant x_{i+1}.\end{cases} \qquad (31)$$

Подставляя (30) в тождество (15) и (31) — в (16), получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\{k(\xi)(v_1^i)'-Q(\xi)[v_1^i(\xi)(\xi-x_i)]'\}\,d\xi=h,$$
$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\{k(\xi)(v_2^i)'-Q(\xi)[v_2^i(\xi)(\xi-x_i)]'\}\,d\xi=-h.$$

При помощи этих соотношений выражение (29) для A_i преобразуем к виду

$$A_i=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{v_2^i(x_i)}{v_1^i(x_{i+1})}\left[1-\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}Q(\xi)(v_1^i(\xi))'\,d\xi\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{v_1^i(x_i)}{v_1^i(x_{i+1})}\left[1+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}Q(\xi)(v_2^i(\xi))'\,d\xi\right].$$

Наконец, учитывая соотношение (22) при $x=x_i$, для A_i получим следующий окончательный вид:

$$A_i = \frac{1}{2v_1^i(x_{i+1})}\left[v_1^i(x_{i+1}) - v_2^i(x_i) + v_1^i(x_i) + \right.$$

$$\left. + v_2^i(x_i)\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} Q(\xi)(v_1^i(\xi))'\,d\xi + v_1^i(x)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} Q(\xi)(v_2^i(\xi))'\,d\xi\right] = \frac{v_1^i(x_i)}{v_1^i(x_{i+1})}. \quad (32)$$

При помощи аналогичных рассуждений показываем, что

$$B_i = \frac{v_2^i(x_i)}{v_1^i(x_{i+1})}. \quad (33)$$

Таким образом, схема (8), (12) представляется в виде

$$u_i = \frac{v_1^i(x_i)}{v_1^i(x_{i+1})}u_{i+1} + \frac{v_2^i(x_i)}{v_1^i(x_{i+1})}u_{i-1} + F_i,\ i=1,\ \ldots,\ N-1,$$

с правой частью F_i, определенной по формуле (12).

Умножая это уравнение на $\dfrac{v_1^i(x_{i+1})}{v_1^i(x_i)\,v_2^i(x_i)}$, получим

$$\frac{v_1^i(x_{i+1})}{v_1^i(x_i)\,v_2^i(x_i)}u_i - \frac{1}{v_2^i(x_i)}u_{i+1} - \frac{1}{v_1^i(x_i)}u_{i-1} =$$

$$= \frac{v_1^i(x_{i+1})}{v_1^i(x_i)\,v_2^i(x_i)}F_i,\ i=1,2,\ \ldots,\ N-1. \quad (34)$$

Заметим, что из представления F_i по формуле (12) и из представления функции Грина по формуле (24) следует, что правая часть (34) приводится к виду

$$\frac{v_1^i(x_{i+1})}{v_1^i(x_i)\,v_2^i(x_i)}F_i \equiv h\varphi_i = h\varphi(x_i) =$$

$$= -\frac{1}{v_1^i(x_i)}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(v_1^i(\xi))'f_1(\xi)\,d\xi - \frac{1}{v_2^i(x_i)}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(v_2^i(\xi))'f_1(\xi)\,d\xi.$$

Наконец, используя соотношение (22) при $x=x_i$, т. е.

$$v_1^i(x_{i+1}) = v_1^i(x_i) + v_2^i(x_i) - v_2^i(x_i)\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(v_1^i(\xi))'\,Q\,d\xi - v_1^i(x_i)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(v_2^i(\xi))'\,Q\,d\xi,$$

заменим $v_1^i(x_{i+1})$ в (34), тогда получим

$$\left[\frac{1}{v_1^i(x_i)} + \frac{1}{v_2^i(x_i)} - \frac{1}{v_1^i(x_i)}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} Q(v_1^i)'\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{v_2^i(x_i)}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} Q(v_2^i)'\,d\xi\right]u_i - \frac{1}{v_1^i(x_i)}u_{i-1} - \frac{1}{v_2^i(x_i)}u_{i+1} = h\varphi_i,\ i=1,2,\ \ldots,\ N-1. \quad (35)$$

Представление (35) точной трехточечной схемы (8), (12) является основой для ее записи в дивергентном виде.

Введем следующие обозначения:

$$a_i = a(x_i) = \frac{h}{v_1^i(x_i)}, \quad d_i = d(x_i) = T_1^{x_i}(Q),$$

$$a_N = \frac{h}{v_2^{N-1}(x_{N-1})}, \quad \varphi_i = \varphi(x_i) = T_1^{x_i}(f_1), \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{36}$$

где оператор $T_1^{x_i}$ определяется по формуле

$$T_1^{x_i}(w) = -\frac{1}{hv_1^i(x_i)} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (v_1^i(\xi))' w(\xi)\, d\xi - \frac{1}{hv_2^i(x_i)} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (v_2^i(\xi))' w(\xi)\, d\xi. \tag{37}$$

Если учесть, что в силу (21) имеет место равенство

$$a_{i+1} = \frac{h}{v_1^{i+1}(x_{i+1})} = \frac{h}{v_2^i(x_i)},$$

то разностное уравнение (35) запишется в виде

$$\Lambda u \equiv (a u_{\bar{x}})_x - du = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \tag{38}$$

$$u_0 = u(0) = 0, \quad u_N = u(1) = 0. \tag{39}$$

Оператор $T_1^{x_i}$ обладает следующим свойством:

$$T_1^{x_i}(w) = T_1^{x_i}(w + c), \ \forall w(x) \in L_2(\Omega), \ c = \text{const},$$

что сразу вытекает из легко проверяемого равенства

$$-\frac{1}{hv_1^i(x_i)} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (v_1^i(\xi))' c\, d\xi - \frac{1}{hv_2^i(x_i)} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (v_2^i(\xi))' c\, d\xi = 0.$$

Определим еще оператор усреднения $T_0^{x_i}$, который действует на функциях из $L_2(0, 1)$:

$$T_0^{x_i}(w) = \frac{1}{hv_1^i(x_i)} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i(\xi) w(\xi)\, d\xi + \frac{1}{hv_2^i(x_i)} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i(\xi) w(\xi)\, d\xi. \tag{40}$$

Если функция $w(x)$ представляется в виде суммы $w(x) = w_0(x) + w_1'(x)$, где $w_0, w_1 \in L_2(\Omega)$ (это представление понимается в смысле равенства обобщенных функций), то введем оператор T^{x_i} следующим образом:

$$T^{x_i}(w) = T_0^{x_i}(w_0) + T_1^{x_i}(w_1). \tag{41}$$

Заметим, что из (37) и (40) следует

$$T_1^{x_i}(w) = T_0^{x_i}(w), \ \forall w(x) \in W_2^1(\Omega), \tag{42}$$

$$T^{x_i}(-L^{(k,q)}u) = -(\Lambda u)_i, \ i = 1, \ldots, N-1, \tag{42_1}$$

для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ (здесь Λ — разностный оператор точной схемы (38), (39)). Тождество (42_1) показывает, что усредняющий оператор T^{x_i} переводит дифференциальный оператор $L^{(k,q)}$ в разностный оператор Λ. Поэтому оператор T^x, заданный по формуле (41), будем называть усредняющим оператором точной разностной схемы, соответствующей дифференциальному оператору задачи (1), (2).

5. Усеченные разностные схемы m-го ранга. Поскольку построение точной разностной схемы связано с задачей нахождения

шаблонных функций, а она по сложности эквивалентна решению исходной задачи (1), (2), то возникает необходимость в разработке алгоритма приближенного нахождения шаблонных функций. Такой алгоритм был предложен А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским для уравнений с кусочно-гладкими коэффициентами. Ниже дается обобщение этого алгоритма на случай, когда коэффициенты удовлетворяют условиям (3)—(5) и решение задачи (1), (2) понимается в обобщенном (слабом) смысле.

Как было показано выше, решения v_1^i и v_2^i задач (15) и (16) являются решениями интегральных уравнений (17_1) и (17_2) соответственно. В этих уравнениях сделаем замену переменной

$$x = x_i + sh. \tag{43}$$

Если обозначить

$$\begin{gathered} v_1^i(x_i + sh) = h\alpha(s, h), \quad v_2^i(x_i + sh) = h\beta(s, h), \\ \tilde{k}(s) = k(x_i + sh), \quad \tilde{Q}(s) = Q(x_i + sh), \end{gathered} \tag{44}$$

то после замены (43) уравнения (17_1) и (17_2) принимают вид

$$\alpha(s, h) = h\int_{-1}^{s} \frac{1}{\tilde{k}(\eta)} \int_{-1}^{\eta} [\tilde{Q}(\eta) - \tilde{Q}(t)]\, \alpha'(t, h)\, dt\, d\eta + \int_{-1}^{s} \frac{d\eta}{\tilde{k}(\eta)}, \tag{45}$$

$$\beta(s, h) = h\int_{s}^{1} \frac{1}{\tilde{k}(\eta)} \int_{\eta}^{1} [\tilde{Q}(\eta) - \tilde{Q}(t)]\, \beta'(t, h)\, dt\, d\eta + \int_{s}^{1} \frac{d\eta}{\tilde{k}(\eta)}. \tag{46}$$

В силу лемм 2 и 3 существуют единственные из класса W_2^1 решения задач (45) и (46) и они удовлетворяют следующим интегральным уравнениям второго рода типа Вольтерра относительно производных:

$$\alpha'(s, h) = \frac{d}{\tilde{k}(s)} \int_{-1}^{s} [\tilde{Q}(s) - \tilde{Q}(t)]\, \alpha'(t, h)\, dt + \frac{1}{\tilde{k}(s)}, \quad \alpha(-1, h) = 0, \tag{47}$$

$$\beta'(s, h) = \frac{-h}{\tilde{k}(s)} \int_{s}^{1} [\tilde{Q}(s) - \tilde{Q}(t)]\, \beta'(t, h)\, dt - \frac{1}{\tilde{k}(s)}, \quad \beta(1, h) = 0. \tag{48}$$

Решения задач (45) и (46) будем искать в виде рядов по степеням h^2

$$\alpha(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \alpha_k(s, h), \tag{49}$$

$$\beta(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \beta_k(s, h). \tag{50}$$

Формально подставляя (49) и (50) в (47) и (48) соответственно, приходим к следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered} \alpha_0'(s, h) = \frac{1}{\tilde{k}(s)}, \quad \alpha_{k+1}'(s, h) = \frac{1}{h\tilde{k}(s)} \int_{-1}^{s} [\tilde{Q}(s) - \tilde{Q}(t)]\, \alpha_k'(t, h)\, dt, \\ -1 \leqslant s \leqslant 1, \ k = 0, 1, \ldots, \ \alpha_k(-1, h) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{51}$$

и

$$\begin{gathered} \beta_0'(s, h) = \frac{-1}{\tilde{k}(s)}, \quad \beta_{k+1}'(s, h) = \frac{-1}{h\tilde{k}(s)} \int_{s}^{1} [\tilde{Q}(s) - \tilde{Q}(t)]\, \beta_k'(t, h)\, dt, \\ -1 \leqslant s \leqslant 1, \ k = 0, 1, \ldots, \ \beta_k(1, h) = 0, \ k = 0, 1, \ldots. \end{gathered} \tag{52}$$

Отметим, что рекуррентные уравнения (51) и (52) понимаются в смысле равенства функций из L_2.

Исходя из условий (3)—(5), индуктивно по k показывается, что $\alpha_k(s, h) \geqslant 0$, $\beta_k(s, h) \geqslant 0$, $k=0, 1, \ldots, \alpha_k(s, h)$, монотонно возрастают, а $\beta_k(s, h)$ монотонно убывают на интервале $(-1, 1)$.

Естественно возникает вопрос о корректности представления функций $\alpha(s, h)$ и $\beta(s, h)$ в виде (49), (51) и (50), (52) соответственно. Ответ на этот вопрос дает следующая лемма:

Лемма 6. *Ряды* (49) *и* (50), *коэффициенты которых определяются при помощи рекуррентных соотношений* (51) *и* (52) *соответственно, являются равномерно сходящимися и их суммы совпадают с шаблонными функциями* $\alpha(s, h)$ *и* $\beta(s, h)$.

Доказательство. Как вытекает из представления коэффициентов точной разностной схемы (36), (37), нам будут необходимы значения функций $\alpha(s, h)$ и $\beta(s, h)$ на интервалах $(-1, 0)$ и $(0,1)$ соответственно.

Здесь подробно рассмотрим ряд (49). Возведем уравнение (51) в квадрат и проинтегрируем по s в интервале $(-1, \eta)$. Учитывая, что $0 < M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2$ и применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\int_{-1}^{\eta} (\alpha'_{k+1}(s, h))^2 ds \leqslant h^{-2} M_1^{-2} \int_{-1}^{\eta} \left(\int_{-1}^{s} [\widetilde{Q}(s) - \widetilde{Q}(t)] \alpha'_k(t, h)\, dt \right)^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant M_1^{-2} h^{-2} \int_{-1}^{\eta} \int_{-1}^{s} [\widetilde{Q}(s) - \widetilde{Q}(t)]^2 dt \int_{-1}^{s} (\alpha'_k(t, h))^2 dt\, ds.$$

Затем, применяя к правой части этого неравенства неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p}{2}$ и $\frac{p}{p-2}$, $p > 2$, получим

$$\int_{-1}^{\eta} (\alpha'_{k+1}(s, h))^2 ds \leqslant M_1^{-2} h^{-2} \left(\int_{-1}^{\eta} \left(\int_{1}^{s} |\widetilde{Q}(s) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \widetilde{Q}(t)|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} ds \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{-1}^{\eta} \left(\int_{-1}^{s} (\alpha'_k(t, h))^2 dt \right)^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}}. \tag{53}$$

Первый из интегральных множителей в правой части этого неравенства оценивается следующим образом при помощи неравенства Гёльдера с теми же показателями:

$$\int_{-1}^{\eta} \left(\int_{-1}^{s} |\widetilde{Q}(s) - \widetilde{Q}(t)|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{\eta} \int_{-1}^{s} \frac{|\widetilde{Q}(s) - \widetilde{Q}(t)|^p}{|s-t|^{1+\lambda p}} dt \left(\int_{-1}^{s} |s-t|^{\left(\frac{1}{p}+\lambda\right)\frac{2p}{p-2}} dt \right)^{\frac{p-2}{2}} ds \leqslant$$

$$\leqslant (1+\eta)^{(2\lambda+1)\frac{p}{2}} \int_{-1}^{\eta} \int_{-1}^{\eta} \frac{|\widetilde{Q}(s) - \widetilde{Q}(t)|^p}{|s-t|^{1+\lambda p}} dt\, ds.$$

Подставляя это неравенство в (53), получим

$$\int_{-1}^{\eta} (\alpha'_{k+1}(s, h))^2 ds \leqslant M_1^{-2} h^{-2} (1+\eta)^{1+2\lambda} \times$$

$$\times \left[\int_{-1}^{\eta} \int_{-1}^{\eta} \frac{|\widetilde{Q}(s) - \widetilde{Q}(t)|^p}{|s-t|^{1+\lambda p}} dt\, ds \right]^{\frac{2}{p}} \left[\int_{-1}^{\eta} \left(\int_{-1}^{s} (\alpha'_k(t, h))^2 dt \right)^{\frac{p}{p-2}} ds \right]^{\frac{p-2}{p}}. \qquad (54)$$

Переходя в (54) обратно к переменной $x = x_i + sh$, соответствующий множитель в правой части (54) оценим следующим образом:

$$\left[\int_{-1}^{\eta} \int_{-1}^{\eta} \frac{|\widetilde{Q}(s) - \widetilde{Q}(t)|^p}{|s-t|^{1+\lambda p}} dt ds \right]^{\frac{2}{p}} \leqslant \left[\int_{-1}^{0} \int_{-1}^{0} \frac{|\widetilde{Q}(s) - \widetilde{Q}(t)|^p}{|s-t|^{1+\lambda p}} dt\, ds \right]^{\frac{2}{p}} =$$

$$= h^{2\left(\lambda - \frac{1}{p}\right)} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{|Q(x) - Q(\xi)|^p}{|x-\xi|^{1+\lambda p}} dx d\xi \right]^{\frac{2}{p}} = h^{2\left(\lambda - \frac{1}{p}\right)} |Q|^2_{\lambda, p, e},$$

где $e = (x_{i-1}, x_i)$. Подставляя эту оценку в (54), получим следующее неравенство:

$$\int_{-1}^{\eta} (\alpha'_{k+1}(s, h))^2 ds \leqslant M_1^{-2} h^{-2} (1+\eta) h^{2\left(\lambda - \frac{1}{p}\right)} |Q|^2_{\lambda, p, e} \times$$

$$\times \left[\int_{-1}^{\eta} \left(\int_{-1}^{s} (\alpha'_k(t, h))^2 dt \right)^{\frac{p}{p-2}} ds \right]^{\frac{p-2}{p}}. \qquad (55)$$

Используя это неравенство для $k-1$, получим

$$\left[\int_{-1}^{v} \left(\int_{-1}^{\eta} (\alpha'_k(s, h))^2 ds \right)^{\frac{p}{p-2}} d\eta \right]^{\frac{p-2}{p}} \leqslant M_1^{-2} h^{-2+2\left(\lambda - \frac{1}{p}\right)} |Q|^2_{\lambda, p, e} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-1}^{v} (1+\eta) \int_{-1}^{\eta} \left(\int_{-1}^{s} (\alpha'_{k-1}(t, h))^2 dt \right)^{\frac{p}{p-2}} ds\, d\eta \right\}^{\frac{p-2}{p}} \leqslant M_1^{-2} h^{-2+2\left(\lambda - \frac{1}{p}\right)} \times$$

$$\times |Q|^2_{\lambda, p, e} \left\{ \int_{-1}^{v} \left(\int_{-1}^{s} (\alpha'_{k-1}(t, h))^2 dt \right)^{\frac{p}{p-2}} ds \int_{-1}^{v} (1+\eta)\, d\eta \right\}^{\frac{p-2}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant M_1^{-2} h^{-2+2\left(\lambda - \frac{1}{p}\right)} |Q|^2_{\lambda, p, e} \left[\frac{(1+v)^2}{2} \right]^{\frac{p-2}{p}} \left[\int_{-1}^{v} \left(\int_{-1}^{\eta} (\alpha'_{k-1}(t, h))^2 dt \right)^{\frac{p}{p-2}} ds \right]^{\frac{p-2}{p}}.$$

Продолжая это неравенство до получения соответствующего интеграла от $\alpha_0'(t, h)$, будем иметь

$$\left[\int_{-1}^{v} \left(\int_{-1}^{\eta} (\alpha'_k(s, h))^2 ds \right)^{\frac{p}{p-2}} d\eta \right]^{\frac{p-2}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant M_1^{-2k} h^{2k\left(-1+\lambda - \frac{1}{p}\right)} |Q|^{2k}_{\lambda, p, e} \left[\frac{(1+v)^{k+1}}{(k+1)!} \int_{-1}^{v} \left(\int_{-1}^{\eta} (\alpha'_0(t, h))^2 dt \right)^{\frac{p}{p-2}} d\eta \right]^{\frac{p-2}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant M_1^{-2(k+1)} h^{2k\left(-1+\lambda - \frac{1}{p}\right)} |Q|^{2k}_{\lambda, p, e} \left[\frac{(1+v)^{k+1}}{(k+1)!} \right]^{\frac{p-2}{p}}.$$

Подставляя эту оценку в (55) и полагая $\eta=0$, получим следующее неравенство:

$$\int_{-1}^{0}(\alpha'_{k+1}(s,h))^2\,ds \leqslant M_1^{-2(k+2)}h^{2(k+1)\left(-1+\lambda-\frac{1}{p}\right)}\,|Q|^{2(k+1)}_{\lambda,p,e}\left[\frac{1}{(k+1)!}\right]^{\frac{p-2}{p}}. \qquad (56)$$

Так как $\alpha_k \geqslant 0$ и $\alpha_k(-1,h)=0$, то из этой оценки следует

$$0<\alpha_k(s,h)\leqslant\left(\int_{-1}^{0}(\alpha'_k(t,h))^2\,dt\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant M^{-(k+1)}h^{k\left(-1+\lambda-\frac{1}{p}\right)}\,|Q|^{k}_{\lambda,p,e}\left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{p-2}{2p}}. \qquad (57)$$

При помощи этих неравенств для нормы W_2^1 разности между m-й и n-й частных сумм ряда (49) получим

$$\left\|\sum_{j=m+1}^{n}h^{2j}\alpha_j(s,h)\right\|_{W_2^1}\leqslant\sum_{k=0}^{1}\left\|\sum_{j=m+1}^{n}h^{2j}\alpha_j^{(k)}(s,h)\right\|_{L_2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{j=m+1}^{n}h^{2j}\|\alpha'_j(s,h)\|_{L_2}\leqslant\frac{2}{M_1}\sum_{j=m+1}^{n}\left(M_1^{-1}h^{1+\lambda-\frac{1}{p}}\,|Q|_{\lambda,p,e}\right)^j\left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{p-2}{2p}}. \qquad (58)$$

Так как числовой ряд при $p>2$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(M_1^{-1}h^{1+\lambda-\frac{1}{p}}\,|Q|_{\lambda,p,e}\right)^j\left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{p-2}{2p}}$$

сходится, то правая часть в неравенстве (58) стремится к нулю при $n, m\to\infty$. Следовательно, последовательность частных сумм $\sum_{j=0}^{n}h^{2j}\alpha_j(s,h)$ является фундаментальной в W_2^1, откуда следует ее сходимость в норме W_2^1. Поскольку W_2^1 вкладывается в C, то последовательность частных сумм сходится равномерно на интервале $(-1, 0)$ к некоторой непрерывной функции $\bar{\alpha}(s,h)$

$$\bar{\alpha}(s,h)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}h^{2j}\alpha_j(s,h)=\sum_{j=0}^{\infty}h^{2j}\alpha_j(s,h). \qquad (59)$$

Покажем, что функция $\bar{\alpha}(s,h)$ удовлетворяет интегральному уравнению (45) и тем самым совпадает с шаблонной функцией $\alpha(s,h)$. Поскольку ряд (59) сходится равномерно, то, переставляя порядок интегрирования с суммированием ряда и учитывая, что α_k получены при помощи рекуррентных соотношений (51), получим

$$\int_{-1}^{s}\bar{\alpha}'(\eta,h)\,d\eta-h\int_{-1}^{s}\frac{1}{\tilde{k}(\eta)}\int_{-1}^{\eta}[\tilde{Q}(\eta)-\tilde{Q}(t)]\,\alpha^{-1}(t,h)\,dt\,d\eta-$$

$$-\int_{-1}^{s}\frac{d\eta}{\tilde{k}(\eta)}=\sum_{k=0}^{\infty}h^{2k}\int_{-1}^{s}\alpha'_k(\eta,h)\,d\eta-$$

$$-h\sum_{k=0}^{\infty}h^{2k}\int_{-1}^{s}\frac{1}{\tilde{k}(\eta)}\int_{-1}^{\eta}[\tilde{Q}(\eta)-\tilde{Q}(t)]\,\alpha'_k(t,h)\,dt\,d\eta-\int_{-1}^{s}\frac{d\eta}{\tilde{k}(\eta)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}h^{2k+2}\int_{-1}^{s}\left\{\alpha'_{k+1}(\eta,h)-\frac{1}{h\tilde{k}(\eta)}\int_{-1}^{\eta}[\tilde{Q}(\eta)-\tilde{Q}(t)]\,\alpha'_k(t,h)\,dt\right\}d\eta=0,$$

откуда следует утверждение леммы 6.

Замечание. Из оценки (57) следует, что выполнено неравенство

$$\sum_{k=m}^{\infty} h^{2k}\alpha_k(s, h) \leqslant c_0 h^{m\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)} |Q|^m_{\lambda, p, e}, \tag{60}$$

где постоянная c_0 зависит от λ, p и M_1, но не зависит от h. В частности, при $m=0$ и $s=0$ имеем

$$\alpha(0, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k}\alpha_k(0, h) \leqslant c_0. \tag{60a}$$

Представление шаблонных функций в виде рядов (49) и (50) с членами, которые определяются при помощи соотношений (51) и (52), является основой приближенного метода их нахождения. Введем усеченные шаблонные функции

$$\overset{m}{\alpha}(s, h) = \sum_{k=0}^{m} h^{2k}\alpha_k(s, h), \quad \overset{m}{\beta}(s, h) = \sum_{k=0}^{m} h^{2k}\beta_k(s, h).$$

С помощью усеченных шаблонных функций построим следующую разностную схему:

$$\overset{m}{\Lambda} y \equiv (a\overset{m}{y}_{\bar{x}})_x - \overset{m}{d}y = -\overset{m}{\varphi}, \quad x \in \omega, \tag{61}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{62}$$

где

$$\overset{m}{a} = (\overset{m}{\alpha}(0, h))^{-1}, \quad \overset{m}{d} = \overset{m}{T}{}^x_1(Q), \quad \overset{m}{\varphi} = \overset{m}{T}{}^x_1(f_1), \tag{63}$$

$$\overset{m}{T}{}^x_1(w) = -\frac{1}{\overset{m}{\alpha}(0, h)} \int_{-1}^{0} \overset{m}{\alpha}{}'(s, h)\, \tilde{w}(s)\, ds -$$

$$-\frac{1}{\overset{m}{\beta}(0, h)} \int_{0}^{1} \overset{m}{\beta}(s, h)\, \tilde{w}(s)\, ds, \tag{64}$$

где $\tilde{w}(s) = w(x+sh)$, а $\overset{m}{\alpha}$ и $\overset{m}{\beta}$ — усеченные функции, построенные на интервале $(x-h, x+h)$.

Трехточечную разностную схему (61), (62), коэффициенты которой определяются по формулам (63), (64) при помощи усеченных шаблонных функций, будем называть усеченной разностной схемой m-го ранга.

В силу оценок (60) и (60a) функции $\overset{m}{\alpha}(s, h)$ и $\overset{m}{\beta}(s, h)$ аппроксимируют при $h \to 0$ функции $\alpha(s, h)$ и $\beta(s, h)$. Точнее,

$$0 \leqslant \alpha(s, h) - \overset{m}{\alpha}(s, h) = \sum_{k=m+1}^{\infty} h^{2k}\alpha_k(s, h) \leqslant c_0 h^{(m+1)\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)} |Q|^{m+1}_{\lambda, p, e}, \tag{65}$$

$$\left[\int_{-1}^{0} (\alpha'(s, h) - \overset{m}{\alpha}{}'(s, h))^2\, ds\right]^{1/2} \leqslant c_0 h^{(m+1)\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)} |Q|^{m+1}_{\lambda, p, e}, \tag{66}$$

где постоянная c_0 не зависит от h, а $e = (x-h, x)$.

Аналогичные оценки имеют место и для разности $\beta - \overset{m}{\beta}$.

Наконец отметим, что из неравенства (57) следует оценка

$$\left(\int_{-1}^{0} (\alpha'(s, h))^2\, ds\right)^{1/2} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \left(\int_{-1}^{0} \left(\alpha_k'(s, h)\right)^2 ds\right)^{1/2} \leqslant c_0. \tag{67}$$

Аналогичная оценка имеет место и для функции $\beta(s, h)$

$$\left(\int_{0}^{1} (\beta'(s, h))^2\, ds\right)^{1/2} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \left(\int_{0}^{1} (\beta_k'(s, h))^2\, ds\right)^{1/2} \leqslant c_0. \tag{68}$$

§ 2. Оценка точности усеченных схем m-го ранга

1. Коэффициентная устойчивость разностной схемы. Исследование точности усеченной схемы m-го ранга будем проводить путем ее сравнения с точной схемой (38), (39). Такое сравнение можно сделать при помощи теоремы о коэффициентной устойчивости разностных схем. Именно, будем использовать следующий результат:

Лемма 1 (см. [12, с. 148]). *Пусть наряду с задачей* (38), (39) *из* § 1 *имеется задача*

$$(\tilde{a}\tilde{y}_{\bar{x}})_x - \tilde{d}\tilde{y} = -\tilde{\varphi}, \quad x \in \omega, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = 0, \tag{1}$$

причем для коэффициентов обоих задач выполнены условия

$$a \geqslant c_1 > 0,\ \tilde{a} \geqslant c_1 > 0,\ d \geqslant 0,\ \tilde{d} \geqslant 0,\ x \in \omega. \tag{2}$$

Тогда имеем место оценка

$$\max_{x\in\omega} |u(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \frac{2}{c_1}\left\{\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{(1)} + \max_{x\in\omega}|u(x)|\,\|\tilde{d} - d\|_{(1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{c_1}\|\varphi\|_{(1)}\|\tilde{a} - a\|_{(1)}\right\}, \tag{3}$$

где

$$\|v\|_{(1)} = \sum_{x\in\omega} |v(x)|\,h, \quad \|v\|_{(1)} = \sum_{x\in\omega^+} |v(x)|\,h, \quad \omega^+ = \{x_i = ih,\ i = 1, \ldots, N\}. \tag{4}$$

Из неравенства (60) § 1 с учетом неотрицательности функций $\alpha_k(s, h)$ следует

$$0 < \frac{1}{c_0} \leqslant \frac{1}{\alpha(0, h)} = a \leqslant \overset{m}{a} = \frac{1}{\overset{m}{\alpha}(0, h)} \leqslant M_2 \tag{5}$$

с константой c_0 из (60а) § 1 и константой M_2 из (3) § 1.

Поскольку $\alpha(s, h)$ и $\beta(s, h)$ — неотрицательные функции, то из условия (4) § 1, которому удовлетворяет коэффициент $q(x) = Q'(x)$, следует

$$d(x) = T_1^*(Q) = -\frac{1}{h}\int_{-1}^{0} \frac{\alpha'(s, h)}{\alpha(0, h)} Q(x + sh)\, ds -$$
$$-\frac{1}{h}\int_{0}^{1} \frac{\beta'(s, h)}{\beta(0, h)} Q(x + sh)\, ds \geqslant 0, \quad x \in \omega. \tag{6}$$

Аналогично доказывается и оценка $\overset{m}{d}(x) \geqslant 0$, $x \in \omega$.

Таким образом все условия леммы 1 для сравнения разностных схем (38), (39) и (61)—(64) § 1 выполнены и, следовательно, имеет место оценка

$$\|u-\overset{m}{y}\|_{C(\omega)} \leqslant 2c_0\{\|\overset{m}{\varphi}-\varphi\|_{(1)}+\|u\|_{C(\omega)}\|\overset{m}{d}-d\|_{(1)}+2c_0\|\varphi\|_{(1)}\|\overset{m}{a}-a\|_{(1)}\}, \quad (7)$$

где c_0 — постоянная из (5), а $\|v\|_{C(\omega)}=\max\limits_{x\in\omega}|v(x)|$.

2. Оценка точности усеченных схем. При помощи (7) оценка точности усеченной схемы m-го ранга в норме $C(\omega)$ сводится к оценкам соответствующих норм для разностей между ее коэффициентами и коэффициентами точной схемы. Эти оценки выводятся последовательно в следующих леммах:

Лемма 2. *Пусть коэффициенты исходной задачи* (1), (2) § 1 *удовлетворяют условиям* (3)—(5) § 1. *Тогда*

$$\|\varphi\|_{(1)}\|\overset{m}{a}-a\|_{(1)} \leqslant Ch^{2(m+1)-n_a}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,\Omega}|f_1|_{\theta,r,\Omega}, \quad (8)$$

где

$$n_a=\begin{cases}(m+1)\left(1-\lambda+\dfrac{1}{p}\right)-\theta, & m+1\geqslant p,\\ (m+1)(1-\lambda)+1-\theta, & m+1\leqslant p,\end{cases} \quad (9)$$

а постоянная C не зависит от h.

Доказательство. По определению $a(x)$ и $\overset{m}{a}(x)$ имеем

$$0\leqslant \overset{m}{a}(x)-a(x)=\frac{1}{\overset{m}{\alpha}(0,h)}-\frac{1}{\alpha(0,h)}=\frac{1}{\overset{m}{\alpha}(0,h)\,\alpha(0,h)}\sum_{k=m+1}^{\infty}h^{2k}\alpha_k(0,h).$$

Используя неравенства (60) § 1 и (5), получим

$$0\leqslant \overset{m}{a}(x)-a(x)\leqslant M_2^2c_0h^{(m+1)\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,e}, \quad x\in\omega,\ e=(x-h,x), \quad (10)$$

откуда следует оценка

$$\|\overset{m}{a}-a\|_{(1)}=\sum_{x\in\omega^+}|\overset{m}{a}(x)-a(x)|h\leqslant M_2^2c_0h^{(m+1)\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)+1}\sum_{x\in\omega^+}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,e}. \quad (11)$$

Оценка суммы в правой части (11) зависит от m и p. Если $m+1\geqslant p$, то, очевидно,

$$\sum_{x\in\omega^+}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,e}\leqslant|Q|^{m+1-p}_{\lambda,p,\Omega}\sum_{x\in\omega^+}|Q|^{p}_{\lambda,p,e}\leqslant|Q|^{m+1}_{\lambda,p,\Omega}, \quad m+1\geqslant p. \quad (12)$$

Если $m+1<p$, то, применяя неравенство Гёльдера с показателями $p/(m+1)$ и $p/(p-m-1)$, получим

$$\sum_{x\in\omega^+}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,e}\leqslant\left(\sum_{x\in\omega^+}|Q|^{p}_{\lambda,p,e}\right)^{\frac{m+1}{p}}\left(\sum_{x\in\omega^+}1\right)^{\frac{p-m-1}{p}}\leqslant h^{-1+\frac{m+1}{p}}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,\Omega}. \quad (13)$$

Осталось оценить $\|\varphi\|_{(1)}$. По определению

$$\varphi(x)=T_1^x(f_1)=-\frac{1}{h}\int_{-1}^{0}\frac{\alpha'(s,h)}{\alpha(0,h)}\tilde{f}_1(s)\,ds-\frac{1}{h}\int_{0}^{1}\frac{\beta'(s,h)}{\beta(0,h)}\tilde{f}_1(s)\,ds,$$

где $\tilde{f}_1(s)=f_1(x+sh)$, $x\in\omega$. Поскольку $T_1^x(w)=T_1^x(w+c)$, то, выбирая $c=-\int_{-0.5}^{0.5}\tilde{f}_1(t)\,dt$, выражение для $\varphi(x)$ преобразуем к виду

$$\varphi(x) = -\frac{1}{h}\int_{-1}^{0}\frac{\alpha'(s,h)}{\alpha(0,h)}\int_{-0.5}^{0.5}(\tilde{f}_1(s)-\tilde{f}_1(t))\,dtds -$$

$$-\frac{1}{h}\int_{0}^{1}\frac{\beta'(s,h)}{\beta(0,h)}\int_{-0.5}^{0.5}(\tilde{f}_1(s)-\tilde{f}_1(t))\,dtds.$$

Применив неравенство Коши — Буняковского, оценки (67) и (68) § 1 и неравенство (5), получим

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{M_2c_0}{h}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|\tilde{f}_1(s)-\tilde{f}_1(t)|^2\,dsdt\right)^{1/2}.$$

В этом неравенстве учтем, что $f_1 \in W_r^\theta$, применим неравенство Гёльдера и вернемся к переменной $\xi = x+sh$. Получим

$$|\varphi(x)| \leqslant 2^{1+\theta-\frac{1}{r}} M_2c_0h^{-1+\theta-\frac{1}{r}}|f_1|_{\theta,r,\bar{e}}, \quad \bar{e}=(x-h,\ x+h), \quad x\in\omega.$$

Суммируя эту оценку по $x\in\omega$, получим

$$\|\varphi\|_{(1)} = \sum_{x\in\omega}|\varphi(x)|h \leqslant 2^{1+\theta-\frac{1}{r}} M_2c_0h^{\theta-\frac{1}{r}}\times$$

$$\times\sum_{x\in\omega}|f_1|_{\theta,r,\bar{e}} \leqslant 2^{2+\theta-\frac{1}{r}} M_2c_0h^{\theta-1}|f_1|_{\theta,r,\Omega}. \tag{14}$$

Объединяя оценки (11)—(14), получим искомую оценку. Лемма 2 доказана.

Остальные члены в правой части (7) оцениваются при помощи следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть коэффициенты исходной задачи* (1), (2) § 1 *удовлетворяют условиям* (3)—(5) § 1 *и операторы* T_1^x *и* $\overset{m}{T}{}_1^x$ *определяются по формулам* (37) и (64) § 1 *соответственно. Тогда для любой функции* $w\in W_q^\nu(\Omega)$, $q\geqslant 2$, $0<\nu\leqslant 1$ *имеет место оценка*

$$|T_1^x(w)-\overset{m}{T}{}_1^x(w)| \leqslant Ch^{(m+1)\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{q}+\nu-1}|Q|_{\lambda,p,\bar{e}}^{m+1}|w|_{\nu,q,\bar{e}}, \tag{15}$$

где $\bar{e}=(x-h,\ x+h)$, *а постоянная* C *не зависит от* h.

Доказательство. Исходя из определения операторов T_1^x и $\overset{m}{T}{}_1^x$ и соображений, которые использовались в лемме 2, левая часть (15) представляется в виде

$$T_1^x(w)-\overset{m}{T}{}_1^x(w) = \frac{1}{\overset{m}{h}\alpha(0,h)}\int_{-1}^{0}(\overset{m}{\alpha}{}'(s,h)-\alpha'(s,h))\int_{-0.5}^{0.5}(\tilde{w}(s)-\tilde{w}(t))\,dtds +$$

$$+\left(\frac{1}{\overset{m}{h}\alpha(0,h)}-\frac{1}{h\alpha(0,h)}\right)\int_{-1}^{0}\alpha'(s,h)\int_{-0.5}^{0.5}(\tilde{w}(s)-\tilde{w}(t))\,dtds +$$

$$+\frac{1}{\overset{m}{h}\beta(0,h)}\int_{0}^{1}(\overset{m}{\beta}{}'(s,h)-\beta'(s,h))\int_{-0.5}^{0.5}(\tilde{w}(s)-\tilde{w}(t))\,dtds +$$

$$+\left(\frac{1}{\overset{m}{h}\beta(0,h)}-\frac{1}{h\beta(0,h)}\right)\int_{0}^{1}\beta'(s,h)\int_{-0.5}^{0.5}(\tilde{w}(s)-\tilde{w}(t))\,dtds,\ x\in\omega,$$

$$\tilde{w}(s) = w(x+sh). \tag{16}$$

Все слагаемые в правой части (16) оцениваются одним и тем же способом. Для первого слагаемого, например, с использованием неравенства Коши — Буняковского, оценки (66) § 1, оценки (10) и приема из леммы 2 получим

$$\left|\frac{1}{h\overset{m}{\alpha}'(0,h)}\int_{-1}^{0}(\overset{m}{\alpha}'(s,h)-\alpha'(s,h))\int_{-0.5}^{0.5}(\widetilde{w}(s)-\widetilde{w}(t))\,dtds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_2}{h}\left[\int_{-1}^{0}(\overset{m}{\alpha}'(s,h)-\alpha'(s,h))^2\,ds\right]^{1/2}\left[\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1}|\widetilde{w}(s)-\widetilde{w}(t)|^2\,dsdt\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant M_2 2^{1+\nu-\frac{1}{q}}c_0h^{(m+1)\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)+\nu-\frac{1}{q}-1}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,\bar{e}}|w|_{\nu,q,\bar{e}}.$$

Аналогично оцениваются и остальные члены. Лемма 3 доказана.

Как следствия леммы 3 получим оценки для $\overset{m}{d}-d$ и $\overset{m}{\varphi}-\varphi$ при предположении, что $q(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям (4), (5) § 1

$$|\overset{m}{d}(x)-d(x)|\leqslant Ch^{(m+1)\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)+\lambda-\frac{1}{p}-1}|Q|^{m+2}_{\lambda,p,\bar{e}}, \tag{17}$$

$$|\overset{m}{\varphi}(x)-\varphi(x)|\leqslant Ch^{(m+1)\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)+\theta-\frac{1}{r}-1}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,\bar{e}}|f_1|_{\theta,r,\bar{e}}. \tag{18}$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда*

$$\|\overset{m}{d}-d\|_{(1)}\leqslant Ch^{2(m+1)-n_d}|Q|^{m+2}_{\lambda,p,\Omega}, \tag{19}$$

$$\|\overset{m}{\varphi}-\varphi\|_{(1)}\leqslant Ch^{2(m+1)-n_\varphi}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,\Omega}|f_1|_{\theta,r,\Omega}, \tag{20}$$

причем

$$n_d=\begin{cases}(m+1)\left(1-\lambda+\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}-\lambda, & m+2\geqslant p,\\ (m+1)(1-\lambda)+1-\lambda, & m+2\leqslant p,\end{cases} \tag{21}$$

$$n_\varphi=\begin{cases}(m+1)\left(1-\lambda+\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{r}-\theta, & (m+1)r\geqslant(r-1)p,\\ (m+1)(1-\lambda)+1-\theta, & (m+1)r\leqslant(r-1)p,\end{cases} \tag{22}$$

а постоянная C не зависит от h.

Доказательство. Оценка (19) очевидным образом следует из неравенства (17).

Докажем (20). Применяя неравенство (18), имеем

$$\|\overset{m}{\varphi}-\varphi\|_{(1)}=\sum_{x\in\omega}|\overset{m}{\varphi}(x)-\varphi(x)|h\leqslant$$

$$\leqslant Ch^{(m+1)\left(1+\lambda-\frac{1}{p}\right)+\theta-\frac{1}{r}}\sum_{x\in\omega}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,\bar{e}}|f_1|_{\theta,r,\bar{e}}. \tag{23}$$

К сумме в правой части этого неравенства применим неравенство Гёльдера с показателями $r/(r-1)$ и r. Получим

$$\sum_{x\in\omega}|Q|^{m+1}_{\lambda,p,\bar{e}}|f_1|_{\theta,r,\bar{e}}\leqslant\left(\sum_{x\in\omega}|f_1|^r_{\theta,r,\bar{e}}\right)^{1/r}\left(\sum_{x\in\omega}|Q|^{\frac{(m+1)r}{r-1}}_{\lambda,p,\bar{e}}\right)^{\frac{r-1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant 2|f_1|_{\theta,r,\Omega}\left(\sum_{x\in\omega}|Q|^{\frac{(m+1)r}{r-1}}_{\lambda,p,\bar{e}}\right)^{\frac{r-1}{r}}.$$

Если $\frac{(m+1)r}{r-1} \geqslant p$, то очевидно

$$\left(\sum_{x\in\omega} |Q|_{\lambda,p,\bar{e}}^{\frac{(m+1)r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}} \leqslant 2\,|Q|_{\lambda,p,\Omega}^{m+1}.$$

Если $\frac{(m+1)r}{r-1} < p$, то, применяя снова неравенство Гёльдера, получим

$$\left(\sum_{x\in\omega} |Q|_{\lambda,p,\bar{e}}^{\frac{(m+1)r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}} \leqslant 2\,|Q|_{\lambda,p,\Omega}^{m+1}\left(\sum_{x\in\omega} 1\right)^{1-\frac{1}{r}-\frac{m+1}{p}} \leqslant 2h^{-1+\frac{1}{r}-\frac{m+1}{p}}\,|Q|_{\lambda,p,\Omega}^{m+1}.$$

Подставляя эти оценки в (23), получим искомое неравенство (20). Лемма 4 доказана.

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы:

Теорема 1. *Пусть коэффициенты исходной задачи* (1), (2) § 1 *удовлетворяют условиям* (3), (4) *и* (5) § 1. *Тогда разностная схема m-го ранга* (63)—(66) § 1 *имеет точность $O(h^{2(m+1)-n})$ в норме $C(\omega)$, так что выполнена оценка*

$$\|u - \overset{m}{y}\|_{C(\omega)} \leqslant Ch^{2(m+1)-n}, \tag{24}$$

где постоянная C не зависит от h, а

$$n = \max(n_a,\ n_d,\ n_\varphi), \tag{25}$$

причем n_a, n_d и n_φ определяются соответственно по формулам (9), (21) *и* (22).

Доказательство. В леммах 2—4 содержатся все необходимые оценки для членов в правой части неравенства (7). Остается показать, что $\|u\|_{C(\omega)}$ оценивается величиной, не зависящей от h.

Но $u(x)$ есть решение задачи (1), (2) § 1 и для него легко выводится априорная оценка

$$\int_0^1 (u'(t)\,dt)^2\,dt \leqslant \frac{1}{M_1^2}\int_0^1 (f_1(t))^2\,dt.$$

Так как $|u(x)|^2 \leqslant \int_0^1 (u'(t))^2 dt$ для любого $x\in[0,1]$, то

$$\max_{x\in\omega} |u(x)|^2 = \|u\|_{C(\omega)}^2 \leqslant \frac{1}{M_1^2}\int_0^1 (f_1(t))^2\,dt, \tag{26}$$

что завершает доказательство теоремы.

Отметим, что если $f(x)\in L_\infty(\Omega)$ и $q(x)\in L_\infty(\Omega)$, т. е. $\lambda=\theta=1$, и $p=r=\infty$, то $n=n_a=n_d=n_\varphi=0$ и точность усеченных схем m-го ранга совпадает с точностью этих схем для случая кусочно-гладких коэффициентов ([1], [12]).

3. Пример и заключительные замечания. Рассмотрим следующий пример: найти решение задачи

$$u''(x) - \delta(x-0.5)\,u(x) = -\frac{5}{4}\delta(x-0.5),\quad 0<x<1,\quad u(0)=0,\quad u(1)=0, \tag{27}$$

где $\delta(x-0.5)$ есть δ-функция, сосредоточенная в точке $x=0,5$.

Как известно, эту функцию можно представить в виде производной (в смысле обобщенных функций) от единичной ступеньки, т. е.

$$\delta(x-0.5)=\theta'(x-0.5),\ \theta(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 0.5,\\ 1, & 0.5<x\leqslant 1,\end{cases}$$

причем $\theta(x)\in W_p^{\frac{1}{p}-\varepsilon}(\Omega)$ с любым p: $2\leqslant p<\infty$ и $\varepsilon>0$.

На сетке ω с числом углов $N=2k+1$ схема нулевого ранга имеет вид

$$\overset{\circ}{y}_{\bar{x}x,i}=0,\quad i\neq k,\ k+1,\quad \overset{\circ}{y}_{\bar{x}x,k}-\frac{1}{2h}\overset{\circ}{y}_k=-\frac{5}{8h},$$

$$\overset{\circ}{y}_{\bar{x}x,k+1}-\frac{1}{2h}\overset{\circ}{y}_{k+1}=-\frac{5}{8h},\quad \overset{\circ}{y}_0=0,\quad \overset{\circ}{y}_N=0. \tag{28}$$

Отметим, что сетка ω выбрана так, чтобы можно точно решить полученную систему линейных алгебраических уравнений. Для решения усеченной схемы нулевого ранга имеем: $x\in\omega$

$$\overset{\circ}{y}(x)=\frac{1}{2(1-0.2h)}\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 0.5,\\ 1-x, & 0.5\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Поскольку точное решение исходной задачи (27) есть функция

$$u(x)=\begin{cases}0.5x, & 0\leqslant x\leqslant 0.5,\\ 0.5(1-x), & 0{,}5\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

то, как нетрудно заметить, имеет место оценка

$$\max_{x\in\omega}|u(x)-\overset{\circ}{y}(x)|=Ch. \tag{29}$$

Применяя оценку (25) теоремы 1 для схемы (28), получим $n=n_a=n_d=n_\varphi=2\left(1-\frac{1}{p}+\varepsilon\right)$. Тогда $2-n=\frac{2}{p}-2\varepsilon>1-3\varepsilon$ при $2<p<2/(1-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ — произвольное, т. е. усеченная схема нулевого ранга имеет почти первый порядок точности

$$\max_{x\in\omega}|u(x)-\overset{\circ}{y}(x)|\leqslant Ch^{1-\delta},\ \delta>0 \text{ — любое.} \tag{30}$$

Сравнивая оценки (29) и (30), убеждаемся в том, что полученная оценка точности усеченной схемы нулевого ранга почти оптимальна.

Отметим, что усеченная схема нулевого ранга совпадает с вариационно-разностной схемой, которая строится при помощи координатных функций, являющихся на отдельных подынтервалах решениями уравнения $(ku')'=0$. Исследование сходимости вариационно-разностных схем проводится в норме W_2^1 и основывается на оценке погрешности интерполяции при помощи таких функций, существенно используя гладкость решения задачи (см. [9], [10]). Поэтому вместе с исследованием сходимости вариационно-разностных схем в этом случае необходимо проводить и соответствующие исследования гладкости решения дифференциального уравнения в зависимости от гладкости коэффициентов.

В наших рассуждениях при построении и исследовании усеченных разностных схем мы использовали только существование решения задачи из класса W_2^1. Оценка скорости сходимости усеченных схем в сеточной норме C получена при помощи ее сравнения с точной схемой и, таким образом, использовалась только гладкость коэффициентов дифференциального уравнения. Как видно из теоремы 1, скорость сходимости усеченных схем повышается по мере повышения гладкости коэффициентов.

Заметим, что хотя методы исследования сходимости вариационно-разностных схем и усеченных схем нулевого ранга существенно отличаются, но результаты сходимости почти совпадают.

Представленная в настоящей работе методика, однако, дает возможность построить схемы повышенного порядка точности даже для дифференциальных уравнений с «плохими решениями». Она расширяет возможности метода однородных разностных схем А. Н. Тихонова и А. А. Самарского для задач с обобщенными решениями.

Литература

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности.— ДАН СССР, 1960, т. 131, № 3, с. 514—517.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах.— ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 1, с. 5—63.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках.— ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 3, с. 425—440.
4. *Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г.* Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 7, с. 1194—1205.
5. *Бурханов Ш. А., Макаров В. Л.* О точных и усеченных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.— Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 9, с. 1502—1514.
6. *Багмут И. Г.* Разностные схемы высокого порядка точности для уравнений типа Лежандра.— ЖВМ и МФ, 1972, т. 12, № 3.
7. *Балоян Н. М., Молокович Ю. М.* К вопросу о разностных схемах высокого порядка точности для ОДУ с регулярной особенностью.— Изв. ВУЗов. Матем., 1975, № 7.
8. *Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М.* Точные и усеченные разностные схемы для задачи Штурма — Лиувилля с вырождением.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1265—1275.
9. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1973.
10. *Федорова О. А.* Вариационно-разностная схема для одномерного уравнения диффузии.— Матем. заметки, 1975, т. 17, № 6, с. 893—898.
11. *Корнеев В. Г.* О точных сеточных схемах.— ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, № 3, с. 646—654.
12. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
13. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

София

Киев

Москва

Поступила в редакцию

10.X.1985