Итак, при $\alpha < \frac{a}{\gamma b}\beta$ получено, что $u(\alpha, \beta, \mu) \to \bar{u}_0^{(III)}\left(0, \beta - \frac{\gamma b}{a}\alpha\right)$, а это означает, что $u(x, t, \mu) \to \bar{u}_0^{(III)}$ при $\Lambda_1 t < x < \Lambda_3 t$, где $\bar{u}_0^{(III)}$ определяется формулой (13). Совершенно аналогично проводится исследование $v(x, t, \mu)$ в области $\Lambda_1 t < x < \Lambda_3 t$, а также обеих функций u и v в области $\Lambda_3 t < x < \Lambda_2 t$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.— М.: Изд-во МГУ, 1978.—106 с.
2. Цымбал В. Н.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 1, с. 27—30.
3. Сысоева Т. Н.— Методы малого параметра и их применение: Тез. лекций и кратких науч. сообщ. Всесоюз. школы-семинара. Минск: Ин-т мат. АН БССР, 1982, с. 114.
4. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др. Линейные уравнения математической физики.— М.: Наука, 1964.—368 с.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.—724 с.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 1 февраля 1983 г.

УДК 517.956

В. А. ГАЛАКТИОНОВ, С. П. КУРДЮМОВ, А. А. САМАРСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. II

В настоящей работе, которая является продолжением статьи [1], изучаются свойства решений параболической системы двух квазилинейных уравнений нелинейной теплопроводности с источниками

$$u_t = \Delta u^{\nu+1} + v^p, \tag{1.1}$$

$$v_t = \Delta v^{\mu+1} + u^q. \tag{1.2}$$

Здесь μ, ν, p, q — положительные постоянные. В [1] получены достаточные условия глобальной разрешимости при произвольных начальных функциях первой краевой задачи для уравнений (1.1), (1.2) с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$
$$u(t, x) = 0, \quad v(t, x) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \partial\Omega$$

(Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$).

В данной работе получены условия неразрешимости в целом (неограниченности решения) задачи при $p \geqslant (1+\mu)$, $q \geqslant (1+\nu)$ (см. § 4). В § 5 в случае $pq > (1+\mu)(1+\nu)$ показан способ выделения в пространстве начальных функций $\{u_0, v_0\}$ *множества устойчивости* $\mathscr{W}$ такого, что включение $\{u_0, v_0\} \in \mathscr{W}$ обеспечивает глобальную разрешимость задачи. В § 6 показано, что в случае $pq < (1+\mu)(1+\nu)$ задача (1.1)—(1.3) имеет глобальное решение при любых начальных функциях. В § 6 исследуется также глобальная разрешимость задачи в случае $pq = (1+\mu)(1+\nu)$. Полученные в § 6 результаты являются более сильными по сравнению с установленными в [1]. В § 7 рассматривается задача Коши для уравнений (1.1), (1.2) и показано, что при $pq < (1+\mu)(1+\nu)$ все ее неограниченные решения *не являются локализованными*, т. е. «волна горения» хотя бы одной из компонент u или v охватывает при $t \to T_0^-$ ($T_0 < +\infty$ — время существования решения) все пространство $\mathbf{R}^N$.

Последнее означает, что $\max\{u(t, x), v(t, x)\} \to +\infty$ при $t \to T_0^-$ всюду в $\mathbb{R}^N$.

Все результаты § 5—7 получены на основе единого метода, основанного на анализе построенного однопараметрического семейства стационарных решений системы уравнений (1.1), (1.2). Ранее этот метод использовался в [2, 3] (см. также [4]) при аналогичном исследовании квазилинейных параболических уравнений нелинейной теплопроводности с источником.

§ 4. УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ $p \geqslant 1+\mu$, $q \geqslant 1+\nu$

В этом параграфе при указанных значениях параметров в пространстве начальных функций выделяется множество неустойчивости $\mathscr{V}$ такое, что включение $\{u_0, v_0\} \in \mathscr{V}$ влечет за собой неразрешимость задачи (1.1)—(1.3) в целом. Последнее означает, что для некоторого $T_0 < +\infty$

$$\lim_{t \to T_0^-} (\|u^{\nu+1}\|_2^2 + \|v^{\mu+1}\|_2^2) = +\infty. \tag{4.1}$$

При доказательстве сформулированных ниже утверждений будем предполагать, что для всех $t \in (0, T_0)$ существует неотрицательное обобщенное решение задачи, удовлетворяющее включениям (2.21) в [1].

Обозначим через $w_1(x) \geqslant 0$ и $\lambda_1 > 0$ первую собственную функцию и отвечающее ей первое (наименьшее) собственное значение задачи

$$\Delta w + \lambda w = 0, \quad x \in \Omega; \quad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Функцию w_1 выберем таким образом, чтобы

$$\|w_1\|_1 = 1. \tag{4.2}$$

Тогда, скалярно умножая обе части уравнений (1.1), (1.2) на $w_1(x)$ и интегрируя получившиеся выражения по t, получим систему равенств

$$(u(t), w_1) - (u_0, w_1) = -\lambda_1 \int_0^t (u^{\nu+1}(s), w_1)\,ds + \int_0^t (v^p(s), w_1)\,ds, \tag{4.3}$$

$$(v(t), w_1) - (v_0, w_1) = -\lambda_1 \int_0^t (v^{\mu+1}(s), w_1)\,ds + \int_0^t (u^q(s), w_1)\,ds. \tag{4.4}$$

Введем обозначения (напомним, что $w_1 > 0$ в Ω)

$$a_0 = (u_0, w_1) \geqslant 0, \quad b_0 = (v_0, w_1) \geqslant 0 \tag{4.5}$$

и положим

$$P(t) = (u^{\nu+1}(t), w_1)^{\frac{1}{\nu+1}}, \quad R(t) = (v^{\mu+1}(t), w_1)^{\frac{1}{\mu+1}}. \tag{4.6}$$

Функции $P(t)$, $R(t)$ будем считать непрерывными для всех t из интервала времени существования решения. Из неравенства Гёльдера следует, что

$$\begin{gathered} (u(t), w_1) \leqslant (u^{\nu+1}(t), w_1)^{\frac{1}{\nu+1}} = P(t), \\ (v(t), w_1) \leqslant (v^{\mu+1}(t), w_1)^{\frac{1}{\mu+1}} = R(t). \end{gathered} \tag{4.7}$$

Кроме того, учитывая, что $p \geqslant 1+\mu$, $q \geqslant 1+\nu$, получим

$$(v^p(t), w_1) \geqslant R^p(t), \quad (u^q(t), w_1) \geqslant P^q(t). \tag{4.8}$$

Используя обозначения (4.5), (4.6) и оценки (4.7), (4.8), заключаем, что решение задачи (1.1)—(1.3) удовлетворяет при всех допустимых ются ограниченными при всех $t>0$, что свидетельствует о глобальной разрешимости задачи (см. § 3).

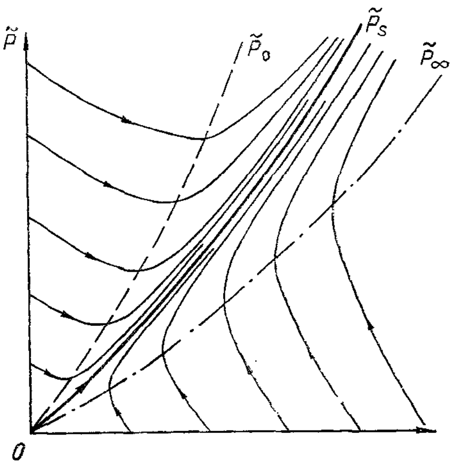
2. Случай $p>1+\mu$, $q>1+\nu$. Оставляя в силе введенное обозначение $E(t)=\tilde{P}(t)+\tilde{R}(t)$, из (4.11), (4.12) получим

$$\frac{dE}{dt}=-\lambda_1[\tilde{P}^{\nu+1}+\tilde{R}^{\mu+1}]+\tilde{R}^p+\tilde{P}^q. \qquad (4.22)$$

Выражения $\tilde{P}^q$ и $\tilde{R}^p$ оцениваем с помощью неравенства Юнга по формулам

$$\tilde{P}^q\geqslant(1+\lambda_1)\tilde{P}^{\nu+1}-A_0,\quad \tilde{P}\geqslant 0,$$

$$\tilde{R}^p\geqslant(1+\lambda_1)\tilde{R}^{\mu+1}-B_0,\quad \tilde{R}\geqslant 0,$$



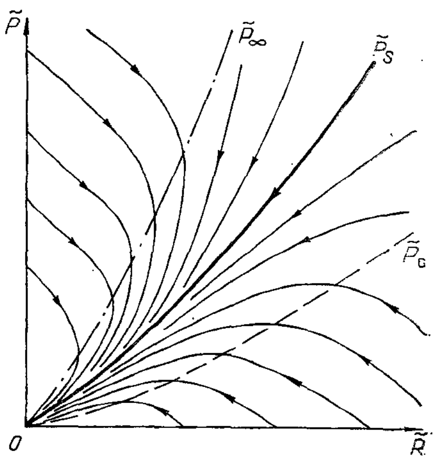


Рис. 1. Фазовая плоскость в случае $pq=(1+\mu)(1+\nu)$, $\lambda_1<1$

Рис. 2. Фазовая плоскость в случае $pq=(1+\mu)(1+\nu)$, $\lambda_1>1$

где постоянные A_0, B_0 имеют вид

$$A_0=(1+\lambda_1)\left[\frac{q-(\nu+1)}{q}\right]\left[\frac{(1+\lambda_1)(\nu+1)}{q}\right]^{\frac{\nu+1}{q-(\nu+1)}},$$

$$B_0=(1+\lambda_1)\left[\frac{p-(\mu+1)}{p}\right]\left[\frac{(1+\lambda_1)(\mu+1)}{p}\right]^{\frac{\mu+1}{p-(\mu+1)}}.$$

Из (4.22) тогда получим

$$\frac{dE}{dt}\geqslant\tilde{P}^{\nu+1}+\tilde{R}^{\mu+1}-C_0,\quad t>0;\quad C_0=A_0+B_0>0. \qquad (4.23)$$

Если $\mu=\nu$, то из (4.23) с помощью оценки (4.17) выводим неравенство

$$\frac{dE}{dt}\geqslant 2^{-\nu}E^{\nu+1}-C_0,\quad t\geqslant 0. \qquad (4.24)$$

Если же $\mu\neq\nu$, то, предполагая для определенности, что $\mu>\nu$, с учетом оценки

$$\tilde{R}^{\mu+1}\geqslant\tilde{R}^{\nu+1}-D_0,\quad D_0=\frac{\mu-\nu}{\mu+1}\left(\frac{\nu+1}{\mu+1}\right)^{(\nu+1)/(\mu-\nu)}$$

из (4.23) получаем

$$\frac{dE}{dt}\geqslant 2^{-\nu}E^{\nu+1}-(C_0+D_0). \qquad (4.2$$

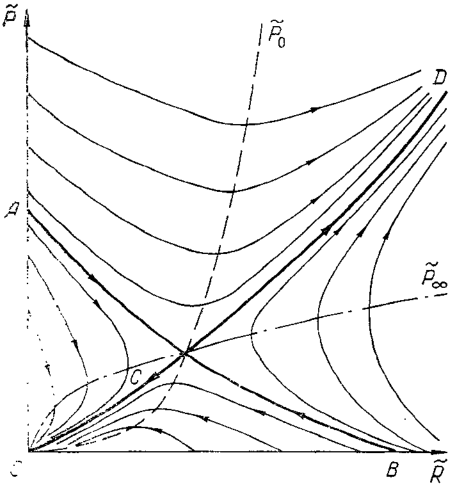
Нетрудно видеть, что правая часть (4.25) допускает предельный переход $\mu\to\nu^+$, т. е. это неравенство при $\mu=\nu$ совпадает с (4.24).

С помощью (4.24), (4.25) устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $p>1+\mu$, $q>1+\nu$ и для определенности $\mu\geqslant\nu$. Пусть начальные функции u_0, v_0 таковы, что*

$$E(0)=(u_0,\ w_1)+(v_0,\ w_1)>2^{\nu/(\nu+1)}(C_0+D_0)^{1/(1+\nu)}, \tag{4.26}$$

где C_0, D_0 — указанные выше постоянные.



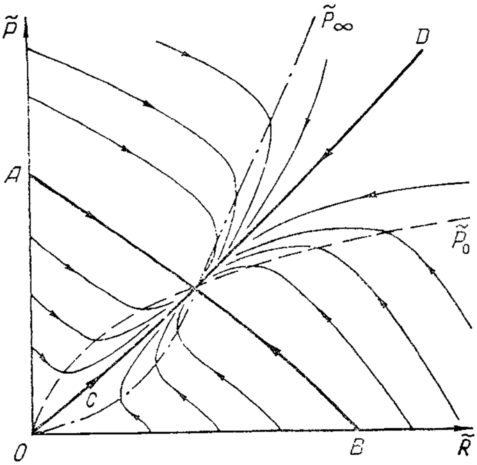


Рис. 3. Фазовая плоскость в случае $pq>(1+\mu)(1+\nu)$

Рис. 4. Фазовая плоскость в случае $pq<(1+\mu)(1+\nu)$

Тогда задача (1.1)—(1.3) не имеет глобального решения и при некотором $T_0<T_*$, где (см. (4.25))

$$T_*=2^\nu\int\limits_{E(0)}^{+\infty}\frac{d\eta}{\{\eta^{1+\nu}-2^\nu(C_0+D_0)\}}<+\infty,$$

выполняется условие (4.1).

Разумеется, функциями $\{u_0,\ v_0\}$, удовлетворяющими условию (4.26), не исчерпывается все множество неустойчивости $\mathscr{V}$. Теорема 2, хотя в ней и указана оценка сверху величины T_0, не использует всей информации, заложенной в системе (4.11), (4.12). Более полное и наглядное представление о множестве $\mathscr{V}$ получается на основе анализа поля интегральных кривых уравнения

$$\frac{d\tilde P}{d\tilde R}=\frac{\tilde R^p-\lambda_1\tilde P^{\nu+1}}{\tilde P^q-\lambda_1\tilde R^{\mu+1}},\quad \tilde P>0,\quad \tilde R>0, \tag{4.27}$$

эквивалентного этой системе. Его схематическое изображение приведено на рис. 3, где выделены изоклины нуля $\tilde P_0$: $\tilde P=[\lambda_1^{-1}\tilde R^p]^{1/(\nu+1)}$, бесконечности $\tilde P_\infty$: $\tilde P=[\lambda_1\tilde R^{\mu+1}]^{1/q}$ и жирными линиями — сепаратрисы AB, CD. К множеству неустойчивости $\mathscr{V}$ относятся все точки $\{\tilde P(0),\ \tilde R(0)\}=\{(u_0,\ w_1),\ (v_0,\ w_1)\}$, расположенные выше сепаратрисы AB. Лежащие здесь интегральные кривые сходятся при $\tilde R\to+\infty$ к сепаратрисе CD, причем $\tilde P\to+\infty$. Последнее обеспечивает неограниченное возрастание функций $\tilde P(t)$, $\tilde R(t)$ в течение конечного времени.

Отметим, что поведение интегральных кривых, лежащих ниже сепаратрисы AB, указывает на наличие у рассматриваемой задачи множества устойчивости $\mathscr{W}$. Здесь оно характеризуется тем, что $\tilde P(t)$, $\tilde R(t)\to0$

при $t \to +\infty$. Обоснованное построение множества $\mathscr{W}$ проводится в следующем параграфе.

Замечание. При выводе системы уравнений (4.11), (4.12), решения которой служат оценкой снизу для функций $P(t)$ и $R(t)$, существенным образом использовались условия $p \geqslant 1+\mu$, $q \geqslant 1+\nu$ (см. неравенства (4.8)). Тем не менее фазовая плоскость системы (4.11), (4.12) правильно отражает характерное поведение решения исходной задачи при произвольных значениях параметров. Нетрудно показать, что вид фазовой картины зависит от знака единственного параметра $m=pq-(1+\mu)(1+\nu)$, что правильно согласуется с результатами § 5, 6.

В частности, если $m=0$, т. е. $pq=(1+\mu)(1+\nu)$, то неразрешимость в целом или глобальная разрешимость задачи при произвольных начальных функциях u_0, v_0 имеет место соответственно в случаях $\lambda_1<1$ и $\lambda_1>1$ (фазовые портреты системы для этих двух случаев совпадают с изображенными на рис. 1 и 2). Сформулированное предположение согласуется с выводами § 6.

Если же $pq>(1+\mu)(1+\nu)$ $(m>0)$, то, как следует из анализа системы (4.11), (4.12), существуют непустые множества устойчивости и неустойчивости (рис. 3). Наличие непустого ограниченного множества устойчивости $\mathscr{W}$ при $pq>(1+\mu)(1+\nu)$ установлено в § 5.

В случае $m=pq-(1+\mu)(1+\nu)<0$ фазовая плоскость принимает вид, изображенный на рис. 4. Здесь траекторий, которым бы отвечали неограниченные решения, нет, т. е. множество устойчивости совпадает со всем пространством начальных функций. Доказательство этого факта представлено в § 6.

§ 5. МНОЖЕСТВО УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ $pq>(1+\mu)(1+\nu)$

В этом параграфе будут получены достаточные условия глобальной разрешимости задачи при $pq>(1+\mu)(1+\nu)$, $p\geqslant 1$, $q \geqslant 1$. При этом предполагается, что функции u и v принадлежат $C^{1,2}_{t,x}$ всюду, где они положительны. Кроме того, производные $\nabla(u^{1+\nu})$ и $\nabla(v^{1+\mu})$ будем считать непрерывными по x в Ω для всех допустимых $t>0$. Тогда решение задачи непрерывным и монотонным образом зависит от начальных функций.

1. Построение стационарного решения. Пусть $pq>(1+\mu)(1+\nu)$. Рассмотрим решение $\{U, V\}$ стационарной системы уравнений (1.1), (1.2), которую для удобства запишем в виде

$$\Delta(|U|^{\nu}U)+|V|^{p-1}V=0, \tag{5.1}$$

$$\Delta(|V|^{\mu}V)+|U|^{q-1}U=0, \quad x\in\Omega, \tag{5.2}$$

с условиями

$$U(x)=0, \quad V(x)=0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{5.3}$$

Сделаем в уравнениях (5.1), (5.2) замены $|U|^{\nu}U\to U$, $|V|^{\mu}V\to V$. Тогда для новых функций U, V получим

$$\Delta U+|V|^{\alpha-1}V=0, \tag{5.1$'$}$$

$$\Delta V+|U|^{\beta-1}U=0, \quad x\in\Omega, \tag{5.2$'$}$$

$$U(x)=V(x)=0, \quad x\in\partial\Omega, \tag{5.3$'$}$$

где введены обозначения $\alpha=p/(\mu+1)$, $\beta=q/(\nu+1)$ (отметим, что $\alpha\beta>1$). Выражая из первого уравнения функцию V по формуле $V=-|\Delta U|^{\frac{1}{\alpha}-1}\Delta U$ и подставляя во второе, для U получим задачу

$$-\Delta\left(|\Delta U|^{\frac{1}{\alpha}-1}\Delta U\right)+|U|^{\beta-1}U=0, \quad x\in\Omega, \tag{5.4}$$

$$U(x)=0, \quad \Delta U(x)=0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{5.5}$$

Пусть $1/\alpha<\beta<+\infty$ при $N\leqslant 2(1+1/\alpha)$ и $1/\alpha<\beta<[N/a+2(1+1/\alpha)]$, $[N-2(1+1/\alpha)]$, если $N>2(1+1/\alpha)$. Тогда, как следует из [5], задача (5.4), (5.5) имеет счетное множество различных нетривиальных решений, одно из которых является положительным в Ω, что вытекает из постановки соответствующей вариационной задачи. Отметим, что строгая положительность в Ω неотрицательного решения легко устанавливается с помощью эквивалентного (5.4), (5.5) интегрального уравнения полученного в результате обращения оператора $-\Delta(|\Delta U|^{1/\alpha-1}\Delta U)$:

$$U-\int_\Omega G(x,y)\left\{\left|\int_\Omega G(y,z)(|U|^{\beta-1}U)(z)\,dz\right|^{\alpha-1}\times\right.$$
$$\left.\times\int_\Omega G(y,z)(|U|^{\beta-1}U)(z)\,dz\right\}dy=0. \qquad (5.6)$$

Здесь $G(x,y)$ — функция Грина оператора $-\Delta U$, $U=0$ на $\partial\Omega$ (напомним, что $G>0$ в $\Omega\times\Omega$). В силу (5.6) мы вправе заключить, что U является классическим (положительным) решением задачи (5.4), (5.5) (см. [6, 7]). Тогда функция

$$V=-|\Delta U|^{\frac{1}{\alpha}-1}\Delta U=\int_\Omega G(x,y)\,U^\beta(y)\,dy \qquad (5.7)$$

также является положительной в Ω, принадлежит $C^2(\Omega)$ и удовлетворяет (5.2) в обычном смысле.

Замечание. В случае $N>2(1+1/\alpha)$ существование неотрицательного решения задачи (5.4), (5.5) установлено при дополнительном ограничении $\beta<[N/\alpha+2(1+1/\alpha)]/[N-2(1+1/\alpha)]$. Покажем, что это ограничение является существенным.

Пусть область Ω является звездной относительно точки $x=0$. Следуя [6], скалярно умножим обе части уравнения (5.4) на функцию

$$w(x)=\sum_{i=1}^N x_i\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Тогда, учитывая условия (5.5), с помощью формулы Грина получим

$$0=-(\Delta(|\Delta U|^{\frac{1}{\alpha}-1}\Delta U),\ w)+(U^\beta,\ w)=$$
$$=-(|\Delta U|^{\frac{1}{\alpha}-1}\Delta U,\ \Delta w)-\int_{\partial\Omega} w\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(|\Delta U|^{\frac{1}{\alpha}-1}\Delta U)\,ds-\frac{N}{\beta+1}\|U\|_{\beta+1}^{\beta+1}. \qquad (5.8)$$

Здесь $\partial/\partial\mathbf{n}$ — производная по единичной внешней нормали к границе $\partial\Omega$. Нетрудно убедиться, что при всех $x\in\partial\Omega$

$$w(x)\leqslant 0,\ \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(|\Delta U|^{\frac{1}{\alpha}-1}\Delta U)(x)\geqslant 0.$$

Справедливость этих неравенств вытекает из звездности области Ω, условий (5.5), а также предположений $U\geqslant 0$ и $\Delta U\leqslant 0$ (см. (5.7)) всюду в Ω. В силу указанных неравенств

$$-\int_{\partial\Omega} w\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(|\Delta U|^{\frac{1}{\alpha}-1}\Delta U)\,ds\geqslant 0,$$

и тогда из (5.8) с помощью тождества [6]

$$-\left(|\Delta U|^{\frac{1}{\alpha}-1}\Delta U,\ \Delta w\right)=\left(\frac{N}{1+\dfrac{1}{\alpha}}-2\right)\|\Delta U\|_{1+\frac{1}{\alpha}}^{1+\frac{1}{\alpha}}$$

получаем оценку

$$\left(\frac{N}{1+\dfrac{1}{\alpha}}-2\right)\|\Delta U\|_{1+\frac{1}{\alpha}}^{1+\frac{1}{\alpha}}-\frac{N}{\beta+1}\|U\|_{\beta+1}^{\beta+1}\leqslant 0.$$

Однако из (5.4) имеем $\|U\|_{\beta+1}^{\beta+1}=\|\Delta U\|_{1+\frac{1}{\alpha}}^{1+\frac{1}{\alpha}}$, и поэтому должно выполняться неравенство

$$\left(\frac{N}{1+\dfrac{1}{\alpha}}-2-\frac{N}{\beta+1}\right)\|\Delta U\|_{1+\frac{1}{\alpha}}^{1+\frac{1}{\alpha}}\leqslant 0. \tag{5.9}$$

Из (5.9) непосредственно следует, что при $\beta[N-2(1+1/\alpha)]>[N/\alpha+2(1+1/\alpha)]$ неотрицательным решением задачи может быть только функция $U(x)\equiv 0$.

2. Семейство стационарных решений. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получаем, что функции

$$U_1(x)=U^{1/(1+\nu)}(x),\quad V_1(x)=V^{1/(1+\mu)}(x)$$

являются решением задачи (5.1)—(5.3). С помощью этих функций будет построено семейство стационарных решений уравнений (1.1), (1.2).

Пусть область Ω является звездной относительно точки $x=0$, т. е. из условия $x\in\Omega$ вытекает, что $ax\in\Omega$ при любых $a\in(0,1)$. Нетрудно убедиться, что функции

$$U_a(x)=a^{2\frac{p+\mu+1}{pq-(\nu+1)(\mu+1)}}U_1(ax), \tag{5.10}$$

$$V_a(x)=a^{2\frac{q+\nu+1}{pq-(\nu+1)(\mu+1)}}V_1(ax), \tag{5.11}$$

где $a\in(0,1)$ — постоянная, удовлетворяют уравнениям (5.1), (5.2), причем $U_a>0$, $V_a>0$ в области Ω_a с границей $\partial\Omega_a=\{x\,|\,ax\in\partial\Omega\}$ и $U_a=V_a=0$ на $\partial\Omega_a$. Отметим, что $\Omega\subset\Omega_a$ при любых $a\in(0,1)$, так что $U_a>0$, $V_a>0$ на $\partial\Omega$.

3. Множество устойчивости. Пусть (неотрицательные) начальные функции u_0, v_0 задачи (1.1)—(1.4) принадлежат $C^2(\Omega)$ всюду, где они положительны, и $u_0^{1+\nu}$, $v_0^{1+\mu}\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. В указанных классах функций определим множество устойчивости $\mathscr{W}$ по формуле

$$\mathscr{W}=\{\{u_0,v_0\}\,|\,u_0\geqslant 0,\ v_0\geqslant 0;\ \text{существует такое } a\in(0,1),$$
$$\text{что } u_0\leqslant U_a \text{ и } v_0\leqslant V_a \text{ в } \Omega\}.$$

Теорема 5. *Пусть* $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$ *и, кроме того,* $\dfrac{(1+\mu)(1+\nu)}{p}<q<+\infty$ *в случае* $N\leqslant 2\left(1+\dfrac{\mu+1}{p}\right)$ *и*

$$\frac{(1+\mu)(1+\nu)}{p}<q<(1+\nu)\frac{N\dfrac{(1+\mu)}{p}+2\left(1+\dfrac{1+\mu}{p}\right)}{N-2\left(1+\dfrac{1+\mu}{p}\right)}, \tag{5.12}$$

если $N>2\left(1+\frac{1+\mu}{p}\right)$. *Пусть начальные функции таковы, что* $\{u_0, v_0\}\in\mathscr{W}$.

Тогда задача (1.1)—(1.4) имеет глобальное (ограниченное) решение.

Замечание 1. Условия $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$ связаны с требованием единственности решения задачи. Есть основания ожидать, что последнее имеет место при выполнении лишь одного условия $pq\geqslant 1$. Оно вытекает из анализа пространственно однородных решений $u=u_m(t)$, $v=v_m(t)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{du_m}{dt}=v_m^p,\quad \frac{dv_m}{dt}=u_m^q,\quad t>0. \tag{5.13}$$

При $pq\geqslant 1$ система (5.13) имеет лишь тривиальное решение, удовлетворяющее условиям

$$u_m(0)=0,\quad v_m(0)=0, \tag{5.14}$$

что свидетельствует о непрерывной зависимости решения исходной задачи от краевых данных. Напротив, в случае $pq<1$ задача (5.13), (5.14) имеет нетривиальное решение, и поэтому здесь, вообще говоря, теряется единственность решения (см. подобные примеры неединственности решений полулинейных параболических уравнений в [8, 9]).

Справедливость теоремы 5 прямо следует из принципа максимума. Действительно, в сделанных предположениях относительно гладкости решения при всех $t>0$ и $x\in\Omega$ выполняются неравенства $u(t, x)\leqslant U_a(x)$, $v(t, x)\leqslant V_a(x)$, где величина параметра $a\in(0, 1)$ такова, что $u_0(x)\leqslant U_a(x)$ и $v_0(x)\leqslant V_a(x)$ в Ω.

Замечание 2. Ограничение (5.12) не означает, что в случае $N>2\left(1+\frac{1+\mu}{p}\right)$ множество устойчивости $\mathscr{W}$ существует лишь при достаточно малых q. Просто в этом случае семейство стационарных решений следует строить несколько иным способом. Например, можно потребовать, чтобы вместо (5.3) выполнялись другие условия

$$U(x)=\rho_1(x)>0,\quad V(x)=\rho_2(x)>0,\quad x\in\partial\Omega,$$

при которых система (5.1), (5.2) является разрешимой, или даже искать ограниченные решения системы, определенные и положительные во всем пространстве $\mathbf{R}^N$. Приведем пример одного такого решения, представимого в явном виде.

Пусть $N>4$, $p=1+\mu$ и $q=(1+\nu)(N+4)/(N-4)$, т. е. условие (5.12) не выполнено. При указанных значениях параметров $\alpha=1$, $\beta=(N+4)/(N-4)$ и, как показано выше, при любой ограниченной звездной относительно некоторой точки области Ω задача (5.4), (5.5) нетривиального (неотрицательного) решения не имеет. Однако в этом случае уравнение (5.4)

$$-\Delta^2 U+|U|^{\frac{N+4}{N-4}-1}U=0,\quad x\in\mathbf{R}^N;\ N>4$$

имеет строго положительное в $\mathbf{R}^N$ решение *)

$$U(x)=\frac{C(a)}{(a^2+\|x\|^2)^{(N-4)/2}}>0,\quad x\in\mathbf{R}^N,$$

где $C(a)=[a^4N(N-4)(N^2-4)]^{(N-4)/8}$ и $a>0$ — произвольная постоянная. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получаем, что иско-

*) Это решение построено по аналогии с решением уравнения второго порядка $\Delta U-U^{(N+2)/(N-2)}=0$, $x\in\mathbf{R}^N$; $N>2$, рассмотренного в [10].

мым семейством стационарных решений, удовлетворяющих (5.1), (5.2), здесь будут функции

$$U_a(x) = \frac{[C(a)]^{\frac{1}{1+\nu}}}{(a^2+\|x\|^2)^{\frac{N-4}{2(1+\nu)}}},$$

$$V_a(x) = [-\Delta U(x)]^{\frac{1}{1+\mu}} = \frac{[2C(a)(N-4)]^{\frac{1}{1+\mu}}\left(\frac{Na^2}{2}+\|x\|^2\right)^{\frac{1}{1+\mu}}}{(a^2+\|x\|^2)^{\frac{N-4}{2(1+\mu)}}},$$

$$x\in\mathbf{R}^N.$$

Поэтому в случае $p=1+\mu$, $q=(1+\nu)(N+4)/(N-4)$, $N>4$ существует непустое множество устойчивости $\mathscr{W}$, определяемое по формуле

$$\mathscr{W}=\{\{u_0, v_0\}\,|\,u_0\geqslant 0,\ \ v_0\geqslant 0;\ \text{существует такое } a\in\mathbf{R}^1_+,$$

$$\text{что } u_0\leqslant U_a,\ v_0\leqslant V_a \text{ в } \Omega\}.$$

Отметим, что построенное здесь семейство функций $\{U_a, V_a\}$ аналогичным образом определит множество устойчивости задачи Коши для (1.1), (1.2).

4. Существование множества устойчивости при $pq>(1+\mu)(1+\nu)$. Покажем теперь, что непустое множество устойчивости $\mathscr{W}$ существует при выполнении лишь одного требования $pq>(1+\mu)(1+\nu)$ без ограничений типа (5.12). В этом случае задача (5.1) — (5.3) может не иметь решения. Однако, как уже упоминалось выше, для определения $\mathscr{W}$ путем построения системы стационарных решений достаточно убедиться в локальной разрешимости системы (5.1), (5.2) при достаточно малых $\|x\|$. Справедливо следующее утверждение, которое неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Лемма 1. *При произвольных p, q, μ, $\nu>0$ система уравнений*

$$\Delta U^{\nu+1}+U^p=0,\quad \Delta V^{\mu+1}+U^q=0 \tag{5.15}$$

имеет в шаре $\omega_N=\{x\,|\,\|x\|<\sqrt{2N}\}$ строго положительное радиально симметричное монотонно убывающее решение $U_1(r)$, $V_1(r)$ $(r=\|x\|)$, удовлетворяющее условиям

$$U(0)=1,\quad V(0)=1;\quad r^{N-1}U'(r)\,|_{r=0}=r^{N-1}V'(r)\,|_{r=0}=0. \tag{5.16}$$

При этом справедливы оценки

$$U_1(r)\geqslant\left(1-\frac{r^2}{2N}\right)^{1/(\nu+1)},\quad V_1(r)\geqslant\left(1-\frac{r^2}{2N}\right)^{1/(\mu+1)},\quad 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2N}. \tag{5.17}$$

Лемма 1 доказывается путем сведения задачи (5.15), (5.16) к эквивалентному интегральному уравнению

$$U^{\nu+1}(r)=1-\int_0^r\frac{d\rho}{\rho^{N-1}}\int_0^\rho\zeta^{N-1}d\zeta\left[1-\int_0^\zeta\frac{d\eta}{\eta^{N-1}}\int_0^\eta\xi^{N-1}U^q(\xi)\,d\xi\right]^{p/(\mu+1)},$$

которое анализируется с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. Оценки (5.17) и монотонность решения прямо следуют из (5.15).

Функции $U_1(r)$, $V_1(r)$ порождают однопараметрическое семейство (5.10), (5.11) стационарных решений уравнений (1.1), (1.2). Обозначим через ω_a^* шар $\{x\,|\,ax\in\omega_N\}$. Тогда функции U_a, V_a при любых $a>0$ определены и строго положительны в ω_a^*. Теперь можем определить множество устойчивости задачи (1.1)—(1.3) при $pq>(1+\mu)(1+\nu)$.

Теорема 6. *Пусть* $pq>(1+\mu)(1+\nu)$; $p, q\geqslant 1$. *Тогда задача* (1.1)—(1.3) *имеет непустое множество устойчивости, определяемое по формуле*

$$\mathscr{W}=\{\{u_0, v_0\}\,|\,u_0\geqslant 0,\ v_0\geqslant 0;\ \text{существует такое } a>0,$$
$$\text{что } \Omega\subseteq\omega_a^* \text{ и } u_0\leqslant U_a,\ v_0\leqslant V_a \text{ в } \Omega\}.$$

Доказывается эта теорема так же, как предыдущая.

§ 6. УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ $pq\leqslant(1+\mu)(1+\nu)$

В этом параграфе с помощью анализа построенного в § 5 семейства стационарных решений получен более сильный, чем в § 2,3 (см. [1]), результат о глобальной разрешимости задачи (1.1)—(1.3) при произвольных начальных функциях. Напомним, что в [1] глобальная разрешимость задачи при любых u_0, v_0 доказана в случаях $p<(1+\mu)$, $q<(1+\nu)$ (§ 2) или $p=(1+\mu)$, $q=(1+\nu)$, $\lambda_1>1$ (§ 3). При доказательстве сформулированных ниже утверждений считаются выполненными предположения о достаточной регулярности решения, сделанные в § 5.

1. Случай $pq<(1+\mu)(1+\nu)$.

Теорема 7. *Пусть* $pq<(1+\mu)(1+\nu)$, $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$. *Тогда задача* (1.1)—(1.3) *имеет глобальное (ограниченное) решение при произвольных начальных функциях* u_0, $v_0\in C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу условия $pq<(1+\mu)(1+\nu)$ функции $U_a(x)$, $V_a(x)$ из семейства стационарных решений (5.10), (5.11), где U_1, V_1 определены в лемме 1 (см. п. 4 § 5), обладают тем свойством, что $U_a\to+\infty$, $V_a\to+\infty$ при $a\to 0^+$ всюду в $\mathbf{R}^N$. Поэтому в случае любой ограниченной области Ω при произвольных начальных функциях u_0, $v_0\in C(\overline{\Omega})$ всегда можно указать такое $a>0$, что $\Omega\subset\omega_a^*=\{x\,|\,ax\in\omega_N\}$ и $u_0(x)\leqslant U_a(x)$, $v_0(x)\leqslant V_a(x)$ всюду в Ω. Тогда, поскольку $U_a(x)>0$, $V_a(x)>0$ на $\partial\Omega$ (т. е. $u(t, x)\leqslant U_a(x)$, $v(t, x)\leqslant V_a(x)$ на $\partial\Omega$ при любых $t>0$), в силу принципа максимума заключаем, что $u(t, x)\leqslant V_a(x)$, $v(t, x)\leqslant V_a(x)$ всюду в $\overline{\Omega}$ при всех $t>0$, т. е. решение является ограниченным равномерно по $t>0$.

2. Случай $pq=(1+\mu)(1+\nu)$. Здесь существование решения задачи (1.1)—(1.3) в целом будет зависеть от разрешимости системы стационарных уравнений (5.1)—(5.3). Ниже будет доказан следующий весьма наглядный (но не оптимальный по виду допустимых областей Ω) результат.

Теорема 8. *Пусть* $pq=(1+\mu)(1+\nu)$, $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$. *Пусть диаметр* D_Ω *области* Ω *удовлетворяет условию*

$$D_\Omega<\sqrt{2N}. \tag{6.1}$$

Тогда задача (1.1)—(1.3) *имеет глобальное решение при любых начальных функциях* u_0, $v_0\in C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. При $pq=(1+\mu)(1+\nu)$ выражения (5.10), (5.11) не определены. Однако в этом случае, как нетрудно проверить, существует такое семейство стационарных решений уравнений (1.1), (1.2):

$$U_a(x)=aU_1(r),\quad V_a(x)=a^{q/(\mu+1)}V_1(r),\quad x\in\omega_N, \tag{6.2}$$

где $a>0$ — параметр, функции U_1 и V_1 определены в лемме 1. Из оценок (5.17) непосредственно следует, что $U_a(x)$, $V_a(x)\to+\infty$ при $a\to+\infty$ всюду в ω_N.

Условие (6.1) означает, что область Ω можно поместить в шар радиуса $\sqrt{2N}$. Без ограничения общности будем считать, что $\overline{\Omega}\subset\omega_N$. Тогда, как следует из (6.2), при любых начальных функциях $u_0, v_0 \in C(\overline{\Omega})$ найдется такое достаточно большое $a>0$, что $u_0(x) \leqslant U_a(x)$, $v_0(x) \leqslant V_a(x)$ всюду в Ω. Отсюда, учитывая, что $\overline{\Omega} \subset \omega_N$ (и поэтому U_a, $V_a>0$ на $\partial\Omega$), в силу принципа максимума имеем $u(t, x) \leqslant U_a(x)$, $v(t, x) \leqslant V_a(x)$ в $\overline{\Omega}$ при всех $t>0$.

Замечание. Необходимым (и, по-видимому, достаточным) условием разрешимости задачи (5.4), (5.5) при $\alpha\beta=1$ является неравенство $\lambda_1>1$. Разрешимость (5.4), (5.5), как показывает доказательство теоремы 8, влечет за собой глобальную разрешимость задачи (1.1)—(1.3), $pq=(1+\mu)(1+\nu)$ при любых u_0, v_0. Отметим, что условие разрешимости $\lambda_1>1$ вытекает из качественных выводов § 4.

§ 7. О ЛОКАЛИЗАЦИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Оказывается, что пространственная структура семейства стационарных решений содержит в себе информацию об одном довольно тонком свойстве неограниченных решений задачи Коши для уравнений (1.1), (1.2) — свойстве локализации (см. об этом необычном свойстве режимов горения с обострением в обзоре, содержащемся в § 1 работы [1]).

В соответствии с [11—16] неограниченное решение $\{u, v\}$ задачи Коши для (1.1), (1.2) с финитными начальными функциями

$$u(0, x)=u_0(x) \geqslant 0, \quad v(0, x)=v_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$
$$u_0, v_0 \in C(\mathbf{R}^N), \quad \operatorname{mes} \operatorname{supp}(u_0+v_0)<+\infty \tag{7.1}$$

будем называть *локализованным*, если при всех $t \in [0, T_0)$, где $T_0 \in \mathbf{R}^1_+$ — время существования решения, функции $u(t, x)$, $v(t, x)$ отличны от нуля только внутри некоторого шара $\{x \in \mathbf{R}^N \mid \|x\|<L<+\infty\}$ (L не зависит от t) и тождественно равны нулю при $\|x\| \geqslant L$. Если же при $t \to T_0^-$ (т. е. по мере возрастания решения до бесконечности) возмущения проникают как угодно далеко от точки $x=0$, то локализация в задаче Коши отсутствует.

Ранее (см. [17—19]) условия локализации решений задачи Коши для систем квазилинейных уравнений типа (1.1), (1.2) изучались с помощью построения автомодельных решений, которые, однако, существуют не при всех значениях параметров (отметим, что вопрос о существовании и асимптотической устойчивости этих решений остается открытым). Так, для уравнений (1.1), (1.2) автомодельные решения возможны лишь в случае $\nu(p+1)=\mu(q+1)$.

С помощью анализа семейства стационарных решений удается получить достаточные условия отсутствия локализации в задаче Коши (1.1), (1.2), (7.1) при произвольных значениях параметров, принадлежащих некоторой «замкнутой» области.

Теорема 9. *Пусть* $1<pq<(1+\mu)(1+\nu)$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. *Тогда любое неограниченное решение задачи Коши (1.1), (1.2), (7.1) не является локализованным.*

Замечание. Неравенство $pq>1$ является необходимым условием существования неограниченных решений задачи Коши. Это прямо следует из анализа ее пространственно однородных решений, удовлетворяющих системе уравнений (5.13).

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\max\{u(t, 0), v(t, 0)\} \to +\infty$ при $t \to T_0^- < +\infty$.

Рассмотрим семейство стационарных решений (5.10), (5.11), где U_1, V_1 определены в лемме 1. Функции U_a, V_a определены и строго положительны в $\omega_a^*=\{x \mid ax \in \omega_N\}$. В силу условия $pq<(1+\mu)(1+\nu)$ функции U_a, V_a неограниченно возрастают при $a \to 0^+$ во всем пространстве $\mathbf{R}^N$.

Поэтому можно указать такое $a_0\in(0, 1)$, что при всех $a\in(0, a_0]$ $\mathrm{supp}\,(u_0+v_0)\subset\omega_a^*$ и $u_0(x)\leqslant U_a(x)$, $v_0(x)\leqslant V_0(x)$ всюду в ω_a^*.

Фиксируем произвольное $a\in(0, a_0]$. Тогда, как следует из принципа максимума, решение $u(t, x)$, $v(t, x)$ не может превзойти функции $U_a(x)$, $V_a(x)$ внутри области ω_a^* до тех пор, пока $u(t, x)\leqslant U_a(x)$, $v(t, x)\leqslant V_a(x)$ на $\partial\omega_a^*$ (и тем самым пока $\mathrm{supp}\,(u+v)\subset\omega_a^*$). Поэтому в силу неограниченности решения $u(t, x)$, $v(t, x)$ при любых $a\in(0, a_0]$ существует такое $t_a<T_0$, что $\mathrm{supp}\,[u(t_a, x)+v(t_a, x)]\bar{\in}\omega_a^*$. Отсюда предельным переходом $a\to0^+$ получаем нужный результат.

Замечание. В случае $pq\geqslant(1+\mu)(1+\nu)$ условие U_a, $V_a\to+\infty$ при $a\to0^+$ всюду в $\mathbf{R}^N$ не выполняется и тем самым теорема перестает быть справедливой. Это в какой-то степени свидетельствует о локализации неограниченных решений при $pq\geqslant(1+\mu)(1+\nu)$.

Аналогичным способом устанавливается справедливость такого утверждения.

Теорема 10. *Пусть* $1<pq<(1+\mu)(1+\nu)$, $p\geqslant1$, $q\geqslant1$. *Пусть начальные функции* u_0, v_0 *являются радиально симметричными.*

Тогда если решение задачи Коши (1.1), (1.2), (7.1) является неограниченным, то при любых фиксированных $x\in\mathbf{R}^N$

$$\max\{u(t, x), v(t, x)\}\to+\infty,\quad t\to T_0^-,$$

т. е. хотя бы одна из функций u или v возрастает до бесконечности при $t\to T_0^-$ *сразу во всем пространстве*).*

Замечание 1. Для квазилинейных параболических уравнений нелинейной теплопроводности достаточно общего вида подобные теоремы об отсутствии локализации доказаны в [2—4].

Замечание 2. Интересно сопоставить результаты, сформулированные в теоремах 9 и 10, с качественными выводами, полученными на основе построения неограниченных автомодельных решений задачи Коши для уравнений (1.1), (1.2).

Пусть

$$\nu(p+1)=\mu(q+1) \tag{7.2}$$

и $q>\mu/\nu$. Тогда, как нетрудно убедиться, задача Коши для (1.1), (1.2) допускает неограниченные автомодельные решения вида

$$u_A(t, x)=(T_0-t)^{-\mu/(q\mu-\nu)}\theta(\xi), \tag{7.3}$$

$$v_A(t, x)=(T_0-t)^{-\nu/(q\mu-\nu)}f(\xi), \tag{7.4}$$

$$\xi=\frac{x}{(T_0-t)^n},\quad n=\frac{q\mu-\nu(\mu+1)}{2(q\mu-\nu)}, \tag{7.5}$$

$$T_0=\mathrm{const}\in\mathbf{R}_+^1,$$

где функции $\theta\geqslant0$, $f\geqslant0$ удовлетворяют следующей эллиптической системе уравнений, которая получается после подстановки с учетом (7.2) выражений (7.3), (7.4) в уравнения (1.1), (1.2):

$$\begin{gathered}\Delta_\xi\theta^{\nu+1}-n\nabla_\xi\theta\cdot\xi-\frac{\mu}{(q\mu-\nu)}\theta+f^p=0,\\ \Delta_\xi f^{\mu+1}-n\nabla_\xi f\cdot\xi-\frac{\nu}{(q\mu-\nu)}f+\theta^q=0,\quad \xi\in\mathbf{R}^N.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Предположим, что система (7.6) имеет в $\mathbf{R}^N$ нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям $\theta(\xi)\to0$, $f(\xi)\to0$ при $\|\xi\|\to+\infty$.

*) Нетрудно показать, что u и v могут обращаться в бесконечность только одновременно.

Тогда, как следует из вида «автомодельной координаты» ξ (см. (7.5)), локализация решения $\{u_A, v_A\}$ или ее отсутствие зависит от знака параметра $l=q\mu-\nu(\mu+1)$. «Критическое» значение $l=0$ (т. е. $q=\nu(\mu+1)/\mu$) разделяет область изменения параметров задачи на две части: при $l\geq 0$ $(q\geq\nu(\mu+1)/\mu)$ автомодельное решение локализовано, а при $l<0$ $(q<\nu(\mu+1)/\mu)$ локализация отсутствует, причем $u_A(t, x)$, $v_A(t, x)\to+\infty$ при $t\to T_0^-$ всюду в $\mathbf{R}^N$.

Сопоставим теперь «автомодельное» «критическое» значение

$$q_*=\frac{\nu}{\mu}(\mu+1) \tag{7.7}$$

с «критическим» значением

$$(pq)_*=(1+\mu)(1+\nu), \tag{7.8}$$

которое дает изложенная выше теория стационарных решений. Из (7.2) в силу (7.7) имеем $p_*=\frac{\mu}{\nu}(q_*+1)-1=\frac{\mu}{\nu}(\nu+1)$. Отсюда $p_*q_*=$ $=(1+\mu)(1+\nu)$, что совпадает с (7.8). Таким образом, в «автомодельной» области значений параметров сформулированное в теоремах 9 и 10 условие отсутствия локализации неограниченных решений $pq<(1+\mu)\times$ $\times(1+\nu)$ является не только достаточным, но и необходимым *). Существует ряд свидетельств того, что этот вывод остается в силе и без выполнения «автомодельного» условия (7.2).

Замечание 3. Отметим (см. [3]), что анализ семейства стационарных решений дает определенную информацию о свойствах решения задачи Коши и в случае $pq\geq(1+\mu)(1+\nu)$, когда, как следует ожидать, оно является локализованным. Например, справедливо следующее утверждение, которое доказывается так же, как теорема 9, с использованием семейства стационарных решений (6.2).

Предложение. *Пусть* $pq=(1+\mu)(1+\nu)$, $p\geq 1$, $q\geq 1$. *Пусть начальные функции* u_0, v_0 *являются радиально симметричными и, кроме того,* $\operatorname{supp}(u_0+v_0)\subset\omega_N$. *Тогда если решение задачи Коши (1.1), (1.2), (7.1) является неограниченным, то*

$$\max\{u(t, x), v(t, x)\}\to+\infty,\quad t\to T_0^-$$

при любых $x\in\omega_N$.

Другими словами, неограниченное решение задачи Коши при $pq=$ $=(1+\mu)(1+\nu)$ не может быть локализовано в шаре с радиусом, меньшим чем $\sqrt{2N}$.

§ 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в [1] и в данной работе результаты дают основание надеяться, что основные наиболее характерные свойства решений системы уравнений (1.1), (1.2), содержащей четыре параметра μ, ν, p и q, зависят лишь от одного параметра $m=pq-(1+\mu)(1+\nu)$. Знак «управляющего» параметра m, с одной стороны, определяет условия глобальной разрешимости краевой задачи (1.1)—(1.3), а с другой — дает критерий локализации неограниченных решений задачи Коши.

Таким образом, в этом смысле многопараметрическая система (1.1), (1.2) не отличается от квазилинейного параболического уравнения

$$u_t=\Delta u^{\sigma+1}+u^\beta,$$

содержащего лишь два параметра $\sigma>0$ и $\beta>1$. Здесь особенности эволюции решений краевой задачи и задачи Коши зависят от знака параметра $d=\beta-(\sigma+1)$ (см. [11—16], [2—4] и обзор в [1]).

*) В случае одного квазилинейного параболического уравнения аналогичные примеры приведены в [2—4].

Литература

1. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 12, с. 2123—2140.
2. Галактионов В. А. Некоторые свойства решений квазилинейных параболических уравнений.— М., 1981.—28 с. (Препринт/ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 16).
3. Галактионов В. А.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 5, с. 1035—1040.
4. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362—1364.
5. Похожаев С. И.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 6, с. 1327—1331.
6. Похожаев С. И.— Мат. сб., 1970, т. 82, № 2, с. 192—212.
7. Berger M.— Trans. of Amer. Math. Soc., 1965, vol. 120, p. 145—184.
8. Fujita H., Watanabe S.— Commun. on Pure and Appl. Math., 1968, vol. 21, p. 631—652.
9. Redheffer R., Walter W.— Math. Zeit., 1977, Bd 153, S. 229—236.
10. Loewner C., Nirenberg L. Partial differential equations invariant under conformal projective transformations.— In: Contributions to Analysis, Academic Press, 1974, p. 245—272.
11. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321—324.
12. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением.— М., 1976.—67 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 74).
13. Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В. и др.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.
14. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вып. 9, с. 620—624.
15. Курдюмов С. П.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217—243.
16. Курдюмов С. П. Локализация диффузионных процессов и возникновение структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением.— Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: Ин-т прикл. мат. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1979.
17. Галактионов В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Влияние выгорания на локализацию горения и образование структур в нелинейных средах.— М., 1979.—37 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 27).
18. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.—Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 5, с. 1084—1088.
19. Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Нестационарные диссипативные структуры в двухкомпонентных средах.— М., 1981.—27 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 19).

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 28 июня 1983 г.

УДК 517.982

Я. В. РАДЫНО

ВЕКТОРЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ОПЕРАТОРНОМ ИСЧИСЛЕНИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

В настоящей работе предлагается конструкция, позволяющая по замкнутому неограниченному оператору в банаховом пространстве построить шкалу инвариантных относительно этого оператора банаховых пространств, на которых этот оператор ограничен, причем сохраняются основные спектральные характеристики. Тем самым эта конструкция позволяет изучать свойства решений дифференциально-операторных уравнений с неограниченными операторами путем сведения их к аналогичным уравнениям с ограниченными операторами.

Построенные инвариантные подпространства названы пространствами векторов экспоненциального типа. Установлен признак нетривиальности пространств таких векторов, содержащий в себе, как частный случай, известную теорему С. Н. Бернштейна о плотности функций экспоненциального типа в классе ограниченных равномерно непрерыв-