ДЕКАБРЬ 1985 г., ТОМ XXI, № 12

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

Ф. В. БУНКИН, В. А. ГАЛАКТИОНОВ, Н. А. КИРИЧЕНКО,
С. П. КУРДЮМОВ, А. А. САМАРСКИЙ

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ЛАЗЕРНОЙ ТЕРМОХИМИИ. II

В настоящей работе продолжается начатое в [1] исследование нелинейной краевой задачи для параболического уравнения в неограниченной области

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\Delta T\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2},\quad t>0,\quad r\geqslant 0,\quad z>0, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0}=I_0\Theta\left(\frac{r}{r_0}\right)+\exp\left(-\frac{1}{T}\right),\quad t>0,\quad r\geqslant 0, \tag{2}$$

$$T(0,r,z)=T_0(r,z)\geqslant 0,\quad r\geqslant 0,\quad z>0. \tag{3}$$

В [1], где содержится постановка этой задачи, возникающей в лазерной термохимии, рассмотрена соответствующая стационарная (эллиптическая) задача и доказано существование такой функции $h=h(s)>0$, $s>0$, что при всех*) $I_0<h(r_0)$ стационарное решение существует, а при $I_0>h(r_0)$ оно отсутствует. В [1] также установлена устойчивость минимального стационарного решения снизу.

В данной работе в § 4 изучается задача (1)—(3) при $T_0\equiv 0$ в случае $I_0>h(r_0)$, когда стационарных решений нет. В заключительном § 5 качественным методом нестационарного осреднения проводится анализ устойчивости всех возможных стационарных решений.

§ 4. О НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ В ОТСУТСТВИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

В этом параграфе рассматривается случай $I_0>h(r_0)$, когда, как установлено в [1, § 2], стационарная задача неразрешима. Естественно, это в корне меняет все свойства решения нестационарной задачи (1)—(3) при

$$T_0(r,z)\equiv 0,\quad (r,z)\in\Omega=\{r\geqslant 0,\ z>0\}$$

(всюду в § 4 это условие считается выполненным). Прежде всего здесь без труда доказывается

Лемма 7. *Пусть $I_0>h(r_0)$. Тогда $T(t,r,z)\to+\infty$, $t\to+\infty$ всюду в Ω.*

Напомним (лемма 5 в [1]), что решение задачи (1)—(3) является критическим, т. е. $T_t\geqslant 0$ при всех $t>0$, $(r,z)\in\Omega$.

Ниже получены оценки сверху и «снизу» эволюции нестационарного процесса на оси $r=0$.

*) Здесь $I_0>0$ и $r_0>0$ играют соответственно роль интенсивности и ширины пучка лазерного излучения с пространственным распределением, определяемым функцией $\Theta=\Theta(\xi)>0$, $\xi\geqslant 0$.

Теорема 7. *Справедлива оценка*

$$T(t,\ 0,\ z)\leqslant[I_0+1]t^{1/2}g\left(\frac{z}{t^{1/2}}\right),\quad z>0, \tag{4.1}$$

где $g(\eta)>0$ — *вырожденная гипергеометрическая функция, удовлетворяющая задаче*

$$g''+\frac{1}{2}g'\eta-\frac{1}{2}g=0,\quad \eta>0;\quad g(0)=1,\quad g(+\infty)=0.$$

Доказательство. Из (2) следует, что $-\partial T/\partial z|_{z=0}<I_0+1$, поэтому функция $v(t,\ z)$, удовлетворяющая задаче

$$\begin{gathered} v_t=v_{zz},\quad t>0,\quad z>0,\\ -\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0}=I_0+1,\quad z>0;\quad v(0,\ z)=0,\quad z>0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

является верхним решением исходной задачи. В то же время $v(t,\ z)$ в точности совпадает с выражением (автомодельным решением задачи (4.2)), стоящим в правой части (4.1).

Для определения характера пространственного профиля тепловой волны в зависимости от величины ее амплитуды в центре $r=0$, $z=0$ воспользуемся методом, основанным на анализе семейства стационарных решений (см. [2, 3]).

Теорема 8. *Пусть* $I_0>h(r_0)$. *Тогда* *)

$$T(t,\ 0,\ z)>\left\{T(t,\ 0,\ 0)-\left[I_0+\exp\left(-\frac{1}{T(t,\ 0,\ 0)}\right)\right]z\right\}^+,\quad t>0. \tag{4.3}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что семейство стационарных решений уравнения (1)

$$U(z)=U_m\left\{1-\frac{z}{z_m}\right\}^+,\quad z>0, \tag{4.4}$$

где $z_m=U_m[I_0+\exp(-1/U_m)]^{-1}$ и $U_m>0$ — параметр семейства (его максимальное значение $U(0)=U_m$), является в то же время семейством верхних решений задачи (1)–(3) в любой полосе $\{r>0,\ 0<z<z^*_m<z_m\}$ для всех $t>0$, таких, что $T(t,\ 0,\ z^*_m)\leqslant U\ (z^*_m)$. Это прямо следует из того, что $U(z)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} \Delta U(z)=0,\quad r>0,\quad 0<z<z_m,\\ -\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=0}=I_0+\exp\left(-\frac{1}{U(0)}\right)\geqslant I(r)+\exp\left(-\frac{1}{U(0)}\right),\quad r>0,\\ U(0)=U_m;\quad I(r)=I_0\Theta\left(\frac{r}{r_0}\right). \end{gathered}$$

Таким образом, $T(t,\ r,\ z)\leqslant U(z)$ при всех $r>0$, $0<z<z^*_m$ до тех пор, пока $T(t,\ 0,\ z^*_m)$ не превзойдет $U(z^*_m)>0$. Фиксируем произвольные $U_m>0$ и $0<z^*_m<z_m$. Тогда из принципа максимума в силу произвольности z^*_m следует, что амплитуда нестационарного решения $T(t,\ 0,\ 0)$, которая, как показано в лемме 7, неограниченно возрастает при $t\to+\infty$, не может превзойти величины $U_m=U(0)$ до тех пор, пока $T(t,\ 0,\ z)$ не станет больше $U(z)$ при всех $z>0$. Отсюда для любого $U_m>0$ найдется такое $t_m>0$, что $T(t_m,\ 0,\ z)>U(z)$ при всех $z>0$ и при этом $T(t_m,\ 0,\ 0)=U_m$, что с учетом конкретного вида функций $U(z)$ в (4.4) дает оценку (4.3).

Замечание. Неравенство (4.3) позволяет оценить закон движения эффективной глубины проникновения тепловой волны $z_{эф}(t)$ вдоль

---

*) Здесь введено обозначение $\{s\}^+=s$, если $s>0$, и $\{s\}^+=0$, если $s\leqslant0$.

оси $r=0$, определяемой в каждый момент времени как полуширина пространственного профиля из равенства $T(t, 0, z_{эф}(t))=(1/2)T(t, 0, 0)$. В силу монотонности T по z (см. лемму 5 в [1]) функция $z_{эф}(t)$ определяется однозначно. Из (4.3) вытекает такая оценка:

$$z_{эф}(t)>\frac{1}{2}T(t, 0, 0)\left[I_0+\exp\left(-\frac{1}{T(t, 0, 0)}\right)\right]^{-1}, \quad t>0.$$

В частности, $z_{эф}(t)\geqslant\frac{1}{2[I_0+1]}T(t, 0, 0)$ при всех достаточно больших t. Если исходить из того, что $T(t, 0, 0)\simeq O(t^{1/2})$ (это предположение в силу теоремы 7 является довольно естественным), то эта оценка принимает вид $z_{эф}(t)\simeq O(t^{1/2})$.

§ 5. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Задача (1)—(3) может иметь неединственное стационарное состояние: в некоторых случаях их два, в других — четыре (см. [1, 2]). В связи с этим возникает важный вопрос исследования устойчивости стационарных решений. Исчерпывающее строгое исследование здесь провести не удается, поэтому ниже в указанных целях применяется качественная теория нестационарного осреднения, предложенная и реализованная в [4, 5] для анализа существенно нестационарных процессов (режимов с обострением) и эффекта локализации тепла в сплошных средах с нелинейной теплопроводностью и объемным энерговыделением. Идея нестационарного осреднения состоит в «замене» уравнения с частными производными (+краевое условие) на систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию со временем образующейся тепловой структуры, которая характеризуется двумя параметрами — амплитудой (максимальной температурой в центре $r=z=0$) и шириной, одинаковой в силу особенностей диффузии тепла по координатам r и z.

Следуя [4, 5], будем искать «приближенное» решение задачи (1)—(3) в виде

$$T_m(t, r, z)=\psi(t)f(\xi, \eta), \quad \xi=\frac{r}{\varphi(t)}, \quad \eta=\frac{z}{\varphi(t)}, \tag{5.1}$$

где $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ — неизвестные амплитуда и полуширина тепловой структуры, а $f(\xi, \eta)\geqslant0$, $f(0, 0)=1$ — фиксированная специальным образом подобранная функция. Будем считать, что ее носитель $\omega_*=\operatorname{supp} f$ с одной стороны ограничен плоскостью $\partial\Omega$, а с другой — границей $\partial\omega_*$, образованной гладкой кривой $z=P(r)$, где функция P — четная, $P'<0$, $P(0)=1$ и $P(+\infty)=0$. Введем обозначение: $\omega_t=\{(r, z)\in\Omega \mid (r/\varphi(t), z/\varphi(t))\in\omega_*\}$. Обозначим через $\partial/\partial n_*$ и $\partial/\partial n_t$ производные по направлению внешней нормали n_* и n_t к границам $\partial\omega_*$ и $\partial\omega_t$ соответственно. Другие требования на функцию f будут сформулированы в дальнейшем.

Прежде чем переходить к конкретной реализации метода осреднения, отметим, что его можно рассматривать как один из способов радиально-сферического расслоения пространства решений нестационарной задачи. В настоящее время хорошо известен метод сферического расслоения банахова пространства [6, 7], который в ряде случаев позволяет дать исчерпывающее описание условий разрешимости потенциальных нелинейных эллиптических задач в ограниченных областях. Исследование таких задач сводится к минимизации (отысканию критических точек) функционала $\Phi=\Phi(u)$, отвечающего данной задаче, т. е. таких u, для которых $\Phi_u'(u)=0$. В соответствии с методом критические точки ищутся в виде $u=r(v)v$, где $r\in R^1$ — скалярный параметр (функционал), а v — элемент единичной сферы исходного банахова пространства. Величина $r=r(v)$ как бы определяет «радиус» решения в банаховом пространстве.

В [6, 7] при весьма широких предположениях показано, что задача может быть «эквивалентна» системе двух уравнений: $\Phi_r'(rv)=0$ и

$\Phi'_v(rv)=0$, причем реализуемость сферического расслоения определяется первым скалярным уравнением относительно $r=r(v)$. Анализ системы в ряде случаев провести значительно проще, чем одного исходного уравнения $\Phi'_u(u)=0$. При этом оказывается, что уравнение $\Phi'_v(rv)=$ $=0$, как правило, правильно описывает число и характер ветвления «неотрицательных» решений. Это, например, справедливо для полулинейных эллиптических задач второго порядка, о чем говорит сравнение с результатами, помещенными в обзоре [8]. Следует подчеркнуть, что метод сферического расслоения позволяет систематизировать и с других позиций обосновать огромное многообразие результатов исследования нелинейных эллиптических задач.

В случае неограниченной области следует, вообще говоря, проводить более общее радиально-сферическое расслоение, т. е. искать решение в виде $u=rv\left(\dfrac{x}{p}\right)$, где $r=r(v)$, $p=p(v)$ — функционалы, играющие роль «амплитуды» и «ширины» решения. Последнюю необходимо ввести именно из-за неограниченности области, что дает дополнительную «степень свободы». Если теперь предположить, что задача нестационарна и $r=r(v,t)$, $p=p(v,t)$, то мы приходим к представлению (5.1). Скалярные уравнения для функционалов r, p (в данном случае это обыкновенные дифференциальные уравнения для $\psi(t)$ и $\varphi(t)$) будут ниже получены из некоторых качественных соображений.

Естественно, T_m не может удовлетворять (1) — (3) в строгом смысле, в противном случае T_m была бы автомодельным решением задачи, которого не существует. Вместо этого потребуем, чтобы (5.1) удовлетворяла следующим двум интегральным равенствам («законам сохранения»):

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial T}{\partial t}-\Delta T\right)dx=0,\quad \int_\Omega\left(\frac{\partial T}{\partial t}-\Delta T\right)r\,dx=0,\quad t>0.$$

После интегрирования по частям с учетом некоторых естественных ограничений на функцию f эти равенства приводятся к виду

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t}T_m dx=\int_{\partial\omega_t}\frac{\partial T_m}{\partial n_t}dS_t\equiv\int_{\partial\Omega}\left(-\frac{\partial T}{\partial z}\right)dS_t+\int_{\partial\omega_t\setminus\partial\Omega}\frac{\partial T_m}{\partial n_t}dS_t,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t}rT_m dx=\int_{\partial\omega_t}\left[r\frac{\partial T_m}{\partial n_t}-T_m\frac{\partial r}{\partial n_t}\right]dS_t\equiv \tag{5.2}$$

$$\equiv\int_{\partial\Omega}r\left(-\frac{\partial T}{\partial z}\right)dS_t+\int_{\partial\omega_t\setminus\partial\Omega}\left(r\frac{\partial T_m}{\partial n_t}-T_m\frac{\partial r}{\partial n_t}\right)dS_t.$$

Наконец, подставляя в выражение (5.2) функцию T_m из (5.1) и учитывая при этом краевое условие (2), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций ψ, φ:

$$\frac{d}{dt}(\psi\varphi^3)=M_1+\mu_1\varphi^2F(\psi)-\delta\psi\varphi, \tag{5.3}$$

$$\frac{d}{dt}(\psi\varphi^4)=M_2+\mu_2\varphi^3G(\psi)-\varkappa\psi\varphi^2,\quad t>0, \tag{5.4}$$

где M_1, M_2, μ_1, μ_2, δ, $\varkappa$ — параметры, определяемые по формулам

$$M_1=I_0r_0^2\frac{2\pi}{\nu_1}\int_0^\infty\Theta(\xi)\xi d\xi,\quad \nu_1=\int_\Omega f d\xi d\eta,$$

$$M_2=I_0r_0^3\frac{2\pi}{\nu_2}\int_0^\infty\Theta(\xi)\xi^2 d\xi,\quad \nu_2=\int_\Omega f\xi d\xi d\eta,$$

$$\mu_1 = \frac{2\pi}{\nu_1}, \quad \mu_2 = \frac{2\pi}{\nu_2},$$

$$\delta = -\int_{\partial\omega_*\setminus\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial n_*} dS_* > 0, \quad \varkappa = \int_{\partial\omega_*\setminus\partial\Omega} \left[f \frac{\partial \xi}{\partial n_*} - \xi \frac{\partial f}{\partial n_*} \right] dS_* > 0,$$

а F и G — следующие функции:

$$F(\psi) = \int_0^\infty \xi \exp\left(-\frac{1}{\psi f(\xi, 0)} \right) d\xi, \quad G(\psi) = \int_0^\infty \xi^2 \exp\left(-\frac{1}{\psi f(\xi, 0)} \right) d\xi.$$

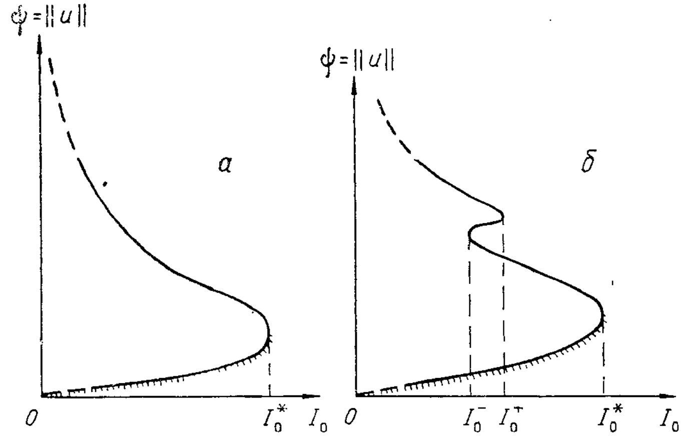

Рис. 1. График ветвления решений стационарной задачи в зависимости от I_0

В дальнейшем мы полагаем

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{\psi} \right), \quad G(\psi) = \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{1}{\psi} \right),$$

что действительно имеет место, если $f(\xi, 0)$ — элементарная «ступенчатая» функция: $f(\xi, 0) = 1$ при $0 < \xi < 1$ и $f(\xi, 0) = 0$ при $\xi \geqslant 1$.

Отметим, что требования $\delta > 0$, $\varkappa > 0$ являются существенными, при их нарушении система (5.3), (5.4) не может иметь никаких стационарных состояний. С физической точки зрения последние члены в (5.3), (5.4) моделируют отток тепла на «бесконечность».

От системы (5.3), (5.4) легко перейти к одному уравнению:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\psi}{\varphi} \left[\frac{4M_1\varphi - 3M_2 + \gamma_1\varphi^3 \times}{M_2 - M_1\varphi - \gamma_2\varphi^3 \times} \to \dots \right.$$

$$\left. \dots \to \frac{\times \exp\left(-\frac{1}{\psi} \right) - \alpha_1\psi\varphi^2}{\times \exp\left(-\frac{1}{\psi} \right) + \alpha_2\psi\varphi^2} \right], \quad (5.5)$$

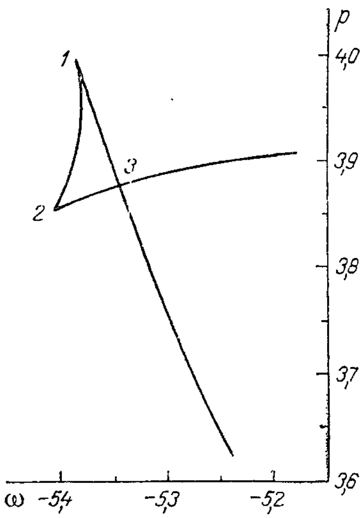

Рис. 2. График бифуркационного множества стационарной краевой задачи (в координатах (p, ω)) [9]

где $\gamma_1 = 2\mu_1 - \mu_2 > 0$, $\gamma_2 = \mu_1/2 - \mu_2/3 > 0$, $\alpha_1 = 4\delta - 3\varkappa > 0$, $\alpha_2 = \delta - \varkappa > 0$. Из последних неравенств следует, что

$$\mu_1 > \frac{2}{3}\mu_2, \quad \varkappa < \frac{4}{3}\delta. \tag{5.6}$$

Кроме того, мы потребуем, чтобы $\gamma_1\alpha_2 > \alpha_1\gamma_2$, т. е. $\mu_1\varkappa < \frac{2}{3}\mu_2\delta$. Необходимость этих ограничений вытекает из естественных физических требо-

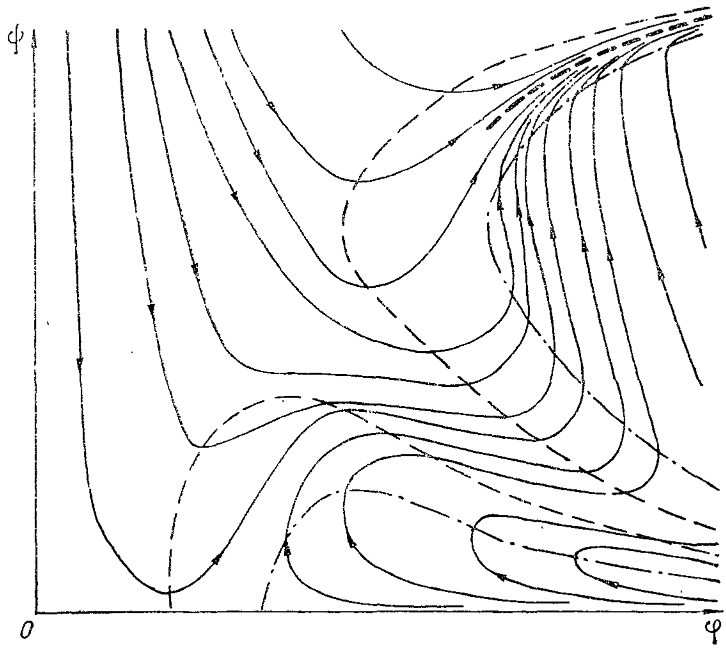

Рис. 3. Отсутствие стационарных состояний

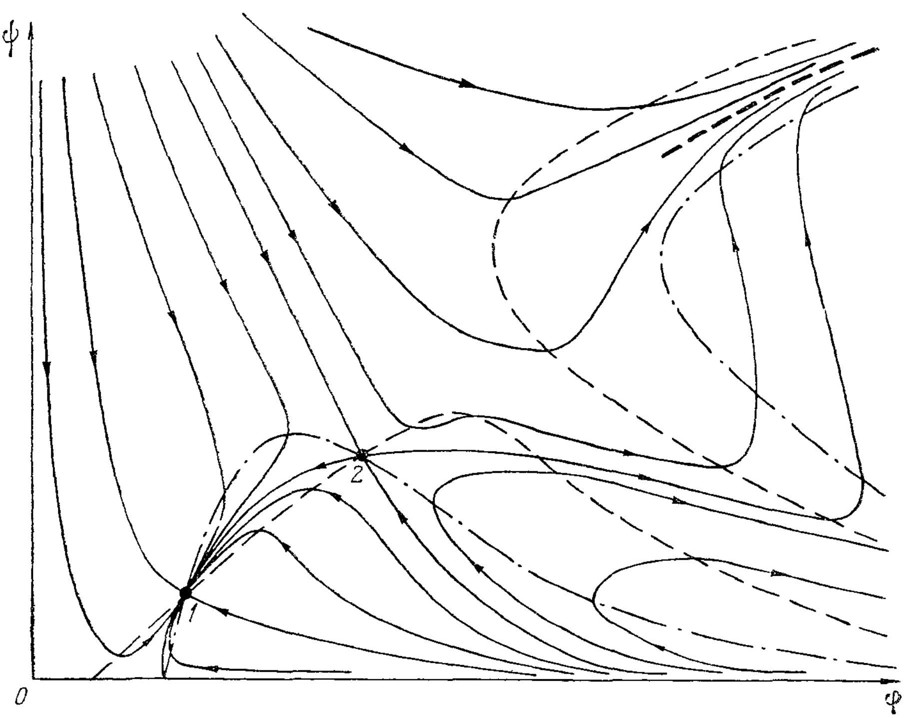

Рис. 4. Два стационарных состояния: *1* — устойчивое, *2* — неустойчивое

ваний к структуре фазовой картины уравнения (5.5). Отметим, что при выполнении (5.6) $\gamma_1-4\gamma_2>0$, $4\alpha_2-\alpha_1<0$.

Каждой точке пересечения изоклин «нуля» и «бесконечности» уравнения (5.5) отвечает некоторое стационарное состояние. Таким образом, система уравнений

$$4M_1\varphi-3M_2+\gamma_1\varphi^3\exp\left(-\frac{1}{\psi}\right)-\alpha_1\psi\varphi^2=0, \tag{5.7}$$

$$M_2-M_1\varphi-\gamma_2\varphi^3\exp\left(-\frac{1}{\psi}\right)+\alpha_2\psi\varphi^2=0 \tag{5.8}$$

(ψ, φ — постоянные, не зависящие от времени) определяет число и основные свойства стационарных решений $u=u(r, z)$ задачи (1)—(3) (см. § 2 в [1]). Как показывает анализ системы (5.7), (5.8), при различных значениях параметров $M_1\sim I_0r_0^2$ и $M_2\sim I_0r_0^3$ их может быть либо четыре, либо два, либо ни одного*), что согласуется с [1] и результатами [9], где проводилось другое «осреднение» стационарного уравнения. На рис. 1 указана примерная картина ветвления решений стационарной задачи в зависимости от параметра I_0 (r_0 при этом считается фиксированной). Штриховой линией обозначено предполагаемое поведение ветвей при малых $I_0>0$. Отметим, что такое поведение нижней ветви имеет место в силу теоремы 1 в [1]. В обоих случаях существует точка бифуркации $I_0=I_0^*$, такая, что при $I_0>I_0^*$ стационарных состояний не существует, что совпадает с результатами § 2 (в введенных там обозначениях $I_0^*=h(r_0)$). При всех $I_0<I_0^*$ в зависимости от величины второго парамет-

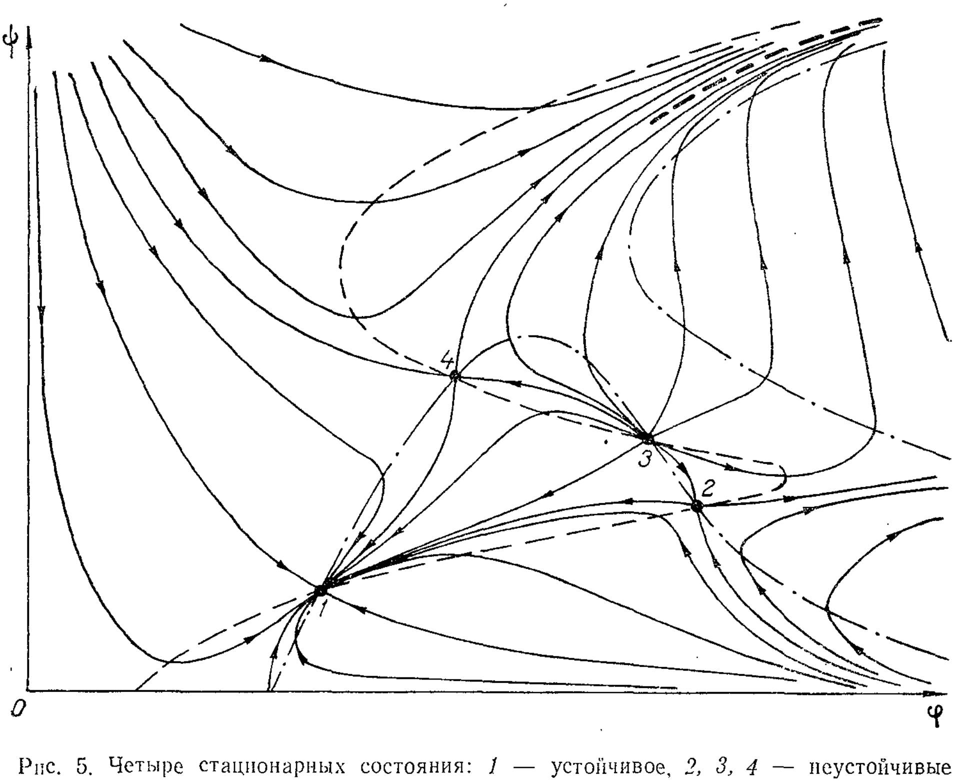

Рис. 5. Четыре стационарных состояния: 1 — устойчивое, 2, 3, 4 — неустойчивые

*) Здесь необходимо отметить, что (5.5) при любых M_1, M_2 допускает «нефизическое» стационарное состояние

$$\varphi_*\simeq\frac{M_2}{M_1}\,\frac{\alpha_1-3\alpha_2}{\alpha_1-4\alpha_2},$$

которого в действительности нет (§ 2). Поэтому мы будем формально считать величину разности $\alpha_1-4\alpha_2>0$ достаточно малой для того, чтобы φ_* не попадала в область $\{\varphi\sim M_2/M_1\}$, где осреднение имеет смысл.

ра r_0 задача (5.7), (5.8) имеет либо всегда два решения (рис. 1, *а*), либо на некотором интервале $I_0 \in (I_0^-, I_0^+)$ их существует четыре (рис. 1, *б*). На рис. 2 в координатах

$$p = (\sqrt{\pi} I_0 r_0)^{-1}, \quad \omega = \ln(\sqrt{\pi} r_0 / I_0) - 4(\sqrt{\pi} I_0 r_0)^{-1}$$

изображена область значений параметров I_0, r_0, внутри которой существует четыре стационарных состояния [9]. Она ограничена со всех сторон бифуркационными кривыми.

Поведение интегральных кривых уравнения (5.5) вблизи стационарных состояний позволяет судить об их устойчивости. На рис. 3, 4, 5 приведено схематическое изображение фазовых портретов уравнения (5.5) для трех случаев: ни одного, два и четыре стационарных состояния соответственно. Штриховыми линиями выделены изоклины «нуля», штрихпунктирными — изоклины «бесконечности». Жирной штриховой линией обозначена сепаратриса $\psi = P_s(\varphi)$, к которой сходятся все траектории при ψ, $\varphi \to +\infty$ (им отвечает режим неограниченного распространения тепловой волны, см. § 4). Нетрудно показать, что

$$P_s(\varphi) \simeq \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \varphi, \quad \varphi \to +\infty,$$

а тогда из уравнений (5.3), (5.4) следует, что $\psi(t)$, $\varphi(t) \simeq O(t^{1/2})$ при $t \to +\infty$, что согласуется с выводами теорем 7 и 8.

На рис. 4 и 5 показано, что во всех случаях независимо от того, существует ли два (рис. 4) либо четыре (рис. 5) стационарных состояния, устойчивым является одно и то же первое и в определенном смысле «минимальное» стационарное состояние. На рис. 1 ветвь устойчивых «минимальных» стационарных состояний отмечена штрихами. Напомним, что устойчивость снизу минимального стационарного решения была ранее доказана в § 3 (см. [1]).

§ 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Как показало проведенное исследование, при лазерном нагреве металлического образца, занимающего полупространство $z \geqslant 0$ (при наличии экзотермической реакции на поверхности $z=0$), свойства теплового поля в сильнейшей степени зависят от параметров излучения — интенсивности I_0 и эффективного радиуса r_0 пучка. В плоскости параметров (I_0, r_0) существует непрерывная кривая («граница устойчивости»), разделяющая плоскость (I_0, r_0) на три области, различающиеся по числу стационарных состояний (равному нулю — «область неустойчивости», двум и четырем — «область устойчивости»; см. рис. 2).

2) Важным следствием является то, что в «области устойчивости» устойчивым является только «минимальное» стационарное решение, причем это решение может быть найдено методом итераций.

3) Одним из обобщений построенной теории является учет дополнительных внешних факторов, в частности теплопотерь с поверхности вещества за счет контакта с окружающей средой (т. е. введение в граничное условие при $z=0$ стока, например, в виде $-\eta T$). В этом случае «граница устойчивости» меняется в зависимости от константы теплопотерь η. Можно показать, что по мере возрастания константы η область существования четырех решений сжимается в точку и при $\eta > \eta_{\text{кр}}$ исчезает. Тем самым строится структурно устойчивое семейство стационарных решений краевой задачи (зависящее от трех параметров (I_0, r_0, η)), бифуркационное множество которого имеет особенность типа A_4 («ласточкин хвост») [10] (одно сечение при $\eta = 0$ приведено на рис. 2).

4) Хотя в области $I_0 < h(r_0)$ устойчивым является лишь одно стационарное состояние, другие (неустойчивые) состояния (см. рис. 5) также могут проявляться в динамике лазерного нагрева. В частности, муль-

тистационарность проявляется во флуктуационной динамике системы. Действительно, как показывают расчеты [9], при небольших изменениях параметров излучения (I_0, r_0) вблизи «границы устойчивости» вдоль контура в плоскости (I_0, r_0), пересекающего область существования четырех стационарных решений (т. е. «петлю» на рис. 2), происходят сильные изменения устойчивого решения: величина температуры T и характерные пространственные масштабы ее изменения (при $z=0$) могут меняться почти вдвое. Тем самым в реальных экспериментах могут наблюдаться сильные случайные колебания теплового поля, обусловленные флуктуациями параметров излучения — вблизи области четырех стационаров на рис. 2 система работает как усилитель шума.

Литература

1. Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А. и др.—Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 11, с. 1947–1958.

2 Галактионов В. А.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 5, с. 1035—1040.

3. Галактионов В. А.—Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1983, т. 23, № 5, с. 1072—1087.

4. Еленин Г. Г., Плохотников К. Э. Об одном способе качественного исследования квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником.— М., 1977.— 28 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, № 106).

5. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.—Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1983, т. 23, № 2, с. 380--390.

6. Похожаев С. И.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 6, с. 1327—1331.

7. Похожаев С. И.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 1, с. 109—116.

8. Lions P. L. On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations.— SIAM Review, 1982, vol. 24, p. 441- 467.

9. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С.— Квантовая электроника, 1982, т. 9, № 10, с. 1959—1967.

10. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Наука, 1982.—304 с.

Институт общей физики
АН СССР

Поступила в редакцию
9 июня 1984 г.

УДК 517.9

В. И. ВЛАСОВ, Д. Б. ВОЛКОВ

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Дано решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона на плоскости в области, ограниченной закругленным углом; к ней сводятся некоторые стационарные задачи теплопроводности, электростатики, теории упругости.

1. Пусть граница ∂G области G (рисунок) на комплексной плоскости $w=u+iv=re^{i\varphi}$ (u, v — декартовы, а r, φ — полярные координаты) представляет собой закругленный угол, $\partial G=\gamma_1\cup\gamma_2$, где γ_1 — дуга окружности радиуса η с центром в точке O_1, а γ_2 — контур угла,

$$\gamma_1=\{w : w=O_1+\eta e^{i\varphi_1},\ \varphi_1\in[-\nu\pi, \nu\pi]\},\quad O_1=-\eta/\cos\nu\pi, \tag{1}$$

$$\gamma_2=\{w : \arg=\pm\beta\pi/2,\ |w|\in[R, \infty]\},\ \beta=2\nu+1,\ R=\eta\,\mathrm{tg}\,\nu\pi. \tag{2}$$

Область G может быть представлена в виде

$$G=g_1\cup g_2\cup \operatorname{int}\Gamma, \tag{3}$$

где g_1 — луночная область, g_2 — кольцевой сектор,

$$g_1=\{w : |w|<R,\ \eta<|w-O_1|\}, \tag{4}$$

$$g_2=\{w : |w|\in(R, \infty),\ \arg w\in(-\beta\pi/2, \beta\pi/2)\}, \tag{5}$$

а $\operatorname{int}\Gamma$ — дуга Γ без концевых точек B и C,

$$\Gamma=\{w= Re^{i\varphi} : \varphi\in[-\beta\pi/2, \beta\pi/2]\}, \tag{6}$$

$$B=Re^{i\beta\pi/2},\quad C=Re^{-i\beta\pi/2}. \tag{7}$$