ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 23 Май 1983 Июнь № 3

УДК 519.633.6

О РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. I

ГАЛАКТИОНОВ В. А., САМАРСКИЙ А. А.

(Москва)

Изучаются свойства неявных разностных схем для квазилинейных параболических уравнений нелинейной теплопроводности с источником. Определены достаточные условия разрешимости схемы, неединственности и несуществования разностного решения, а также его неограниченного возрастания в течение конечного времени.

§ 1. Введение

В настоящей работе изучаются свойства разностных решений квазилинейных параболических уравнений типа нелинейной теплопроводности с источником

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^{\sigma+1})+u^{\beta}. \tag{1.1}$$

Здесь $\sigma>0$, $\beta>1$ – некоторые фиксированные постоянные.

Уравнение (1.1) рассматривалось в работах [1]–[7] (см. также библиографию в [8]) при исследовании процессов возникновения и эволюции диссипативных структур в нелинейных средах с объемным выделением энергии. Было, в частности, показано, что решение задачи Коши для (1.1) может быть неограниченным, когда для некоторого $T_0<+\infty$

$$\max_x u(t,x)\to+\infty, \qquad t\to T_0^-. \tag{1.2}$$

Также было установлено, что при $\beta\geqslant\sigma+1$ неограниченное решение является локализованным в том смысле, что при $t\to T_0^-$ решение неограниченно возрастает на множестве конечной меры.

Исследование необычных свойств решений уравнения (1.1), проведенное в [1]–[6], во многом опиралось на результаты численного решения рассматриваемой задачи.

В настоящей работе выясняется степень адекватности, с которой решения неявных разностных схем для (1.1) передают свойства решений соответствующей дифференциальной задачи.

1. Для уравнения (1.1) рассматривается краевая задача

$$u(0,x)=u_0(x)\geqslant 0, \quad 0<x<l, \qquad u_0\in C([0,l]), \tag{1.3}$$

$$u(t,0)=u(t,l)=0, \qquad t\geqslant 0, \tag{1.4}$$

где $0<l<+\infty$ – некоторая постоянная.

Получены достаточные условия разрешимости (§ 2) неявной разностной схемы для уравнения (1.1), неединственности (§ 3), несуществования

(§ 3) и (разностного аналога условия (1.2)) неограниченности решения (§ 4).

В § 5, 6 (публикуются в следующем номере, под тем же названием) получены условия разрешимости в целом и единственности решения разностной задачи, а также установлена законность предельного перехода, в результате которого заново (см. [9]) доказаны теоремы существования решения задачи (1.1), (1.3), (1.4). Отметим, что, в отличие от рассматриваемого в § 5 случая $1<\beta\leqslant\sigma+1$, при $\beta>\delta+1$ глобальных априорных оценок разностного решения не существует. Для $\beta>\sigma+1$ в § 6 установлены ограничения, при которых решение всегда принадлежит некоторому разностному множеству устойчивости $\mathscr{W}_h$, коль скоро это включение выполняется в начальный момент времени.

Результаты § 4—6 настоящей работы свидетельствуют о том, что при достаточно малых, но конечных шагах h, τ пространственно-временной сетки решение неявной разностной схемы проявляет многие важные свойства, присущие решению соответствующего дифференциального уравнения (1.1).

2. Введем равномерную сетку по пространству ω_h с шагом $h=l/(M+1)$, $M>0$ — целое число, систему временных интервалов $\{\tau_j\}$, $\tau_{j+1}\leqslant\tau_j$ и порождаемую ею сетку по времени ω_τ. Всюду, за исключением § 4, сетку ω_τ считаем конечной и равномерной: $\tau_j=\tau=T/(N+1)$, $0\leqslant j\leqslant N$, $N>0$ — целое число, T — положительная постоянная (в § 4 имеем $\tau_j\to 0$ при $j\to\infty$ и сетка ω_τ неравномерная). Символом H_h обозначим множество сеточных функций $v_h=\{v_i\,|\,v_0=v_{M+1}=0,\ v_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,M\}$.

Задаче (1.1), (1.3), (1.4) поставим в соответствие неявную (нелинейную) разностную схему [10]

$$\frac{\hat u-u}{\tau_j}=(\hat u^{\sigma+1})_{\bar x x}+\hat u^{\beta},\qquad (t,x)\in\omega_\tau\times\omega_h, \tag{1.5}$$

$$u^0=u_{0h},\quad x\in\omega_h,\qquad \hat u\in H_h,\quad t\in\omega_\tau, \tag{1.6}$$

где $\hat u=u_k^{j+1}$, $u=u_k{}^j$ — искомая сеточная функция, $(v)_{\bar x x}=(v_{k+1}-2v_k+v_{k-1})/h^2$ — обозначение оператора разностного дифференцирования второго порядка [10], u_{0h} — проекция функции $u_0(x)$ на ω_h.

При формулировке задачи (1.5), (1.6) и всех последующих результатов учитывается, что разностное решение является неотрицательным. Действительно, разностная схема

$$\frac{\hat u-u}{\tau_j}=(|\hat u|^{\sigma}\hat u)_{\bar x x}+[\max\{0,\hat u\}]^{\beta},\qquad (t,x)\in\omega_\tau\times\omega_h \tag{1.7}$$

тождественно совпадает с (1.5) при $\hat u\geqslant 0$. Однако, как нетрудно видеть, решение $\hat u$ схемы (1.7) не может быть отрицательным, если $u\geqslant 0$ в ω_h (более того, $\hat u>0$ в ω_h, коль скоро $u\not\equiv 0$). Заметим, что аналогичный «слабый» принцип максимума имеет место и для дифференциальной задачи.

Подробное изучение разностной схемы (1.5) без нелинейного члена $\hat u^{\beta}$ в правой части проведено в целом ряде работ (см., например, [10]—[15]). В § 3—5 показано, что наличие источника сильно меняет свойства решения. Наиболее интересным в этом смысле является случай $\beta\geqslant\sigma+1$, когда разностное решение может не существовать, быть неединственным и неограниченным. Последнее означает, что (ср. (1.2))

$$\max_{1\leqslant k\leqslant M} u_k{}^j\to+\infty,\qquad j\to+\infty \tag{1.8}$$

(при этом предполагается, что $\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j<+\infty$). При $1<\beta<\sigma+1$ и достаточно малых τ всегда существует решение в целом, причем оно единственно.

3. Многие результаты § 2—5 можно переформулировать применительно к разностным схемам для параболических уравнений типа (1.1) общего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u)+Q(u), \qquad t>0, \quad x\in(0,l), \tag{1.9}$$

где $\varphi, Q\in C^2(R_+^1)\cap C([0,+\infty))$ — заданные функции, причем $\varphi(u)>0$, $\varphi'(u)>0$, $Q(u)>0$ при $u>0$, $\varphi'(0)\geqslant 0$, $Q(0)=0$,

$$\int_1^{+\infty}\frac{d\eta}{Q(\eta)}<+\infty \tag{1.10}$$

(неравенство (1.10) является необходимым условием существования неограниченных решений уравнения (1.9), см. [16]). Неявная разностная схема для уравнения (1.9) имеет вид [10]

$$\frac{\hat{u}-u}{\tau_j}=[\varphi(\hat{u})]_{\bar{x}x}+Q(\hat{u}), \qquad (t,x)\in\omega_\tau\times\omega_h. \tag{1.11}$$

Без существенных изменений исследование разностных схем (1.5), (1.11) проводится для случая нескольких пространственных переменных.

4. Будем использовать обозначения, принятые в [17]. Пространство $V_h=\{v_i\,|\,i=0,1,\ldots,M+1;\ v_0=v_{M+1}=0\}$ снабжается скалярным произведением и нормой, которые определяются по формулам

$$(v_h,w_h)_h=h\sum_{i=1}^{M}v_iw_i, \qquad |v_h|_{h,2}=(v_h,v_h)_h^{1/2}. \tag{1.12}$$

Нормы в сеточных аналогах пространств $L^q(0,l)$, $q\geqslant 1$, и $H_0^1(0,l)$ имеют, соответственно, вид

$$|v_h|_{h,q}=\left(h\sum_{i=1}^{M}|v_i|^q\right)^{1/q}, \qquad \|v_h\|_{h,2}=\left(h\sum_{i=0}^{M}\left|\frac{v_{i+1}-v_i}{h}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Через $\|\cdot\|_{h,2}^*$ обозначим норму, дуальную $\|\cdot\|_{h,2}$ относительно скалярного произведения (1.12), т. е.

$$\|v_h\|_{h,2}^*=\sup_{\substack{w_h\in V_h\\ w_h\neq 0}}\frac{|(v_h,w_h)_h|}{\|w_h\|_{h,2}}.$$

Справедливо равенство

$$\|(v_h)_{\bar{x}x}\|_{h,2}^*=\|v_h\|_{h,2}, \qquad v_h\in V_h. \tag{1.13}$$

В сеточном аналоге пространства $C(0,l)$ норма имеет вид

$$|v_h|_C=\max_{1\leqslant i\leqslant M}|v_i|, \qquad v_h\in V_h.$$

Введем операторы продолжения p_h и q_h, полагая, что p_hv_h — непрерывная функция, линейная на каждом интервале $[ih,(i+1)h]$, причем $p_hv_h(ih)=v_i$, $i=0,1,\ldots,M+1$; q_hv_h — кусочно-постоянное доопределение сеточной функции $v_h\in V_h$, которое при всех $ih<x<(i+1)h$ равно v_i. Оче-

видно, что $p_h v_h \in H_0^1(0, l)$, $q_h v_h \in L^q(0, l)$, причем

$$\|q_h v_h\|_{L^q(0,\, l)} = |v_h|_{h,\, q}, \qquad \|p_h v_h\|_{H_0^1(0,\, l)}) = \|v_h\|_{h,\, 2}.$$

Аналогичным образом для сеточных функций $v_{\tau,\, h}$, определенных в узлах сетки $\omega_\tau \times \omega_h$, введем оператор продолжения q_τ по формулам $q_\tau p_h v_{\tau,\, h} = p_h v_h^{j+1}$, $q_\tau q_h v_{\tau,\, h} = q_h v_h^{j+1}$ при всех $j\tau < t < (j+1)\tau$, $j=0, 1, 2, \ldots, N$ (сетка ω_τ при этом считается равномерной).

Обозначим (см. [10]) через

$$\lambda_1^h = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi h}{2l}\right), \tag{1.14}$$

$$\psi_h(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi h/2l)}{h} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \qquad 0 < x < l, \tag{1.15}$$

первое (наименьшее) собственное значение и соответствующую ему собственную функцию разностной задачи

$$(\psi_h)_{\bar{x}x} + \lambda \psi_h = 0, \qquad x \in \omega_h, \quad \psi_h \in V_h. \tag{1.16}$$

Функция ψ_h в (1.15) выбрана таким образом, что $|\psi_h|_{h,\, 1} = 1$. Заметим, что $\psi_h(x) > 0$ в ω_h.

На протяжении всей работы символами A_0, $A_1, \ldots$ обозначаются различные постоянные, не зависящие от h и τ.

§ 2. Достаточные условия разрешимости разностной схемы на фиксированном временно́м слое

1. Сначала покажем, что при $\beta < \sigma + 1$, а также в случае $\beta = \sigma + 1$, $\lambda_1^h > 1$ разностная схема (1.5) разрешима относительно сеточной функции $\hat{u}$ (u при этом считается известной) при любых величинах τ. Для этого нам понадобится следующее утверждение (см. [10], [16]).

Лемма 1. *Для любой функции $v_h \in H_h$ справедливы оценки*

$$|v_h|_{h,2(\sigma+1)}^{2(\sigma+1)} \leqslant \frac{1}{\lambda_1^h} \|v_h^{\sigma+1}\|_{h,2}^2, \tag{2.1}$$

$$|v_h|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1} \leqslant A_0 \|v_h^{\sigma+1}\|_{h,2}^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+1)}, \qquad A_0 = l^{1+(\beta+\sigma+1)/2(\sigma+1)}. \tag{2.2}$$

Если функция $v(x) \geqslant 0$ такова, что $v^{\sigma+1} \in H_0^1(0, l)$, то неравенства (2.1), (2.2) выполняются при $h=0$.

Рассмотрим непрерывный оператор P_h: $\mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$:

$$P_h(\hat{u}) = \left\{ \frac{\hat{u}_k - u_k}{\tau} - (\hat{u}_k^{\sigma+1})_{\bar{x}x} - \hat{u}_k^{\beta}, \quad k = 1, 2, \ldots, M \right\}. \tag{2.3}$$

Существование корня уравнения $P_h(\hat{u}) = 0$ будет означать разрешимость схемы (1.5).

Пусть сначала $1 < \beta < \sigma + 1$. Тогда

$$(P_h(\hat{u}), \hat{u}^{\sigma+1})_h = \frac{1}{\tau} (\hat{u} - u, \hat{u}^{\sigma+1})_h + \|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 - |\hat{u}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}. \tag{2.4}$$

Используя неравенство (2.2), а также оценку [12]

$$(\xi - \eta)\xi^{\sigma+1} \geqslant \frac{1}{\sigma+2} (\xi^{\sigma+2} - \eta^{\sigma+2}), \qquad \xi, \ \eta \in \mathbf{R}_+^1, \tag{2.5}$$

из (2.4) получаем

$$(P_h(\hat{u}), \hat{u}^{\sigma+1})_h > -\frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} |u|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2} - |\hat{u}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1} + A_1 |\hat{u}|_{h,\beta+\sigma+1}^{2(\sigma+1)},$$

где $A_1=l^{-(\beta+3\sigma+3)/(\beta+\sigma+1)}$. Второй член, стоящий в правой части, оценим с помощью неравенства Юнга [16]. В результате получим

$$|\hat{u}|^{\beta+\sigma+1}_{h,\beta+\sigma+1}\leqslant\frac{A_1}{2}|\hat{u}|^{2(\sigma+1)}_{h,\beta+\sigma+1}+A_2,$$

$$A_2=\frac{\sigma+1-\beta}{2(\sigma+1)}\left[\frac{\beta+\sigma+1}{A_1(\sigma+1)}\right]^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+1-\beta)}.$$

Окончательная оценка примет вид

$$(P_h(\hat{u}),\hat{u}^{\sigma+1})_h>\frac{A_1}{2}|\hat{u}|^{2(\sigma+1)}_{h,\beta+\sigma+1}-\left(A_2+\frac{1}{\sigma+2}\frac{1}{\tau}|u|^{\sigma+2}_{h,\sigma+2}\right).$$

Отсюда, в силу теоремы Брауэра [17], заключаем, что уравнение $P_h(\hat{u})=0$ имеет в шаре

$$|\hat{u}|^{2(\sigma+1)}_{h,\beta+\sigma+1}<\frac{2}{A_1}\left(A_2+\frac{1}{\sigma+2}\frac{1}{\tau}|u|^{\sigma+2}_{h,\sigma+2}\right) \tag{2.6}$$

по крайней мере одно решение (отметим, что вне этого шара решений не существует).

Рассмотрим теперь случай $\beta=\sigma+1$. Тогда из (2.4) и (2.1) имеем

$$(P_h(\hat{u}),\hat{u}^{\sigma+1})_h>(\lambda_1{}^h-1)|\hat{u}|^{2(\sigma+1)}_{h,2(\sigma+1)}-\frac{1}{\sigma+2}\frac{1}{\tau}|u|^{\sigma+2}_{h,\sigma+2}.$$

Отсюда при $\lambda_1{}^h>1$ уравнение $P_h(\hat{u})=0$ имеет по крайней мере одно решение такое, что

$$|\hat{u}|^{2(\sigma+1)}_{h,2(\sigma+1)}<\frac{1}{(\lambda_1{}^h-1)(\sigma+2)\tau}|u|^{\sigma+2}_{h,\sigma+2}. \tag{2.7}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Пусть* $\beta<\sigma+1$ *или* $\beta=\sigma+1$, $\lambda_1{}^h>1$. *Тогда при любых* $\tau>0$ *существует по крайней мере одно решение* $\hat{u}_h\in H_h$ *схемы* (1.5), *принадлежащее множествам* (2.6) *или* (2.7) *соответственно, причем вне указанных множеств решений нет.*

Замечания. 1. Как показывают оценки, полученные в § 5, в условиях теоремы 1 разностная схема (1.5) при достаточно малых $\tau>0$ имеет единственное решение.

2. Следующий результат, аналогичный теореме 1, справедлив для схемы (1.11) общего вида. Пусть при всех $u>0$

$$Q(u)\leqslant\nu_1\varphi(u)+\nu_2,\qquad \nu_1=\mathrm{const}<\lambda_1{}^h,\quad \nu_2=\mathrm{const}. \tag{2.8}$$

Тогда на множестве

$$|\varphi(\hat{u})|_{h,2}\leqslant\frac{1}{\lambda_1{}^h-\nu_1}\left[\nu_2 l^{1/2}+\frac{1}{\tau}|u|_{h,2}\right]$$

существует по крайней мере одно решение $\hat{u}_h\in H_h$ схемы (1.11).

2. При $\beta>\sigma+1$ или $\beta=\sigma+1$, $\lambda_1{}^h\leqslant1$ оператор схемы (1.5) не является коэрцитивным и теорема 1 перестает быть справедливой. В этих случаях будем искать при достаточно малых τ решение $\hat{u}$ схемы (1.5), близкое к u. Положим $\hat{u}-u=\hat{z}$ в ω_h и введем в рассмотрение непрерывный оператор F_h: $\mathbf{R}^M\to\mathbf{R}^M$:

$$F_h(\hat{z})=\{\tau[(\hat{z}_k+u_k)^{\sigma+1}]_{\bar{x}x}+\tau(\hat{z}_k+u_k)^{\beta},\quad k=1,2,\ldots,M\}.$$

Наличие у F_h неподвижной точки означает разрешимость схемы (1.5). Имеем

$$|F_h(\hat z)|_C \leqslant (|u|_C+|\hat z|_C)^\beta \tau + \frac{2}{h^2}(|u|_C+|\hat z|_C)^{\sigma+1}\tau.$$

Отсюда оператор F_h переводит множество $X_{C_0}=\{\hat z \mid |\hat z|_C \leqslant C_0\}$ в себя (здесь C_0 — произвольная положительная постоянная), если

$$\tau \leqslant \frac{C_0}{(|u|_C+C_0)^\beta + 2h^{-2}(|u|_C+C_0)^{\sigma+1}}. \tag{2.9}$$

Тогда, в силу теоремы Шаудера о неподвижной точке [18], справедлива

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (2.9). *Тогда разностная схема* (1.5) *имеет решение* $\hat u \in H_h$, *причем* $|\hat u - u|_C \leqslant C_0$.

Замечание 3. Полагая $C_0=|u|_C$ в (2.9), получаем следующее выражение для максимально возможного шага по времени $\tau_{\text{разр}}$, при котором схема (1.5) является разрешимой:

$$\tau_{\text{разр}} = (2^\beta |u|_C^{\beta-1} + 2^{\sigma+2}|u|_C^\sigma \quad h^{-2})^{-1}. \tag{2.10}$$

В следующем параграфе будет показано, что эта оценка по характеру зависимости $\tau_{\text{разр}}$ от $|u|_C$ является в определенном смысле неулучшаемой (отметим, что в случае равномерно ограниченных $|u|_C$ оценка $\tau_{\text{разр}}=O(h^2)$ при $h \ll 1$).

§ 3. Об условиях неединственности и несуществования решения разностной схемы

1. Покажем, что при $\beta \geqslant \sigma+1$ и достаточно малом τ неявная разностная схема (1.5) имеет помимо решения, построенного в теореме 2, еще одно решение, которое лежит «вблизи» корня $\hat U = \tau^{-1/(\beta-1)}$ разностного уравнения

$$\hat U/\tau = \hat U^\beta. \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) совпадает с (1.5), если в последнем не учитывать член $(\hat u^{\sigma+1})_{\bar x x}$ и положить $u \equiv 0$. Это второе решение таково, что $|\hat U|_C \to +\infty$ при $\tau \to 0$.

Положим $\hat z = \hat u - \tau^{-1/(\beta-1)}$ и определим непрерывный оператор G_h: $\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ по формуле

$$G_h(\hat z) = \{\tau(\hat z_k + \tau^{-1/(\beta-1)})^\beta + \tau[(\hat z_k+\tau^{-1/(\beta-1)})^{\sigma+1}]_{\bar x x} - \tau^{-1/(\beta-1)} + u_k - \hat z_k,$$
$$k=1, 2, \ldots, M\}.$$

Существование корня уравнения $G_h(\hat z)=0$ будет означать разрешимость схемы (1.5). Рассмотрим выражение

$$(G_h(\hat z), \hat z)_h = ((\hat z+\tau^{-1/(\beta-1)})^\beta - \tau^{-\beta(\beta-1)}, \hat z)_h \tau +$$
$$+ \tau([(\hat z+\tau^{-1/(\beta-1)})^{\sigma+1}]_{\bar x x}, \hat z)_h + (u, \hat z)_h - |\hat z|_{h,2}^2 = I_1+I_2+I_3-|\hat z|_{h,2}^2$$

на сфере $|\hat z|_{h,2}=a_0>0$. Очевидно, что $|z|_C \leqslant a_0 h^{-1/2}$, и поэтому, положив

$$\eta_0 = a_0 h^{-1/2}\tau^{1/(\beta-1)}, \tag{3.2}$$

получим

$$I_2 \geqslant -|\hat z|_{h,2}|(\hat z+\tau^{-1/(\beta-1)})^{\sigma+1}_{\bar x x}|_{h,2}\tau \geqslant -\tau^{[\beta-(\sigma+2)]/(\beta-1)}\frac{2a_0}{h^2}(1+\eta_0)^{\sigma+1}l^{1/2},$$

$$I_3 \geqslant -|\hat z|_{h,2}|u|_{h,2} = -a_0|u|_{h,2}.$$

Для оценки I_1 воспользуемся неравенством

$$\eta[(1+\eta)^\beta-1]\geqslant\frac{\beta+1}{2}\eta^2, \tag{3.3}$$

которое справедливо для любых $\beta>1$, $|\eta|\leqslant C_*(\beta)<+\infty$. Тогда, выбирая величину τ столь малой, чтобы

$$\eta_0=a_0h^{-1/2}\tau^{1/(\beta-1)}\leqslant C_*(\beta), \tag{3.4}$$

с учетом (3.3) получим

$$I_1\geqslant\frac{\beta+1}{2}|\hat z|^2_{h,2}=\frac{\beta+1}{2}a_0^2.$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$(G_h(\hat z),\hat z)_h\geqslant\frac{\beta-1}{2}a_0\left\{a_0-\frac{2}{\beta-1}\left[|u|_{h,2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{h^2}\tau^{[\beta-(\sigma+2)]/(\beta-1)}[1+C_*(\beta)]^{\sigma+1}l^{1/2}\right]\right\}.$$

Отсюда заключаем, что $(G_h(\hat z),\hat z)_h\geqslant 0$ при всех

$$|\hat z|_{h,2}=a_0=\frac{2}{\beta-1}\left\{|u|_{h,2}+\tau^{[\beta-(\sigma+2)]/(\beta-1)}\frac{2}{h^2}[1+C_*(\beta)]^{\sigma+1}l^{1/2}\right\}. \tag{3.5}$$

Остается убедиться в совместности при малых τ условий (3.4), (3.5). Подставляя в (3.4) величину a_0 из (3.5), имеем

$$\eta_0=\frac{2}{\beta-1}h^{-1/2}|u|_{h,2}\tau^{1/(\beta-1)}+\frac{4}{\beta-1}h^{-3/2}[1+C_*(\beta)]^{\sigma+1}l^{1/2}\tau^{[\beta-(\sigma+1)]/(\beta-1)}, \tag{3.6}$$

откуда $\eta_0\to 0$ при $\tau\to 0$, если $\beta>\sigma+1$, т. е. условие (3.4) не противоречит (3.5) при малых τ. Тем самым установлен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $\beta>\sigma-1$. Тогда при достаточно малых τ разностная схема* (1.5) *помимо решения, построенного в теореме* 2, *имеет еще одно решение. Если же $\beta=\sigma+1$, то предыдущий вывод справедлив при* (см. (3.6))

$$\frac{4}{\sigma}h^{-3/2}[1+C_*(\sigma+1)]^{\sigma+1}l^{1/2}<C_*(\sigma+1).$$

Замечание 4. На примере задачи (3.1) нетрудно показать, что в любой сколь угодно малой окрестности решения $\hat U=\tau^{-1/(\beta-1)}$ оператор

$$F_k(\hat z)=\{\tau(\hat z_k+\tau^{-1/(\beta-1)})^\beta-\tau^{-1/(\beta-1)},\ k=1,2,\ldots,M\}$$

не является сжимающим. Поэтому можно, по-видимому, утверждать, что построенное в теореме 3 решение схемы (1.5) неустойчиво относительно любого итерационного процесса (этот вывод подтверждается серией численных расчетов [1]–[6]).

2. Ниже будет показано, что при $\beta\geqslant\sigma+1$ и некоторых ограничениях на τ, h разностная схема (1.5) вообще может не иметь решения. Для этого воспользуемся оценкой

$$(\hat u^{\sigma+1})_{\bar x x}\geqslant-\frac{2}{h^2}\hat u^{\sigma+1},\qquad x\in\omega_h,$$

с учетом которой из (1.5) выводим систему неравенств

$$\hat u\geqslant u+\tau\hat u^{\sigma+1}\left(\hat u^{\beta-(\sigma+1)}-\frac{2}{h^2}\right),\qquad x\in\omega_h. \tag{3.7}$$

Ясно, что достаточно проверить выполнение (3.7) в точке достижения $\max u$, т. е. определить условия, при которых неравенство

$$\xi \geqslant |u|_C + \tau\xi^{\sigma+1}\left(\xi^{\beta-(\sigma+1)} - \frac{2}{h^2}\right) \tag{3.8}$$

не имеет решения в $\mathbf{R}_+^1$.

Рассмотрим сначала случай $\beta=\sigma+1$. Тогда неравенство (3.8) принимает вид

$$\xi \geqslant |u|_C + \tau\xi^{\sigma+1}\left(1 - \frac{2}{h^2}\right), \qquad \xi \in \mathbf{R}_+^1,$$

и, как нетрудно убедиться, не имеет решения, если

$$h^2 > 2, \qquad \tau > \tau^* = \frac{\sigma^\sigma}{(\sigma+1)^{\sigma+1}} |u|_C^{-\sigma}\left(1 - \frac{2}{h^2}\right)^{-1}. \tag{3.9}$$

Пусть теперь $\beta > \sigma+1$. Воспользовавшись неравенством Юнга

$$\xi^{\sigma+1} \leqslant \frac{h^2}{4}\xi^\beta + \varepsilon, \qquad \xi \in \mathbf{R}_+^1,$$

$$\varepsilon = \frac{\beta-(\sigma+1)}{\beta}\left[\frac{4(\sigma+1)}{\beta h^2}\right]^{(\sigma+1)/[\beta-(\sigma+1)]},$$

получим, что неравенство (3.8) не имеет решений, если всюду в $\mathbf{R}_+^1$

$$\xi < |u|_C - \frac{2\tau}{h^2}\varepsilon + \frac{\tau}{2}\xi^\beta.$$

Отсюда получаем условие неразрешимости схемы (1.5) при $\beta > \sigma+1$:

$$|u|_C \geqslant \frac{2\varepsilon}{h^2}\tau + \frac{\beta-1}{\beta}\left(\frac{2}{\beta\tau}\right)^{1/(\beta-1)}. \tag{3.10}$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Пусть* $\beta=\sigma+1$. *Тогда при выполнении условий* (3.9) *разностная схема* (1.5) *не имеет решения. В случае* $\beta>\sigma+1$ *схема* (1.5) *неразрешима при выполнении условия* (3.10).

Замечание 5. Неравенства (3.9) и (3.10) дают конкретные оценки величины шага по времени τ, при выполнении которых никакой итерационный процесс решения неявной схемы (1.5) не будет сходящимся. Такие оценки можно использовать в численных расчетах. В связи с этим рассмотрим неравенство (3.10) более подробно.

Положим

$$a_0 = \frac{2[\beta-(\sigma+1)]}{\beta}\left[\frac{4(\sigma+1)}{\beta}\right]^{(\beta+1)/[\beta-(\sigma+1)]},$$

$$b_0 = \frac{\beta-1}{\beta}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/(\beta-1)}.$$

Тогда (3.10) принимает вид

$$|u|_C \geqslant a_0\tau(h^2)^{-\beta/[\beta-(\sigma+1)]} + b_0\tau^{-1/(\beta-1)}$$

и выполняется, например, в случае

$$|u|_C = \beta a_0 d_0 (h^2)^{-1/[\beta-(\sigma+1)]}, \qquad d_0 = \left[\frac{b_0}{a_0(\beta-1)}\right]^{\beta/(\beta-1)}, \tag{3.11}$$

(3.12) $\tau=\tau_{\text{неразр}}=d_0(h^2)^{(\beta-1)/[\beta-(\sigma+1)]}.$

В то же время условие (2.10) разрешимости схемы при выборе величины $|u|_C$ из (3.11) принимает вид

$$\tau_{\text{разр}}=f_0(h^2)^{(\beta-1)/[\beta-(\sigma+1)]},\qquad f_0=[2^\beta(\beta a_0 d_0)^{\beta-1}+2^{\sigma+2}(\beta a_0 d_0)^{\sigma+1}]^{-1}$$

и совпадает с (3.12) по характеру зависимости от шага h пространственной сетки. Отсюда можно заключить, что условие (2.10) разрешимости схемы (1.5) при $\beta>\sigma+1$ является неулучшаемым при достаточно больших величинах $|u|_C$ (когда, например, разностное решение развивается в режиме с обострением, см. § 4).

§ 4. О неограниченных разностных решениях

Определим достаточные условия неограниченности в смысле (1.8) разностного решения задачи (1.5), (1.6) при $\beta\geqslant\sigma+1$. (Как будет показано в § 5, при $\beta<\sigma+1$ задача (1.5), (1.6) неограниченных решений не имеет.) Для этого воспользуемся разностным аналогом метода, который ранее применялся в дифференциальном случае для исследования полулинейных ($\sigma=0$) [19], [20] и квазилинейных [9], [21] уравнений типа (1.1) (см. также [22]).

1. Положим

(4.1) $$\hat{E}=(\hat{u},\psi_h)_h,\quad t\in\omega_\tau,$$

где $\psi_h(x)$ — собственная функция (1.15) задачи (1.16), отвечающая минимальному собственному значению (1.14). Скалярно умножая систему уравнений (1.5) на ψ_h, получаем цепочку равенств

(4.2а) $$\frac{\hat{E}-E}{\tau_j}=-\lambda_1{}^h(\hat{u}^{\sigma+1},\psi_h)_h+(\hat{u}^\beta,\psi_h)_h,\qquad t\in\omega_\tau,$$

(4.2б) $$E^0=E_0=(u_{0h},\psi_h)_h,$$

при выводе которой учтено, что [10] (см. (1.16))

$$((\hat{u}^{\sigma+1})_{\bar{x}x},\psi_h)_h=(\hat{u}^{\sigma+1},(\psi_h)_{\bar{x}x})_h=-\lambda_1{}^h(\hat{u}^{\sigma+1},\psi_h)_h.$$

В силу нормировки функции ψ_h и ее неотрицательности в ω_h, справедливо неравенство Гёльдера (напомним, что $\beta\geqslant\sigma+1$ и функция $\psi_h\geqslant0$ такова, что $|\psi_h|_{h,1}=1$)

$$(\hat{u}^\beta,\psi_h)_h=((\hat{u}^{\sigma+1})^{\beta/(\sigma+1)},\psi_h)_h\geqslant(\hat{u}^{\sigma+1},\psi_h)_h{}^{\beta/(\sigma+1)},$$

с учетом которого из (4.2) выводим оценку

$$\frac{\hat{E}-E}{\tau_j}\geqslant(\hat{u}^{\sigma+1},\psi_h)_h{}^{\beta/(\sigma+1)}[1-\lambda_1{}^h(\hat{u}^{\sigma+1},\psi_h)_h{}^{[(\sigma+1)-\beta]/(\sigma+1)}],\qquad t\in\omega_\tau.$$

Применяя еще раз неравенство Гёльдера $(\hat{u}^{\sigma+1},\psi_h)_h\geqslant(\hat{u},\psi_h)_h^{\sigma+1}$, получаем

(4.3) $$\frac{\hat{E}-E}{\tau_j}\geqslant(\hat{u}^{\sigma+1},\psi_h)_h{}^{\beta/(\sigma+1)}\left[1-\frac{\lambda_1{}^h}{\hat{E}^{\beta-(\sigma+1)}}\right],\qquad t\in\omega_\tau.$$

Пусть величина E_0 такова, что

(4.4) $$\mu_0=1-\lambda_1{}^hE_0^{(\sigma+1)-\beta}>0,\qquad E_0=(u_{0h},\psi_h)_h$$

(заметим, что при $\beta=\sigma+1$ это условие имеет вид $\lambda_1^h<1$). Тогда из (4.3) заключаем, что $\hat{E}>E$ в ω_τ при достаточно малых τ_j, $j=0, 1, \ldots$, и поэтому

$$\frac{\hat{E}-E}{\tau_j} \geqslant \hat{E}^\beta \left(1-\frac{\lambda_1^h}{E_0^{\beta-(\sigma+1)}}\right)=\mu_0 \hat{E}^\beta, \qquad t\in\omega_\tau.$$

Поскольку

$$(4.5) \qquad |\hat{u}|_C=\max_{1\leqslant k\leqslant M} \hat{u}_k \geqslant \hat{E}, \qquad t\in\omega_\tau,$$

для определения условий неограниченности решения задачи (1.5), (1.6) достаточно найти такую систему $\{\tau_j\}$ временных интервалов, чтобы

$$(4.6) \qquad T_*=\sum_{j=0}^{\infty} \tau_j<+\infty$$

и из неравенств

$$(4.7) \qquad \hat{E}\geqslant E+\tau_j \mu_0 \hat{E}^\beta, \qquad t\in\omega_\tau, \quad E^0=E_0,$$

вытекало условие

$$(4.8) \qquad E^j\to+\infty, \qquad j\to+\infty.$$

В силу (4.5), из (4.8) будет следовать справедливость (1.8).

Пусть

$$(4.9) \qquad \tau_j=A\rho^{-\alpha j}, \qquad j=0, 1, \ldots,$$

где $A>0$, $\alpha>0$, $\rho>1$ — постоянные, подлежащие дальнейшему определению. Тогда

$$(4.10) \qquad T_*=\frac{A\rho^\alpha}{\rho^\alpha-1}<+\infty,$$

т. е. условие (4.6) выполнено.

Покажем, что при определенных ограничениях на величины A, α, ρ из (4.7) следует справедливость оценки

$$(4.11) \qquad E^j\geqslant E_0\rho^j, \qquad j=0, 1, \ldots.$$

Для этого достаточно установить, что

$$(4.12) \qquad E_0\rho^j+\tau_j\mu_0 E_0^\beta \rho^{\beta j}\geqslant E_0\rho^{j+1}, \qquad j=0, 1, \ldots.$$

Подставляя в (4.12) величины τ_j из (4.9) и проводя необходимые упрощения, получаем

$$1+A\mu_0 E_0^{\beta-1} \rho^{j(\beta-\alpha-1)}\geqslant\rho, \qquad j=0, 1, \ldots.$$

Таким образом, при выполнении условий

$$(4.13) \qquad \alpha=\beta-1, \qquad \rho=1+A\mu_0 E_0^{\beta-1}$$

справедлива оценка (4.11). Итак, доказана

Теорема 5. *Пусть* $\beta\geqslant\sigma+1$ *и начальная функция* u_{0h} *в* (1.6) *такова, что выполнено условие* (4.4). *Пусть разностная задача* (1.5), (1.6) *разрешима на последовательности шагов по времени* (4.9), *где постоянные* A, α, ρ *удовлетворяют соотношениям* (4.13). *Тогда разностное решение задачи существует в течение времени* (4.10), *причем*

$$|u^j|_C\geqslant E_0\rho^j\to+\infty, \qquad j\to+\infty.$$

Следствие. Пусть $\sigma+1\leqslant\beta<\sigma+3$ и задана функция $u_0(x)\geqslant 0$, $x\in\mathbf{R}_+^1$. Фиксируем произвольное $h>0$. Тогда при достаточно больших M найдется такой набор шагов по времени $\{\tau_j\}$, удовлетворяющий условию (4.6), что решение разностной задачи (1.5), (1.6) при $l=(M+1)h$ и $u_{0h}\not\equiv 0$ является неограниченным в смысле (1.8). Если $|u_{0h}|_{h,1}>2$ при некотором M, то аналогичный вывод имеет место и в случае $\beta=\sigma+3$.

Подобное утверждение справедливо для дифференциальной задачи (1.1), (1.3), (1.4), см. [2], [4], [7].

Доказательство. При больших l для величины μ_0 в (4.4) справедлива оценка

$$\mu_0\simeq 1-\left[\frac{|u_{0h}|_{h,1}}{2}\right]^{(\sigma+1)-\beta}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{(\sigma+3)-\beta}.$$

Отсюда в сделанных предположениях $\mu_0>0$ при достаточно больших l, что, в силу теоремы 5, обеспечивает справедливость сформулированного утверждения.

Замечания. 6. Утверждения теоремы 5 и следствия к ней справедливы также для явной разностной схемы, соответствующей уравнению (1.1):

$$\frac{\hat{u}-u}{\tau_j}=(u^{\sigma+1})_{\bar{x}x}+u^{\beta},\qquad (t,x)\in\omega_\tau\times\omega_h \tag{4.14}$$

с условиями (1.6). Естественно, в этом случае не надо специально оговаривать разрешимость разностной задачи. Нетрудно показать, что при $\beta\geqslant\sigma+1$ и достаточно малых τ/h^2 решение схемы (4.14) подчиняется принципу максимума. Отметим, что в полулинейном ($\sigma=0$) случае условия неограниченности решения явной схемы (4.14) получены в [22], [23].

7. Известно [9], что в случае дифференциального уравнения рассматриваемая задача имеет неограниченные решения при $\beta=\sigma+1$, если $\lambda_1^0=(\pi/l)^2<1$. Если же $\lambda_1^0>1$, то она всегда разрешима «в целом». Отсюда из (4.4) и неравенства $\lambda_1^h<\lambda_1^0$ (см. (1.14)) заключаем, что при $\beta=\sigma+1$ разностная задача может иметь неограниченные решения в то время, когда ее дифференциальный аналог таких решений в принципе не допускает.

8. Следующий результат, аналогичный полученному в теореме 5, справедлив для задачи (1.11), (1.6) общего вида. Пусть при всех $u>0$

$$\varphi(u)\leqslant\nu_1Q(u)+\nu_2,\qquad \nu_1=\mathrm{const}<\lambda_1^h,\quad \nu_2=\mathrm{const}>0$$

(это условие противоположно (2.8)). Пусть, кроме того, функция $Q(u)$ является выпуклой: $Q''(u)\geqslant 0$ при $u>0$. Тогда, если начальная функция u_{0h} в (1.6) такова, что

$$Q(E_0)>\frac{\lambda_1^h\nu_2}{\lambda_1^h-\nu_1},$$

выбор системы временных интервалов $\{\tau_j\}$ в виде

$$\tau_j=\frac{AE_0\rho^j}{(\lambda_1^h-\nu_1)Q(E_0\rho^j)-\lambda_1^h\nu_2},\qquad j=0,1,\ldots, \tag{4.15}$$

где $A>0$ – произвольная постоянная, $\rho=1+A>1$, обеспечивает неограниченность в смысле (1.8) решения разностной задачи (1.11), (1.6), причем выполняется оценка (4.11). Ряд $\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j$ сходится, если

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\tau_j}{\tau_{j+1}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\rho}\frac{Q(\rho y)}{Q(y)}=q=\mathrm{const}>1. \tag{4.16}$$

Покажем, что из (4.16) следует справедливость (1.10). Действительно, в силу (4.16), $Q(\rho y)>\rho q_*Q(y)$ при всех $y>y_*$, где $q_*>1$ – некоторая постоянная. Тогда

$$\int\limits_{\rho y_*}^{\rho y}\frac{d\eta}{Q(\eta)}<\frac{1}{q_*}\int\limits_{y_*}^{y}\frac{d\eta}{Q(\eta)},\qquad y>y_*,$$

и поэтому (напомним, что $\rho>1$)

$$\left(1-\frac{1}{q_*}\right)\int\limits_{y_*}^{y}\frac{d\eta}{Q(\eta)}+\int\limits_{y}^{\rho y}\frac{d\eta}{Q(\eta)}<\int\limits_{y_*}^{\rho y_0}\frac{d\eta}{Q(\eta)}\qquad \forall y>y_*.$$

Отсюда предельным переходом $y\to\infty$ получаем (1.10).

2. Приведем пример неограниченного решения разностной задачи (1.5), (1.6), представимого в явном виде. Этот пример, в частности, показывает, что указанное в теореме 5 требование разрешимости задачи на последовательности шагов по времени (4.9) не является слишком обременительным.

Пусть $\beta=\sigma+1$. Разностное решение задачи (1.5), (1.6) будем искать в виде

$$u_k^j=S^j\theta_k,\qquad (t,x)\in\omega_\tau\times\omega_h.$$

Подставляя u_k^j в (1.5), для сеточных функций S^j и θ_k, определенных в ω_τ и ω_h соответственно, получаем следующие задачи:

$$\frac{\hat S-S}{\tau_j}=\frac{1}{\sigma}\hat S^{\sigma+1},\qquad t\in\omega_\tau, \tag{4.17}$$

$$(\theta^{\sigma+1})_{\bar x x}+\theta^{\sigma+1}=\frac{1}{\sigma}\theta,\qquad x\in\omega_h,\quad \theta\in H_h. \tag{4.18}$$

Пусть задана система временных интервалов (4.9), где $\rho>1$, $\alpha=\sigma$. Тогда решением задачи (4.17) будет сеточная функция

$$S^j=\rho^j,\quad j=0,1,\ldots,\qquad A=\sigma\rho^{-(\sigma+1)}(\rho-1). \tag{4.19}$$

Решение задачи (4.18) построим в частном случае $\sigma=2$. Фиксируем произвольное целое число $M>0$ и положим $h=2\sin[3\pi/2(M+1)]$. В этом случае длина отрезка l равна

$$l=\frac{3\pi h}{2}\arcsin^{-1}\frac{h}{2},\qquad 0<h\leqslant 2. \tag{4.20}$$

Тогда решение задачи (4.18) имеет вид

$$\theta_k=\left\{2\left[3\left(1-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{a_h h}{2}\right)\right]^{-1}\right\}^{1/2}\sin(a_h kh),\quad k=0,1,\ldots,M+1, \tag{4.21}$$

где $a_h=\pi/l$.

Функции (4.19) и (4.21) определяют неограниченное разностное решение задачи (1.5), (1.6) при $\sigma=2$, $\beta=3$. При τ, $h\to 0$ это решение сходится к решению дифференциального уравнения (1.1), построенному в [1], [4].

Отметим, что функция (4.21) не является проекцией на ω_h решения дифференциального аналога задачи (4.18) при $\sigma=2$, хотя и имеет похожую структуру. Например, в случае $\sigma=1$ уравнение (4.18) также имеет решение

$$\theta_k=A_h\sin^2(a_h kh)+B_h,\qquad k=0,1,\ldots,M+1,$$

где

$$a_h=\frac{1}{2h}\arcsin\frac{h}{2},\qquad 0<h\leqslant 2,\qquad A_h=\frac{1}{\varkappa_h}[2(2\varkappa_h-1)]^{1/2},$$

$$B_h=\frac{1}{2\varkappa_h}\{1-[2(2\varkappa_h-1)]^{1/2}\},\qquad \varkappa_h=1-\frac{2}{h^2}\left[1-\left(1-\frac{h^2}{4}\right)^{1/2}\right],$$

которое, однако, краевым условиям не удовлетворяет, и $\theta_k>0$ для любых k при $h>0$. И только в пределе $h\to 0$, когда $\varkappa_h\to{}^3/_4$, $B_h\to 0$, функция θ_k является решением (дифференциальной) задачи (4.18) при $l\geqslant 4\pi$.

В дифференциальном случае носитель l_0 аналитического решения $\theta(x)$ задачи (4.18)

$$\theta(x)=\left\{\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\sin^2\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+1)}x\right]\right\}^{1/\sigma},\qquad 0<x<l_0=2\pi\frac{\sigma+1}{\sigma},$$

дает значение так называемой фундаментальной длины, которая определяет размеры той части пространства, в которой неограниченное решение задачи Коши для уравнения (1.1) возрастает до бесконечности [1]–[6]. Отметим, что разностная фундаментальная длина (4.20), отвечающая $\sigma=2$, слабо отличается при $h\ll 1$ от величины $l_0=3\pi$. При достаточно больших h это отличие может быть значительным, например $l=9$ при $h=1$ и $l=6$ при $h=2$.

Авторы благодарны С. П. Курдюмову и В. Б. Андрееву за полезные обсуждения.

Литература

1. *Самарский А. А. и др.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла.– Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321–324.
2. *Самарский А. А. и др.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур.– Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330–1333.
3. *Змитренко Н. В. и др.* Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью.– Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вып. 9, с. 620–624.
4. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.– В кн.: Современные пробл. матем. физ. и вычисл. матем. М.: Наука, 1982, с. 217–243.
5. *Курдюмов С. П. и др.* Взаимодействие тепловых структур в нелинейных средах.– Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 836–839.
6. *Галактионов В. А. и др.* О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1979, № 161.
7. *Галактионов В. А. и др.* О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t=\nabla(u^\sigma\nabla u)+u^\beta$.– Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362–1364.
8. *Галактионов В. А. и др.* Локализация тепла в нелинейных средах.– Дифференц. ур-ния, 1981, т. 17, № 10, с. 1826–1841.
9. *Галактионов В. А.* Об одной краевой задаче для нелинейного параболического уравнения $u_t=\Delta u^{\sigma+1}+u^\beta$.– Дифференц. ур-ния, 1981, т. 17, № 5, с. 836–842.
10. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
11. *Raviart P. A.* Sur la résolution et l'approximation de certaines équations paraboliques non linéaires dégénérées.– Arch. Ration. Mech. and Analys., 1967, v. 25, p. 64–80.
12. *Raviart P. A.* Sur la résolution de certaines equations paraboliques non linéaires.– J. Function Analys., 1970, v. 5, p. 299–328.
13. *Масловская Л. В.* О сходимости разностных методов для некоторых вырождающихся квазилинейных уравнений параболического типа.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 6, с. 1444–1455.
14. *Абрашин В. Н.* Разностные схемы для параболических уравнений с нелинейным вырождением. I.– Дифференц. ур-ния, 1976, т. 12, № 8, с. 1470–1484.
15. *Баклановская В. Ф.* Сравнение точного и приближенного решений систем уравнений параболического типа с вырождением.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 6, с. 1471–1484.
16. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
17. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

18. *Фридман А.* Уравнения в частных производных параболического типа. М.: Мир, 1968.
19. *Kaplan S.* On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations.– Communs Pure and Appl. Math., 1963, v. 16, p. 305–330.
20. *Levine H. A.* Nonexistence of global weak solutions to some properly and improperly posed problems of mathematical physics: the method of unbounded Fourier coefficients.– Math. Ann., 1975, v. 214, p. 205–220.
21. *Галактионов В. А.* О несуществовании и существовании глобальных решений краевых задач для квазилинейных параболических уравнений.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, т. 22, № 6, с. 1369–1385.
22. *Nakagawa T., Ushijima T.* Finite element analysis of the semi-linear heat equation of blow-up type.– In: Topics in Numer. Analysis. Vol. 3. New York: Acad. Press, 1977, p. 275–291.
23. *Nakagawa T.* Blowing up of a finite difference solution to $u_t=u_{xx}+u^2$.– Appl. Math. and Optimizat., 1976, v. 2, p. 337–350.

Поступила в редакцию 18.VI.1982