УДК 517.9

Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. II

Галактионов В. А., Самарский А. А.

Настоящая работа служит продолжением статьи [1]. Мы будем рассматривать следующие краевые задачи для параболического уравнения типа нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{A}(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$k(u) > 0,\quad u > 0,\quad k \in C^2((0, +\infty)) \cap C([0, +\infty)), \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0,\quad x \in \mathbf{R}^1_+,\quad u_0 \in C(\mathbf{R}^1_+), \tag{2}$$

$$\sup u_0 < +\infty,\quad k(u_0)\frac{\partial u_0}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^1_+),\quad \operatorname{mes}\operatorname{supp} u_0 < +\infty,$$

с одним из граничных режимов

$$u(t, 0) = \varkappa_+(t) > 0,\quad t > 0,\quad \varkappa_+ \in C^2(\mathbf{R}^1_+), \tag{3}$$

$$u(t, 0) = \varkappa_-(t) > 0,\quad t \in (0, 1),\quad \varkappa_- \in C^2(0, 1), \tag{3$'$}$$

где монотонно возрастающие функции $\varkappa_\pm$ таковы, что $\varkappa_+(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $\varkappa_-(t) \to +\infty$ при $t \to 1^-$ (в последнем случае функция $\varkappa_-$ изменяется в режиме с обострением).

Для определения асимптотического поведения решений задач (1)—(3), (1)—(3′) используются приближенные автомодельные решения (п. а. р.) уравнения (1), которые ему не удовлетворяют, но к которым решение рассматриваемых задач асимптотически сходится. В § 4 построены новые (по сравнению с [1]), классы п. а. р. уравнения (1) с коэффициентами k существенно нестепенного вида. В § 5 рассматриваются п. а. р. линейного уравнения теплопроводности, которому отвечает $k(u) \equiv 1$ в (1).

Введем некоторые обозначения. Через $\|\cdot\|_C$ обозначим норму в $C(\mathbf{R}_+^1)$ и будем писать, что функция $v(t, x) \in C(\mathbf{R}_+^1)$, если при всех допустимых $t > 0$

$$\|v(t, \cdot)\|_C = \sup_{x \in \mathbf{R}^1_+} |v(t, x)| < +\infty.$$

Гильбертово пространство $L^2(\mathbf{R}_+^1)$ снабжается скалярным произведением и нормой, определяемыми соответственно по формулам

$$(u, v) = \int_0^{+\infty} u(x) v(x)\, dx,\quad \|u\|_2 = (u, u)^{1/2}.$$

§ 4. Приближенные автомодельные решения в вырожденном случае

В этом параграфе для широкого класса уравнений (1) с нестепенными нелинейностями будут построены замкнутые системы п. а. р., удовлетворяющих некоторым нелинейным уравнениям первого порядка.

Построение п. а. р. в вырожденном случае будем проводить при следующих ограничениях на коэффициент k:

$$\int_0^{+\infty} [k(s)/(s+1)]\,ds = +\infty, \tag{4.1}$$

$$[k(s)/k'(s)]' \to +\infty, \quad s \to +\infty. \tag{4.2}$$

Условие (4.1) накладывает ограничение «снизу» на характер поведения функции $k(s)$ при больших s, условие (4.2) — ограничение «сверху».

В дальнейшем нам понадобится функция $E(s)$, определяемая равенством

$$\int_0^{E(s)} [k(\eta)/(\eta+1)]\,d\eta = s, \quad s > 0. \tag{4.3}$$

Функция E является положительной и возрастающей в $\mathbf{R}_+^1$,

$$E \in C^3((0,+\infty)) \cap C([0,+\infty)), \quad E(0)=0, \quad E(+\infty)=+\infty$$

(последнее обеспечивается условием (4.1)). Поэтому E осуществляет взаимно-однозначное отображение $\overline{\mathbf{R}}_+^1 \to \overline{\mathbf{R}}_+^1$ и существует E^{-1} — функция, обратная к E.

Точная оценка скорости сходимости к п. а. р., построенным ниже, определяется с помощью функции

$$\omega(s) = \max_{\eta \in [0,s]} k(E(\eta)). \tag{4.4}$$

Из условия (4.2) следует, что

$$\omega(s)/s \to 0, \quad s \to +\infty. \tag{4.5}$$

В таблице 8 указаны некоторые характерные коэффициенты $k(u)$, удовлетворяющие условиям (4.1), (4.2). Там же приведены главные члены асимптотических разложений функций $E(u)$ в (4.3) при $u \to +\infty$ (в явном виде E часто не вычисляется). Они понадобятся для определения конкретного вида граничных режимов $\varkappa_\pm(t)$.

Таблица 8

$k(u)$	$E(u)$
$\exp[\ln^\alpha(1+u)]$, $0<\alpha<1$	$\cong \exp\left\{\ln^{1/\alpha} u\left[1+\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\frac{\ln\ln u}{\ln u}\right]\right\}$
$\ln^\alpha(1+u)$, $\alpha>0$	$\cong \exp\{[(1+\alpha)u]^{1/(1+\alpha)}\}$
$\ln[1+\ln(1+u)]$	$\cong \exp\left[\frac{u}{\ln u}\right]$
1	$\cong \exp u$
$\{1+\ln[1+\ln(1+u)]\}^{-1}$	$\cong \exp[u\ln u]$
$\{1+\ln^\alpha(1+u)\}^{-1}$, $0<\alpha<1$	$\cong \exp\{[(1-\alpha)u]^{1/(1-\alpha)}\}$
$\{1+\ln(1+u)\}^{-1}$	$\cong \exp[\exp u]$
$[1+\ln(1+u)]^{-1}\{1+$ $+\ln[1+\ln(1+u)]\}^{-1}$	$\cong \exp\{\exp[\exp u]\}$

Будет показано, что в сделанных предположениях при достаточно произвольных граничных режимах решения рассматриваемых задач сходятся к п. а. р. $u_a(t, x)$ следующего уравнения первого порядка типа Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathbf{H}_k(v) = \frac{k(v)}{v+1}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2. \tag{4.6}$$

Тем самым функции u_a будут п. а. р. исходного параболического уравнения (1).

Нам понадобятся три вида точных инвариантных решения уравнения (4.6), на основе которых будут строиться п. а. р. рассматриваемой задачи:

$$\text{А. } v_A(t, x) = E\left[(1+t)^m \theta_a\left(x/(1+t)^{(1+m)/2}\right)\right], \tag{4.7}$$

$$(t, x) \in \mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}_+^1, \quad m = \mathrm{const} > 0,$$

$$\text{Б. } v_A(t, x) = E\left[(1-t)^n \theta_a\left(x/(1-t)^{(1+n)/2}\right)\right], \tag{4.8}$$

$$(t, x) \in (0, 1) \times \mathbf{R}_+^1, \quad n = \mathrm{const} < 0,$$

$$\text{В. } v_A(t, x) = E\left[\exp(t)\, \theta_a(x/\exp(t/2))\right], \tag{4.9}$$

$$(t, x) \in \mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}_+^1.$$

Неотрицательные функции $\theta_a(\xi)$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые получаются после подстановки выражений (4.7)—(4.9) в (4.6):

$$\text{А. } (\theta_a')^2 + \frac{1+m}{2}\theta_a'\xi - m\theta_a = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}_+^1, \tag{4.10}$$

$$\text{Б. } (\theta_a')^2 - \frac{1+n}{2}\theta_a'\xi + n\theta_a = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}_+^1, \tag{4.11}$$

$$\text{В. } (\theta_a')^2 + \frac{1}{2}\theta_n'\xi - \theta_a = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}_+^1, \tag{4.12}$$

а также краевым условиям

$$\theta_a(0) = 1, \quad \theta_a(+\infty) = 0. \tag{4.13}$$

Нам будет удобно записывать граничные режимы $\varkappa_\pm(t)$ (см. (3), (3′)) в виде

$$\varkappa_\pm(t) = E[\psi_\pm(t)], \tag{4.14}$$

где $\psi_\pm(t)$ — известные монотонно возрастающие функции.

П. а. р. уравнения (4.6) (и исходного уравнения (1)) будем искать в следующем виде:

$$u_a(t, x) = E[\psi_\pm(t)\, \theta_a(\xi)], \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}. \tag{4.15}$$

Здесь $\theta_a(\xi)$, $\varphi(t)$ — неизвестные функции, подлежащие в дальнейшем определению. При этом предполагаем выполненными условия (4.13), так что $u_a(t, 0) \equiv u(t, 0) = E[\psi_\pm(t)]$. Из (4.15) следует, что функция $U_a = E^{-1}(u_a) = \psi_\pm(t)\theta_a(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = \psi_\pm'(t)\,\theta_a - \left(\psi_\pm \frac{\varphi'}{\varphi}\right)(t)\,\frac{d\theta_a}{d\xi}\,\xi \tag{4.16}$$

или эквивалентному ему уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=\left(\frac{\psi'_\pm}{\psi_\pm}\right)(t)\,U_a-\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)(t)\,\frac{\partial U_a}{\partial x}x. \tag{4.16'}$$

Переход к первоначальному обозначению $u_a=E(U_a)$ осуществляется с помощью тождеств

$$\theta_a(\xi)=\frac{1}{\psi_\pm(t)}E^{-1}[u_a(t,x)], \tag{4.17}$$

$$\frac{d\theta_a}{d\xi}(\xi)=\left(\frac{\varphi}{\psi_\pm}\right)(t)\,\frac{k(u_a(t,x))}{u_a(t,x)+1}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)(t,x) \tag{4.18}$$

(при выводе последнего учитывается, что в силу (4.3) $E'(s)=$ $=[E(s)+1]/k(E(s))$).

Через $\theta(t,\xi)$ обозначим автомодельное представление решения задачи (1)—(3), которое определяется в соответствии с пространственно-временной структурой п. а. р. (4.15) (см. (4.17)):

$$\theta(t,\xi)=\frac{1}{\psi_\pm(t)}E^{-1}[u(t,\xi\varphi(t))],\quad \xi\in\mathbf{R}^1_+. \tag{4.19}$$

Будет показано, что при специальном выборе функций $\theta_a(\xi)$ и $\varphi(t)$ автомодельное представление $\theta(t,\xi)$ асимптотически (при $t\to+\infty$ или $t\to1^-$) сходится к $\theta_a(\xi)$, что обеспечивает «близость» решения рассматриваемых задач к п. а. р. (4.15) и тем самым асимптотическую сходимость друг к другу решений уравнений разных порядков — параболического (1) и типа Гамильтона — Якоби. Прежде чем переходить к строгому доказательству основных результатов этого параграфа, поясним, почему на асимптотической стадии происходит такое своеобразное «вырождение» (понижение порядка) исходного параболического уравнения (1). В первую очередь, это связано с условиями (4.1), (4.2). Сделаем в уравнении (1) замену $U=E^{-1}(u)$. Тогда функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t}=k(E(U))\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2. \tag{4.20}$$

В результате такой же замены п. а. р. (4.15) уравнения (4.6) примет вид $U_a=E^{-1}(u_a)=\psi_\pm(t)\theta_a(\xi)$, причем, как нетрудно видеть, на функции U_a первый оператор в правой части уравнения (4.20) много меньше второго при $t\to+\infty$ или $t\to1^-$. Действительно, в силу (4.2) и (4.5) имеем

$$\left|\frac{k(E(U_a))\dfrac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}}{\left(\dfrac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2}\right|=\left|\frac{\theta''_a(\xi)}{(\theta'_a)^2(\xi)}\right|\frac{k(E(U_a))}{\psi_\pm(t)}\leqslant\frac{\omega[\psi_\pm(t)]}{\psi_\pm(t)}\to0,$$

поскольку $\psi_\pm(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$ или $t\to1^-$. Тем самым решение рассматриваемой задачи «близко» к соответствующему п. а. р. уравнения первого порядка

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2, \tag{4.21}$$

которое получается из (4.20) путем отбрасывания первого (асимптотически «малого») члена в правой части. Уравнение (4.21) обратной заменой $v=E(V)$ сводится к виду (4.6).

Из (4.15) следует, что глубина (полуширина) проникновения тепловой волны $x_{эф}(t)$, удовлетворяющая в каждый момент времени равенству $u(t, x_{эф}(t)) = (1/2)u(t, 0)$, имеет вид

$$x_{эф}(t) \simeq \varphi(t)\left\{\theta_a^{-1}\left[E^{-1}\left(\frac{1}{2}E(\psi_\pm(t))\right)\Big/\psi_\pm(t)\right]\right. . \qquad (4.22)$$

Здесь θ_a^{-1}— функция обратная к θ_a (θ_a^{-1} существует на интервале (0,1) в силу монотонности θ_a).

При доказательстве сформулированных ниже теорем мы будем использовать тот факт, что неотрицательное обобщенное решение нелинейных уравнений первого порядка типа (4.21) может быть получено в виде предела при $\varepsilon \to 0^+$ последовательности классических положительных решений V^ε равномерно параболических уравнений

$$\frac{\partial V^\varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{\partial V^\varepsilon}{\partial x}\right)^2 + \varepsilon\frac{\partial^2 V^\varepsilon}{\partial x^2}, \qquad (4.21')$$

(см. по этому поводу [2], [3]). Поэтому при выводе необходимых оценок функцию V будем формально считать достаточно гладкой, неявно при этом предполагая, что оценки выводятся сначала применительно к классическому решению V^ε уравнения (4.21′), а конечный результат получается предельным переходом $\varepsilon \to 0^+$.

1. Приближенные автомодельные решения типа А и Б.

1.1. Граничный режим без обострения. Рассмотрим сначала задачу (1)—(3). В этом случае функция $\theta_a(\xi)$ в п.а.р. (4.15) удовлетворяет задаче (4.10), (4.13), разрешимость которой изучалась в [4]. Преобразование

$$\eta = \ln\xi, \quad \theta_a(\xi) = \xi^2 f_a(\eta) \qquad (4.23)$$

приводит (4.10) к виду

$$(f_a')^2 + f_a'\left[4f_a + \frac{1+m}{2}\right] + 4f_a^2 + f_a = 0, \quad \eta \in \mathbf{R}^1.$$

Это уравнение легко интегрируется и (обобщенное) решение задачи (4.10), (4.13) во всех точках, где оно положительно, единственным образом определяется из алгебраического соотношения (см. [4])

$$\left[Y - \frac{1-m}{4}\right]^{\frac{m-1}{4}}\left[Y + \frac{1+m}{4}\right]^{-\frac{m+1}{2}} = m^{\frac{1}{2}}\xi^{-1}, \quad Y = \left[\left(\frac{1+m}{4}\right)^2 + m\theta_a(\xi)\xi^{-2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.24)$$

(в остальных точках полагаем $\theta_a(\xi) = 0$).

Из (4.24), в частности, следует, что функция θ_a финитна:

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_a = 2m^{m/2}(m+1)^{-(m+1)/2} < +\infty.$$

Отметим, что при $m=1$ θ_a имеет вид

$$\theta_a(\xi) = \begin{cases} 1-\xi, & 0<\xi<1, \\ 0, & \xi \geqslant 1. \end{cases} \qquad (4.25)$$

Нам понадобится следующее утверждение, справедливость которого устанавливается непосредственно.

Лемма 4.1. *Для решения задачи* (4.10), (4.13) *справедлива оценка*

$$q_m = \sup_{\xi \in \mathbf{R}_+^1} \left| \frac{d^2\theta_a(\xi)}{d\xi^2} \right| < +\infty. \tag{4.26}$$

Замечание. Нетрудно показать, что при $m > 1$ $\theta_a''(\xi) \geqslant 0$, а при $0 < m < 1$ $\theta_a''(\xi) \leqslant 0$ всюду в $\mathbf{R}_+^1$. Если $m = 1$, то $\theta_a''(\xi) \equiv 0$ (см. (4.25)).

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* (4.1), (4.2) *и пусть граничный режим* (3) *имеет вид* $\varkappa_+(t) = E(\psi_+(t))$, *где функция* ψ_+ *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t) \to \frac{1}{m}, \quad t \to +\infty; \quad m = \text{const} > 0. \tag{4.27}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left\{ m \frac{\psi_+^2(t)}{\psi_+'(t)} \right\}^{1/2}, \quad t > 0, \tag{4.28}$$

функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (4.10), (4.13) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_C = O\left\{ \frac{q_m}{\psi_+(t)} \int_0^t \frac{\omega[\psi_+(\tau)]}{\psi_+(\tau)} \psi_+'(\tau)\, d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\psi_+(t)} \int_0^t \psi_+(\tau) \left| \left[\ln \frac{\psi_+^{\frac{1+m}{2m}}}{\varphi} \right]'(\tau) \right| d\tau \right\} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0. \tag{4.29}$$

Замечание 1. Из (4.10) следует, что

$$\theta_a = \frac{1}{m} (\theta_a')^2 + \frac{1+m}{2m} \theta_a' \xi.$$

Подставляя это равенство в (4.16) и учитывая при этом условие (4.28), получаем, что функция $U_a = E^{-1}(u_a)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} = \left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2 + G_+(t) \frac{\partial U_a}{\partial x} x, \tag{4.30}$$

где $G_+(t) = [\ln(\psi_+^{(1+m)/2m}/\varphi)]'(t)$. Таким образом, в условиях теоремы 4.1 п. а. р. (4.15) удовлетворяет следующему уравнению типа Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \mathbf{H}(u_a) + G_+(t) \frac{\partial u_a}{\partial x} x. \tag{4.30'}$$

Доказательство. Положим $z = U - U_a$, где $U = E^{-1}(u)$, $U_a = E^{-1}(u_a)$. Тогда, как следует из (4.20), (4.30), функция z удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k[E(U)] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + k[E(U)] \frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U_a}{\partial x} \right) - G_+(t) \frac{\partial U_a}{\partial x} x. \tag{4.31}$$

Из (4.31) в результате применения принципа максимума заключаем, что $\sup_x |z(t, x)| \leqslant z_0(t)$, где неотрицательная гладкая функция $z_0(t)$,

$z_0(0)=\sup_x |z(0, x)|$, удовлетворяет неравенству

$$\frac{dz_0}{dt} \leqslant \sup_x k[E(U)] \sup_x \left|\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}\right| + |G_+(t)| \sup_x \left|\frac{\partial U_a}{\partial x} x\right|. \tag{4.32}$$

Используя обозначение (4.4) и конкретный вид функции U_a, получаем

$$\sup_x k[E(U)] = \sup_{s\in[0,\psi_+(t)]} k[E(s)] = \omega[\psi_+(t)], \quad t\to+\infty,$$

$$\sup_x \left|\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2}\right| = \frac{\psi_+(t)}{\varphi^2(t)} q_m = \frac{q_m}{m}\frac{\psi_+'(t)}{\psi_+(t)},$$

$$\sup_x \left|\frac{\partial U_a}{\partial x} x\right| = p_m\psi_+(t), \quad p_m = \sup_{\xi\in R_+^1} \left|\frac{d\theta_a}{d\xi}\xi\right| < +\infty.$$

Подставляя эти равенства в (4.32), выводим при достаточно больших t оценку

$$\frac{dz_0}{dt} \leqslant \frac{q_m}{m}\frac{\omega[\psi_+(t)]}{\psi_+(t)}\psi_+'(t) + p_m G_+(t)\psi_+(t).$$

Отсюда, поскольку

$$\|\theta(t, \xi)-\theta_a(\xi)\|_C \leqslant \frac{z_0(t)}{\psi_+(t)},$$

прямо следует оценка (4.29).

Остается убедиться в сходимости $\theta\to\theta_a$ при $t\to+\infty$. Раскрывая неопределенность в правой части (4.29), с учетом (4.5), (4.28), (4.27) имеем

$$\lim_{t\to+\infty} \|\theta(t, \xi)-\theta_a(\xi)\|_C \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{\omega[\psi_+(t)]}{\psi_+(t)}\frac{q_m}{m} + $$
$$+\left\{\frac{1}{2m}-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t)\right\}=0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. В частном случае $\psi_+(t)=(1+t)^m$, когда $\varphi(t)=$ $=(1+t)^{(1+m)/2}$ и п. а. р. (4.15) совпадает с функцией (4.7) — точным инвариантным решением уравнения (4.6), теорема 4.1 доказана в [4]. Оценка сходимости в этом случае упрощается — отсутствует второй член в правой части (4.29).

Замечание 3. При $m=1$ функция θ_a имеет вид (4.25), $\theta_a''\equiv 0$ и поэтому оценка сходимости (4.29) существенно улучшается — в ней отсутствует первый («нелинейный») член. Это связано с тем, что в этом случае инвариантное решение (4.7) уравнения (4.6), на основе которого строятся п. а. р. (4.15), является инвариантным решением исходного уравнения (1) и имеет вид

$$v_A(t, x) = \begin{cases} E[1+t-x], & 0<x<1+t, \\ 0, & x\geqslant 1+t. \end{cases} \tag{4.33}$$

Решение подобного типа часто называют «бегущей волной».

Исходя из сделанного замечания, можно считать, что п. а. р. (4.15), построенные в этом параграфе, лежат в «окрестности» инвариантного решения (4.33) уравнения (1). Понятие «окрестность» в этом случае следует понимать весьма широко: пространственно-временные структуры п. а. р. (4.15) (или, в частности, п. а. р. (4.7)—(4.9)) и функции (4.33) имеют мало общего.

Возможности теоремы 4.1 продемонстрируем на одном примере.

Пример 6. Рассмотрим задачу (1)—(3) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\ln(1+u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{4.34}$$

Коэффициент k в (4.34) удовлетворяет условиям (4.1), (4.2) (см. таблицу 8). Преобразование E имеет вид $E(s) \cong \exp[(2s)^{1/2}]$. Пусть $\psi_+(t) = (1+t)^m/\ln(2+t)$ (условие (4.27) при этом выполнено), т. е.

$$\varkappa_+(t) \cong \exp\{[2(1+t)^m/\ln(2+t)]^{1/2}\}, \quad t>0.$$

Поэтому в силу теоремы 4.1 функция $\varphi(t)$ в п. а. р. (4.15) оценивается при больших t по формуле

$$\varphi(t) \cong t^{(1+m)/2}\ln^{-1/2}t \tag{4.35}$$

(с такой скоростью, например, движется при $t\to+\infty$ точка «фронта» тепловой волны). Глубина (полуширина) проникновения тепловой волны, как следует из (4.22), в рассматриваемом случае имеет вид

$$x_{\text{эф}}(t) \cong \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \ln 2 \cdot t^{1/2}, \quad t\to+\infty. \tag{4.36}$$

При выводе этого соотношения мы учли, что для малых ξ $\theta_a(\xi) \cong \cong 1-m^{1/2}\xi$, т. е. $\theta_a^{-1}(\xi) \cong (1-\xi)m^{-1/2}$.

Отметим, что здесь пространственная структура тепловой волны сильно меняется со временем: скорости движения двух его выделенных точек — точки «фронта» (4.35) и полуширины (4.36) — все больше и больше отличаются друг от друга по мере того, как $t\to+\infty$ (эта особенность присуща решениям всех рассматриваемых здесь задач).

1.2. Граничный режим с обострением. Рассмотрим теперь задачу (1)—(3′) с заданным при $x=0$ режимом с обострением. Функция θ_a в (4.15) удовлетворяет здесь задаче (4.11), (4.15). Уравнение (4.11) анализируется с помощью преобразования (4.25) и θ_a во всех точках, где она положительна, удовлетворяет равенствам (см. [4]—[7])

$$\left[X - \frac{1+n}{4}\right]^{\frac{1+n}{2}} \left[X + \frac{1-n}{5}\right]^{\frac{1-n}{2}} = (-n)^{\frac{1}{2}}\xi^{-1},$$
$$X = \left[\left(\frac{1+n}{4}\right)^2 - n\theta_a(\xi)\xi^{-2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.37}$$

(в остальных точках полагаем $\theta_a(\xi)=0$).

Укажем некоторые свойства функции θ_a. При $n<-1$ она финитна: $\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_a = 2(-n)^{n/2}(-1-n)^{-(1+n)/2} < +\infty$. При $n\in(-1, 0)$ $\theta_a(\xi)>0$ всюду в $\mathbf{R}_+^1$, причем

$$\theta_a(\xi) \simeq C(n)\xi^{\frac{2n}{1+n}}, \quad \xi\to+\infty, \tag{4.38}$$

где $C(n) = -[(1+n)/2n]2^{-2n/(1+n)}(-n)^{1/(1+n)}$. При $n=-1$

$$\theta_a(\xi) = \begin{cases}(1-\xi/2)^2, & 0<\xi<2,\\ 0, & \xi\geqslant 2.\end{cases} \tag{4.39}$$

Лемма 4.2. *Для решения задачи* (4.11), (4.13) *справедлива оценка*

$$q_n = \sup_{\xi \in R^1_+} \left| \frac{d^2\theta_a}{d\xi^2}(\xi) \right| < +\infty. \tag{4.40}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполняются условия* (4.1), (4.2) *и пусть граничный режим* (3′) *имеет вид* $\varkappa_-(t) = E(\psi_-(t))$, *где функция* ψ_- *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t) \to \frac{1}{n}, \quad t \to 1^-; \quad n = \text{const} < 0. \tag{4.41}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left\{(-n)\frac{\psi_-^2(t)}{\psi_-'(t)}\right\}^{1/2}, \quad t \in (0, 1), \tag{4.42}$$

функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (4.11), (4.13) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\begin{aligned} \|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_C = O\Bigg\{&\frac{q_n}{\psi_-(t)} \int_0^t \frac{\omega[\psi_-(\tau)]}{\psi_-(\tau)} \psi_-'(\tau)\, d\tau + \\ &+ \frac{1}{\psi_-(t)} \int_0^t \psi_-(\tau) \left| \left[\ln \frac{\psi_-^{\frac{1+n}{2n}}}{\varphi}\right]'(\tau) \right| d\tau \Bigg\} \xrightarrow[t \to 1^-]{} 0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Замечание 1. В условиях теоремы 4.2 п. а. р. (4.15) удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{k(u_a)}{u_a + 1}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)^2 + G_-(t)\frac{\partial u_a}{\partial x} x, \tag{4.44}$$

где $G_-(t) = [\ln(\psi_-^{\frac{1+n}{2n}}/\varphi)]'(t)$.

Замечание 2. Для частного случая $\psi_-(t) = (1-t)^n$, когда $\varphi(t) = (1-t)^{(1+n)/2}$ (см. (4.42)) и п. а. р. (4.15) совпадает с функцией (4.8), теорема 4.2 доказана в [4]. При $k(u) \equiv 1$, когда $\varkappa_-(t) = E(\psi_-(t)) \cong \exp[(1-t)^n]$, справедливость утверждения, аналогичного теореме 4.2, ранее установлена в работах [5]—[7], где исследовался эффект локализации тепла в средах с постоянными свойствами. Отметим, что во всех перечисленных случаях правая часть оценки сходимости (4.43) выглядит много проще — в ней отсутствует второй член.

Теорема 4.2 доказывается точно так же, как предыдущая.

Пример 7. Рассмотрим задачу (1)—(3′) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\ln[1 + \ln(1+u)]\frac{\partial u}{\partial x}\right\}. \tag{4.45}$$

Условия (4.1), (4.2) при этом выполнены (см. таблицу 8). Пусть $\psi_-(t) = (1-t)^n \ln^\alpha[1 + (1-t)^{-1}]$, где α — некоторая постоянная, т. е. граничный режим (3′) имеет вид (см. функцию E в таблице 8).

$$\varkappa_-(t) = E[\psi_-(t)] \cong \exp\left\{\frac{(1-t)^n}{(-n)} \ln^{\alpha-1}[(1-t)^{-1}]\right\} \tag{4.46}$$

при $t \to 1^-$. Поэтому в силу теоремы 4.2 функция $\varphi(t)$ (скорость движения «фронта» тепловой волны, порожденной режимом (4.46)) оценивается по формуле

$$\varphi(t) \cong (1-t)^{\frac{1+n}{2}} \ln^{\frac{\alpha}{2}} [(1-t)^{-1}], \quad t \to 1^-.$$

Отсюда заключаем, что при $n < -1$ волна прогревает до бесконечности все пространство (HS-режим), при $n \in (-1, 0)$ $u(t, x) \to +\infty$ при $t \to 1^-$ только в точке $x=0$ (LS-режим). При $n=-1$ и $\alpha=0$

$$\varkappa_-(t) \cong \exp\left\{\frac{(1-t)^{-1}}{\ln[(1-t)^{-1}]}\right\}, \quad t \to 1^-,$$

и реализуется S-режим, когда «фронт» тепловой волны неподвижен и решение возрастает до бесконечности при $t \to 1^-$ на ограниченном множестве $0 \leqslant x < 2 = \operatorname{mes} \operatorname{supp} \theta_a(\xi)$. Отметим, что при всех $n < 0$ глубина проникновения волны $x_{эф}(t)$ сокращается: $x_{эф}(t) \to 0$, $t \to 1^-$.

2. Приближенные автомодельные решения типа В.

2.1. Граничный режим без обострения. Рассмотрим задачу (1)—(3). Функция θ_a в п. а. р. (4.15) удовлетворяет задаче (4.12), (4.13) и при всех ξ таких, что $\theta_a(\xi) > 0$, определяется из равенств (см. [8])

$$Z + \exp\left[\frac{1}{4Z}\right] = \xi^{-1}, \quad Z = \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{16} + \theta_a(\xi)\,\xi^{-2}\right]^{1/2} \tag{4.47}$$

(в остальных точках полагаем $\theta_a(\xi) = 0$). Из (4.47) следует, что функция $\theta_a(\xi)$ финитна, причем $\operatorname{mes} \operatorname{supp} \theta_a = (1/2 + \exp(1/2))^{-1}$. Кроме того, справедлива следующая

Лемма 4.3. *Для решения задачи* (4.12), (4.13) *выполняется оценка*

$$q_\infty = \sup_{\xi \in \mathbf{R}_+^1} \left| \frac{d^2\theta_a}{d\xi^2}(\xi) \right| < +\infty. \tag{4.48}$$

Теперь можно сформулировать утверждение, которое доказывается точно так же, как теорема 4.1.

Теорема 4.3. *Пусть выполняются условия* (4.1), (4.2) *и пусть граничный режим* (3) *имеет вид* $\varkappa_+(t) = E[\psi_+(t)]$, *где функция* ψ_+ *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_+}{\psi_+'}\right]'(t) \to 0, \quad t \to +\infty. \tag{4.49}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \left\{\frac{\psi_+^2(t)}{\psi_+'(t)}\right\}^{1/2}, \quad t > 0, \tag{4.50}$$

функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (4.12), (4.13) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\begin{aligned} \|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_C = O\Bigg\{ &\frac{q_\infty}{\psi_+(t)} \int_0^t \frac{\omega[\psi_+(\tau)]}{\psi_+(\tau)} \psi_+'(\tau)\, d\tau + \\ &+ \frac{1}{\psi_+(t)} \int_0^t \psi_+(\tau) \left| \left[\ln \frac{\psi_+^{1/2}}{\varphi}\right]'(\tau) \right| d\tau \Bigg\} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Замечание 1. Из (4.12), (4.16), (4.50) следует, что в условиях теоремы 4.3 п. а. р. (4.15) удовлетворяет уравнению (4.30′), где $G_+(t) = [\ln(\psi_+^{1/2}/\varphi)]'(t)$.

Замечание 2. В одном частном случае $k(u)\equiv 1$, $\psi_+(t)=\exp(t)$, когда $\varphi(t)=\exp(t/2)$, $E(s)\simeq\exp(s)$ и $\varkappa_+(t)\simeq\exp[\exp(t)]$, теорема 4.3 сформулирована в [8]. В этом случае оценка (4.51), как нетрудно проверить, имеет вид

$$\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_C=O\{t\exp(-t)\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Пример 8. Рассмотрим задачу (1)—(3) для уравнения (4.45). Пусть $\psi_+(t)=\exp[(1+t)^2\ln(1+t)]$ (условие (4.49) выполняется), т. е. граничный режим имеет вид

$$\varkappa_+(t)=E[\psi_+(t)]\cong\exp\{\exp[t^2\ln t]/t^2\ln t\}$$

при больших t. Поэтому в силу теоремы 4.3 функция $\varphi(t)$ (координата «фронта» тепловой волны) оценивается при $t\to+\infty$ по формуле

$$\varphi(t)=\left\{\frac{\psi_+^2(t)}{\psi_+'(t)}\right\}^{1/2}\cong[2t\ln t]^{-1/2}\exp\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]. \tag{4.52}$$

Глубина проникновения волны, как следует из (4.22), в данном случае имеет вид

$$x_{\text{эф}}(t)\cong\frac{\ln 2}{2^{1/2}}t^{3/2}\ln^{1/2}t\exp\left[-\frac{t^2}{2}\ln t\right],\quad t\to+\infty.$$

Заметим, что в отличие от точки «фронта» (4.52), которая «уходит» как угодно далеко при $t\to+\infty$, полуширина волны на асимптотической стадии сокращается вплоть до нуля.

2.2. Граничный режим с обострением. Ниже строятся п. а. р. типа В задачи (1)—(3′). Сформулированная теорема доказывается так же, как предыдущие.

Теорема 4.4. *Пусть выполняются условия* (4.1), (4.2) *и пусть граничный режим* (3′) *имеет вид* $\varkappa_-(t)=E[\psi_-(t)]$, *где функция* ψ_- *удовлетворяет условию*

$$\left[\frac{\psi_-}{\psi_-'}\right]'(t)\to 0,\quad t\to 1^-. \tag{4.53}$$

Тогда

$$\varphi(t)=\left\{\frac{\psi_-^2(t)}{\psi_-'(t)}\right\}^{1/2},\quad t\in(0,1), \tag{4.54}$$

функция $\theta_a(\xi)$ *является решением задачи* (4.12), (4.13) *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_C=O\left\{\frac{q_\infty}{\psi_-(t)}\int_0^t\frac{\omega[\psi_-(\tau)]}{\psi_-(\tau)}\psi_-'(\tau)\,d\tau+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\psi_-(\tau)}\int_0^t\psi_-(\tau)\left|\left[\ln\frac{\psi_-^{1/2}}{\varphi}\right]'(\tau)\right|d\tau\right\}\xrightarrow[t\to 1^-]{}0. \tag{4.55}$$

Замечание. В условиях теоремы п. а. р. (4.15) удовлетворяет уравнению (4.44), в котором $G_-(t)=[\ln(\psi_-^{1/2}/\varphi)]'(t)$.

Пример 9. Пусть в задаче (1)—(3′) для уравнения (4.34) граничный режим (3′) имеет вид

$$\varkappa_-(t)=\exp\{[2\exp[(1-t)^{-2}]]^{1/2}\},\quad t\in(0,1),$$

т. е. $\psi_-(t)\cong\exp[(1-t)^{-2}]$ при $t\to1^-$. Условие (4.53) этой функцией удовлетворяется и тогда из теоремы 4.4 получаем для $\varphi(t)$ (координаты «фронта») оценку

$$\varphi(t)\cong(1-t)^{3/2}\exp[(1-t)^{-2}/2]\to+\infty,\quad t\to1^-.$$

В то же время глубина проникновения тепловой волны имеет вид

$$x_{\text{эф}}(t)\cong2^{1/2}\ln2(1-t)^{3/2}\to0,\quad t\to1^-.$$

При выводе этой оценки из (4.22) учитывалось, что $\theta_a(\xi)\cong1-\xi$ при малых ξ, т. е. $\theta_a^{-1}(\xi)\cong1-\xi$ при $\xi\to1^-$.

3. Отметим, что построенная в этом параграфе система п. а. р. уравнений (1) с коэффициентами k, удовлетворяющими условиям (4.1), (4.2), является не совсем полной — исследование не охватывает граничные режимы $\varkappa_\pm(t)=E[\psi_\pm(t)]$, где функция $\psi_\pm$ такова, что

$$\left[\frac{\varphi_\pm}{\psi'_\pm}\right]'(t)\to\infty \tag{4.56}$$

при $t\to+\infty$ или $t\to1^-$. Надо сказать, что уравнение (4.6) имеет точное инвариантное решение $v_A(t, x)$, на основе которого можно формально определить такие п. а. р. Это решение имеет вид

$$\text{Г.}\ \ v_A(t,x)=E\left[\theta_a\left(\frac{x}{(1+t)^{1/2}}\right)\right],\quad (t,x)\in\mathbf{R}^1_+\times\mathbf{R}^1_+, \tag{4.57}$$

где функция θ_a удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\theta'_a)^2+\frac{1}{2}\theta'_a\xi=0,\quad \xi\in\mathbf{R}^1_+, \tag{4.58}$$

которое получается подстановкой выражения (4.57) в (4.6), и краевым условиям (4.13). Решением задачи (4.58), (4.13) является функция

$$\theta_a(\xi)=\begin{cases}1-\xi^2/4, & 0<\xi<2,\\ 0, & \xi\geqslant2.\end{cases} \tag{4.59}$$

Есть основания ожидать, что при выполнении условия (4.56) задача (1)—(3) имеет п. а. р., которые следует искать в виде (4.15), где $\theta_a(\xi)$ — функция (4.59). Поскольку в силу (4.58) $\theta_a'\xi=2(\theta_a')^2$, функция $U_a=E^{-1}(u_a)$ будет удовлетворять уравнению (см. (4.16))

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=\left(\frac{2\varphi\varphi'}{\psi_+}\right)(t)\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\psi'_+}{\psi_+}\right)(t)U_a. \tag{4.60}$$

Отсюда видно, что необходимо положить

$$\varphi(t)=\left\{\int_0^t\varphi_+(\tau)\,d\tau\right\}^{1/2},\quad t>0.$$

Тогда уравнение (4.60) примет вид

$$\frac{\partial U_a}{\partial t}=\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\psi'_+}{\psi_+}\right)(t)U_a \tag{4.61}$$

и его можно сопоставить с уравнением (4.20). Однако в этом случае из уравнения для разности $z=U-U_a$ нельзя получить оценку, обеспечивающую сходимость $\theta(t,\xi)\to\theta_a(\xi)$ при $t\to+\infty$ в норме $C(\mathbf{R}_+^1)$. Действительно, второй член в правой части (4.61) обеспечивает наличие оценки

$$\sup_x |U(t, x) - U_a(t, x)| = O(\psi_+(t)), \quad t \to +\infty.$$

Поэтому $\|\theta-\theta_a\|_C = O(\psi_+(t))/\psi_+(t) \not\to 0$ при $t \to +\infty$.

Напомним, что в § 2 работы [1] подобную трудность удалось обойти путем вывода оценки скорости сходимости в норме $H^{-1}(\mathbf{R}_+^1)$, а не $C(\mathbf{R}_+^1)$ (см. теорему 2.1 в [1]).

Для задачи (1)—(3′) с граничным режимом с обострением п. а. р. типа Г вообще не существует[9]. Действительно, функция θ_a в (4.15) должна здесь удовлетворять уравнению

$$(\theta_a')^2 - \frac{1}{2}\theta_a'\xi = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}_+^1,$$

которое ограниченных решений, удовлетворяющих условию $\theta_a(+\infty) = 0$, не имеет.

В заключение еще раз подчеркнем, что построенные в этом параграфе приближенные автомодельные решения не имеют себе аналогов в классе всех точных инвариантных решений уравнения (1) (см. [9]).

§ 5. Приближенные автомодельные решения линейного уравнения теплопроводности

В этом параграфе рассматриваются п. а. р. краевой задачи для линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

$$u(t, 0) = \varkappa(t) > 0, \quad t \geqslant 0; \quad \varkappa \in C^2(\mathbf{R}_+^1). \tag{5.2}$$

Для простоты полагаем $u(x, 0) \equiv 0$; тогда $u(t, +\infty) = 0$ при всех $t > 0$. Не ограничивая общности исследования проведем для монотонных граничных режимов $\varkappa(t)$, определенных для любых $t > 0$ и таких, что $\varkappa(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$. П. а. р., отвечающие граничным режимам с обострением, строятся аналогичным образом (см. все предыдущие параграфы, в которых отчетливо проявляется эта аналогия).

Решение рассматриваемой задачи допускает интегральное представление в виде теплового потенциала двойного слоя (см. [15])

$$u(t, x) = \frac{x}{2\pi^{1/2}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right](t-\tau)^{3/2}\varkappa(\tau)\,d\tau,$$

который, однако, имеет достаточно сложный вид, и поэтому в общем случае (при произвольных граничных функциях $\varkappa$) непосредственное выделение из него асимптотических свойств решения весьма затруднительно.

При построении полной системы п. а. р. нам понадобятся следующие три типа автомодельных решений уравнения (5.1):

I. $u_A(t, x) = f_1(\zeta)$, $\quad \zeta = x/t^{1/2}$,

II. $u_A(t, x) = t^m f_2(\zeta)$, $\quad \zeta = x/t^{1/2}$ $\quad (m > 0)$,

III. $u_A(t, x) = \exp(t) f_3(\zeta)$, $\quad \zeta = x$.

---

[9] В этом случае существуют п. а. р. задачи с дополнительным краевым условием на подвижной правой границе.

Подставляя функции u_A в (5.1), получаем для f_1, f_2 и f_3 уравнения

$$f_1'' + \frac{1}{2} f_1'\zeta = 0, \quad \zeta \in \mathbf{R}^1_+, \tag{5.3}$$

$$f_2'' + \frac{1}{2} f_2'\zeta - mf_2 = 0, \quad \zeta \in \mathbf{R}^1_+, \tag{5.4}$$

$$f_3'' - f_3 = 0, \quad \zeta \in \mathbf{R}^1_+. \tag{5.5}$$

Кроме того, потребуем выполнения краевых условий

$$f_i(0) = 1, \quad f_i(+\infty) = 0; \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.6}$$

Уравнения (5.3)—(5.5) легко интегрируются, и тогда с учетом (5.6) получаем

$$f_1(\zeta) = \pi^{-1/2} \int\limits_{\zeta}^{+\infty} \exp(-s^2/4)\, ds, \tag{5.7}$$

$$f_2(\zeta) = \pi^{-1/2} 2^{2m+1} \Gamma(1+m) \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) H_{-2m-1}\left(\frac{\zeta}{2}\right) =$$

$$= \pi^{-1/2} 2^{2m+1} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+2m)} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) \int\limits_0^{\infty} \exp(-s^2 - \zeta s)\, s^{2m}\, ds \tag{5.8}$$

(здесь H_{-2m-1} — обозначение функции Эрмита [16]),

$$f_3(\zeta) = \exp(-\zeta). \tag{5.9}$$

Отметим, что решениями типа I—III и $u_A(t, x) = \ln t + f_4(x/t^{1/2})$, которое не удовлетворяет условию $u_A(t, +\infty) = 0$, исчерпывается весь набор существенно отличающихся друг от друга инвариантных решений уравнения (5.1) (см. [17]).

1. Так же, как в § 2 (см. [1]), п. а. р. задачи (5.1), (5.2) будем искать в виде

$$u_a(t, x) = \varkappa(t)\, \theta_a(\zeta), \quad \zeta = \frac{x}{\Phi(t)}, \tag{5.10}$$

где неизвестные функции $\theta_a(\zeta)$ и $\Phi(t)$, $\theta_a(0) = 1$, $\theta_a(+\infty) = 0$, определим из условия сходимости при $t \to +\infty$ функции θ_a к автомодельному представлению $\theta(t, \zeta)$ решения задачи. Оно имеет вид

$$\theta(t, \zeta) = \frac{1}{\varkappa(t)} u(t, \zeta\Phi(t)), \quad \zeta \in \mathbf{R}^1_+. \tag{5.11}$$

Из (5.10) следует, что при условии $\theta \to \theta_a$, $t \to +\infty$, глубина проникновения тепловой волны при достаточно больших t может быть оценена по формуле

$$x_{\text{эф}}(t) \cong \bar{\zeta}\Phi(t), \tag{5.12}$$

где $\bar{\zeta}$ — корень уравнения $\theta_a(\bar{\zeta}) = 1/2$.

Нетрудно убедиться, что п. а. р. (5.10) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \varkappa'(t)\, \theta_a(\zeta) - \varkappa(t) \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \frac{d\theta_a(\zeta)}{d\zeta} \zeta \tag{5.13}$$

или, что тоже самое, уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)(t)\, u_a - \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)(t) \frac{\partial u_a}{\partial x} x. \tag{5.13$'$}$$

В зависимости от вида функции θ_a в (5.10) построение п. а. р. разбивается на три случая. Отметим, что другой класс «вырожденных» п. а. р. уравнения (5.1) рассмотрен в § 4. В заключительном пункте параграфа эти п. а. р. будут сопоставлены с п. а. р. (5.10).

1.1. Приближенные автомодельные решения типа I.

Теорема 5.1. *Пусть выполняется условие*

$$\left[\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right]'(t)\to+\infty,\quad t\to+\infty. \tag{5.14}$$

Тогда $\Phi(t)=t^{1/2}$, $\theta_a(\zeta)=f_1(\zeta)$, *где* f_1 *имеет вид* (5.7), *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|\theta(t,\zeta)-\theta_a(\zeta)\|_2=O\left\{\frac{1}{\varkappa(t)\,t^{1/4}}\int\limits_1^t\tau^{1/4}\varkappa'(\tau)\,d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0. \tag{5.15}$$

Замечание 1. Из (5.3) следует, что $f_1'\zeta=-2f_1''$. Подставляя это равенство (5.13), получаем, что в условиях теоремы п. а. р. (5.10) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\mathbf{B}(t,u_a)=\frac{\partial^2u_a}{\partial x^2}+\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)(t)\,u_a, \tag{5.16}$$

которое отличается от исходного дополнительным членом в правой части.

Доказательство. Положим $w(t,x)=u(t,x)-u_a(t,x)$ всюду в $\mathbf{R}_+^1\times\mathbf{R}_+^1$. Тогда $w(t,0)=w(t,+\infty)=0$ и, кроме того, $w(t,\cdot)\in L^2(\mathbf{R}_+^1)$ при всех $t>0$. Из (5.1), (5.16) следует, что функция w удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2w}{\partial x^2}-\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)(t)\,u_a. \tag{5.17}$$

Умножая скалярно обе части уравнения на w и учитывая при этом, что

$$\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2},w\right)=-\left\|\frac{\partial w}{\partial x}\right\|_2^2\leqslant0,$$

придем к неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2\leqslant-\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)(t)(u_a,w).$$

Отсюда с помощью неравенства Коши — Буняковского $(u_a,w)\leqslant\leqslant\|u_a\|_2\|w\|_2$ получаем

$$\frac{d}{dt}\|w\|_2\leqslant\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)(t)\|u_a\|_2. \tag{5.18}$$

Учитывая теперь, что в силу (5.10), (5.11)

$$\|u_a\|_2=\varkappa(t)\,t^{-1/4}\|f_1(\zeta)\|_2\quad(\|f_1(\zeta)\|_2<+\infty),$$
$$\|w\|_2=\varkappa(t)\,t^{-1/4}\|\theta(t,\zeta)-\theta_a(\zeta)\|_2,$$

из (5.18) заключаем, что при $t>1$

$$\|\theta(t,\zeta)-\theta_a(\zeta)\|_2\leqslant[\|w(1,x)\|_2/\varkappa(t)\,t^{1/4}]+$$
$$+\|f_1(\zeta)\|_2\int\limits_1^t\tau^{1/4}\varkappa'(\tau)\,d\tau/\varkappa(t)\,t^{1/4}.$$

Отсюда непосредственно следует справедливость оценки (5.15).

Далее, раскрывая неопределенность в правой части (5.15), имеем

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\varkappa(t)\,t^{1/4}}\int_1^t \tau^{1/4}\varkappa'(\tau)\,d\tau=\lim_{t\to+\infty}\left[1+\frac{1}{4}\frac{\varkappa(t)}{\varkappa'(t)\,t}\right]^{-1}=$$

$$=\left[1+\frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)'(t)\right]^{-1}=0$$

(на последнем этапе использовано условие (5.14)). Поэтому $\theta\to\theta_a$ при $t\to+\infty$. Теорема доказана.

Замечание 2. Из (5.16) следует, что $u_a(t,x)$ является верхним решением уравнения (5.1) (поскольку $\varkappa'(t)\geqslant 0$), так что при выполнении условия (5.14) всюду в $\mathbf{R}_+^1\times\mathbf{R}_+^1$ справедлива оценка

$$u(t,x)\leqslant u_a(t,x)=\varkappa(t)f_1(x/t^{1/2}).$$

Эта оценка является (в определенном смысле) неулучшаемой.

Конкретные случаи применения теоремы 5.1 указаны в таблице 9 в конце этого параграфа.

1.2. Приближенные автомодельные решения типа II.

Теорема 5.2. *Пусть выполняется условие* (*ср.* (5.15))

$$\left[\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right]'(t)\to\frac{1}{m},\quad t\to+\infty;\qquad m=\text{const}>0. \tag{5.19}$$

Тогда $\Phi(t)=t^{1/2}$, $\theta_a(\zeta)=f_2(\zeta)$, *где* f_2 *вычисляется по формуле* (5.8), *и справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$\|\theta(t,\zeta)-\theta_a(\zeta)\|_C=O\left\{\frac{1}{\varkappa(t)}\int_1^t\left|\varkappa'(\tau)-\frac{m}{\tau}\varkappa(\tau)\right|d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0. \tag{5.20}$$

Замечание 1. Из (5.4) следует, что $f_2\zeta=-2f_2''+2mf_2$. Подставив это равенство в (5.13), получим, что в условиях теоремы п. а. р. (5.10) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\mathbf{B}(t,u_a)=\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2}+\left[\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)(t)-\frac{m}{t}\right]u_a, \tag{5.21}$$

которое отличается от исходного.

Доказательство. Положим $w(t,x)=u(t,x)-u_a(t,x)$. Тогда, как следует из (5.1), (5.21), функция w удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\left[\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)(t)-\frac{m}{t}\right]u_a, \tag{5.22}$$

причем $w(t,0)=w(t,+\infty)=0$ при всех $t>0$. Из (5.22) в силу принципа максимума получаем, что $\sup\limits_x|w(t,x)|\leqslant w_0(t)$, где неотрицательная ограниченная функция $w_0(t)$ удовлетворяет оценке

$$\frac{dw_0}{ds}(t)\leqslant\left|\varkappa'(t)-\frac{m}{t}\varkappa(t)\right|,\quad t>0,$$

при выводе которой также учитывается, что $u_a(t,x)\leqslant\psi(t)$. Поскольку $\|\theta(t,\zeta)-\theta_a(\zeta)\|_C\leqslant w_0(t)/\varkappa(t)$, отсюда непосредственно следует, что при $t>1$

$$\|\theta(t,\zeta)-\theta_a(\zeta)\|_C\leqslant w_0(1)/\varkappa(t)+\int_1^t\left|\varkappa'(\tau)-\frac{m}{\tau}\varkappa(\tau)\right|d\tau/\varkappa(t).$$

Раскрыв теперь неопределенность в правой части (5.20), с учетом (5.19) получим

$$\lim_{t\to+\infty}\|\theta-\theta_a\|_C=\lim_{t\to+\infty}\left|1-m\,\frac{\varkappa(t)}{\varkappa'(t)\,t}\right|=$$

$$=\left|1-m\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)'(t)\right|=\left|1-m\frac{1}{m}\right|=0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что в условиях теоремы 5.1 из уравнения (5.17) оценку скорости сходимости в норме $C(\mathbf{R}_+^1)$ вывести нельзя.

Замечание 3. В условиях теоремы 5.2

$$\|\theta(t,\zeta)-f_2(\zeta)\|_2=O\left\{\frac{1}{\varkappa(t)\,t^{1/4}}\int_1^t\tau^{-3/4}\varkappa(\tau)\left|\frac{\varkappa'(\tau)\,\tau}{\varkappa(\tau)}-m\right|d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0,$$

т. е. $\theta\to f_2$ при $t\to+\infty$ в норме $L^2(\mathbf{R}_+^1)$.

Замечание 4. Из (5.21) следует, что при $\varkappa'/\varkappa\geqslant m/t$ п. а. р. (5.10) является верхним, а при $\varkappa'/\varkappa\leqslant m/t$ — нижним решением уравнения (5.1).

Некоторые конкретные применения теоремы 5.2 приведены в таблице 9.

1.3. Приближенные автомодельные решения типа III.

Теорема 5.3. *Пусть выполняется условие* (*ср.* (5.14), (5.19))

$$\left[\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right]'(t)\to 0,\quad t\to+\infty. \tag{5.23}$$

Тогда

$$\Phi(t)=[\varkappa(t)/\varkappa'(t)]^{1/2},\quad t>0, \tag{5.24}$$

$\theta_a(\zeta)=f_3(\zeta)$, *где функция* f_3 *вычисляется по формуле* (5.9), *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|\theta(t,\zeta)-\theta_a(\zeta)\|_C=O\left\{\frac{1}{\varkappa(t)}\int_1^t\varkappa'(\tau)\left|\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)'(\tau)\right|d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0. \tag{5.25}$$

Замечание 1. Из (5.5) следует, что $f_3=f_3''$. Подставив это равенство в (5.13), получим в силу (5.24), что в условиях теоремы п. а. р. (5.10) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\mathbf{B}(t,u_a)=\frac{\partial^2u_a}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\varkappa'}{\varkappa}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)'\right](t)\frac{\partial u_a}{\partial x}x.$$

Замечание 2. В условиях теоремы 5.3 $\theta(t,\zeta)\to f_3(\zeta)$ при $t\to+\infty$ в норме $L^2(\mathbf{R}_+^1)$, причем справедлива оценка

$$\|\theta(t,\zeta)-f_3(\zeta)\|_2=O\left\{\left[\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)^{1/4}\right]^{-1}(t)\int_1^t\varkappa(\tau)\left|\left[\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)^{1/4}\right]'(\tau)\right|d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Сформулированная теорема доказывается так же, как предыдущая.

Ниже приведена таблица 9, в которой указаны функции $\Phi(t)$ некоторых п. а. р. уравнения (5.1), определяющих асимптотическое поведение решения задачи (5.1), (5.2) при различных граничных законах $\varkappa(t)$. Отметим, что в рассматриваемых случаях точных инвариантных решений задача (5.1), (5.2) не имеет (см. [17]).

2. Линейное уравнение (5.1) допускает сразу два различных класса п. а. р. (см. § 4 и п. 1 в § 5). Ниже проведено сопоставление различных п. а. р., отвечающих одним и тем же граничным режимам.

Функция E в (4.3), с помощью которой определялся конкретный вид «вырожденных» п. а. р., в данном случае (при $k\equiv 1$) имеет вид

$$E(s)=\exp(s)-1,\quad s>0.$$

Мы будем сравнивать п. а. р., отвечающие граничным режимам без обострения.

2.1. Сравнение п. а. р. типа А (§ 4) и III (§ 5). П. а. р. типа А (см. § 4) определены для граничных режимов

$$\varkappa(t)=\exp[\psi(t)]-1\cong\exp[\psi(t)],\quad t\to+\infty \tag{5.26}$$

(здесь и далее индекс «+» у функций $\varkappa_+$, ψ_+ для простоты опускаем), где функция ψ удовлетворяет условию (см. (4.27))

$$\left[\frac{\psi}{\psi'}\right]'(t)\to\frac{1}{m},\quad t\to+\infty,\quad m>0, \tag{5.27}$$

и имеют вид (4.15)

$$u_a^*(t,x)=\exp[\psi(t)\theta_a(\xi)]-1\cong\exp[\psi(t)\theta_a(\xi)]. \tag{5.28}$$

Здесь $\xi=x/\varphi(t)$, где φ вычисляется по формуле (4.28), функция $\theta_a(\xi)$ удовлетворяет уравнению (4.10).

Очевидно, что при выполнении условия (5.27) имеет место (5.23).

Таблица 9

$\varkappa(t)$	$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{\varkappa}{\varkappa'}\right)'(t)$	$\Phi(t)$
$\ln^{\alpha}\ln(3+t),\ \alpha>0$	$+\infty$	$t^{1/2}$
$\ln^{\alpha}(1+t),\ \alpha>0$	$+\infty$	$t^{1/2}$
$\exp[\ln^{\alpha}(1+t)],\ 0<\alpha<1$	$+\infty$	$t^{1/2}$
$\exp\left[\dfrac{\ln(1+t)}{\ln^{\alpha}\ln(3+t)}\right],\ \alpha>0$	$+\infty$	$t^{1/2}$
$t^m\ln^{\alpha}(3+t),\ m>0$	$1/m$	$t^{1/2}$
$t^m\exp[\ln^{\alpha}(1+t)],\ m>0,\ 0<\alpha<1$	$1/m$	$t^{1/2}$
$\exp[\ln^{\alpha}(1+t)],\ \alpha>1$	0	$\cong(\alpha^{-1}t\ln^{1-\alpha}t)^{1/2}$
$\exp(t^{\alpha}),\ \alpha>0$	0	$(\alpha^{-1}t^{1-\alpha})^{1/2}$
$\exp(\exp t)$	0	$\exp(-t/2)$
$\exp(t^{t^{\alpha}}),\ \alpha>0$	0	$\cong(\alpha t^{t^{\alpha}}t^{\alpha-1}\ln t)^{1/2}$

Действительно, в силу (5.27)

$$\left[\frac{\varkappa(t)}{\varkappa'(t)}\right]'\cong\left(\frac{1}{\psi'}\right)'(t)=\frac{1}{\psi(t)}\left[\left(\frac{\psi}{\psi'}\right)'(t)-1\right]\to 0$$

при $t\to+\infty$. Значит, для граничных режимов (5.26), (5.27) определены п. а. р. типа III (см. теорему 5.3). Они имеют вид

$$u_a(t,x)=\varkappa(t)f_3(\zeta).$$

В силу (5.9) и (5.26) при достаточно больших t имеем

$$u_a(t, x) \cong \exp[\psi(t) - \zeta], \quad \zeta = \frac{x}{\Phi(t)}; \tag{5.29}$$

функция $\Phi(t)$ указана в (5.24). Перепишем (5.29) так:

$$u_a(t, x) = \exp\left\{\psi(t)\left[1 - \frac{\zeta}{\psi(t)}\right]\right\}. \tag{5.29$'$}$$

В силу (5.24) имеем $\Phi(t)\psi(t) \cong [\psi^2(t)/\psi'(t)]^{1/2}$ и поэтому

$$\frac{\zeta}{\psi(t)} = \frac{x}{\Phi(t)\psi(t)} \cong m^{1/2}\xi.$$

Следовательно, (5.29) можно записать так:

$$u_a(t, x) \cong \exp\{\psi(t)[1 - m^{1/2}\xi]\}, \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}. \tag{5.30}$$

Сопоставим функции (5.28) и (5.30). Нетрудно видеть, что (5.30) является лишь первым приближением п. а. р. (5.28). В этом можно убедиться, подставляя в (5.28) разложение функции $\theta_a(\xi)$ в степенной ряд при малых $\xi > 0$

$$\theta_a(\xi) = 1 - m^{1/2}\xi + \ldots,$$

который выводится из уравнения (4.10).

2.2. Сравнение п. а. р. типа B (§ 4) и III (§ 5). Сопоставление указанных п. а. р. проводится аналогичным образом. Здесь п. а. р. типа B имеют вид

$$u_a^*(t, x) = \exp[\psi(t)\theta_a(\xi)] - 1 \cong \exp[\psi(t)\theta_a(\xi)], \tag{5.31}$$

где $\xi = x/\varphi(t)$ и функция θ_a удовлетворяет уравнению (4.12). П. а. р. типа III можно записать следующим образом:

$$u_a(t, x) \cong \exp[\psi(t)(1 - \xi)], \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}. \tag{5.32}$$

Функция $\varphi(t)$ в (5.31) и (5.32) вычисляется по формуле (4.50). Учитывая, что (см. уравнение (4.12)) $\theta_a(\xi) = 1 - \xi + \ldots$ при малых $\xi > 0$, получаем, что (5.32) является первым приближением п. а. р. (5.31).

Таким образом, «вырожденные» п. а. р., построенные в § 4, по-видимому, более точно указывают профиль тепловой волны по сравнению с п. а. р. (5.10). Отметим, что глубины проникновения волны, полученные с помощью этих п. а. р., асимптотически эквивалентны (ср. (4.22) и (5.12)). Подчеркнем, что «вырожденным» п. а. р. отвечает более сложный по сравнению с (5.11) тип автомодельного представления, а также принципиально иной способ доказательства сходимости.

§ 6. Направления дальнейших исследований

1. В [1] и настоящей работе построены широкие системы п. а. р. уравнений типа (1) с коэффициентами $k(u)$, принадлежащими двум классам функций:

1) Степенные функции $k(u)$ (§ 2 в [1]) и «близкие» к ним (§ 3 в [1]), когда $(k/k')'(u) \to 1/\sigma$, $u \to +\infty$; $\sigma > 0$.

2) Функции $k(u)$, удовлетворяющие условиям (4.1), (4.2) (см. § 4), когда $(k/k')'(u) \to \infty$, $u \to +\infty$.

Функции $k(u)$ из первого класса растут при $u\to+\infty$ быстрее и лежат «выше» любых функций из второго класса. Особо отметим, что указанные классы функций «плотно прилегают» друг к другу. Другими словами, не существует функции $k(u)$, лежащей между ними, т. е. растущей при $u\to+\infty$ медленнее любой степенной и быстрее любой функции из второго класса. Это наглядно видно на примере семейства функций $k(u)=\exp[\ln^\alpha(1+u)]$ — при $\alpha=1$ $k(u)$ принадлежит первому, а при $\alpha\in(0, 1)$ — второму классу (см. таблицу 8).

Таким образом, осталось рассмотреть коэффициенты k, удовлетворяющие условию

3) $(k/k')'(u)\to 0, \quad u\to+\infty$

(например, $k(u)=\exp[\ln^\alpha(1+u)]$, $\alpha>1$; $k(u)=\exp(u^\lambda)$, $\lambda>0$, и т. д.). Полные системы п. а. р. уравнений (1) с такими коэффициентами будут построены в следующей работе того же названия.

2. Полученные в работе результаты позволяют эффективно строить п. а. р. широкого класса квазилинейных параболических уравнений типа нелинейной теплопроводности с источником

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\ (u)\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)+Q(u), \quad t>0, \ x\in\mathbf{R}^1. \tag{6.1}$$

Здесь $Q(u)>0$ при $u>0$ — мощность объемных источников тепла, зависящих от температуры. Групповая классификация уравнения (6.1), проведенная в [10], показывает, что класс всех интересующих нас инвариантных решений уравнения (6.1) при произвольных функциях k, Q весьма узок. Между краевой задачей для уравнения (1) и задачей Коши для уравнения (6.1) существует непосредственная качественная связь: граничный режим в первой из них можно моделировать действующим в окрестности точки $x=0$ источником тепла[10]. Поэтому выбирая соответствующим образом зависимость $Q(u)$, можно добиться нужного «граничного» режима при $x=0$, и тогда пространственно-временная структура п. а. р. уравнения (1) подскажет вид п. а. р. уравнения (6.1).

Указанным способом в работах [6], [13] были построены п. а. р. $u_a(t, x)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+u)\ln^\beta(1+u), \quad t>0, \ x\in\mathbf{R}^1 \tag{6.2}$$

(здесь $\beta=\text{const}>1$), удовлетворяющие нелинейному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\frac{1}{(1+u_a)}\left(\frac{\partial u_a}{\partial u}\right)^2+(1+u_a)\ln^\beta(1+u_a).$$

Эти п. а. р. являются неограниченными (режимами с обострением) и возрастают до бесконечности в течение конечного времени. В то же время при $\beta>3$ и достаточно малых начальных функциях задача Коши для уравнения (6.2) допускает глобальные решения. Соответствующие им п. а. р. удовлетворяют уравнению такого вида ([6], [13]):

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2}-\frac{1}{(1+u_a)}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)^2+(1+u_a)\ln^\beta(1+u_a).$$

[10] Эта идея была предложена и использовалась в работах [11], [12] для вывода различного рода качественных оценок решения уравнения (6.1) со степенными нелинейностями.

Таким образом, уравнение (6.2) обладает любопытной особенностью: два вида его решений асимптотически сходятся к п. а. р.[11], удовлетворяющим двум различным уравнениям разных порядков.

Построение широких классов п. а. р. параболических уравнений типа (6.1) достаточно общего вида будет проведено в последующих публикациях (один класс таких п. а. р. указан в [18]).

Обзор и список литературы, связанной с исследованием процессов, описываемых уравнениями (6.1), и эффекта локализации горения в нелинейных средах, даны в [14].

Литература

1. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I — Матем. сб., 1982, т. 118 (160), с. 292—322.
2. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка и некоторые задачи для квазилинейных параболических уравнений.— Вестн. МГУ, мат. мех., 1964, № 6, с. 65—74.
3. *Кружков С. Н.* Нелокальная теория уравнений Гамильтона — Якоби. Труды Всесоюзн. конф. по уравн. с частн. произв., посв. 75-летию акад. И. Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 137—140.
4. *Галактионов В. А.* О приближенных автомодельных решениях уравнений типа нелинейной теплопроводности.— Дифф. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1660—1676.
5. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью. Препринт ИПМ АН СССР. № 28, М.: ИПМ, 1979.
6. *Самарский А. А.* О новых методах исследования асимптотических свойств параболических уравнений.— Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1981, т. 158, с. 153—162.
7. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 2, с. 349—352.
8. *Галактионов В. А.* Приближенные автомодельные решения уравнения теплопроводности.— ДАН СССР, 1982.
9. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности.— ДАН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 492—495.
10. *Дородницын В. А.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком. Препринт ИПМ АН СССР. № 57, М.: ИПМ, 1979.
11. *Курдюмов С. П.* Локализация диффузионных процессов и возникновение структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением: Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук: М.: Институт прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1979.
12. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением. Препринт ИПМ АН СССР. № 74, М.: ИПМ, 1976.
13. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений. Препринт ИМП АН СССР. № 161, М.: ИПМ, 1979.
14. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация тепла в нелинейных средах.— Дифф. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
15. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
16. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
17. *Lie S.* Über die integration durch bestimmte integrale von einer classer linearer partiellen differentialgleichungen.— Arch. Math., 1881, v. 6, p. 328—368.
18. *Галактионов В. А.* Об условиях локализации неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений.— ДАН СССР, 1982, т. 264, № 5.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию
21.I.1982

---

[11] Отметим, что только при $\beta=0$ или 1 задача Коши для уравнения (6.2) имеет подходящие инвариантные решения, см. [10].