



О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
А к а д е м и и Н а у к С С С Р

А.А. Самарский, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский,
М.Ю. Шашков

РАЗНОСТНЫЕ АНАЛОГИИ
ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Препринт № 8 за 1981 г.

Москва.

А Н Н О Т А Ц И Я

Построены разностные аналоги операторов grad , div и rot на произвольной нерегулярной сетке. Рассмотрены различные способы дискретизации скалярных и векторных величин. Исследована аппроксимация. Полученные разностные операторы могут быть использованы при построении операторных разностных схем.

A B S T R A C T

The difference analogues of operators grad , div and rot on arbitrary nonregular mesh are constructed in the paper. Various methods of discretization of the scalar and vector quantities are considered. The approximation is investigated. The difference operators may be applied to the construction of operator difference schemes.

СОДЕРЖАНИЕ.

| | стр. |
|---|------|
| Введение | 4 |
| § 1. Дискретизация скалярных и векторных величин | 5 |
| § 2. Непосредственная аппроксимация операторов первого порядка | 11 |
| Список цитированной литературы | 28 |

Введение

В работе /1/ вводится понятие операторных разностных схем. Такие схемы строятся путем замены соответствующих дифференциальных операторов разностными. Там же введено понятие согласованности разностных аналогов $GRAD$, DIV , ROT основных дифференциальных операторов первого порядка $grad$, div , rot .

Операторы $GRAD$, DIV , ROT называются согласованными, если для них выполнены разностные аналоги следующих тождеств

$$\oint_S \psi(\vec{n}, \vec{A}) ds = \int_V \psi div \vec{A} dv + \int_V (\vec{A}, grad \psi) dv,$$

$$\oint_S (\vec{n}, [\vec{A} \times \vec{B}]) ds = \int_V (\vec{B}, rot \vec{A}) dv - \int_V (\vec{A}, rot \vec{B}) dv,$$

$$\oint_S \psi(\vec{c}, [\vec{n} \times \vec{A}]) ds = \int_V \psi(\vec{c}, rot \vec{A}) dv - \int_V (\vec{c}, [\vec{A} \times grad \psi]) dv,$$

здесь S - замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , \vec{n} - внешняя нормаль к S ; \vec{c} - произвольная вектор-функция, такая, что $rot \vec{c} \equiv 0$

Кроме выполнения разностных аналогов приведенных выше соотношений, требуется чтобы было возможно образование разностных аналогов повторных операций $div grad$, $grad div$, $rot rot$.

Построение системы согласованных операторов производится следующим образом. Выбирается один из операторов $grad$, div или rot и производится его непосредственная аппроксимация. Этот разностный оператор называется определяющим. Затем на основе приведенных выше тождеств строятся разностные аналоги остальных операторов первого порядка.

Настоящая работа посвящена рассмотрению вопросов, связанных с непосредственной аппроксимацией операторов $grad$, div и rot на нерегулярной сетке в двумерном случае. Рассмотрены различные способы дискретизации скалярных и векторных величин.

Описан ряд принципов, используемых при построении разностных операторов. Исследован порядок аппроксимации на негладких сетках. Дана интерпретация выражений для операторов $GRAD$, DIV и ROT на языке тензорного исчисления.

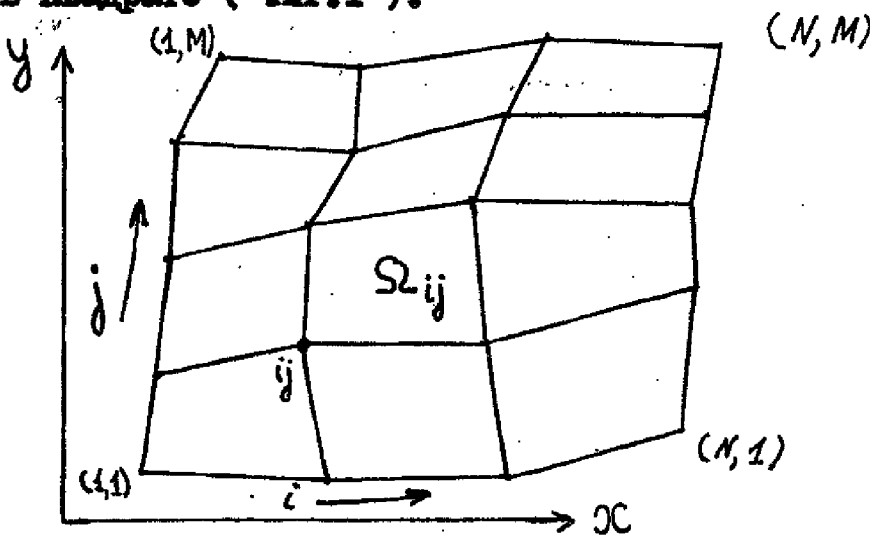
Различные способы аппроксимации операторов первого порядка рассматривались в работах / 2 / - / 15 /.

Авторы благодарят Т.К.Корнию за полезные обсуждения.

§ I. Дискретизация скалярных и векторных величин.

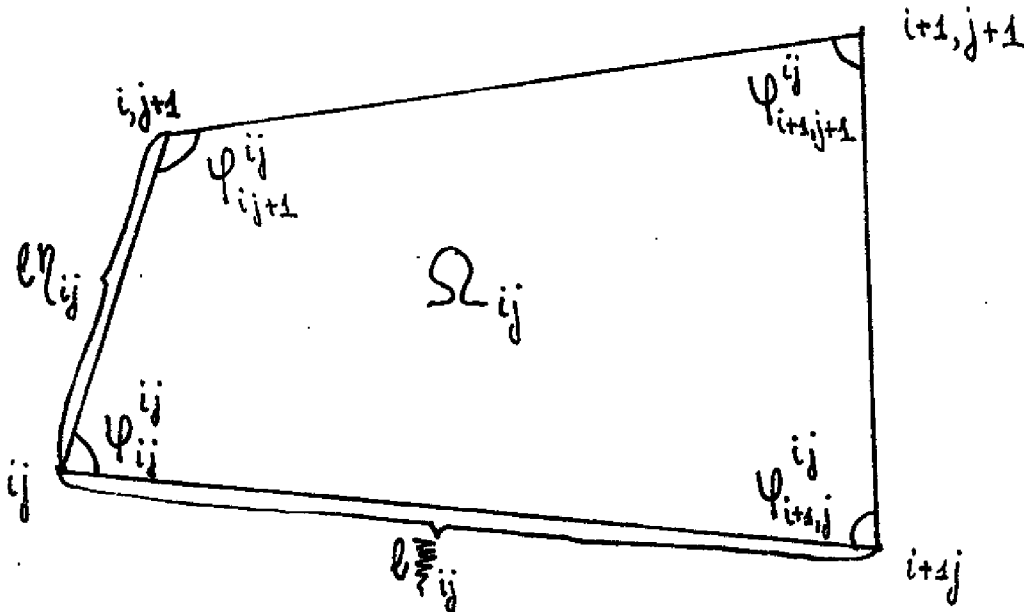
Для построения разностных операторов необходимо заменить область изменения непрерывного аргумента дискретным множеством точек (расчетная сетка), а также ввести соответствующие пространства сеточных функций. При этом мы ограничимся обсуждением случая, когда все величины зависят только от двух пространственных переменных. Отметим, что такое рассмотрение не будет снижать общности проводимых рассуждений и, кроме того, представляет самостоятельный интерес.

п. I. Пусть в исходной области Ω , лежащей в плоскости декартовых координат (x, y) введена некоторая четырехугольная сетка, которая по своей структуре аналогична прямоугольной сетке в квадрате (Фиг. I).



Фиг. I. I

Узлы такой сетки можно занумеровать аналогично тому, как это делается в квадрате (Фиг. I). Четырехугольники, вершинами которых служат узлы сетки, назовем ячейками. Во избежание появления полупцельных индексов, ячейку, имеющую своими вершинами узлы (i, j) , $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$, $(i, j+1)$, обозначим Ω_{ij} (Фиг. I, 2).

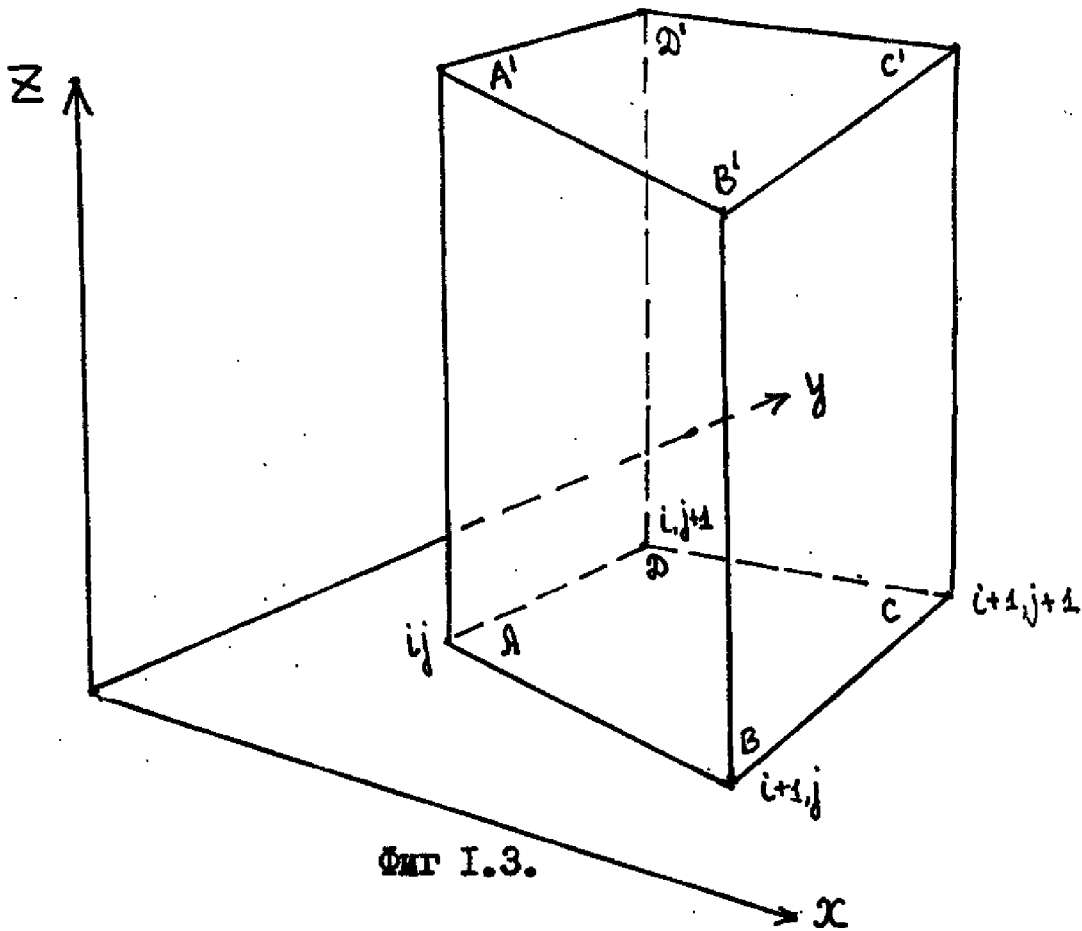


Фиг. I. 2

Прямойлинейный отрезок, являющийся стороной ячейки Ω_{ij} и соединяющий узлы (i, j) , $(i+1, j)$ обозначим e_{ij}^x , отрезок соединяющий узлы (i, j) , $(i, j+1)$ обозначим e_{ij}^y (Фиг. 2). Для обозначения углов четырехугольника введем двойную индексацию ψ_{pq}^{kl} , нижний индекс будет соответствовать узлу, а верхний - ячейке (см. Фиг. 2).

Так как мы будем, при построении разностных схем рассматривать вектор-функции, имеющие все три компонента, то необходимо ввести в рассмотрение пространственную сетку. Однако, в силу того, что мы предполагаем зависимость только от x, y, z , мы можем выбрать сетку по переменной z произвольным образом.

Свяжем с каждой ячейкой плоской сетки прямую призму V_{ij} , для которой эта ячейка является нижним основанием (см. Фиг. 3)



Фиг I.3.

Совокупность вершин, построенных таким образом призм, составляет пространственную сетку. Отметим, что выбор высоты призм произволен в силу независимости искомых величин от переменной z , высоту призм обозначим $e\zeta_{ij}$.

Обозначим боковую грань $AA'DD'$ призм символом $S\xi_{ij}$, а грань $AA'BB'$ — $S\eta_{ij}$, нижнее основание $S\Omega_{ij}$, мы будем иногда, для единообразия, обозначать $S\zeta_{ij}$. Ниже для простоты изложения условимся обозначать призм и их объемы одними и теми же символами. То же относится к граням и их площадям, а также ребрам призм и их длинам.

п.2. При использовании метода конечных разностей наиболее часто используются два способа дискретизации скалярных величин.

Первый способ — считать значения сеточных функций u_{ij} , v_{ij} и т.д., заданными в узлах. Вторая возможность — относить значения сеточных величин к призмам V_{ij} . В этом случае мы также не будем вводить полученных индексов, а считать, что индексы этих величин совпадают с индексами данной призм V_{ij} .

п.3. Перейдем теперь к описанию способов дискретизации векторных величин. Напомним, что мы предполагаем, что компоненты векторов подлежащих дискретизации зависят только от двух пространственных переменных x, y .

Поставим в соответствие каждой непрерывной вектор-функции \vec{W} три скалярных функции $W1_{ij}, W2_{ij}, W3_{ij}$ двух целочисленных аргументов ij . Такое соответствие может быть осуществлено различными способами, при этом области определения указанных функций будут, вообще говоря, различными.

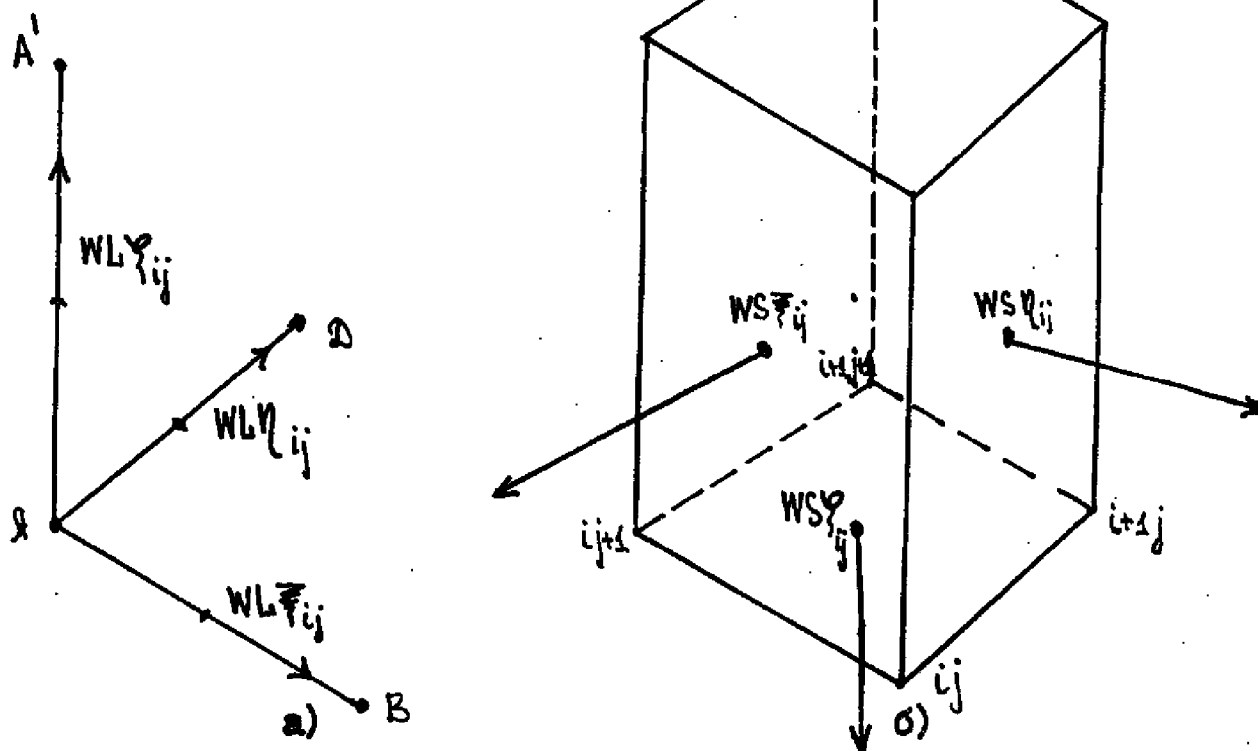
При построении разностных схем на прямоугольных сетках естественно использовать проекции вектора \vec{W} на координатные оси x, y, z . В этом случае в качестве сеточных функций $W1_{ij}, W2_{ij}, W3_{ij}$ можно выбрать указанные проекции вычисленные в вершинах призм. Области изменения целочисленных аргументов у всех трех функций будут при этом одинаковы:

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

п.4. Эти проекции можно измерять в центрах призм, при этом, формально, меняется только область изменения индексов у функций $W1_{ij}, W2_{ij}, W3_{ij}$: $i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 1, 2, \dots, M-1$.

Проекция вектора \vec{W} на координатные оси могут использоваться и при рассмотрении криволинейных сеток. Здесь, однако, более удобным может оказаться использование компонент вектора связанных с местными системами координат. Рассмотрим два таких способа.

Определим в середине каждого ребра ортогональную проекцию вектор-функции \vec{W} на направление этого ребра. Тогда, очевидно, все такие проекции распадутся на три семейства. Первое семейство связано с ребрами, соединяющими узлы с меняющимся индексом i , (ребра АВ и DC на фиг.3). Обозначим семейство таких проекций $W1_{ij} = W_L \xi_{ij}$ (см. Фиг. 4). Аналогично проекции на ребра соединяющие узлы с меняющимся индексом j , обозначим $W2_{ij} = W_L \eta_{ij}$. Третье семейство проекций, относящихся к серединам ребер, перпендикулярных плоскости (x, y) обозначим $W3_{ij} = W_L \zeta_{ij}$.



Фиг. I.4

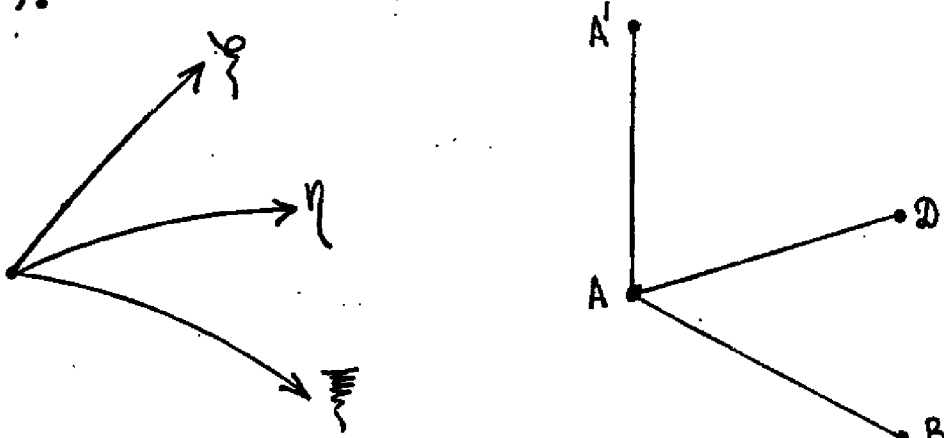
Отметим, что области изменения целочисленных аргументов этих функций не совпадают. Для $WL\bar{\xi}_{ij}$ индексы меняются в пределах: $i=1,2,\dots,N-1; j=1,2,\dots,M$ для $WL\eta_{ij}$ — $i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,M-1$ и, наконец, для $WL\xi_{ij}$ — $i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,M$.

В качестве $W1, W2, W3$ можно выбрать также ортогональные проекции вектора \vec{W} на направления, перпендикулярные к плоскостям граней призм и отнесенные к серединам этих граней. Очевидно, что эти проекции также можно разбить на три семейства (см. Фиг.4 б), которые будем обозначать $W1_{ij} = WS\bar{\xi}_{ij}$; $W2_{ij} = WS\eta_{ij}$; $W3_{ij} = WS\zeta_{ij}$. При этом области изменения индексов следующие: $i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,M-1$ для $W1_{ij}$; $i=1,2,\dots,N-1; j=1,2,\dots,M$ для $W2_{ij}$; $i=1,2,\dots,N-1; j=1,2,\dots,M-1$ для $W3_{ij}$.

Выбор того или иного способа описания векторных величин, с нашей точки зрения, если нет дополнительных ограничений, будет определяться удобством аппроксимации определяющего оператора.

п.5. Нам иногда будет удобно интерпретировать расчетную сетку как аппроксимацию сетки, образованной пересечением коор-

двух линий некоторой криволинейной системы координат ξ, η ζ . Ломаные соединяющие узлы с меняющимся индексом i будут соответствовать линии ξ , меняющемуся индексу j соответствует линия η , высоты призм составляют линии ζ (см. Фиг. 5).



Фиг. I.5

Рассмотренной аналогией объясняются обозначения, введенные в п. I, например, грань призм — $AA'BB'$ соответствует поверхности $\eta = \text{const}$, поэтому ее естественно обозначить S^{η}_{ij} и т.д.

Принятому описанию векторных величин, в непрерывном случае можно поставить в соответствие задание вектор-функций при помощи местных базисных систем.

Местная система координат может быть задана явно. Так, например, можно считать, что в каждой точке пространства задана система координат, при этом в узлах сетки направление координатных осей совпадает с направлениями ребер ячейки. Аналогично можно рассмотреть систему, координатные оси которой направлены перпендикулярно соответствующим граням ячейки.

Иногда, при интерпретации, удобно связывать местные базисные системы с криволинейной системой координат, которую мы оставляем расчетной сетке. Базисные вектора первой системы направлены по касательным к координатным линиям, базисные вектора второй системы перпендикулярны координатным поверхностям $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$, соответственно. Любая вектор-функция однозначно задается своими ортогональными проекциями на направления базисных векторов любой из этих двух систем

Отметим еще раз, что мы не предполагаем, что в пространстве задана какая-либо криволинейная система координат (ξ, η, ζ) , а считаем, что нам задана расчетная сетка.

§2. Непосредственная аппроксимация операторов первого порядка.

п.1. Рассмотрим аппроксимацию оператора grad . Пусть, например, для описания вектора $\text{grad} u$ выбраны проекции на направления осей координат x, y, z , такое описание наиболее часто используется на практике. Пусть далее, сеточная функция u определяется своими значениями в узлах сетки.

Так как по предположению все исходные величины зависят только от x и y , то вектор $\text{grad} u$ имеет вид

$$\text{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; 0 \right\}$$

При аппроксимации производных $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y$ мы будем исходить из следующих соотношений

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} u dy}{S}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} u dx}{S}$$

где S - плоская площадка, ограниченная контуром Γ и содержащая точку определения производных. Соотношения (1) непосредственно следуют из формулы Грина.

Если в качестве S выбрать ячейку S_{ij} , компоненты оператора GRAD будут определены в ячейке S_{ij} .

Выпишем приближенные выражения для $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y$, обозначая их $\delta u / \delta x, \delta u / \delta y$. Для этого интеграл по контуру Γ разобьем на сумму интегралов по сторонам ячейки и каждый из них аппроксимируем по формуле трапеций. В результате приходим к выражениям

$$(2.2) \quad \left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)_{ij} = \frac{0.5 \left[(u_{ij} - u_{i+1j+1})(y_{i+1j} - y_{ij+1}) - (u_{i+1j} - u_{ijn})(y_{ij} - y_{ijn}) \right]}{S_{ij}}$$

$$(2.2.) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij} = \frac{-0.5 [(u_{ij} - u_{i+1,j+1})(x_{i+1,j} - x_{ij}) - (u_{i+1,j} - u_{ij+1})(y_{ij} - y_{i+1,j+1})]}{\Omega_{ij}}$$

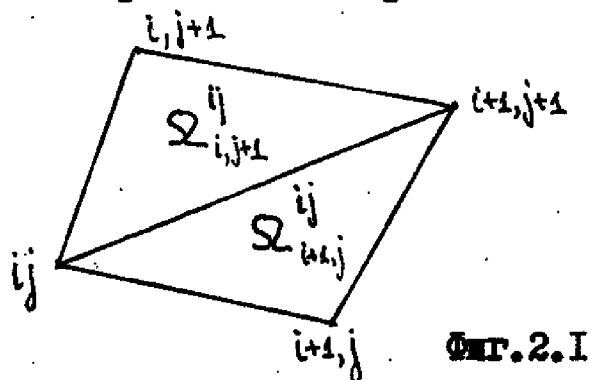
таким образом, оператор $GRAD$

$$GRAD u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, 0 \right)$$

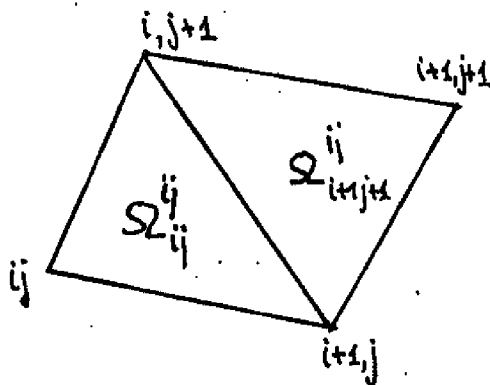
определен на функциях заданных в узлах сетки и действует в пространстве вектор-функций, компоненты которых определены в ячейке.

Оператору $grad$, заданному своими декартсовыми компонентами, в разностном случае можно сопоставить также и ряд других разностных операторов.

Так производные $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$ можно аппроксимировать не по всей ячейке в целом, а по одному из четырех треугольников, на которые ее можно разбить (Фиг. 4)



Фиг. 2. I



Для обозначения этих треугольников можно ввести двойную индексацию Ω_{pq}^{ij} , верхний индекс соответствует ячейке, в которой лежит треугольник, нижний - узлу, к которому он примыкает (Фиг. I). Таким образом производным $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$ в каждой ячейке можно поставить в соответствие четыре различных выражения

$$(2.3.) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+k,j+l}^{ij}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+k,j+l}^{ij}, \quad k, l = 0, 1$$

где под $(\partial u / \partial x)_{i+k,j+l}^{ij}$, $(\partial u / \partial y)_{i+k,j+l}^{ij}$, понимаются выражения,

аналогичные (2), полученные интегрированием по соответствующим треугольникам, например

$$(2.4) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1,j}^{ij} = \frac{0.5 [u_{ij} (y_{i+1,j} - y_{i+2,j+2}) + u_{i+1,j} (y_{i+1,j} - y_{ij}) + u_{i+2,j+2} (y_{ij} - y_{i+1,j})]}{\Omega_{i+1,j}^{ij}}$$

Аппроксимацию оператора GRAD в ячейке можно определить следующим образом

$$(GRAD u)_{ij} = \left\{ \frac{1}{\Omega_{ij}} \sum_{k,l=0,1} S_{i+k,j+l}^{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+k,j+l}^{ij}, \frac{1}{\Omega_{ij}} \sum_{k,l=0,1} S_{i+k,j+l}^{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+k,j+l}^{ij}, 0 \right\}$$

где $S_{i+k,j+l}^{ij}$ - некоторые веса: $\sum_{k,l=0,1} S_{i+k,j+l}^{ij} = \Omega_{ij}$; в частности, когда $S_{i+k,j+l}^{ij} = \Omega_{i+k,j+l}^{ij}$, то данное определение переходит в (2).

Используя соотношения (3) можно также определить оператор GRAD в узлах

$$(2.5) (GRAD u)_{ij} = \frac{1}{\sum_{k,l=0,1} S_{ij}^{i-k,j-l}} \left\{ \sum_{k,l=0,1} S_{ij}^{i-k,j-l} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij}^{i-k,j-l}, \sum_{k,l=0,1} S_{ij}^{i-k,j-l} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij}^{i-k,j-l}, 0 \right\}$$

Рассмотрим более общий способ описания оператора GRAD в узлах. Для этого напомним некоторые соотношения векторного анализа. Пусть в данной точке задано два направления $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$; $\varphi_\xi, \varphi_\eta$ углы между этими направлениями и осью координат. Имеют место формулы:

$$(2.6) \frac{\partial u}{\partial \vec{e}_\xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi_\xi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi_\xi, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{e}_\eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi_\eta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi_\eta$$

Выбрав в качестве $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ - направления, задаваемые сторонами e_ξ, e_η и разредая (6) относительно $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y$ получаем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{ij} \sin \psi \eta_{ij} - \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{ij} \sin \psi \xi_{ij}}{\sin \psi_{ij}}$$

(2.7)

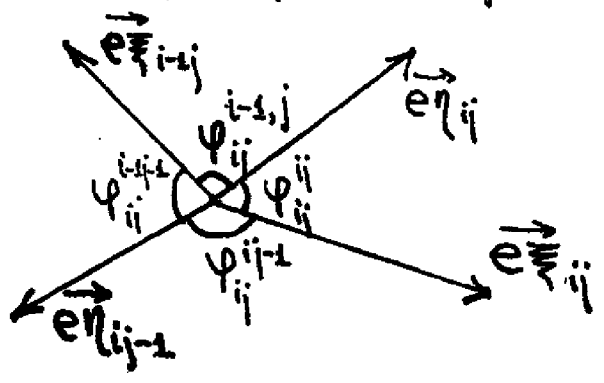
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} = - \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{ij} \cos \psi \eta_{ij} - \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{ij} \cos \psi \xi_{ij}}{\sin \psi_{ij}}$$

где $\psi_{ij}, \psi \eta_{ij}$ - углы, образованные сторонами $e_{\xi_{ij}}, e \eta_{ij}$ с осью x .

Подставляя в (7) приближенные выражения для $\frac{\partial u}{\partial e_{\xi}} \cdot \frac{\partial u}{\partial e_{\eta}}$

$$(2.8) \left(\frac{\partial u}{\partial e_{\xi}}\right)_{ij} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{e_{\xi_{ij}}}, \left(\frac{\partial u}{\partial e_{\eta}}\right)_{ij} \cong \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{e \eta_{ij}}$$

приходим к приближенным выражениям для производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ в узле. Отметим, что в данном узле можно было выбрать еще три пары направлений $(e_{\xi_{ij}}, e \eta_{(j-1)}), (e_{\xi_{(i-1)}}, e \eta_{(i-1)}), (e_{\xi_{(i-1)}}, e \eta_{ij})$ (см. Фиг.2)



Фиг. 2.2

и получить еще три приближенных выражения для производных в узле. Усредняя далее полученные выражения с некоторыми весами можно получить компоненты оператора $GRAD$ в узле.

На этом мы закончим описание способов аппроксимации оператора $grad$, когда для его описания используются компоненты $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

С нашей точки зрения более естественным, в случае криволинейной сетки, является описание вектора $grad u$ при помощи

ортогональных проекций на направления сторон ячейки.

В соответствии с формулами векторного анализа эти проекции задаются следующим образом

$$(2.9) \quad (\text{grad } u, \vec{e}_{\xi}) = \frac{\partial u}{\partial e_{\xi}}; \quad (\text{grad } u, \vec{e}_{\eta}) = \frac{\partial u}{\partial e_{\eta}},$$

где $\vec{e}_{\xi}, \vec{e}_{\eta}$ - единичные вектора, направленные по сторонам e_{ξ}, e_{η} . Используя соотношения (8) и (9) получаем следующее выражение для оператора GRAD

$$(2.10) \quad (\text{GRAD } u)_{ij} = \left\{ \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{e_{\xi ij}}; \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{e_{\eta ij}}; 0 \right\}$$

Если ввести обозначение $\vec{G} = \text{GRAD } u$, то в соответствии с определениями § I имеем

$$G_{\xi ij} = \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{e_{\xi ij}}; \quad G_{\eta ij} = \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{e_{\eta ij}}; \quad G_{\zeta ij} = 0.$$

В непрерывном случае формуле (10) можно поставить в соответствие описание вектора grad при помощи проекций на направления координатных линий:

$$(2.11) \quad \text{grad } u = \left\{ g_{\xi\xi}^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \quad g_{\eta\eta}^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad 0 \right\}$$

где $g_{\xi\xi}, g_{\eta\eta}$ - элементы метрического тензора / I6 /.

Аналогия между формулами (10), (11) становится более понятной, если вспомнить формулы векторного анализа / I6 /

$$de_{\xi} = g_{\xi\xi}^{1/2} d\xi, \quad de_{\eta} = g_{\eta\eta}^{1/2} d\eta,$$

где de_{ξ}, de_{η} - элементы дуг координатных кривых.

Рассмотрим вопрос о порядке аппроксимации оператора grad на примере оператора GRAD , определенного формулой (10).

Пусть u непрерывная функция, определим ее проекцию в узле ij равенством

$$(2.12) \quad (u)_{ij}^h = u(x_{ij}, y_{ij})$$

Предположим, что сетка такова, что выполнены неравенства

$$(2.13) \quad c_{\min} \cdot h \leq e_{\xi_{ij}}, e_{\eta_{ij}} \leq c_{\max} \cdot h$$

где h — некоторый параметр.

Тогда имеют место равенства

$$(2.14) \quad (grad u, \vec{e}_{\xi_{ij}}) \Big|_{\substack{x=x_{\xi_{ij}} \\ y=y_{\xi_{ij}}}} = \frac{(u)_{i+1j}^h - (u)_{ij}^h}{e_{\xi_{ij}}} + o(h^2);$$

$$(grad u, \vec{e}_{\eta_{ij}}) \Big|_{\substack{x=x_{\eta_{ij}} \\ y=y_{\eta_{ij}}}} = \frac{(u)_{ij+1}^h - (u)_{ij}^h}{e_{\eta_{ij}}} + o(h^2);$$

где

$$x_{\xi_{ij}} = 0.5(x_{ij} + x_{i+1j}); \quad x_{\eta_{ij}} = 0.5(x_{ij} + x_{ij+1})$$

$$y_{\xi_{ij}} = 0.5(y_{ij} + y_{i+1j}); \quad y_{\eta_{ij}} = 0.5(y_{ij} + y_{ij+1})$$

координаты середин сторон $e_{\xi_{ij}}$, $e_{\eta_{ij}}$, соответственно.

Соотношения (14) становятся очевидными, если учесть равенства

$$(grad u, \vec{e}_{\xi_{ij}}) = \frac{\partial u}{\partial e_{\xi_{ij}}}; \quad (grad u, \vec{e}_{\eta_{ij}}) = \frac{\partial u}{\partial e_{\eta_{ij}}}$$

и тот факт, что разностные отношения, стоящие в правых частях (14) представляют собой центральные разностные производные относительно центров сторон.

Напомним, что в предыдущих рассмотренных функциях U относилась к узлам сетки. Если же отнести U к ячейкам, то в этом случае выписать непосредственную аппроксимацию для оператора $grad$ затруднительно.

Таким образом, при построении операторных разностных схем, оператор $grad$ естественно выбрать в качестве определяющего, если скалярные функции относятся к узлам.

п.2. Данный пункт посвящен аппроксимации оператора div . Этот оператор действует на векторные величины. Остановимся в начале на случае, когда вектор \vec{W} описывается своими проекциями на координатные оси, будем считать эти проекции заданными в узлах и обозначать WX_{ij} , WY_{ij} , WZ_{ij} .

При построении оператора DIV можно опираться на следующее определение оператора div

$$(2.15) \quad div \vec{W} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S (\vec{W}, \vec{n}) ds}{V},$$

где V - объем, содержащий точку определения, S - поверхность, ограничивающая V , \vec{n} - внешняя нормаль к S .

Определение (15) удобно тем, что записано в форме, не зависящей от выбора системы координат и способа описания векторов.

Используем в качестве V - в формуле (15) призму $V_{ij} = ABCDA'B'C'D'$ - (Фиг. I.3), связанную с ячейкой Ω_{ij} , при этом пусть ее высота равна q . Площади нижнего и верхнего оснований задаются соотношениями

$$S \xi_{ij} = S_{ABCD} = \Omega_{ij}; \quad S \bar{\xi}_{ij} = S_{A'B'C'D'} = \Omega_{ij},$$

для боковых граней имеем

$$S \eta_{ij} = S_{AA'BB'} = e \xi_{ij} \cdot q; \quad S \bar{\eta}_{ij} = S_{AA'DD'} = e \bar{\eta}_{ij} \cdot q$$

и т.д.

Боковые грани перпендикулярны плоскости (x, y) , поэтому нормали к ним лежат в плоскости (x, y) и перпендикулярны соответствующим сторонам ячейки, например, нормаль к грани $AA'B'B'$ имеет компоненты

$$(2.16) \vec{n}_{ij} = \left\{ \frac{(y_{i+1j} - y_{ij})}{\left[(x_{i+1j} - x_{ij})^2 + (y_{i+1j} - y_{ij})^2 \right]^{1/2}}, \frac{-(x_{i+1j} - x_{ij})}{\left[(x_{i+1j} - x_{ij})^2 + (y_{i+1j} - y_{ij})^2 \right]^{1/2}}, 0 \right\}$$

Нормали к другим боковым граням записываются аналогично.

Нормаль к граням $ABCD$ и $A'B'C'D'$ задается компонентами $(0, 0, -1)$ $(0, 0, 1)$ соответственно.

Интеграл по поверхности в формуле (15) разобьем на сумму интегралов по граням, при этом учтем, что нормаль сохраняет свое направление на каждой из граней. В результате, например, для грани $AA'B'B'$ получим

$$\int_{AA'B'B'} (\vec{W}, \vec{n}) dS \cong \frac{S n_{ij}}{\left[(x_{i+1j} - x_{ij})^2 + (y_{i+1j} - y_{ij})^2 \right]^{1/2}} \cdot \left\{ \frac{WX_A + WX_{A'} + WX_B + WX_{B'}}{4} (y_{i+1j} - y_{ij}) - \right.$$

$$(2.17) \left. - \frac{WY_A + WY_{A'} + WY_B + WY_{B'}}{4} (x_{i+1j} - x_{ij}) \right\} =$$

$$= 0.5 \cdot a \left\{ (WX_{ij} + WX_{i+1j})(y_{i+1j} - y_{ij}) - (WY_{ij} + WY_{i+1j})(x_{i+1j} - x_{ij}) \right\}$$

где последнее равенство справедливо, так как $WX_A = WX_{A'} = WX_{ij}$, $WX_B = WX_{B'} = WX_{i+1j}$ и аналогичные равенства для WY и кроме того $S n_{ij} = a \cdot \left[(x_{i+1j} - x_{ij})^2 + (y_{i+1j} - y_{ij})^2 \right]^{1/2}$.
Для грани $ABCD = S_{ij}$ получаем

$$(2.18) \quad \int_{ABCD} (\vec{W}, \vec{n}) dS \cong -0.25 \cdot \Omega_{ij} (WZ_{ij} + WZ_{i+1j} + WZ_{i+1j+1} + WZ_{ij+1})$$

ABCD

где знак минус объясняется тем, что нормаль внешняя, для грани $ABCD$ получаем то же выражение только со знаком плюс, этот факт имеет место так как компонента WZ по предположению не зависит от координаты Z .

В результате приходим к выражению

$$(2.19) \quad (\text{DIV } \vec{W})_{ij} = \frac{0.5}{\Omega_{ij}} \left\{ \left[(WX_{ij} + WX_{i+1j+1})(Y_{i+1j} - Y_{ij+1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - (WX_{i+1j} - WX_{ij+1})(Y_{ij} - Y_{i+1j+1}) \right] - \left[(WY_{ij} - WY_{i+1j+1})(X_{i+1j} - X_{ij+1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - (WY_{i+1j} - WY_{ij+1})(X_{ij} - X_{i+1j+1}) \right] \right\}.$$

Очевидно, что таким образом определенный оператор DIV действует из пространства вектор-функций, компоненты которых заданы в узлах в пространстве скалярных функций определенных в ячейках.

Рассмотрим еще один способ аппроксимации div для случая, когда вектор \vec{W} задан компонентами WX, WY, WZ в узлах.

Рассмотрим объем V , тогда его изменение dV при сдвиге координат границы S определится равенством

$$(2.20) \quad dV = \oint_S (d\vec{r}, \vec{n}) dS,$$

где $d\vec{r}$ изменение радиус-вектора, \vec{n} — внешняя нормаль к S . Из формулы (20) следует, что

$$(2.21) \quad \frac{dV}{dt} = \oint_S \left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{n} \right) dS = \oint_S (\vec{W}, \vec{n}) dS = \\ = \int_V \text{div } \vec{W} dV$$

где $\vec{W} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ - вектор скорости. Если объем V достаточно мал, то из (21) следует приближенное выражение для

$$(2.22) \quad \text{div} \vec{W} \approx \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

Выберем в качестве V - в формуле (22) призму V_{ij} , учитывая, что $V_{ij} = a \cdot \Omega_{ij}$, и следовательно объем не зависит не от координат верхнего основания, не от переменной Σ , приходим к следующему определению оператора DIV

$$(2.23) \quad (\text{DIV} \vec{W})_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} \left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ikjle}} W X_{ikjle} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{ikjle}} W Y_{ikjle} \right]$$

Очевидно, что формула (23) применима и к произвольной вектор-функции: \vec{W} , компоненты которой зависят от двух переменных, в силу того, что ее можно трактовать как скорость.

Отметим, что если для Ω_{ij} использовать формулу

$$\Omega_{ij} = 0.5 \left[(x_{ij} - x_{i+1j+1})(y_{ij+1} - y_{ij+2}) - (x_{i+1j} - x_{ij+2})(y_{ij} - y_{i+1j+1}) \right]$$

то выражения (23) и (19) для оператора DIV совпадают между собой.

С нашей точки зрения наиболее естественная аппроксимация оператора div получается, если вектор-функция \vec{W} описывается своими ортогональными проекциями на направления нормалей к граням призмы - WS_{ij}^{ξ} , WS_{ij}^{η} , WS_{ij}^{ζ} . Аналогично предыдущему случаю разобьем интеграл по поверхности на сумму интегралов по граням и учтем, что выражение (\vec{W}, \vec{n}) на каждой грани совпадает с величинами WS_{ij}^{ξ} , WS_{ij}^{η} , WS_{ij}^{ζ} .

В результате приходим к выражению

$$(2.24) \quad (\text{DIV} \vec{W})_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \left[(WS_{i+1j}^{\xi} S_{i+1j}^{\xi} - WS_{ij}^{\xi} S_{ij}^{\xi}) + (WS_{ij+1}^{\eta} S_{ij+1}^{\eta} - WS_{ij}^{\eta} S_{ij}^{\eta}) \right] =$$

$$= \frac{1}{\Omega_{ij}} \left[(WS_{i+1j}^{\xi} \xi_{i+1j} - WS_{ij}^{\xi} \xi_{ij}) + (WS_{ij+1}^{\eta} \eta_{ij+1} - WS_{ij}^{\eta} \eta_{ij}) \right]$$

Члены с $WS\zeta$ в (24) не вошли, так как $WS\zeta$ от Z не зависит, интегралы по верхнему и нижнему основаниям взаимно сокращаются.

Возможны также и другие способы аппроксимации оператора div . Например, можно в каждой ячейке ввести четыре разностных аналога оператора div в соответствии с разбиением Ω_{ij} на треугольники. И использовать для аппроксимации div в ячейке их линейную комбинацию.

Важно отметить, что используемые для построения оператора DIV соотношения (15) и (22) тесно связаны с выполнением определенных законов сохранения.

Так определение (15), в том случае, если \vec{W} - вектор теплового потока, дает нам закон сохранения количества тепла:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u d\Omega = - \int_{\Omega} \text{div} \vec{W} d\Omega = - \int_S (\vec{W}, \vec{n}) dS,$$

где u - температура.

Определение оператора DIV из соотношения (22) так же имеет непосредственный физический смысл.

Согласно этому определению объем ячейки изменяется в соответствии со скоростями движения ее вершин, то есть выполнен разностный аналог закона сохранения объема / 15 /.

Рассмотрим интерпретацию выражения для оператора DIV - (24) на языке тензорного исчисления. Формуле (24) можно сопоставить выражение, записанное для оператора div в криволинейной системе координат ξ, η, ζ для компонент представляющих собой ортогональные проекции на направления, перпендикулярные координатным поверхностям и направленные в сторону возрастания координат:

$$(2.25) \text{div} \vec{W} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (G_{\xi\xi}^{1/2} WS_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (G_{\eta\eta}^{1/2} WS_{\eta}) \right\}$$

где g - метрический тензор, который в силу того, что $\xi = \xi$, а координатные линии ξ, η лежат в плоскости (x, y) имеет вид

$$\begin{pmatrix} g_{\xi\xi} & g_{\xi\eta} & 0 \\ g_{\xi\eta} & g_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_{\xi\xi}, G_{\eta\eta}$ - алгебраические дополнения элементов $g_{\xi\xi}, g_{\eta\eta}$.

Аналогия между формулами (25), (24) становится очевидной, если учесть соотношения

$$(2.26) \quad ds_{\xi} = G_{\xi\xi}^{1/2} d\xi d\xi; ds_{\eta} = G_{\eta\eta}^{1/2} d\eta d\xi;$$

$$dV = g^{1/2} d\xi d\eta d\xi,$$

где ds_{ξ}, ds_{η} - элементы координатных поверхностей.

Вопросы связанные с исследованием порядка аппроксимации рассмотрим на примере оператора ΔIV определенной формулой (24).

Проекцию непрерывной функции u определим как сеточную функцию, заданную в ячейке следующим образом

$$(u)_{ij}^h = u(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$$

где

$$x_{ij}^* = 0.25 (x_{ij} + x_{i+1j} + x_{i+1j+1} + x_{ij+1}),$$

$$y_{ij}^* = 0.25 (y_{ij} + y_{i+1j} + y_{i+1j+1} + y_{ij+1})$$

координаты "центра" ячейки Ω_{ij} .

Проекцию непрерывной вектор-функции \vec{W} определим как сеточную вектор-функцию $(\vec{W})^h$, компоненты которой отнесены к серединам соответствующих граней, а в двумерном случае — к серединам сторон:

$$(WS_{\xi}^h)_{ij} = \left(\vec{W}, \vec{n}_{\xi ij} \right) \Big|_{\substack{x=x_{ij} \\ y=y_{ij}}}, \quad (WS_{\eta}^h)_{ij} = \left(\vec{W}, \vec{n}_{\eta ij} \right) \Big|_{\substack{x=x_{ij} \\ y=y_{ij}}}$$

где $\vec{n}_{\xi ij}, \vec{n}_{\eta ij}$ — единичные нормали к сторонам $e_{\eta ij}, e_{\xi ij}$, соответственно.

Предположим, что сетка такова, что наряду с соотношениями (13) имеют место неравенства

$$(2.27) \quad \tilde{C}_{\min} h^2 \leq S_{\xi ij} = \Omega_{ij} \leq \tilde{C}_{\max} h^2.$$

Тогда имеет место соотношение

$$(2.28) \quad (\operatorname{div} \vec{W})_{ij}^h = (\operatorname{DIV}(\vec{W})^h)_{ij} + o(h).$$

Действительно имеет место равенство

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \vec{W})_{ij}^h &= \operatorname{div} \vec{W} \Big|_{\substack{x=x_{ij}^* \\ y=y_{ij}^*}} = \frac{1}{\Omega_{ij}} \int_{\Omega_{ij}} \operatorname{div} \vec{W} d\Omega + o(h) = \\ (2.29) \quad &= \frac{1}{\Omega_{ij}} \oint_{e_{ij}} (\vec{W}, \vec{n}) d\ell + o(h), \end{aligned}$$

где e_{ij} — контур ограничивающий ячейку Ω_{ij} .

На каждой из сторон ячейки Ω_{ij} можно использовать разложения, аналогичные следующим

$$\left(\vec{W}, \vec{n}_{\xi ij} \right) \Big|_{(x,y) \in e_{\xi ij}} = \left(\vec{W}, \vec{n}_{\xi ij} \right) + \frac{\partial (\vec{W}, \vec{n}_{\xi ij})}{\partial e_{\xi ij}} \cdot \ell(x,y) + o(h^2)$$

где разложение производится в точке $(x\eta_{ij}, y\eta_{ij})$; $\rho(x, y) = \sqrt{[(x-x\eta_{ij})^2 + (y-y\eta_{ij})^2]}^{1/2}$ - расстояние от точки $(x, y) \in e\eta_{ij}$ до середины стороны $e\eta_{ij}$.

Подставляя эти разложения в (29) и используя определение величин $(WS\xi)_{ij}^h$; $(WS\eta)_{ij}^h$ получим

$$(2.30) \quad \oint_{e_{ij}} (\vec{w}, \vec{n}) d\ell = (WS\xi)_{i+1j}^h e\eta_{i+1j} - (WS\xi)_{ij}^h e\eta_{ij} + \\ + (WS\eta)_{ij+1}^h e\xi_{ij+1} - (WS\eta)_{ij}^h e\xi_{ij} + o(h^3).$$

Из формул (29), (30) и определения оператора DIV - (24) следует соотношение (28), то есть имеет место первый порядок аппроксимации.

п.3 Перейдем теперь к вопросу об аппроксимации оператора rot , при этом будем использовать определение

$$(2.31) \quad (\vec{n}, \text{rot } \vec{w}) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} (\vec{w}, \vec{e}) d\Gamma}{S},$$

где \vec{n} - нормаль к площадке S , ограниченной контуром Γ и содержащей точку определения, \vec{e} - единичный вектор, касательный к Γ , $d\Gamma$ - элемент длины.

Использование такой формулы для построения оператора ROT имеет непосредственный физический смысл, так если под \vec{w} понимать вектор напряженности электрического поля, то автоматически будет выполнен разностный аналог закона индукции магнитного поля.

В данном пункте мы рассмотрим случай, когда вектор \vec{w} - описывается компонентами $w_L \xi$, $w_L \eta$, $w_L \zeta$; построение оператора ROT для случая компонент w_X , w_Y , w_Z мы предоставим читателю.

Выберем, вначале, в качестве S в формуле (27) нижнее основание призм-ячейку Σ_{ij} . Тогда очевидно контур Γ будет составлен из сторон ячейки:

$$\Gamma = \{e\xi_{ij}; e\eta_{i+1j}; e\xi_{ij+1}; e\eta_{ij}\}$$

а величина (\vec{W}, \vec{e}) будет совпадать или с $W_L \xi$ или с $W_L \eta$. Из формулы (27) следует, что в данном случае мы для вектора $\vec{R} = ROT \vec{W}$ получим его компоненту $RS \xi$ определенную в ячейке Ω_{ij} . Разбивая интеграл на сумму интегралов по сторонам ячейки получаем выражение

$$(2.32) \quad RS \xi_{ij} = \frac{1}{\Omega_{ij}} \left\{ (W_L \eta_{i+1j} e_{\eta_{i+1j}} - W_L \eta_{ij} e_{\eta_{ij}}) - (W_L \xi_{ij+1} e_{\xi_{ij+1}} - W_L \xi_{ij} e_{\xi_{ij}}) \right\}$$

Выберем теперь в качестве S - боковую грань $AA'B'B'$. В силу того, что компоненты вектора \vec{W} от Σ не зависят, интегралы по ребрам AB и $A'B'$ взаимно уничтожаются. В результате приходим к формуле

$$(2.33) \quad RS \eta_{ij} = \frac{1}{S \eta_{ij}} (W_L \xi_{i+1j} \cdot a - W_L \xi_{ij} \cdot a) = \frac{1}{e_{\xi_{ij}}} (W_L \xi_{i+1j} - W_L \xi_{ij})$$

Аналогично используя грань $AA'DD'$ получаем выражение:

$$(2.34) \quad RS \xi_{ij} = -\frac{1}{S \xi_{ij}} (W_L \eta_{ij+1} \cdot a - W_L \eta_{ij} \cdot a) = -\frac{1}{e_{\eta_{ij}}} (W_L \eta_{ij+1} - W_L \eta_{ij})$$

Таким образом мы получили компоненты вектора

$$\vec{R} = ROT \vec{W} = \{RS \xi, RS \eta, RS \xi\}.$$

Представляющие собой ортогональные проекции на нормали к соответствующим граням.

Построенный оператор ROT действует из пространства сеточных вектор-функций заданных компонентами $W_L \xi, W_L \eta, W_L \xi$ в пространство сеточных вектор-функций определенных величинами $RS \xi, RS \eta, RS \xi$.

В непрерывном случае выражениям (32) - (34) можно дать следующую интерпретацию на языке тензорного исчисления. Компоненты $RS \xi, RS \eta, RS \xi$ являющиеся ортогональными проекциями на нормали к координатным поверхностям и связаны с величинами $W_L \xi, W_L \eta, W_L \xi$ следующим образом:

$$RS_{\xi}^{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial}{\partial \eta} (W_{L\xi} \cdot \sqrt{g_{\xi\xi}})$$

$$(2.35) \quad RS_{\eta}^{\eta} = \frac{1}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial}{\partial \xi} (W_{L\eta} \cdot \sqrt{g_{\eta\eta}})$$

$$RS_{\xi}^{\eta} = \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (W_{L\eta} \cdot \sqrt{g_{\eta\eta}}) - \frac{\partial}{\partial \eta} (W_{L\xi} \cdot \sqrt{g_{\xi\xi}}) \right)$$

При сравнении формул (32)–(34) и (35) следует учитывать, что в рассмотренном случае

$$G_{\xi\xi} = g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} - g_{\xi\eta}^2; \quad G_{\eta\eta} = g_{\xi\xi}; \quad G_{\xi\xi} = g_{\eta\eta}$$

и кроме того $g_{\xi\xi} = 1$.

Рассмотрим с каким порядком оператор ROT определенный компонентами RS_{ξ}^{ξ} , RS_{η}^{η} , RS_{ξ}^{η} – (32)–(34), аппроксимирует оператор rot . А именно, мы покажем, что компоненты RS_{ξ}^{ξ} , RS_{η}^{η} , RS_{ξ}^{η} аппроксимируют величины $(\vec{n}, rot \vec{W})$ на соответствующих гранях ячейки.

Непрерывной вектор-функции \vec{W} поставим в соответствие ее проекцию на сеточное пространство

$$(\vec{W})_{ij}^h = \begin{pmatrix} (W_{L\xi})_{ij}^h \\ (W_{L\eta})_{ij}^h \\ (W_{L\xi})_{ij}^h \end{pmatrix}$$

компоненты сеточной вектор-функции $(\vec{W})^h$ зададим равенствами

$$(W_{L\xi})_{ij}^h = (\vec{W}, \vec{e}_{\xi ij}^{\rightarrow}) \Big|_{\substack{x=x_{\xi ij} \\ y=y_{\xi ij}}};$$

$$(W_{L\eta})_{ij}^h = (\vec{W}, \vec{e}_{\eta ij}^{\rightarrow}) \Big|_{\substack{x=x_{\eta ij} \\ y=y_{\eta ij}}};$$

$$(W_{L\xi})_{ij}^h = (\vec{W}, \vec{e}_{\xi ij}^{\rightarrow}) \Big|_{\substack{x=x_{ij} \\ y=y_{ij}}};$$

здесь $\vec{e}_{\xi_{ij}}, \vec{e}_{\eta_{ij}}$ были определены ранее, $\vec{e}_{\xi_{ij}}$ — единичный вектор, направленный по ребру $l_{\xi_{ij}}$.

Рассмотрим, например, грань $S_{\xi_{ij}} = \Omega_{ij}$, тогда

$$(2.36) \quad \left. (\vec{n}, \text{rot} \vec{W}) \right|_{x=x_{ij}^*, y=y_{ij}^*} = \frac{1}{\Omega_{ij}} \int_{\Omega_{ij}} (\vec{n}, \text{rot} \vec{W}) ds + o(h) = \\ = \frac{1}{\Omega_{ij}} \oint_{l_{ij}} (\vec{W}, \vec{L}) dl + o(h)$$

здесь \vec{L} — единичная касательная к контуру l_{ij} . Далее используя для величины (\vec{W}, \vec{L}) разложения, аналогичные разложениям для (\vec{W}, \vec{n}_{ξ}) , получаем

$$(2.37) \quad ((\vec{n}, \text{rot} \vec{W}))_{ij}^h = \frac{1}{\Omega_{ij}} \left\{ -[(W_{\xi})_{ij+1}^h e_{\xi_{ij+1}} - (W_{\xi})_{ij}^h e_{\xi_{ij}}] + \right. \\ \left. + [(W_{\eta})_{i+1j}^h e_{\eta_{i+1j}} + (W_{\eta})_{ij}^h e_{\eta_{ij}}] \right\} + o(h).$$

Аналогичные равенства имеют место и для других компонент вектор $\text{ROT} \vec{W}$.

п.4. С нашей точки зрения наиболее естественно при аппроксимации операторов grad , div , rot использовать формулы (10), (24) и (32)–(34), соответственно. Во-первых эти формулы основаны на определениях дифференциальных операторов в форме, не зависящей от выбора системы координат. Во-вторых используемые выражения связаны с выполнением законов сохранения. В третьих построенные выражения для операторов GRAD , DIV и ROT являются компактными и допускают естественную интерпретацию на языке тензорного исчисления. В четвертых используемые для описания векторов величины связаны с исходной нерегулярной сеткой, что позволяет более точно учитывать структуру решения.

И, наконец, в пятых для операторов GRAD , DIV и ROT определенных таким образом, имеют место разностные аналоги соотношений приведенных во введении.

п.5. Отметим, что образование псевторных операций $\text{DIV} \cdot \text{GRAD}$; $\text{GRAD} \cdot \text{DIV}$; $\text{ROT} \text{ROT}$, не представляется возможным. Так, например, вектор $\vec{G} = \text{GRAD}$ и задан компонентами $G_{\xi}, G_{\eta}, G_{\xi}$, а оператор DIV определен на векторах, заданных компонентами $G_{\xi}, G_{\eta}, G_{\xi}$ и так далее. Это обстоятельство не является случайным и не зависит от выбора спо-

соба дискретизации величин, например, в случае использования компонент W_X, W_Y, W_Z мы получаем оператор DIV , определенный ячейке, а оператор GRAD мы можем непосредственно определить только на сеточных функциях определенных в узлах.

Таким образом, построенные в настоящем параграфе разностные операторы имеют несогласованные между собой области определения и области значений.

п.6. Отметим, что для операторов GRAD , DIV и ROT , заданных формулами (10), (24) и (32)–(34) возможно образование следующих повторных операций $\text{DIV} \cdot \text{ROT}$ и $\text{ROT} \cdot \text{GRAD}$. Действительно, вектор $\text{ROT } \bar{W}$ определен своими проекциями $RS\xi, RS\eta, RS\zeta$, а оператор DIV действует на вектора, заданные такими же компонентами, так, что образование операции $\text{DIV} \cdot \text{ROT}$ имеет смысл.

Вектор $\text{GRAD } u$ задается своими компонентами $G_b\xi, G_b\eta, G_b\zeta$, а оператор ROT определен на векторах, имеющих такое описание, так что и комбинация $\text{ROT} \cdot \text{GRAD}$ имеет смысл.

В соответствии с дифференциальным случаем выполнены соотношения

$$\text{DIV}(\text{ROT } \bar{W}) \equiv 0 ; \quad \text{ROT}(\text{GRAD } u) \equiv 0.$$

Доказательство этих соотношений проводится путем непосредственной проверки. Отметим, что выполнение этих тождеств является следствием выбора дифференциальных соотношений, служащих основой для определения разностных операторов.

п.7. Итак, разностные аналоги операторов $\text{grad}, \text{div}, \text{rot}$ построены. Приведенные в настоящей работе выражения будут использоваться в последующих работах при построении систем согласованных операторов для непосредственной аппроксимации определяющих операторов.

Список цитированной литературы.

1. Самарский А.А., Тинкин В.Ф., Фаворский А.П., Шанков М.Ю., Операторные разностные схемы, Препринт ИИМ АН СССР, № 127, 1980г.
2. Самарский А.А., Фрязинов И.В., О разностных методах аппроксимации задач математической физики, УМН, 1976, т. XXXI, вып. 6 (192), стр. 167–197.

3. Фрязинов И.В., Метод баланса и вариационно-разностные схемы. Схемы переменных направлений на нерегулярных сетках, препринт ИИМ АН СССР, 1979, № 53.
4. Шашков М.Ю., Построение и исследование разностного аналога оператора Лапласа на прямоугольной сетке, препринт ИИМ АН СССР, 1977, № 47.
5. Kershaw D., Differencing of the diffusion equation in LASNEX, Lawrence Livermore Laboratory pub., UCID-17424, 1977.
6. Girault V., Theory of finite difference method on irregular networks, SIAM J. Numer., Anal., v.11, No 2, 260-282.
7. Головинин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П.. Об аппроксимации вариационно-разностных уравнений гидродинамики, препринт ИИМ АН СССР, 1977, № 34.
8. Тшикин В.Ф., Турина Н.Н., Фаворский А.П., Разностные схемы для расчета гидродинамических течений в цилиндрических координатах, препринт ИИМ АН СССР, 1978, № 23.
9. Фаворский А.П., Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики, препринт ИИМ АН СССР, 1979, № II5.
10. Головинин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П., "Об использовании принципа наименьшего действия для построения дискретных математических моделей в магнитной гидродинамике, ДАН СССР, т.246, № 5, с.1083-1087, 1979.
11. Корниа Т.К., Тшикин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю., Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках, КВМ, 1980, т.20, № 2, с.401-421.
12. Корниа Т.К., Тшикин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю., Вариационный подход к построению разностных схем для уравнений диффузии электромагнитного поля, препринт ИИМ АН СССР, 1979, № I79.
13. Головинин В.М., Корниа Т.К., Любимов Б.Я., Фаворский А.П., Численное исследование разлета плазмы в магнитном поле, препринт ИИМ АН СССР, 1978, № 61.
14. Волчинская М.И., Четвергушкин Б.Н., Методики решения двумерных нестационарных задач газовой динамики излучающего газа, препринт ИИМ АН СССР, 1977, № 98.
15. Махорова О.С., Попов Ю.П., К расчету двумерных уравнений газовой динамики, препринт ИИМ АН СССР, 1977, № 55.
16. Мак-Коннел А.Дж., Введение в тензорный анализ, М., Физматгиз. 1963.