Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

А.А. Самарский, В.Ф. Тишкин
А.П. Фаворский, Ю.М. Шашков

ОПЕРАТОРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Препринт № 9 за 1981 г.

Москва.

Аннотация

Предлагается строить разностные схемы для уравнений математической физики исходя из аппроксимации основных дифференциальных операторов первого порядка. При этом разностная схема записывается в виде, полностью аналогичном дифференциальному случаю, путем замены соответствующих дифференциальных операторов разностными. Вводится понятие согласованности операторов, тесно связанное с выполнением законов сохранения. Приведены примеры построения разностных схем рассмотренным методом.

Abstract

The difference schemes for mathematical physics equation are constructed by means of first order operators approximations. In this approach schemes are deduced by mere substitution difference operator for differential one. The concept of consistency of the difference operators is introduced, involving correspondent conservation laws. Some examples of approach application are given.

Содержание.

стр.

Введение 4
§ I. Вариационные принципы и их использование при построении разностных схем 6
§ 2. Метод согласования операторов первого порядка и построение разностных схем 12
§ 3. Разностные схемы для уравнения теплопроводности 19
Заключение 30
Список цитированной литературы 30

Введение.

Численное моделирование на основе конечно-разностных методов является в настоящее время наиболее действенным способом решения нелинейных задач математической физики / I,2 /.

Среди разнообразных требований, предъявляемых к разностным схемам можно выделить два основных типа. К первому относятся требования аппроксимации и устойчивости, которые обуславливают сходимость приближенного решения при достаточно малых шагах расчетной сетки.

Требования другого типа состоят в перенесении важнейших свойств исходных дифференциальных уравнений на их дискретный аналог-разностную схему. Здесь в первую очередь следует выделить свойства консервативности / 2 / и полной консервативности / 3 / схемы. Эти требования становятся особенно важными при практических расчетах на реальных сетках. В настоящее время существует ряд общих конструктивных подходов, таких как интегро-интерполяционный / 2 /, вариационный / 4 / и др., которые позволяют строить разностные схемы, обладающие отмеченными выше свойствами.

Вместе с тем, независимо от выбранного подхода, получение разностной схемы можно в конечном итоге рассматривать как построение разностных аналогов основных дифференциальных операторов математической физики: grad, div, rot.

Настоящая работа ставит своей целью изучение общей возможности построения разностных аналогов основных дифференциальных операторов на произвольных неортогональных сетках. Универсальность и конструктивность такого подхода заключается в возможности получения разностных схем для широкого класса уравнений.

Выполнение требований консервативности и полной консервативности является следствием согласованности разностных операторов.

Предлагается конкретное определение свойства согласованности в смысле выполнения разностных аналогов фундаментальных соотношений векторного анализа.

Это же определение служит конструктивной основой для пост-

роения системы согласованных разностных аналогов основных операторов математической физики. Построенные таким образом разностные операторы допускают образование повторных операций.

Разностные аналоги операторов $grad$, div, rot были, по-видимому впервые, введены в работах / 5, 6 / путем их непосредственной аппроксимации конечными разностями для ортогональных систем координат и прямоугольных сеток.

Вместе с тем преимущества операторного представления разностных схем становится наиболее ощутимым именно в случае произвольных коссугольных сеток, причем особую роль при этом играют вопросы соглассвания свойств этих сператоров, обеспечивающие консервативность и полную консераративность соответствующих схем. Возможность построения согласованных между собой разностных аналогов операторов div и $grad$ на основе вариационного подхода для произвольных сеток отмечалась в / 7 /.

Авторы благодарят Т.К.Коршия за полезные обсуждения.

§ I. Вариационные принципы и их использование для построения разностных схем.

В данном параграфе рассмотрена вариационная формулировки для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов. Показано, что использование вариационных принципов для построения разностных схем приводит к необходимости аппроксимации дифференциальных операторов первого порядка.

п.I Рассмотрим двумерное уравнение Пуассона в декартовых координатах с однородными краевыми условиями первого рода

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f, \quad (x,y) \in \Omega, \quad u|_\Gamma = 0, \tag{I.I}$$

где Ω – область, в которой ищется решение, Γ – граница Ω, f – заданная функция.

Уравнение (I) описывает, например, стационарное положение мембраны с закрепленной границей, находящейся в поле действия внешних сил. Согласно известному принципу / 8 /, стационарное положение механической системы характеризуется минимумом ее потенциальной энергии

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] d\Omega + \int_\Omega f \cdot u \, d\Omega = \min, \tag{I.2}$$

при этом минимум функционала (2) следует искать на классе функций, удовлетворяющих соответствующему граничному условию.

Этот факт имеет следующую математическую трактовку/9 / . Пусть дано операторное уравнение

$$Au = f \tag{I.3}$$

где $A : H \to H$ линейный оператор в гильбертовом пространстве H, обладающий следующими свойствами: $A = A^* \geq \delta E$, $\delta > 0$. Тогда, при известных допущениях, решение уравнения (3) эквивалентно минимизации функционала энергии

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u), \tag{I.4}$$

где (,) - скалярное произведение в H . Нетрудно убедиться, что в случае задачи (I), функционал (4) может быть преобразован к виду (3).

Таким образом, как с физической, так и с математической точек зрения задаче (I) можно поставить в соответствие задачу минимизации функционала (2).

Уравнению Пуассона в произвольной системе координат:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = -f$$

отвечает вариационная формулировка более общего вида:

$$(\text{I.5})\quad F(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 d\Omega + \int_{\Omega} f u \, d\Omega = \min .$$

Вариационная формулировка исходной задачи (I) часто берется за основу при построении разностных схем / I0 /, /II /. При этом возникает задача аппроксимации производных $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ в функционале (2).

Для построения разностной схемы на основе вариационной формулировки (5), в случае произвольной системы координат, необходимо аппроксимировать дифференциальный оператор первого порядка $-\operatorname{grad}$.

Отметим, что при описанном выше вариационном способе построения разностной схемы нет необходимости непосредственной аппроксимации оператора div . Можно показать, однако, что выражение для него однозначным образом определяется способом аппроксимации оператора grad и способом аппроксимации пространственного интеграла.

Следует отметить, что вариационные формулировки используются также и для нелинейных эллиптических уравнений.

п.2 Простой, но содержательный пример вариационной формулировки для задач гиперболического типа связан с рассмотрением малых колебаний жестко закрепленной мембраны около положения равновесия / I2 /. В предположении отсутствия внешних сил этот процесс описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u ,$$

где u – отклонение мембраны от положения равновесия. Начальные и граничные условия имеют вид

$$u\Big|_{\Gamma}=0; \quad u\Big|_{t=0}=u_0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 .$$

Согласно принципу Гамильтона / 8 /, движение мембраны доставляет стационарное значение функционалу действия

$$S=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$$

где T – кинетическая энергия, U – потенциальная энергия.

В нашем случае выражения для T и U имеют вид

$$T=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\Omega ; \quad U=\int_{\Omega}|\operatorname{grad} u|^2 d\Omega .$$

При построении разностной схемы для уравнений колебания мембраны на основе приведенной выше вариационной формулировки необходимо аппроксимировать оператор grad.

п.3 Вариационные принципы широко применяются при рассмотрении и более сложных физических процессов. Рассмотрим принцип наименьшего действия в применении к уравнениям гидродинамики в двумерном случае / 4 /, / I3 /, / I4 /. Согласно этому вариационному принципу уравнения движения могут быть получены путем приравнивания нулю первой вариации функционала действия по Гамильтону:

(I.6) $$\delta S=0,$$

где

(I.7) $$S=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\Omega(t)}\rho\left[\frac{u^2+v^2}{2}-\varepsilon\right]d\Omega\right)dt ,$$

здесь u, v – компоненты вектора скорости в декартовой системе координат, ρ – плотность, ε – удельная внутренняя

энергия, $\Omega(t)$ - подвижная область , заполненная одними и теми же частицами среды. Варьирование функционала (7) должно производиться с учетом связей:

(I.8) $\delta(dm)=\delta(\rho d\Omega)=0$ - закон сохранения массы,

(I.9) $\delta\varepsilon=(P/\rho^2)\,\delta\rho$ - условие адиабатичности,

(I.10) $\frac{d(\delta\vec{r})}{dt}=\delta\vec{v}$ - кинематические соотношения ,

здесь $dm=\rho d\Omega$ - элемент массы, P - давление, $\vec{r}$ - радиус-вектор, $\vec{v}=(u,v,0)$ - вектор скорости.

При варьировании функционала (7) вариации всех величин выражаются через вариации координат , при этом используются связи (8) - (10). Закон сохранения массы и формула

$$\delta(d\Omega)=\oint_S(\delta\vec{r},\vec{n})dS\cong d\Omega\,\mathrm{div}(\delta\vec{r})$$

дают соотношение, связывающее вариации $\delta\rho$ и $\delta\vec{r}$: $\delta\rho=-\rho\,\mathrm{div}(\delta\vec{r})$. Последнее соотношение и условие адиабатичности позволяют получить связь для $\delta\varepsilon$ и $\delta\vec{r}$

(I.11) $\delta\varepsilon=-(P/\rho)\cdot\mathrm{div}\,\delta\vec{r}.$

Связь вариаций вектора скорости и радиус-вектора определяется очевидным образом из кинематических соотношений

$$\frac{d(\delta\vec{r})}{dt}=\delta\vec{v}.$$

Подставляя выражения для вариаций скорости и внутренней энергии в уравнение (6) и применяя формулы векторного анализа, приходим к уравнениям движения

(I.12) $\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\mathrm{grad}\,P.$

Описанный выше принцип наименьшего действия был положен в ряде работ / 4 /, / 7/, / 15 / в основу построения разностных схем для уравнений гидродинамики.

Из описания процесса варьирования следует, что в разност-

ном случае достаточно аппроксимировать выражение $\operatorname{div} \delta \vec{\tau}$, входящее в соотношение (II). Таким образом, как и в случае уравнения Пуассона использование вариационной формулировки задачи для построения разностной схемы требует аппроксимации только одного оператора первого порядка, в данном случае это оператор div . Аппроксимация оператора grad получается автоматически в соответствии с вариационной формулировкой.

п. 4 Рассмотренные в пп.I – 3 примеры эллиптических и гиперболических уравнений, как мы видели, допускают вариационную формулировку, которая является в определенном смысле классической и широко используется в математической физике. Возможны также вариационные формулировки для задач параболического типа / I6 /, / I7 /.

Приведем одну из вариационных трактовок уравнения теплопроводности / I8 /, / I9 /

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{W}, \tag{I.I3}$$

$$\vec{W} = -\varkappa \operatorname{grad} u, \tag{I.I4}$$

где u – температура, $\vec{W}$ – вектор теплового потока, $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности.

Процесс распространения тепла происходит в соответствии со следующим вариационным принципом. В каждый фиксированный момент времени вектор теплового потока доставляет минимум функционалу

$$F(\vec{W}) = \int_{\Omega} \frac{\vec{W}^2}{\varkappa} d\Omega + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u^2 d\Omega, \tag{I.I5}$$

где функции u и $\varkappa$ считаются заданными и не варьируются, а вариация $\partial u/\partial t$ находится из уравнения баланса (I3), которое играет роль связи. Таким образом, отыскание векторного поля потоков можно проводить на основе минимизации функционала (I5). Используя уравнение связи (I3), функционал (I5) можно записать в виде

$$(\text{I.I6})\quad F(\vec{W}) = \int_{\Omega} \frac{\vec{W}^2}{\varkappa} d\Omega - 2\int_{\Omega} u \operatorname{div} \vec{W} d\Omega,$$

где u и $\varkappa$ считаются заданными и не варьируются.

Таким образом, при построении разностной схемы для уравнения теплопроводности (I3), (I4) можно использовать функционал (I6) и уравнение связи (I3). Как в (I3), так и в (I6) входит только один оператор первого порядка div, который необходимо аппроксимировать, аппроксимация оператора grad происходит автоматически в соответствии с вариационным принципом.

п.5 Рассмотрим в заключение вариационную формулировку для уравнений диффузии электромагнитного поля / 20 /, / 2I /.

$$(\text{I.I7})\quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E},$$

$$(\text{I.I8})\quad \vec{E} = \nu \operatorname{rot} \vec{H},$$

где $\vec{H}$, $\vec{E}$ – векторы напряженности магнитного и электрического полей, ν – характеризует электропроводность среды.

В каждый фиксированный момент времени задача отыскания электрического поля эквивалентна следующей вариационной задаче

$$(\text{I.I9})\quad F(\vec{E}) = \int_{\Omega} \frac{\vec{E}^2}{\nu} d\Omega + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{H}^2 d\Omega = \min,$$

где $\vec{H}$ и ν считаются фиксированными и не варьируются, а вариация $\partial \vec{H}/\partial t$ определяется из уравнения (I7), играющего роль связи. Нетрудно заметить, что функционал (I9) представляет собой линейную комбинацию интенсивности джоулева нагрева и скорости изменения энергии магнитного поля среды.

Используя уравнения связи (I7), функционал (I9) можно представить в виде

$$(\text{I.20})\quad F(E) = \int_{\Omega} \frac{\vec{E}^2}{\nu} d\Omega - \int_{\Omega} (\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) d\Omega,$$

где $\vec{H}$ и ν считаются заданными и не варьируются, а (,) обозначает скалярное произведение векторов.

Таким образом, при построении разностной схемы для уравнений (I7), (I8) можно использовать функционал (20) и уравнение связи (I7). При этом достаточно аппроксимировать вектор $\mathrm{rot}\,\vec{E}$, аппроксимация же для вектора $\mathrm{rot}\,\vec{H}$ получается автоматически. Следует отметить, что непосредственное использование аппроксимации оператора rot в выражении для $\mathrm{rot}\,\vec{E}$, вообще говоря, неприменимо для аппроксимации $\mathrm{rot}\,\vec{H}$. Такая ситуация, например, возникает в том случае, если для описания векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ используются различные компоненты.

п.6 Рассмотренные вариационные формулировки для задач эллиптического, гиперболического и параболического типов, приведенные в данном параграфе, могут быть положены в основу построения разностных схем. Анализ этих формулировок позволяет выделить следующие основные моменты. Первое - это необходимость непосредственной аппроксимации одного из операторов первого порядка, второе - аппроксимация входящих в вариационные функционалы интегралов и третье - получение, в результате варьирования разностных аналогов остальных операторов первого порядка.

§ 2. Метод согласования операторов первого порядка. Построение разностных схем.

п.I При построении разностных схем желательно, чтобы как можно большее число свойств исходных дифференциальных уравнений осталось справедливыми и для разностных аналогов. С физической точки зрения важнейшую роль играют законы сохранения. Требование выполнения их разностных аналогов приводит к понятию консервативности и полной консервативности консервативности / 2 /, / 3 /.

Большинство уравнений математической физики можно сформулировать в терминах дифференциальных операторов первого порядка grad, div, rot .Поэтому и при построении разностных схем целесообразно использовать соответствующие разностные аналоги операторов первого порядка, входящих в исходные уравнения. Тогда свойства разностных схем, аналогично дифференциальному

случаю будут определяться свойствами этих операторов, которые по аналогии удобно обозначать GRAD, DIV, ROT.

п.2 В дифференциальном случае операторы div и grad удовлетворяют тождеству (условию согласования)

$$(2.1)\qquad \int_{\Omega} u\,\mathrm{div}\,\vec{W}\,d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{W}, \mathrm{grad}\,u)\,d\Omega = \oint_{S} u\cdot(\vec{W}, \vec{n})\,dS,$$

где S – поверхность, ограничивающая объем Ω, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S. Из равенства (I) следует ряд соотношений имеющих непосредственный физический смысл. Положим, например, в (I) $u \equiv 1$, тогда будем иметь

$$(2.2)\qquad \int_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec{W}\,d\Omega = \int_{S} (\vec{W}, \vec{n})\,dS.$$

Если теперь рассмотреть уравнение теплопроводности

$$(2.3)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{W},$$

где u – температура, $\vec{W}$ – тепловой поток, и проинтегрировать его по области Ω, то из (2) получим балансное соотношение

$$(2.4)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\Omega} u\,d\Omega\right) = -\oint_{S} (\vec{W}, \vec{n})\,dS$$

представляющее собой закон сохранения тепла. Очевидно, что если операторы GRAD и DIV связаны разностным аналогом соотношения (I) для любых u_h и $\vec{W}_h$ и, кроме того, $\mathrm{GRAD}\cdot I = 0$, то будет выполнен также разностный аналог соотношения (4), здесь I сеточная функция во всех узлах равная единице.

Рассмотрим теперь, как используется соотношение (I) при преобразовании уравнений гидродинамики. Как известно / 3 /, закон сохранения полной энергии следует из уравнения движения

$$(2.5)\qquad \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\,p$$

и уравнения для удельной внутренней энергии

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \operatorname{div} \vec{v} \tag{2.6}$$

следующим образом. Умножая уравнение (5) скалярно на $\vec{v}$ складывая с (6) и интегрируя по Ω приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \varepsilon \right) \rho \, d\Omega \right) = \tag{2.7}$$

$$= -\left[\int_{\Omega} (\operatorname{grad} p, \vec{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} \vec{v} \, d\Omega \right] = -\oint_{S} p \cdot (\vec{v}, \vec{n}) \, dS,$$

где последнее равенство справедливо в силу (I). Уравнение (7) означает, что изменение полной энергии в отсутствии объемных силовых полей равно работе поверхностных сил.

Из приведенного рассмотрения понятно, что если разностные аналоги операторов div и grad в уравнениях (5), (6) не удовлетворяют соотношению (I), то это приведет к потере консервативности разностной схемы.

Таким образом, естественно назвать операторы GRAD и DIV согласованными друг с другом, если они удовлетворяют разностному аналогу соотношения (I).

Очевидно, что если определять операторы GRAD, DIV и ROT независимо друг от друга, то они могут оказаться несогласованными. Использование вариационных формулировок при построении разностных схем выделяет операторы, удовлетворяющие свойству (I).

п.3 Определим понятие согласованности разностных операторов. В качестве условий, определяющих согласованность между операторами GRAD, DIV, ROT возьмем следующие наиболее часто используемые соотношения / 22 /:

$$\oint_{S} \varphi (\vec{n}, \vec{A}) \, dS = \int_{V} \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{A} \, dV + \int_{V} (\vec{A}, \operatorname{grad} \varphi) \, dV, \tag{2.8}$$

$$\oint_S (\vec{n}, [\vec{A}\times\vec{B}])\,dS = \int_V (\vec{B}, \mathrm{rot}\,\vec{A})\,dV - \int_V (\vec{A}, \mathrm{rot}\,\vec{B})\,dV, \tag{2.9}$$

$$\oint_S \varphi(\vec{C}, [\vec{n}\times\vec{A}])\,dS = \int_V \varphi(\vec{C}, \mathrm{rot}\,\vec{A})\,dV - \int_V (\vec{C}, [\vec{A}\times \mathrm{grad}\,\varphi])\,dV, \tag{2.10}$$

здесь S замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S; $\vec{C}$ – произвольная вектор-функция, такая, что $\mathrm{rot}\,\vec{C} \equiv 0$.

Будем называть разностные операторы GRAD, DIV, ROT согласованными между собой, если для них справедливы разностные аналоги соотношений (8)-(10). Заметим, что если операторы GRAD, DIV и ROT определены, то согласованный с ними разностный аналог операции $(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$ можно ввести исходя из соотношений

$$\mathrm{grad}\,(\vec{A}, \vec{B}) = [\vec{A}\times \mathrm{rot}\,\vec{B}] + [\vec{B}\times \mathrm{rot}\,\vec{A}] + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A},$$

$$\mathrm{rot}\,[\vec{A}\times\vec{B}] = \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\cdot\mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}.$$

Наряду с согласованностью разностных операторов, часто при построении разностных схем необходимо образовывать разностные аналоги повторных операций $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}$, $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$. Кроме того должны быть выполнены разностные аналоги соотношений

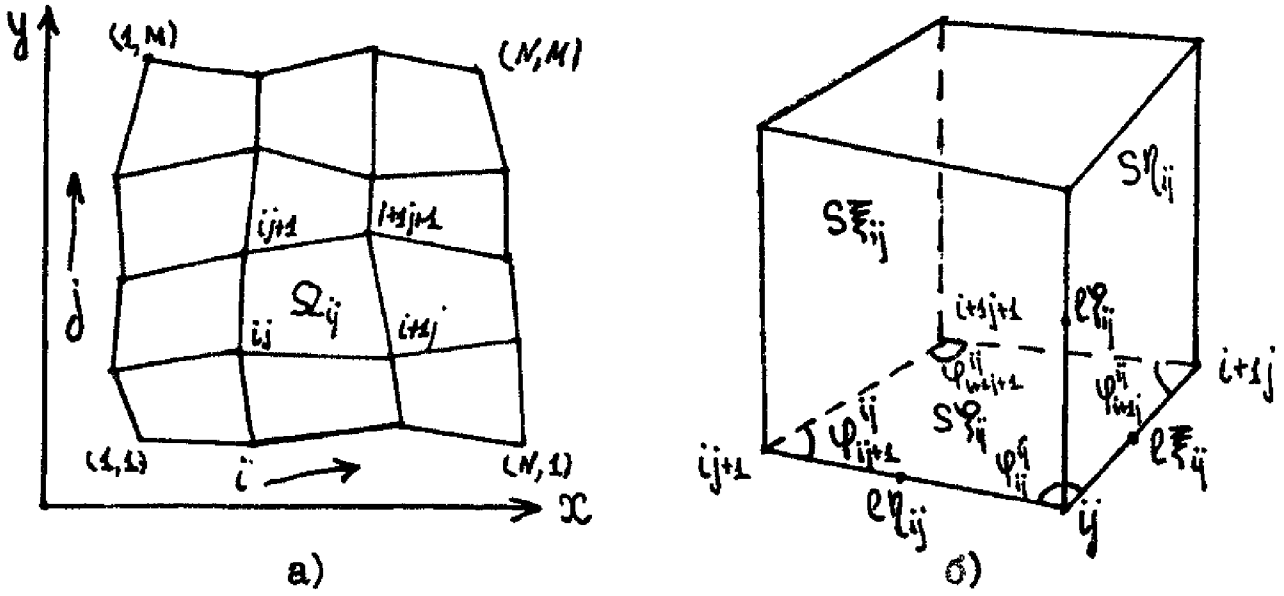
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi \equiv 0; \quad \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \equiv 0;$$

которые в ряде случаев имеют непосредственный физический смысл.

п.4. В следующем пункте мы продемонстрируем ряд возможностей непосредственной аппроксимации операторов grad, div, rot. Области определения этих операторов тесно связаны со структурой, используемой при построении разностной схемы сетки.

Для пояснения существа дела достаточно рассмотреть случай, когда все функции зависят только от двух пространственных переменных. Для простоты изложения можно ограничиться рассмотрением декартовых координат x, y, z.

Будем считать, что в области Ω, лежащей в плоскости (x, y) введена четырехугольная сетка по структуре аналогичная прямоугольной сетке в единичном квадрате (фиг. Iа).



Фиг.2.I

Так как вектор-функции имеют вообще говоря три компоненты, то следует формально ввести в рассмотрение пространственную сетку. С этой целью удобно с каждой ячейкой сетки в плоскости (x, y) связать в трехмерном пространстве прямую призму, для которой данная ячейка является нижним основанием (фиг. Iб). Обозначим эту призму V_{ij}.

п.5 Как известно оператор grad в каждой точке полностью описывается своими ортогональными проекциями на три некомпланарных направления ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3:

$$(2.\text{II})\quad \operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial \ell_1}, \frac{\partial u}{\partial \ell_2}, \frac{\partial u}{\partial \ell_3} \right\}.$$

В разностном случае, в каждом узле естественно выбрать ℓ_1, ℓ_2 ℓ_3 направленными по соответствующим ребрам ячейки пространственной сетки.

Для удобства изложения введем различные пространства сеточных функций. Пространство скалярных сеточных функций, значения которых вычисляются в узлах расчетной сетки обозначим через HK Пространство скалярных сеточных функций определенных в центрах ячеек будем обозначать HC . Для описания сеточных вектор-функций будем использовать два способа. Вектор-функцию можно характеризовать с помощью ее ортогональных проекций на направление нормалей к граням призмы V_{ij} . Значения таких проекций отнесены к центрам соответствующих граней. Пространство введенных таким образом сеточных вектор-функций обозначим через $\mathcal{H}S$.При втором способе списания вектор-функций будем использовать значения ортогональных проекций на направления ребер призмы V_{ij} Компоненты получившейся сеточной вектор-функции попределены в центрах соответствующих ребер; пространство таких сеточных вектор-функций обозначим через $\mathcal{H}L$.

Естественной областью определения для оператора $GRAD$ являются сеточные функции из HK , так как при этом входящие в (II) производные можно аппроксимировать просто как отношение разности значений функции в узлах к длине соответствующей стороны. Естественной областью значений, очевидно, являются сеточные вектор-функции из $\mathcal{H}L$. Таким образом можно записать, что "естественный"оператор $GRAD$, определенный на основе (II), действует следующим образом:

$$GRAD : HK \to \mathcal{H}L \tag{2.12}$$

п.6. Оператор DIV естественно строить на основе общего определения понятия дивергенции

$$\operatorname{div} \vec{W} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S (\vec{W}, \vec{n})\, dS}{V} \tag{2.13}$$

Из (I3) видно, что естественной областью значений для оператора DIV являются сеточные функции из HC . Аппроксимацию поверхностного интеграла в правой части (I3) наиболее удобно проводить, если использовать сеточные вектор-функции из $\mathcal{H}S$

Таким образом

$$DIV : \mathcal{H}S \to HC . \tag{2.14}$$

Подчеркнем, что построение оператора DIV на основе соотношения (I3), обеспечивает консервативность уравнений, в которые входит этот оператор.

п.7 При построении оператора ROT также будем исходить из общего определения

$$(2.15)\quad (\vec{n}, \mathrm{rot}\,\vec{W}) = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_{\ell} (\vec{W}, \vec{\tau})\, d\ell}{S}.$$

Здесь S – некая поверхность, опирающаяся на контур ℓ, $\vec{\tau}$ – вектор единичной касательной к контуру ℓ, $\vec{n}$ – единичная нормаль к S.

Выбирая в качестве S грани пространственной ячейки, получим разностные аналоги компонент $(\vec{n}, \mathrm{rot}\,\vec{W})$ определенные на гранях. Контурный интеграл наиболее просто аппроксимируется, если для описания вектора $\vec{W}$ используются его ортогональные проекции на ребра ячейки. Таким образом оператор действует следующим образом

$$(2.16)\quad ROT : \mathcal{H}L \to \mathcal{H}S.$$

Отметим, что определение оператора ROT на основе соотношения (15) также связано с выполнением соответствующих законов сохранения.

Путем выбора соответствующей аппроксимации скалярных произведений интегралов для рассмотренной системы операторов можно добиться выполнения разностных аналогов соотношений (8)-(10).

п.8 Сравнивая области определения и области значений построенных операторов, заключаем, что возможно образование только двух повторных операций $ROTGRAD$ и $DIVROT$. Нетрудно проверить, что для этих операций выполнены разностные аналоги равенств $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi \equiv 0$ и $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{W} \equiv 0$, а именно:
$ROTGRAD\varphi \equiv 0$; $DIVROT\vec{W} \equiv 0$.

Нашей основной задачей является, таким образом, построение операторов с согласованными областями определения, допускающими образование повторных операций, и для которых были бы выполнены разностные аналоги соотношений (8) – (10).

Для достижения поставленной цели поступим следующим образом. Выберем какой-либо из трех операторов и зафиксируем его

"естественную" аппроксимацию. Назовем такой разностный оператор определяющим. Далее с помощью разностных аналогов тождеств (8 - I0) будем строить остальные разностные операторы, которые будем называть определяемыми. При этом одному дифференциальному оператору может соответствовать несколько разностных аналогов, действующих в различных пространствах сеточных функций. Такой подход, очевидно, обеспечивает самосогласованность разностной схемы. Отметим, что вид аппроксимации определяемых операторов существенно зависит от выбора аппроксимации интегральных выражений в (8)-(I0).

Перечислим основные этапы, которые необходимо реализовать при построении разностных схем описанным выше способом.

Во-первых, следует выбрать способ дискретизации скалярных и векторных величин. Второй этап - выбор определяющего оператора и его аппроксимация. Третий этап - выбор способа согласования и аппроксимация соответствующих интегральных выражений и получение согласованных операторов на основе выбранных условий согласования. Реализация указанных этапов дает возможность осуществить запись разностной схемы с использованием построенных операторов в виде, аналогичном дифференциальному случаю, то есть с заменой операций grad, div, rot на $GRAD$, DIV, ROT'.

§ 3. Разностные схемы для уравнения теплопроводности.

п.I. Рассматривается уравнение теплопроводности, записанное в потоковой форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{W}, \qquad (3.1)$$

$$\vec{W} = -\mathrm{grad}\,u, \qquad (3.2)$$

в Ω,

где U – температура, $\vec{W}$ – вектор теплового потока, Ω – область в плоскости (x, y).

На границе Γ области Ω ставится краевое условие

$$(3.3)\quad \left[\gamma(\vec{W},\vec{n}) + \beta U\right]\Big|_{\Gamma} = f,$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к Γ, параметры γ, β, f – заданы на Γ. При $\gamma=0$, $\beta=1$ получаем краевое условие первого рода, при $\gamma=1$, $\beta\neq 0$ – третьего рода, при $\gamma=1$, $\beta=0$ – второго рода.

п.2 Для построения разностной схемы нам понадобится более подробное описание расчетной сетки, введенной в § 2. Узлы такой сетки можно занумеровать аналогично тому, как это делается в квадрате (фиг.2.I). Четырехугольники, вершинами которых служат узлы сетки, назовем ячейками. Во избежание полуцелых индексов, ячейки , имеющие своими вершинами узлы $(ij), (i+1,j), (i+1,j+1), (i,j+1)$ обозначим Ω_{ij} (Фиг.2.I). Стороны ячейки Ω_{ij} обозначим, соответственно, $\ell\xi_{ij}$ и $\ell\eta_{ij}$ (см.фиг.2.I), высоту пространственной ячейки, выходящую из узла ij для единообразия обозначим $\ell\zeta_{ij}$.

Для обозначения углов ячейки Ω_{ij} , введем двойную индексацию φ^{ij}_{pq} , нижний индекс соответствует узлу , а верхний- ячейке.

Боковые грани призмы V_{ij} обозначим через $S\xi_{ij}$, $S\eta_{ij}$ (см.фиг.2.I), нижнее основание Ω_{ij} для единообразия обозначим $S\zeta_{ij}$, объем пространственной ячейки обозначим V_{ij} .

п.3 При построении разностных схем для задачи (I), (2), (3) будем рассматривать два случая дискретизации скалярной функции U . В первом случае будем считать U отнесенной к ячейкам, а во втором – к узлам.

Для описания вектор-функций также рассмотрим две возможности. Можно характеризовать вектор-функцию $\vec{A}$, ее ортогональными проекциями на ребра пространственной ячейки, соответствующие компоненты $AL\xi_{ij}$, $AL\eta_{ij}$, $AL\zeta_{ij}$ – будем считать заданными на ребрах. В этом случае будем писать $\bar{A}\in\mathcal{H}L$.

Для описания вектор-функций можно также использовать ортогональные проекции на направления перпендикулярные граням ячейки.

Мы будем обозначать эти проекции $AS\xi_{ij}$, $AS\eta_{ij}$, $AS\zeta_{ij}$ и относить к соответствующим граням. В этом случае будем писать $\bar{A} \in \mathcal{H}S$.

При построении разностных операторов нам понадобятся разностные аналоги скалярных произведений. Рассмотрим сначала непрерывный случай. Пусть в некоторой точке пространства задана косоугольная система координат ξ, η, ζ, при этом линия ζ перпендикулярна плоскости (ξ, η). Угол между осями ξ, η обозначим через φ.

Тогда, если вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$ характеризовать ортогональными проекциями на направления координатных прямых, то для скалярного произведения справедлива формула / 22 /:

(3.4)

$$(\vec{A},\vec{B}) = \frac{AL\xi\cdot BL\xi + AL\eta\cdot BL\eta - \cos\varphi\,(AL\xi\cdot BL\eta + AL\eta\cdot BL\xi)}{\sin^2\varphi} + AL\zeta\cdot BL\zeta .$$

Если же вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$ заданы своими ортогональными проекциями, на направления, перпендикулярные координатным плоскостям, то справедлива формула / 22 /:

(3.5)

$$(\vec{A},\vec{B}) = \frac{AS\xi\cdot BS\xi + AS\eta\cdot BS\eta + \cos\varphi\,(AS\xi\cdot BS\eta + AS\eta\cdot BS\xi)}{\sin^2\varphi} + AS\zeta\cdot BS\zeta .$$

В соответствии с формулами (4), (5) в разностном случае получаем следующие формулы для аппрокоимации ($\vec{A}$, $\vec{B}$) в ячейке.

Для $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{H}L$

(3.6)

$$(\bar{A},\bar{B})_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{k,l=0,1} V^{ij}_{i+l\,j+k} \Big[\Big\{ AL\xi_{ij+k}\cdot BL\xi_{ij+k} + AL\eta_{i+l\,j}\cdot BL\eta_{i+l\,j} +$$

$$+(-1)^{k+l+1}\cos\varphi^{ij}_{i+lj+k}\left(AL\xi_{ij+k}\cdot BL\eta_{i+lj}+AL\eta_{i+lj}\,BL\xi_{ij+k}\right)\Big\}\Big/\sin^2\varphi^{ij}_{i+lj+k}+$$

$$+AL\xi_{i+lj+k}\cdot BL\xi_{i+lj+k}\Big]$$

здесь V^{ij}_{i+lj+k} некоторые веса: $\sum\limits_{k,l=0,1} V^{ij}_{i+kj+l}=V_{ij}$.

Для $\vec{A},\vec{B}\in\mathcal{H}S$

$$(\vec{A},\vec{B})_{ij}=\frac{1}{V_{ij}}\sum_{k,l=0,1}V^{ij}_{i+kj+l}\Big[\Big\{AS\xi_{i+kj}\,BS\xi_{i+kj}+AS\eta_{ij+l}\cdot BS\eta_{ij+l}+$$

(3.7)

$$+(-1)^{k+l}\cos\varphi^{ij}_{i+kj+l}\left(AS\xi_{i+kj}\cdot BS\eta_{ij+l}+AS\eta_{ij+l}\cdot BS\xi_{i+kj}\right)\Big\}\Big/\sin\varphi^{ij}_{i+kj+l}\Big]+$$

$$+AS\xi_{ij}\cdot BS\xi_{ij}\,.$$

п.4 Перейдем к построению разностных операторов. Рассмотрим сначала случай, когда $u\in HC$, то есть задана в ячейках. В этом случае, в соответствии с уравнением (I) оператор $\mathcal{D}IV$ должен действовать в пространство HC.

Выберем в качестве определяющего оператор $\mathcal{D}IV$ и аппроксимируем его в соответствии с формулой (2.13), учитывая двумерность задачи, получим

(3.8)

$$(\mathcal{D}IV\,\vec{A})_{ij}=\frac{1}{V_{ij}}\Big[AS\xi_{i+1j}\cdot S\xi_{i+1j}-AS\xi_{ij}\,S\xi_{ij}+AS\eta_{ij+1}\,S\eta_{ij+1}-AS\eta_{ij}\,S\eta_{ij}\Big]$$

Таким образом $\mathcal{D}IV\ :\ \mathcal{H}S\to HC$.

п.5 Для получения возможности образования повторных операций оператор GRAD должен действовать так $GRAD: HC \to \mathcal{H}S$, то есть для описания вектора $\bar{G} = GRAD \cdot U$ следует использовать компоненты $GS\xi$, $GS\eta$, $GS\zeta$. Поэтому для аппроксимации интеграла $\int_V (\vec{A}, grad\varphi) dv$ будем использовать формулу

$$(3.9)\quad \int_V (\vec{A}, grad\varphi) dv \cong \sum_{ij} V_{ij} (\bar{A}, GRAD \cdot \varphi)_{ij}$$

где скалярное произведение векторов $\bar{A}$ и $GRAD \cdot \varphi$ определяется в соответствии с формулой (7).

Для аппроксимации интеграла $\int_V \varphi \cdot div\vec{A} dV$ используем формулу

$$(3.10)\quad \int_V \varphi \cdot div\vec{A} dv \cong \sum_{ij} V_{ij} \varphi_{ij} (DIV\bar{A})_{ij} .$$

Для интеграла по поверхности используем формулу

$$(3.11)\quad \oint_S \varphi \cdot (\vec{A}, \vec{n}) dS \cong \sum_{j=1}^{M-1} \left[-S\xi_{1j} AS\xi_{1j} \varphi\xi_{1j} + S\xi_{Nj} AS\xi_{Nj} \varphi\xi_{Nj} \right] + \sum_{i=1}^{N-1} \left[-S\eta_{i1} AS\eta_{i1} \varphi\eta_{i1} + S\eta_{iM} AS\eta_{iM} \varphi\eta_{iM} \right] .$$

Здесь $\varphi\xi_{1j}$, $\varphi\xi_{Nj}$ – аппроксимируют значения функции φ на гранях $S\xi_{1j}$ и $S\xi_{Nj}$, соответственно. Аналогичный смыол имеют величины $\varphi\eta_{i1}$, $\varphi\eta_{iM}$.

п.6 Компоненты оператора GRAD определим из разностного аналога тождества

$$(3.12)\quad \int_V (\vec{A}, grad\varphi) dv = -\int_V \varphi div\vec{A} dv + \oint_S \varphi \cdot (\vec{A}, \vec{n}) dS ,$$

где для аппроксимации интегралов использованы формулы (9), (10), (11), соответотвенно.

Выражение (9) можно преобразовать к виду

$$(3.13)\quad \sum_{ij}\left\{\left(\mathcal{L}_{11}GS\xi+\mathcal{L}_{12}GS\eta\right)_{ij}AS\xi_{ij}+\left(\mathcal{L}_{21}GS\xi+\mathcal{L}_{22}GS\eta\right)_{ij}AS\eta_{ij}\right\}$$

Выражение в фигурных скобках можно трактовать как скалярное произведение двух блочных векторов $\overline{\mathcal{L}\overline{G}}$ и $\overline{A}$:

$$\overline{\mathcal{L}\overline{G}}=\begin{pmatrix}\mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12}\\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}GS\xi\\ GS\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathcal{L}_{11}GS\xi+\mathcal{L}_{12}GS\eta\\ \mathcal{L}_{21}GS\xi+\mathcal{L}_{22}GS\eta\end{pmatrix};\quad \overline{A}=\begin{pmatrix}AS\xi\\ AS\eta\end{pmatrix}$$

Нетрудно показать, что оператор $\mathcal{L}$ является самосопряженным и положительно определенным. Действительно, свойства оператора $\mathcal{L}$ определяются свойствами скалярного произведения, определнного формулой (7). Из формулы (7) непосредственно видно, что $(\overline{A},\overline{B})_{ij}$ симметрично относительно векторов $\overline{A}$ и $\overline{B}$. При $\overline{A}=\overline{B}$ имеем

(3.14)

$$(\overline{A},\overline{A})_{ij}=\frac{1}{V_{ij}}\sum_{k,l=0,1}V^{ij}_{i+kj+l}\,\frac{AS\xi^2_{i+kj}+AS\eta^2_{ij+l}+2\cdot(-1)^{k+l}\cos\varphi^{ij}_{i+kj+l}\,AS\xi_{i+kj}\cdot AS\eta_{ij+l}}{\sin^2\varphi^{ij}_{i+kj+l}}+AS\xi^2_{ij}$$

Так как для любых a , b и φ выполнено неравенство

$$a^2+b^2\pm 2ab\cos\varphi\geqslant\frac{\sin^2\varphi}{2}(a^2+b^2),$$

то из (14) получаем

$$(\overline{A},\overline{A})_{ij}\geqslant\frac{1}{V_{ij}}\sum_{k,l=0,1}V^{ij}_{i+kj+l}\,\frac{(AS\xi^2_{i+kj}+AS\eta^2_{ij+l})}{2}+AS\xi^2_{ij},$$

откуда и следует положительная определнность оператора $\mathcal{L}$.

Собирая коэффициенты в правой части (I2) при $AS\xi_{ij}$, $AS\eta_{ij}$, $AS\varphi_{ij}$ и приравнивая их соответствующим выражениям в (I3) получим для внутренних узлов

(3.I5)
$$\left(\mathcal{L}_{11} GS\xi + \mathcal{L}_{12} GS\eta\right)_{ij} = S\xi_{ij}\left(\varphi_{ij} - \varphi_{i-1j}\right),$$
$$\left(\mathcal{L}_{21} GS\xi + \mathcal{L}_{22} GS\eta\right)_{ij} = S\eta_{ij}\left(\varphi_{ij} - \varphi_{ij-1}\right),$$
$$GS\varphi_{ij} = 0,$$

здесь

(3.I6)
$$\left(\mathcal{L}_{11} GS\xi\right)_{ij} = \left[\sum_{k,l=0,1} \frac{V_{ij+l}^{i-kj}}{\sin^2 \varphi_{ij+l}^{i-kj}}\right] GS\xi_{ij};$$
$$\left(\mathcal{L}_{12} GS\eta\right)_{ij} = \sum_{k,l=0,1} (-1)^{k+l} \frac{V_{ij+l}^{i-kj} \cos\varphi_{ij+l}^{i-kj}}{\sin^2 \varphi_{ij+l}^{i-kj}} GS\eta_{i-kj+l};$$
$$\left(\mathcal{L}_{21} GS\xi\right)_{ij} = \sum_{k,l=0,1} (-1)^{k+l} \frac{V_{i+lj}^{ij-k} \cos\varphi_{i+lj}^{ij-k}}{\sin^2 \varphi_{i+lj}^{ij-k}} GS\xi_{i+lj-k};$$
$$\left(\mathcal{L}_{22} GS\eta\right)_{ij} = \left[\sum_{k,l=0,1} \frac{V_{i+lj}^{ij-k}}{\sin^2 \varphi_{i+lj}^{ij-k}}\right] GS\eta_{ij}.$$

Для граничных узлов формулы получаются аналогично, так равенство коэффициентов при $AS\xi_{1j}$ дает следующее уравнение

(3.I7)
$$\left[\sum_{l=0,1} \frac{V_{1j+l}^{1j}}{\sin^2 \varphi_{1j+l}^{1j}}\right] GS\xi_{1j} + \sum_{l=0,1} (-1)^{l} \frac{V_{1j+l}^{1j} \cos\varphi_{1j+l}^{1j}}{\sin^2 \varphi_{1j+l}^{1j}} GS\eta_{1j+l} = S\xi_{1j}\left(\varphi_{1j} - \varphi\xi_{1j}\right)$$

Остальные уравнения в граничных точках имеют аналогичный вид.

Из формул (I5)- (I7) видно, что для определения компонент вектора $GRAD\varphi$ необходимо решить систему линейных уравнений. Доопределяя оператор $\mathcal{L}$ в граничных точках в соответствии с формулами типа (I7),можем записать

$$(3.I8) \qquad GRAD\varphi = \mathcal{L}^{-1} \cdot P \cdot \varphi \quad ,$$

где P - оператор-столбец

$$P\cdot\varphi = \begin{pmatrix} P_1 \\ \cdots \\ P_2 \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} P_1\cdot\varphi \\ \cdots \\ P_2\varphi \end{pmatrix} ,$$

который действует в соответствии о формулами (I5), (I7).

п.7 С использованием построенных операторов неявную разностную схему для уравнений (I),(2) запишем в виде

$$(3.I9) \qquad \frac{U-\check{U}}{\Delta t} = -DIV\,\overline{W} \quad ; \quad \overline{W} = -GRAD\cdot U,$$

здесь $\check{U}$ - температура на предыдущем слое по времени.

В соответствии с принятой дискретизацией аппроксимируем и граничные условия, так ,например, при $i = 1$ будем иметь

$$(3.20) \qquad -\gamma_{\xi_{1j}} W S_{\xi_{1j}} + \beta_{\xi_{1j}} U_{\xi_{1j}} = f_{\xi_{1j}}$$

где величины γ_ξ, β_ξ, U_ξ , f_ξ предотавляют собой значения соответствующих функций на серединах граней $S_{\xi_{1j}}$.

п.8 В работах / I8 / / I9 / схема (2I)- (23) была получена при помощи вариационного способа согласования, соответствующего формулировке (I.I6). В этих работах подробно исследованы свойства схемы и доказан второй порядок локальной аппроксимации на гладких сетках. Схема (2I)- (23) хорошо зарекомендовала себя при проведении практических расчетов / 23/.

п.9 Рассмотрим теперь случай, когда сеточная функция $U \in HK$, то есть определена в узлах сетки.

Пространство HK является естественной областью определе-

ния оператора $GRAD: HK \to \mathcal{H}L$, поэтому мы и выберем этот оператор в качестве определяющего. В соответствии с формулой (2.II) компоненты вектора $\bar{G} = GRAD\ U$ определены на ребрах ячейки V_{ij} :

$$(3.2I) \quad GL\xi_{ij} = \frac{U_{i+1j} - U_{ij}}{l\xi_{ij}}; \quad GL\eta_{ij} = \frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{l\eta_{ij}}; \quad GL\zeta_{ij} = 0;$$

где последнее равенство справедливо в силу двумерности задачи.

Для образования повторных операций div grad и grad div необходимо построить оператор $DIV: \mathcal{H}L \to HK$.

п.I0 В соответствии с рассмотрениями предыдущего параграфа построение определяемого оператора DIV будем производить на основе разностного аналога соотношения (I.8). При этом возьмем $\varphi \in HK$ и $\bar{A} \in \mathcal{H}L$.

Для описания граничных условий будем использовать компоненты вектора $\bar{A}$, являющиеся ортогональными проекциями на направления, перпендикулярные граням ячейки V_{ij}. В соответствии с формулой (6) получим

$$(3.22) \quad \int_V (\vec{A}, \operatorname{grad}\varphi)\, dV \cong \sum_{ij} V_{ij} (\bar{A}, GRAD\,\varphi)_{ij}$$

Для аппроксимации интеграла $\int_V \varphi \cdot \operatorname{div}\vec{A}\, dV$ используем формулу

$$(3.23) \quad \int_V \varphi \operatorname{div}\vec{A}\, dV \cong \sum_{ij} \sum_{k,l=0,1} V^{ij}_{i+kj+l}\, \varphi_{i+kj+l} (DIV\bar{A})_{i+kj+l}.$$

Поверхностный интеграл аппроксимируем следующим образом

$$(3.24) \quad \oint_S \varphi \cdot (\vec{A}, \vec{n})\, dS \cong$$

$$\cong 0.5 \left\{ \sum_{j=1}^{M-1} \left[-S\xi_{1j}\, AS\xi_{1j} (\varphi_{1j} + \varphi_{1j+1}) + S\xi_{Nj}\, AS\xi_{Nj} (\varphi_{Nj} + \varphi_{Nj+1}) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N-1} \left[-S\eta_{i1}\, AS\eta_{i1} (\varphi_{i1} + \varphi_{i+1,1}) + S\eta_{iM}\, AS\eta_{iM} (\varphi_{iM} + \varphi_{i+1,M}) \right] \right\}$$

Оператор $\mathcal{DIV}$ определим из разностного аналога соотношения

$$\int_V \varphi \, \mathrm{div}\vec{A}\, dV = -\int_V (\vec{A}, \mathrm{grad}\,\varphi)\, dV + \oint_S \varphi(\vec{A}, \vec{n})\, dS$$

путем приравнивая коэффициентов в правой и левой частях равенства при значениях φ_{ij} с одинаковыми индексами.

В результате для $2 \le i \le N-1$, $2 \le j \le M-1$ получим

$$(\mathcal{DIV}\vec{A})_{ij} = \Bigg\{ \sum_{p=0,1} (-1)^p \frac{\Delta L \xi_{i-p,j}}{\ell \xi_{i-p,j}} \cdot \sum_{\ell,q=0,1} \frac{V^{i-p,j-q}_{i+\ell-p,j}}{\sin^2 \varphi^{i-p,j-q}_{i+\ell-p,j}} +$$

(3.25)

$$+ \sum_{p=0,1} \frac{1}{\ell \xi_{i-p,j}} \cdot \sum_{\ell,q=0,1} (-1)^{\ell-q} \frac{V^{i-p,j-q}_{i+\ell-p,j} \cos\varphi^{i-p,j-q}_{i+\ell-p,j}}{\sin^2 \varphi^{i-p,j-q}_{i+\ell-p,j}} \Delta L \eta_{i+\ell-p,j-q} +$$

$$+ \sum_{p=0,1} (-1)^p \frac{\Delta L \eta_{ij-p}}{\ell \eta_{ij-p}} \sum_{\ell,q=0,1} \frac{V^{i-q,j-p}_{i,j+\ell-p}}{\sin^2 \varphi^{i-q,j-p}_{i,j+\ell-p}} +$$

$$+ \sum_{p=0,1} \frac{1}{\ell \eta_{ij-p}} \sum_{\ell,q=0,1} (-1)^{\ell-q} \frac{V^{i-q,j-p}_{i,j+\ell-p} \cos\varphi^{i-q,j-p}_{i,j+\ell-p}}{\sin^2 \varphi^{i-q,j-p}_{i,j+\ell-p}} \Delta L \xi_{i-q,j+\ell-p} \Bigg\} \Big/$$

$$\Big/ \sum_{K,\ell=0,1} V^{i-\ell,j-K}_{ij}$$

Выражения для $\mathcal{DIV}$ в граничных узлах получаются аналогичным образом. Например, для $i=1$; $2 \le j \le M-1$ получаем

$$(\mathrm{DIV}\,\bar{A})_{1j} = \Bigg\{ \frac{AL\xi_{1j}}{\ell\xi_{1j}} \sum_{\ell,q=0,1} \frac{V^{1,j-q}_{1+\ell,j}}{\sin^2\varphi^{1,j-q}_{1+\ell,j}} +$$

$$+ \frac{1}{\ell\xi_{1j}} \cdot \sum_{\ell,q=0,1} (-1)^{\ell-q} \frac{V^{1,j-q}_{1+\ell,j} \cos\varphi^{1,j-q}_{1+\ell,j}}{\sin^2\varphi^{1,j-q}_{1+\ell,j}} AL\eta_{1+\ell,j-q} +$$

(3.26)

$$+ \sum_{p=0,1} (-1)^p \frac{AL\eta_{1,j-p}}{\ell\eta_{1,j-p}} \sum_{\ell=0,1} \frac{V^{1,j-p}_{1,j+\ell-p}}{\sin^2\varphi^{1,j-p}_{1,j+\ell-p}} +$$

$$+ \sum_{p=0,1} \frac{1}{\ell\eta_{ij-p}} \sum_{\ell=0,1} (-1)^{\ell} \frac{V^{1,j-p}_{1,j+\ell-p} \cos\varphi^{1,j-p}_{1,j+\ell-p}}{\sin^2\varphi^{1,j-p}_{1,j+\ell-p}} AL\xi_{1,j+\ell-p} +$$

$$+ \frac{S\xi_{1j}\, AS\xi_{1j} + S\xi_{1j-1}\, AS\eta_{1j-1}}{2} \Bigg\} \Big/ \sum_{k=0,1} V^{1,j-k}_{1j}$$

Отметим, что как и в предыдущем случае для построения согласованного оператора можно использовать вариационный способ, основанный на формулировке (I.5).

п.I3. Таким образом согласованные разностные операторы GRAD и DIV построены. Разностная схема записывается в виде (I9).

С учетом дискретизации скалярных функций для аппроксимации граничного условия, вместо (20) получаем

$$(3.27) \left[-\frac{(\gamma_{1j}+\gamma_{2j})}{2} WS\xi_{1j} + \frac{(\beta_{1j}+\beta_{2j})}{2} \cdot \frac{(U_{1j}+U_{2j})}{2} \right] = \frac{f_{1j}+f_{2j}}{2}$$

Заключение.

В рассмотренном в § 3 примере построения операторных разностных схем участвуют только два оператора GRAD и DIV . Пример операторной схемы , где участвует оператор ROT, дает схема для уравнений диффузии магнитного поля / 20 / / 21 /. В работе / 7 / при помощи вариационного способа согласования построены операторные разностные схемы для уравнений гидродинамики. Рассмотренный метод построения разностных схем пригоден для любой системы координат, сеток произвольной структуры и любой дискретизации скалярных и векторных величин, а также в случае трех пространственных измерений.

Список цитированной литературы.

1. Самарский А.А., Введение в теорию разностных схем, М, Наука, 1974.
2. Самарский А.А., Теория разностных схем, М.,Наука, 1977, 656с.
3. Самарский А.А., Попов Ю.П., Разностные схемы газовой динамики. М., Наука, 1975, 352с.
4. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П., Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике, Докл. АН СССР, т.235, № 6, стр. 1285-1287, 1977.
5. Лебедев В.И., Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики I, II - ЖВМ и МФ, 1964, т.4, № 3,с.449-465; т.4 с.649-659.
6. Крылов А.Л., Модели с конечным числом степеней свободы для некоторого клаоса задач математической физики (разностные схемы с законом сохранения) - Докл. АН СССР, 1962, т.142, № 3, с.572-575.

7. Фаворский А.П., Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики - Диф.уравнения, 1980, т.ХУI, № 7, с.1308-1321.
8. Курант Р, Гильберт Д., Методы математической физики. т.I, М-Л., Гос.изд. технико-теорет. литературы, 1951, 476с.
9. Михлин С.Г., Линейные уравнения в частных производных. М., Высшая школа, 1977, 431 с.
10. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений, М., Наука, 1976, 352 с.
11. Стренг Г. Фикс Дж. Теория метода конечных элементсь. М: Мир, 1977, 349 с.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М., Наука, 1972, 735с.
13. Седов Л.И., Математические методы построения новых моделей сплошных сред, УМН, т.20, № 5, стр.121-180, 1965.
14. Newcomb W,A., Lagrangian and Hamiltonian Method in Magnetohydrodinamics, Nuclear Fusion, 1962, p. 451.

15.Фаворский А.П., Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики - Препринт Ин-та прикл.матем. АН СССР, 1979, № 159, 38 с.
16. Био М., Вариационные принципы в теории теплообмена, М., Энергия, 1975, 209 с.
17. Шехтер Р., Вариационный метод в инженерных расчетах, М., Мир, 1971, 291 с.
18. Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю., Вариационно-разностные схемы для уравнений теплопроводности на нерегулярных сетках, Докл. АН СССР, 1979, т.246, № 6, с.1342-1345.
19. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю., Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках - Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1980, т.20, № 2, с.401-421.
20. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю., Вариационный подход к построению разностных схем для уравнений диффузии электромагнитного поля - Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 179, 29 с.
21. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю., Вариационно-потоковые разностные схемы для расчета диффузии магнит-

ного поля.- Докл. АН СССР, 1980, т.254, № 6, с,1388-1391.
22. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике - М. Наука, 1977, 832 с.
23. Гамалий Е.Г. и др., Гидродинамичеокая устойчивость сжатия сферических лазерных мишеней, - Препринт ин-та прикл. матем. АН СССР, 1978, № 117, 40 с.