Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша,
Академии Наук СССР

А.А. Самарский, В.Ф.Тишкин, А.П. Фаворский,
М.Ю. Шашков

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТИВНОГО ПОДХОДА

Препринт № 63 за 1981 г.

Москва.

АННОТАЦИЯ

На основе операторного подхода построены полностью консервативные разностные схемы для уравнений гидродинамики, записанных в эйлеровой форме.

Введение

В работе [I] был предложен операторный подход к построению разностных схем. При таком подходе разностные схемы строятся путем замены дифференциальных операторов первого порядка их разностными аналогами. В работе [I] вводится также понятие согласованности разностных операторов $\mathfrak{DIV}$, $GRAD$, ROT, являющихся аналогом основных дифференциальных операторов первого порядка div, grad, rot. В качестве условий согласования выбираются разностные аналоги тождеств

$$(0.1)\quad \oint_S \varphi(\vec{A},\vec{n})\,dS = \int_V \varphi \operatorname{div}\vec{A}\,dV + \int_V (\vec{A},\operatorname{grad}\varphi)\,dV,$$

$$(0.2)\quad \int_S (\vec{n},\vec{A}\times\vec{B})\,dS = \int_V (B,\operatorname{rot}\vec{A})\,dV - \int_V (\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B})\,dV,$$

$$(0.3)\quad \int_S \varphi(\vec{C},\vec{n}\times\vec{A})\,dS = \int_V \varphi(\vec{C},\operatorname{rot}\vec{A})\,dV - \int_V (\vec{C},\vec{A}\times\operatorname{grad}\varphi)\,dV,$$

здесь S – поверхность, ограничивающая объем V,
$\vec{n}$ – внешняя нормаль к S,
$\vec{C}$ – произвольная вектор-функция, такая, что $\operatorname{rot}\vec{C}=0$

Построение системы согласованных операторов производится следующим образом. Выбирается один из операторов div, grad, rot и производится его непосредственная аппроксимация. Полученный при этом разностный оператор называется определяющим. Затем на основе выбранных условий согласования строятся разностные аналоги остальных операторов, которые называются определяемыми.

Настоящая работа посвящена построению разностных схем для уравнений гидродинамики в переменных Эйлера на основе операторного подхода. Спецификой уравнений гидродинамики в переменных Эйлера является наличие оператора $(\vec{A},\nabla)\vec{B}$. В соответствии с операторным подходом его аппроксимация проводится на основе соотношения

$$(0.4)\quad (\vec{A},\nabla)\vec{B} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad}(\vec{A},\vec{B}) - \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B} - \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A} - \operatorname{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) + \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A}\right],$$

которое связывает этот оператор с операторами grad, div, rot.

Выяснены условия, которым должны удовлетворять разностные операторы, чтобы построенные разностные схемы были полностью консервативны [2]. При использовании операторного подхода эти условия налагают дополнительные ограничения на выбор определяющего оператора.

Авторы благодарны И.В.Фрязинову за ряд полезных обсуждений.

§ I. Дифференциальные уравнения и законы сохранения

п.I. Система дифференциальных уравнений гидродинамики в переменных Эйлера имеет вид [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{W} = 0, \tag{I.1}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\rho \vec{W}, \nabla) \vec{W} = -\operatorname{grad} P, \tag{I.2}$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\rho \vec{W}, \operatorname{grad} \varepsilon) = -P \operatorname{div} \vec{W}, \tag{I.3}$$

здесь ρ – плотность,

$\vec{W}$ – вектор скорости,

P – давление,

ε – удельная внутренняя энергия.

Пусть теперь построена система согласованных разностных операторов $\mathcal{DIV}$, $\mathcal{GRAD}$, $\mathcal{ROT}$. Тогда разностный аналог оператора $(\vec{A},\nabla)\vec{B}$ в соответствии с соотношением (0.4) будет иметь вид

$$(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{GRAD}(\vec{A},\vec{B}) - \vec{A}\times\mathcal{ROT}\,\vec{B} - \vec{B}\times\mathcal{ROT}\,\vec{A} - \mathcal{ROT}(\vec{A}\times\vec{B}) + \vec{A}\cdot\mathcal{DIV}\,\vec{B} - \vec{B}\cdot\mathcal{DIV}\,\vec{A}\right] \tag{I.4}$$

Систему разностных уравнений, аппроксимирующую (I)–(3) можно записать в следующей форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathcal{DIV}\,\rho \vec{W} = 0, \tag{I.5}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\rho \vec{W}, \nabla) \vec{W} = -\mathcal{GRAD}\,P, \tag{I.6}$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\rho \vec{W}, \mathcal{GRAD}\,\varepsilon) = -P \cdot \mathcal{DIV}\,\vec{W}. \tag{I.7}$$

Выясним условия, которым должны удовлетворять операторы $\mathcal{DIV}$ $\mathcal{GRAD}$ и $\mathcal{ROT}$, чтобы система (5)–(7) была полностью консервативна. Производя алгебраические преобразования, подобные тем, что имеют место в дифференциальном случае, получаем, что из уравнений (5)–(7) следуют соотношения

$$\frac{\partial \rho \vec{W}}{\partial t} + \left[\vec{W}\cdot\mathcal{DIV}\,\rho\vec{W} + (\rho\vec{W},\nabla)\vec{W}\right] = -\mathcal{GRAD}\,P, \tag{I.8}$$

$$(I.9)\quad \frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t}+\left[\varepsilon\cdot \mathfrak{DIV}\rho\vec{W}+(\rho\vec{W},\mathrm{GRAD}\,\varepsilon)\right]=-P\cdot\mathfrak{DIV}\,\vec{W},$$

$$(I.10)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\vec{W}^2}{2}\right)+\left[\frac{\vec{W}^2}{2}\mathfrak{DIV}\rho\vec{W}+(\vec{W},(\rho\vec{W},\nabla)\vec{W})\right]=-(\vec{W},\mathrm{GRAD}\,P),$$

$$(I.11)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon+\rho\frac{\vec{W}^2}{2}\right)+\left[\varepsilon\,\mathfrak{DIV}\rho\vec{W}+(\rho\vec{W},\mathrm{GRAD}\,\varepsilon)+\frac{\vec{W}^2}{2}\mathfrak{DIV}\rho\vec{W}+\right.$$

$$\left.+(\vec{W},(\rho\vec{W},\nabla)\vec{W})\right]=-\left[P\cdot\mathfrak{DIV}\,\vec{W}+(\vec{W},\mathrm{GRAD}\,P)\right].$$

Для того, чтобы разностные уравнения (8)-(II) выражали соответствующие законы сохранения, необходимо, чтобы выражения в квадратных скобках в (8)-(II) имели дивергентный вид, а кроме того, сами операторы $\mathfrak{DIV}$ и GRAD были дивергентны. В этом случае, суммируя уравнение (5) по произвольной подобласти расчетной области Ω получаем закон сохранения массы. Соотношения (8) и (II) дают законы сохранения импульса и полной энергии. Уравнения (9) и (IO) выражают баланс внутренней и кинетической энергий.

п.2. Используя выражение (4) для оператора $(\vec{A},\nabla)\vec{B}$ нетрудно убедиться, что дивергентность выражений в квадратных скобках в (8)-(II) следует из дивергентности двух выражений:

$$(I.12)\quad (\vec{A},\mathrm{GRAD}\,\varphi)+\varphi\,\mathrm{div}\,\vec{A}$$

$$(I.13)\quad \vec{A}\cdot\mathfrak{DIV}\,\varphi\vec{A}+\mathrm{GRAD}(\varphi\vec{A},\vec{A})-\varphi\vec{A}\times\mathrm{ROT}\,\vec{A}-\vec{A}\times\mathrm{ROT}\,\varphi\vec{A}+\varphi\vec{A}\cdot\mathfrak{DIV}\,\vec{A}\,.$$

Вместо векторного условия (I3) нам будет удобно использовать его проекции на координатные оси:

$$(I.14)\quad (\vec{C},\vec{A}\cdot\mathfrak{DIV}\,\varphi\vec{A})+(\vec{C},\mathrm{GRAD}(\varphi\vec{A},\vec{A}))-(\vec{C},\varphi\vec{A}\times\mathrm{ROT}\,\vec{A})-(\vec{C},\vec{A}\times\mathrm{ROT}\,\varphi\vec{A})+(\vec{C},\varphi\vec{A}\cdot\mathfrak{DIV}\,\vec{A})$$

здесь $\vec{C}$ - постоянная вектор-функция.

§ 2. Построение разностной схемы в одномерном случае

п.1. В этом и следующих параграфах мы построим конкретный вид разностных операторов $\mathcal{DIV}, \mathcal{GRAD}, \mathcal{ROT}, (\vec{A},\nabla)\vec{B}$, используемых в уравнениях (1.5)-(1.7). Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть все функции зависят только от одной переменной x и $\vec{W}=\{u,0,0\}$. Тогда из выражения (1.14) выпадают члены, содержащие $\mathcal{ROT}$, и оно приобретает вид:

$$(2.1)\quad (\vec{C},\vec{A}\cdot\mathcal{DIV}\varphi\vec{A})+(\vec{C},\mathcal{GRAD}(\varphi\vec{A},A))+(\vec{C},\varphi\vec{A}\cdot\mathcal{DIV}\vec{A})$$

В силу дивергентности оператора $\mathcal{GRAD}$ для дивергентности (2.1) достаточно чтобы дивергентным было выражение

$$(2.2)\quad (\vec{C},\vec{A}\cdot\mathcal{DIV}\varphi\vec{A})+(\vec{C},\varphi\vec{A}\cdot\mathcal{DIV}\vec{A})$$

Напомним, что $\vec{C}$ – постоянная вектор-функция.

п.2. Перейдем к построению системы согласованных операторов. В одномерном случае достаточно построить операторы $\mathcal{DIV}$ и $\mathcal{GRAD}$. В качестве определяющего выберем оператор $\mathcal{DIV}$, при это потребуем, чтобы он сам и выраденме (2) были дивергентны. Оператор $\mathcal{GRAD}$ будем строить на основе разностного аналога тождества (0.1), это обеспечит нам дивергентность выражения (1.12).

п.3. Рассмотрим уравнения (1.1)-(1.3) на отрезке $0<x<a$. Введем на этом отрезке неравномерную сетку с шагами h_i. Узлы сетки x_i: $i=0,\ldots,N$ зададим таким образом: $x_0=0$; $x_{i+1}=x_i+h_i$. Все величины ρ, ε, u, P будем считать заданными в узлах разностной сетки и обозначать ρ_i, ε_i и т.д.

Оператор $\mathcal{DIV}$ определим посредством равенства:

$$(2.3)\quad (\mathcal{DIV}\vec{A})_i=\frac{AX_{i+1}-AX_{i-1}}{2\hbar_i}\ ;\quad \vec{A}=\{AX,0,0\},\ \hbar_i=0.5(h_i+h_{i-1})\ .$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{DIV}$ дивергентен. Проверим дивергентность выражения (2). В силу одномерности оно принимает вид:

$$(2.4)\quad AX_i\frac{\varphi_{i+1}AX_{i+1}-\varphi_{i-1}AX_{i-1}}{2\hbar_i}-\varphi_iAX_i\frac{AX_{i+1}-AX_{i-1}}{2\hbar_i}=$$

$$=\frac{1}{2\hbar_i}\left\{AX_iAX_{i+1}(\varphi_{i+1}+\varphi_i)-AX_{i-1}AX_i(\varphi_i+\varphi_{i-1})\right\}\ .$$

Очевидно, что выражение в фигурных скобках имеет дивергентный вид.

Для построения определяемого оператора $GRAD$ будем использовать разностный аналог тождества (0.I)

$$(2.5)\ \sum_i \left[\varphi_i (DIV\vec{A})_i h_i\right] + \sum_i \left[AX_i (GRAD_x \varphi)_i h_i\right] = 0 .$$

Отметим, что такое определение оператора $GRAD$ обеспечивает дивергентность выражения (I.I2). Собирая коэффициенты при AX_i приходим к выражению

$$(2.6)\quad (GRAD_x \varphi)_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h_i} .$$

В соответствии с формулой (I.4) разностный оператор имеет в данном случае вид

$$(2.7)\ \left((\vec{A},\nabla)_x \vec{B}\right)_i = \frac{1}{2}\left\{\frac{(AX\cdot BX)_{i+1} - (AX\cdot BX)_{i-1}}{2h_i} + AX_i \frac{BX_{i+1} - BX_{i-1}}{2h_i} - BX_i \frac{AX_{i+1} - AX_{i-1}}{2h_i}\right\}$$

п. 4. Используя построенные операторы, выпишем полностью консервативную разностную схему для уравнений (I.I)-(I.3):

$$(2.8)\quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_{i-1} u_{i-1}}{2h_i} = 0 ;$$

$$(2.9)\ \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\frac{(\rho u^2)_{i+1} - (\rho u^2)_{i-1}}{2h_i} + (\rho u)_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h_i} - u_i \frac{(\rho u)_{i+1} - (\rho u)_{i-1}}{2h_i}\right\} = -\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2h_i} ,$$

$$(2.10)\quad \rho_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + (\rho u)_i \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{2h_i} = -P_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h_i} ;$$

Используя безиндексные обозначения [3], можно записать (8)-(I0) в виде

$$(2.11)\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u)_{\overset{\circ}{x}} = 0 ,$$

$$(2.12)\quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{(\rho u^2)_{\overset{\circ}{x}} + \rho u \cdot u_{\overset{\circ}{x}} - u(\rho u)_{\overset{\circ}{x}}\right\} = -P_{\overset{\circ}{x}} ,$$

$$(2.13)\quad \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u\, \varepsilon_{\overset{\circ}{x}} = -P u_{\overset{\circ}{x}} .$$

В дифференциальном случае уравнение (9) имеет вид:

$$(2.14)\qquad \rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Нетрудно переписать (9) в аналогичной форме

$$(2.15)\qquad \rho_i\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\frac{(\rho u)_{i+1}+(\rho u)_i}{2}\cdot\frac{u_{i+1}-u_i}{h_i}+\frac{(\rho u)_i+(\rho u)_{i-1}}{2}\cdot\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right\}=-\frac{P_{i+1}-P_{i-1}}{2h_i}$$

Аппроксимация разностных уравнений следует из того факта, что все построенные операторы аппроксимируют соответствующие дифференциальные выражения.

§ 3. Построение разностной схемы в двумерном случае

п.I. Будем теперь считать, что уравнения (I.I)-(I.3) решаются в прямоугольнике $0<x<a;\ 0<y<b$ и все величины зависят только от x и y. Вектор скорости $\vec{W}$ имеет теперь две компоненты $\vec{W}=\{u,v,0\}$.

п.2. Пусть в прямоугольнике $0<x<a;\ 0<y<b$ задана неравномерная прямоугольная сетка. Шаги сетки по направлению x обозначим hx_i, по направлению y – hy_j.

Все скалярные функции $\rho,\ \varepsilon,\ P$ будем считать заданными в узлах сетки. Проотранство скалярных сеточных функций, определенных в узлах, обозначим HK, значения функции φ в узле (i,j) обозначим φ_{ij}. Вектор-функцию $\vec{A}$ будем описывать ее проекциями на координатные оси.

Пространство сеточных вектор-функций $\vec{A}=\{AX, AY, AZ\}$, компоненты которых AX_{ij}, AY_{ij}, AZ_{ij} вычисляются в узлах, будем обозначать $\mathcal{H}K$. Итак, $P, \rho, \varepsilon \in HK$; $\vec{W} \in \mathcal{H}K$.

Скалярное произведение в пространстве HK введем так

$$(3.1)\ (\varphi,\psi)_{HK}=\sum_{ij}\varphi_{ij}\psi_{ij}VK_{ij}, \quad VK_{ij}=\hbar_{x_i}\hbar_{y_j}; \quad \hbar_{x_i}=\frac{1}{2}(h_{x_i}+h_{x_{i-1}})$$

$$\hbar_{y_j}=\frac{1}{2}(h_{y_j}+h_{y_{j-1}})$$

Такое скалярное произведение согласовано со скалярным произведением для непрерывных скалярных функций

$$(\varphi,\psi)=\int_V \varphi\cdot\psi\, dV.$$

Скалярное произведение в $\mathcal{H}K$ определим так

$$(3.2)\ (\vec{A},\vec{B})_{\mathcal{H}K}=\sum_{ij}(\vec{A},\vec{B})_{ij}VK_{ij}, \quad (\vec{A},\vec{B})_{ij}=AX_{ij}BX_{ij}+AY_{ij}BY_{ij}+AZ_{ij}BZ_{ij}.$$

Векторное произведение векторов $\vec{A}_{ij}=\{AX_{ij}, AY_{ij}, AZ_{ij}\}$, $\vec{B}_{ij}=\{BX_{ij}, BY_{ij}, BZ_{ij}\}$ зададим следующим образом:

$$(3.4)\ (\vec{A}\times\vec{B})_{ij}=\{AY_{ij}BZ_{ij}-AZ_{ij}BY_{ij},\ AZ_{ij}BX_{ij}-AX_{ij}BZ_{ij},\ AX_{ij}BY_{ij}-AY_{ij}BX_{ij}\}.$$

п.3. Используя введенные в п.2 обозначения, разностные аналоги соотношений (0.1), (0.3), запишем в виде:

$$(3.5)\quad (\varphi, DIV\vec{A})_{HK}+(GRAD\varphi,\vec{A})_{\mathcal{H}K}=0,$$

$$(3.6)\quad (\varphi,(ROT\vec{A},\vec{C}))_{HK}+(GRAD\varphi,\vec{C}\times\vec{A})_{\mathcal{H}K}=0,$$

здесь и далее $\varphi, \vec{A}\equiv 0$ на границе.

Отсюда непосредственно следует, что операторы $GRAD$ и ROT связаны с оператором DIV таким образом:

$$(3.7)\quad GRAD=-DIV^{*}$$

$$(3.8)\quad (\vec{C}, ROT\vec{A})=DIV(\vec{A}\times\vec{C})$$

п.3. Напомним, что для того, чтобы операторная схема была полностью консервативна, необходимо, чтобы операторы $\mathfrak{D}IV$ и $GRAD$ были дивергентны, и, кроме того, чтобы выражения (I.I2)–и(I.I4) имели дивергентный вид.

Дивергентность (I.I2) непосредственно следует из соотношения (7). В силу установленных связей (7),(8) условие (I.I4) можно трактовать как условие на определяющий оператор

п.4. Определяющий оператор $\mathfrak{D}IV : \mathcal{H}K \to HK$ определим следующим образом:

$$(\mathfrak{D}IV\,\vec{A})_{ij} = \frac{AX_{i+1j} - AX_{i-1j}}{2\hbar x_i} + \frac{AY_{ij+1} - AY_{ij-1}}{2\hbar y_j} \tag{3.9}$$

В соответствии с формулами (7),(8) для вектора $\vec{A} = \{AX, AY, 0\}$ и скалярной функции $\varphi = \varphi(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned}
&(GRAD_x\,\varphi)_{ij} = (\varphi_{i+1j} - \varphi_{i-1j})/2\hbar x_i\,;\\
&(GRAD_y\,\varphi)_{ij} = (\varphi_{ij+1} - \varphi_{ij-1})/2\hbar y_j\,;\\
&(GRAD_z\,\varphi)_{ij} = 0\,;
\end{aligned} \tag{3.10}$$

и

$$\begin{aligned}
&(ROT_x\,\vec{A})_{ij} = 0\,;\\
&(ROT_y\,\vec{A})_{ij} = 0\,;\\
&(ROT_z\,\vec{A})_{ij} = \frac{AY_{i+1j} - AY_{i-1j}}{2\hbar x_i} - \frac{AX_{ij+1} - AX_{ij-1}}{2\hbar y_j}\,.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Проверим, что для данного выбора определяющего оператора выполнено условие (I.I4):

$$\begin{aligned}
&((\vec{A},\vec{C})\cdot\mathfrak{D}IV\varphi\vec{A})_{HK} - (\vec{C}, \varphi\vec{A}\times ROT\vec{A})_{\mathcal{H}K} -\\
&-(\vec{C}, \vec{A}\times ROT\,\varphi\vec{A})_{\mathcal{H}K} + (\varphi\cdot(\vec{A},\vec{C}), \mathfrak{D}IV\vec{A})_{HK} = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Возьмем сначала $\vec{C} = \{1, 0, 0\}$, тогда (I2) можно записать так

$$\begin{aligned}
&(AX, \mathfrak{D}IV\varphi\vec{A})_{HK} - (I, (\varphi\vec{A}\times ROT\vec{A})_{x})_{HK} -\\
&-(I, (\vec{A}\times ROT\varphi\vec{A}))_{HK} + (\varphi\cdot AX, \mathfrak{D}IV\vec{A})_{HK} = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

здесь I – скалярная функция, во всех узлах равная единице.

Используя соотношения (9)–(II), определения (I)–(4) и собирая коэффициенты при φ_{ij} получаем:

$$(AX, DIV(\varphi\vec{A}))_{нк} = \sum_{ij}\varphi_{ij}\left\{h_{y_j}(AX_{ij}AX_{i-1j} - AX_{ij}AX_{i+1j}) + h_{x_i}(AX_{ij+1}AY_{ij} - AY_{i+1j}AY_{ij})\right\}$$

(3.I4)

$$(I,(\varphi\vec{A}\times ROT\vec{A})_k)_{нк} = \sum_{ij}\varphi_{ij}\left\{h_{y_j}(AY_{ij}AY_{i+1j} - AY_{ij}AY_{i-1j}) - h_{x_i}(AY_{ij}AY_{ij+1} - AY_{ij}AX_{ij-1})\right\}$$

$$(I,(\vec{A}\times ROT\varphi\vec{A})_k)_{нк} = \sum_{ij}\varphi_{ij}\left\{h_{y_j}(AY_{ij}AY_{i-1j} - AY_{ij}AY_{i+1j}) - h_{x_i}(AY_{ij-1}AX_{ij} - AY_{ij+1}AX_{ij})\right\}$$

$$(\varphi AX, DIV\vec{A})_{нк} = \sum_{ij}\varphi_{ij}\left\{h_{y_j}(AX_{ij}AX_{i+1j} - AX_{ij}AX_{i-1j}) + h_{x_i}(AX_{ij}AY_{ij+1} - AX_{ij}AY_{ij-1})\right\}$$

Используя (I4) нетрудно убедиться в справедливости (I3). Аналогично рассматривается случай, когда $\vec{C} = (0, 1, 0)$.

п.5. Используя операторы DIV, $GRAD$, ROT, определенные равенствами (9)–(II) и, определяя оператор $(\vec{A},\nabla)\vec{B}$ в соответствии с формулой (I.4), выпишем явный вид полностью консервативной схемы:

(3.I5) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho u)_{\bar{x}} + (\rho v)_{\bar{y}} = 0\ ;$$

(3.I6) $$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big\{(\rho u\cdot u + \rho v\cdot v)_{\hat{x}} - \rho v(v_{\hat{x}} - u_{\hat{y}}) - v((\rho v)_{\hat{x}} - (\rho u)_{\hat{y}}) +$$
$$+ \rho u(u_{\hat{x}} + v_{\hat{y}}) - u((\rho u)_{\hat{x}} + (\rho v)_{\hat{y}})\Big\} = -P_{\hat{x}}\ ;$$

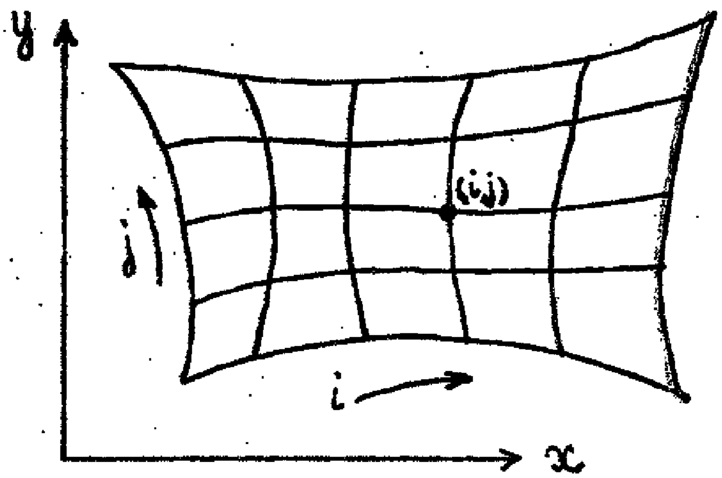
(3.I7) $$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big\{(\rho v\cdot v + \rho u\cdot u)_{\hat{y}} + \rho u(v_{\hat{x}} - u_{\hat{y}}) + u((\rho v)_{\hat{x}} - (\rho u)_{\hat{y}}) +$$
$$+ \rho v(u_{\hat{x}} + v_{\hat{y}}) - v((\rho u)_{\hat{x}} + (\rho v)_{\hat{y}})\Big\} = -P_{\hat{y}}$$

(3.I8) $$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \rho u\cdot\varepsilon_{\hat{x}} + \rho v\,\varepsilon_{\hat{y}} = -P\,(u_{\hat{x}} + v_{\hat{y}})$$

§ 4. Обобщение на случай непрямоугольных сеток.

п.I. Будем считать, что уравнения (I.I)–(I.3) решаются в области Ω, лежащей в плоскости (x,y), $\vec{w} = \{u, v, 0\}$ и все величины зависят только от x и y.

В области Ω введем четырехугольную сетку, по структуре аналогичная прямоугольной сетке в квадрате Фиг.I.



Фиг.I

Узлы такой сетки занумеруем двумя индексами, аналогично тому, как это делается для прямоугольной сетки.

Как и ранее, сеточные функции $P, \mathcal{E}, \rho \in HK$, а $\vec{W} \in \mathcal{H}K$ Скалярные произведения вводятся по формулам (3.I), (3.2), где под объемом VK_{ij} понимается величина

$$(4.I)\quad VK_{ij}=\Big\{\sum_{k,l=-1,1} x_{i+k,j+l}\Big(y_{i+\frac{k-l}{2},\,j+\frac{l+k}{2}}-y_{i+\frac{l+k}{2},\,j+\frac{l-k}{2}}\Big)+\sum_{l=-1,1} x_{i+l,j}\big(y_{i+l,j+l}-y_{i+l,j-l}\big)+x_{i,j+l}\big(y_{i-l,j+l}-y_{i+l,j+l}\big)\Big\}/8$$

Векторное произведение определим по формулам (3.4).

п.2. Определяющий оператор $\mathcal{D}IV$ задаим следующим образом:

$$(4.2)\quad (\mathcal{D}IV\vec{A})_{ij}=0.5\Big(\frac{\Delta AX}{\Delta x}+\frac{\delta AX}{\delta x}\Big)+0.5\Big(\frac{\Delta AY}{\Delta y}+\frac{\delta AY}{\delta y}\Big)\ ;$$

где

$$\Big(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\Big)_{ij}=\Big\{(\varphi_{i+1j}-\varphi_{i-1j})(y_{ij+1}-y_{ij-1})-(\varphi_{ij+1}-\varphi_{ij-1})(y_{i+1j}-y_{i-1j})\Big\}/4VK_{ij}\ ;$$

$$(4.3)\quad \Big(\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\Big)_{ij}=\Big\{(\varphi_{ij+1}-\varphi_{ij-1})(x_{i+1j}-x_{i-1j})-(\varphi_{i+1j}-\varphi_{i-1j})(x_{ij+1}-x_{ij-1})\Big\}/4VK_{ij}\ ;$$

$$\Big(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\Big)_{ij}=\Big\{\sum_{l=-1,1}\varphi_{i+lj}(y_{i+lj+l}-y_{i+lj-l})+\varphi_{ij+l}(y_{i-lj+l}-y_{i+lj+l})\Big\}/4VK_{ij}\ ;$$

$$\Big(\frac{\delta\varphi}{\delta y}\Big)_{ij}=\Big\{\sum_{l=-1,1}\varphi_{i+lj}(x_{i+lj-l}-x_{i+lj+l})+\varphi_{ij+l}(x_{i+lj+l}-x_{i-lj+l})\Big\}/4VK_{ij}.$$

Очевидно, что построенный оператор имеет дивергентный вид.

Нетрудно проверить, что операторы $\Delta\varphi/\Delta x$ и $\delta\varphi/\delta x$,определенные формулами (3) удовлетворяют равенству:

$$(u, \frac{\delta\varphi}{\delta x})_{HK} + (\varphi, \frac{\Delta u}{\Delta x})_{HK} = 0 \qquad (4.4)$$

Оператор $GRAD$, определяемый в соответствии с формулой (3.7) имеет вид:

$$GRAD_x \varphi = 0.5\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)$$

$$GRAD_y \varphi = 0.5\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta y} + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\right) \qquad (4.5)$$

В соответствии с (3.8) для оператора ROT получаем выражения:

$$ROT_x \vec{A} = 0.5\left(\frac{\Delta AZ}{\Delta y} + \frac{\delta AZ}{\delta y}\right);$$

$$ROT_y \vec{A} = -0.5\left(\frac{\Delta AZ}{\Delta x} + \frac{\delta AZ}{\delta x}\right); \qquad (4.6)$$

$$ROT_z \vec{A} = 0.5\left(\frac{\Delta AY}{\Delta x} + \frac{\delta AY}{\delta x} - \frac{\Delta AX}{\Delta y} - \frac{\delta AX}{\delta y}\right)$$

Построенный оператор ROT является самосопряженным: $ROT = ROT^*$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что соотношение (3.I2), гарантирующее полную консервативность, выполнено.

Выражение для оператора $(\vec{A},\nabla)\vec{B}$ вводим по формуле (I.4). Используя введенные операторы, разностную схему можно записать в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + DIV\, \rho\vec{W} = 0; \qquad (4.8)$$

$$\rho\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\rho\vec{W},\nabla)\vec{W} = -GRAD\, P \qquad (4.9)$$

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\rho\vec{W}, GRAD\,\varepsilon) = -P\, DIV\,\vec{W} \qquad (4.I0)$$

§ 5. Полностью консервативные разностные схемы на сдвинутых сетках [ж)].

п.I. Описанные выше разностные схемы относились к случаю,

ж) Разностные схемы, аналогичные построенным в данном параграфе, ранее получены И.В.Фрязиновым из других соображений.

когда все дискретные величины относились к узлам разностной сетки. На практике широкое распространение получили схемы, использующие следующую дискретизацию величин: плотность, давление и удельная внутренняя энергия относятся к центрам ячеек сетки, в то время как значения скорости определены в узлах.

Развитый выше подход обобщается на этот случай. Ограничимся рассмотрением прямоугольных неравномерных сеток. Пространство сеточных функций φ, вычисляемых в центрах ячеек расчетной сетки, обозначим HC. Здесь во избежание полуцелой индексации ячейкам сетки и величинам, к ним относящимся, присвоен индекс нижнего левого узла ячейки.

В качестве определяющего выберем оператор $\mathcal{D}IV : \mathcal{H}K \to HC$, который аппроксимируем следующим образом:

$$(5.1)\quad (\mathcal{D}IV\vec{A})_{ij} = \frac{AX_{i+1j} + AX_{i+1j+1} - AX_{ij} - AX_{ij+1}}{2hx_i} + \frac{AY_{ij+1} + AY_{i+1j+1} - AY_{ij} - AY_{i+1j}}{2hy_j}.$$

Согласованный с ним оператор $GRAD : HC \to \mathcal{H}K$ имеет вид:

$$(5.2)\quad \begin{aligned} (GRAD_x\varphi)_{ij} &= \frac{1}{2\bar{h}x_i}(\varphi_{ij} - \varphi_{i-1j} + \varphi_{ij-1} - \varphi_{i-1j-1}); \\ (GRAD_y\varphi)_{ij} &= \frac{1}{2\bar{h}y_j}(\varphi_{ij} - \varphi_{ij-1} + \varphi_{i-1j} - \varphi_{i-1j-1}). \end{aligned}$$

Введенные операторы $\mathcal{D}IV$ и $GRAD$ позволяют аппроксимировать уравнение неразрывности и уравнение для баланса удельной внутренней энергии:

$$(5.3)\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathcal{D}IV(\langle\rho\rangle\vec{W}) = 0;$$

$$(5.4)\quad \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + (\langle\rho\rangle\vec{W}, GRAD\,\varepsilon) = -P\cdot\mathcal{D}IV\,\vec{W};$$

где

$$(5.5)\quad \langle\rho\rangle_{ij} = \frac{\rho_{ij}hx_i hy_j + \rho_{i-1j}hx_{i-1}hy_j + \rho_{i-1j-1}hx_{i-1}hy_{j-1} + \rho_{ij-1}hx_i hy_{j-1}}{4\bar{h}x_i\bar{h}y_j}$$

п.2. Для построения оператора $(\vec{A},\nabla)\vec{B} : \mathcal{H}K \otimes \mathcal{H}K \to \mathcal{H}K$ непосредственное использование операторов $\mathcal{D}IV$ и $GRAD$ затруднено ввиду несовпадения областей значений и областей определения этих операторов.

Введем осредненный оператор $\langle \mathcal{D}IV \rangle$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$(5.6)\qquad \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \langle \mathcal{D}IV \rangle \left(\langle \rho \rangle \vec{W} \right) = 0 \,;$$

Из (6) следует

$$\left(\langle \mathcal{D}IV \rangle \vec{A} \right)_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{AX_{i+1j} - AX_{i-1j}}{2\hbar x_i} + \frac{AY_{ij+1} - AY_{ij-1}}{2\hbar y_j} + \right.$$

$$(5.7)\qquad \left. + \frac{\dfrac{AX_{i+1j+1} - AX_{i-1j+1}}{2\hbar x_i} hy_j + \dfrac{AX_{i+1j-1} - AX_{i-1j-1}}{2\hbar x_i} hy_{j-1}}{2\hbar y_j} + \frac{\dfrac{AY_{i+1j+1} - AY_{i+1j-1}}{2\hbar y_j} hx_i + \dfrac{AY_{i-1j+1} - AY_{i-1j-1}}{2\hbar y_j} hx_{i-1}}{2\hbar x_i} \right\}$$

Используя теперь согласованные с $\langle \mathcal{D}IV \rangle$ операторы $\langle GRAD \rangle :$ $HK \to \mathcal{H}K$ и $\langle ROT \rangle : \mathcal{H}K \to \mathcal{H}K$, введем разностный аналог оператора $\langle (\vec{A},\nabla)\vec{B} \rangle$ в соответствии с (0.4):

$$(5.8)\qquad \langle (\vec{A},\nabla)\vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle GRAD \rangle (\vec{A},\vec{B}) - \langle ROT \rangle (\vec{A} \times \vec{B}) - \vec{A} \times \langle ROT \rangle \vec{B} - \vec{B} \times \langle ROT \rangle \vec{A} + \vec{A} \langle \mathcal{D}IV \rangle \vec{B} - \vec{B} \langle \mathcal{D}IV \rangle \vec{A} \right\}$$

С помощью (8) выпишем аппроксимацию уравнений движения:

$$(5.9)\qquad \langle \rho \rangle \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \left\langle \left(\langle \rho \rangle \vec{W}, \nabla \right) \vec{W} \right\rangle = - GRAD\, P$$

Для полной консервативности схемы (3), (4), (9) достаточно, чтобы для операторов $\langle \mathcal{D}IV \rangle$, $\langle GRAD \rangle$ и $\langle ROT \rangle$ были выполнены тождества (I.12) и (I.13). Условие (I.12) выполнено в силу согласованности системы операторов $\langle \mathcal{D}IV \rangle$, $\langle GRAD \rangle$ и $\langle ROT \rangle$. В справедливости (I.13) можно убедиться непосредственной проверкой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы. Препринт Ин.прикл.матем. им.М.В.Келдыша АН СССР, 1981, № 9.
2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М., Наука, 1975.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977.

А.А. Самарский, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский, М.Ю.Шашков. "Построение полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах на основе операторного подхода."

Редактор В.А. Гасилов Корректор В.Ф. Тишкин

Подписано к печати 07.04.81г. № Т-08581. Заказ № 176.
Формат бумаги 60x90. 1/16. Тираж 175 экз.
Объем 0,8 уч.изд.л. Цена 6 коп.

055(02)2

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.