А. А. САМАРСКИЙ, В. Л. МАКАРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ТОЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ К ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЯМЫХ

(Доложен 25. 4. 1979)

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных методу прямых (см. обзор [1]). Условно разобьем все схемы метода прямых на два класса. К первому отнесем схемы, основанные на дискретизации части дифференциального оператора с помощью конечноразностных соотношений, ко второму—схемы, основанные на дискретизации части дифференциального оператора, базирующиеся на вариационно-проекционном подходе. Для второго класса в настоящее время получен ряд результатов, в которых в норме L_2 установлены оценки скорости сходимости при естественных требованиях на гладкость решения исходной дифференциальной задачи. Отметим, что эти результаты получены только для уравнений параболического типа (см. [2,3] и указанную там литературу). Что касается первого класса схем метода прямых, то такого характера результаты в литературе отсутствуют.

В данной работе предлагается новый подход к оценке сходимости схем метода прямых из первого класса, основанный на использовании точных разностных схем, введенных впервые в работах [4,5]. Такой подход позволяет, как и для схем метода прямых второго класса [2,3], получить оценки скорости сходимости такого же порядка и при тех же предположениях о гладкости. Однако оценки скорости сходимости получаются здесь в нормах более сильных, чем в L_2. Кроме того, предложенный в работе подход позволяет, исходя из [6,7], получить аналогичные результаты для систем дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений высших порядков.

§ 1. Обозначения и вспомогательные результаты

Предварительно приведем без доказательства некоторые результаты из теории точных разностных схем. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right]-q(x)u=-f(x),\quad x\in(0,\ 1),$$
$$u(0)=a,\quad u(1)=b,\quad (p(x)=1/k(x)). \tag{1.1}$$

Пусть выполняются условия: а) $0<\nu\leqslant k(x)\leqslant\mu$, ν, $\mu=\mathrm{const}$, $k(x)$—суммируемая функция из отрезка $[0,\ 1]$; б) $\|q\|_{L_s(0,1)}\leqslant\mu\leqslant\infty$, $s=1$,

$q(x)\geq 0$; в) $f(x)\in L_t(0, 1)$, $t\geq 1$. Назовём эти условия для краткости условиями (A). Имеет место

Лемма 1.1. Пусть выполнены условия (A); тогда для задачи (1.1) существует однородная точная разностная схема, и она имеет вид

$$(u_{\bar{x}}/a)_x - du = -\varphi(x),\ x\in\omega_h,\ u_0=\alpha,\ u_N=b, \tag{1.2}$$

где

$$a(x)=\frac{1}{h}v_1(x),\ d(x)=T^x(q)(\cdot)),\quad \varphi(x)=T^x(f(\cdot)),$$

$$T^x(\omega(\cdot))=\frac{h^{-1}}{v_1(x)}\int\limits_{x-h}^{y} v_1(\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi+\frac{h^{-1}}{v_2(x)}\int\limits_{x}^{x+h} v_2(\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi,$$

$v_1(x)$, $v_2(x)$—шаблонные функции.

Доказательство леммы 1,1 для случая

$$0<M_1\leq\frac{1}{k(x)}\leq M_2,\ 0\leq q(x)\leq M_2,\ k(x),\ q(x),\ f(x)\in Q^0[0, 1]$$

приведено в работах [4, 5, 8]. Имеет место

Лемма 1.2. а) Пусть выполнены условия (A) с $s>1$; тогда

$$\forall u(x)\in W_2^1(0, 1)$$

будет иметь место оценка

$$\| T^x(u)-u\|_0\leq ch\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L_2(0,1)}; \tag{1.3}$$

б) пусть кроме выполнения условия (A) с $s>1$ имеет место ограничение: $k(x)\in W_2^1(0, 1)$, тогда $\forall u(x)\in W_2^2(0, 1)$ будет справедлива априорная оценка

$$\| T^x(u)-u\|_0\leq ch^2\left\|\frac{d^2u}{dx^2}\right\|_{L_2(0,1)}. \tag{1.4}$$

§ 2. Сходимость метода прямых для уравнений параболического типа

Рассмотрим задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве H

$$\frac{du}{dt}+Au=f(t),\ t>0,\ u(0)=u_0, \tag{2.1}$$

где линейный оператор $A: H\Rightarrow H$ не зависит от t, область его определения D плотная в H и $A=A^*>0$. Пусть существует постоянный линейный оператор $T: H\to H$, обладающий следующими свойствами:

1) если u и v—решения уравнений

$$Au=g,$$
$$\tilde{A}v=[P(PTA)^{-1}]^{-1}v=PTg=\tilde{g},\ v\in X, \tag{2.2'}$$

где P—оператор из H в X, то $Pu=v$.

2) $$0<\tilde{A}=\tilde{A}^*. \tag{2.2''}$$

Вместо задачи (2.1) рассмотрим ее приближение—задачу Коши вида

$$\frac{dv}{dt}+\widetilde{A}v=\widetilde{f}(t),\ t>0,\ v(0)=PTu_0. \tag{2.3}$$

Тогда погрешность $z=v-Pu$ будет определяться как решение задачи Коши

$$\frac{dz}{dt}+\widetilde{A}z=\frac{d\psi}{dt},\ t>0,\ z(0)=0, \tag{2.4}$$

где

$$\psi(t)=\int\limits_0^x P\left(T\frac{du}{d\xi}-\frac{du}{d\xi}\right)d\xi.$$

Теорема 2.2. Пусть линейный оператор $A=A(t)$ в задаче (2.1), имеющий область определения D, не зависящую от t и плотную в H, является дифференцируемым и удовлетворяет условиям $0<\nu\leqslant A(t)=A^*(t)$, причем ν не зависит от t. Тогда, если существует линейный оператор $T(t):H\to H$, который обладает свойствами (2.2′). (2.2″), и, кроме того, существует такая постоянная μ ($|\mu|<\infty$), что $0\leqslant\widetilde{A}'(t)+\mu\widetilde{A}(t)$, $t\geqslant 0$, то для $z=v-Pu$ будет иметь место оценка

$$\int\limits_0^t(t-\xi)\,\|z(\xi)\|_X^2d\xi+\int\limits_0^t(\widetilde{A}^{-1}(\xi)\int\limits_0^\xi\widetilde{A}z\,d\eta.\quad\int\limits_0^\xi\widetilde{A}z\,d\eta d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left[t\max(\mu,\ 0)\right]\int\limits_0^t(t-\xi)\,\|\widetilde{\psi}(\xi)\|_X^2\,d\xi.$$

Если же A—постоянный оператор, то справедлива оценка

$$\left\{\int\limits_0^t\|v-Pu\|_X^2\,dt+\frac{1}{2}\|\widetilde{A}^{1/2}\int\limits_0^t[v-Pu]\,dt\|_X^2\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_0^t\|P(Tu-u)\|_X^2\,dt\right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+q(x)u=f(x,\ t),\ x\in(0,\ 1),\ t>0,\\ u(0,\ t)=0,\quad u(1,\ t)=0,\quad u(x,\ 0)=\omega(x).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Пусть коэффициенты уравнения (2.5) удовлетворяют условиям а), б) из § 1; тогда в качестве оператора T можно взять оператор T^x из § 1. Оператор P будет оператором взятия следа функции на сетке ω_h. Тогда оператор $\widetilde{A}$ определяется формулой $\widetilde{A}v=-\left(-\frac{1}{a}v_{\bar{x}}\right)_x+dv$ и очевидно, что будут выполняться условия (2.2′), (2.2″). Следовательно, для схемы метода прямых:

$$\frac{dv}{dt}-\left(\frac{1}{a}v_{\bar{x}}\right)_x+dv=PT^x(f(\cdot,t)),\ x\in\omega_h,\quad t>0,$$
$$v(0,t)=0,\quad v(1,t)=0,\quad v(x,0)=PT\omega(x); \tag{2.6}$$

для задачи (2.5) справедливы все условия теоремы 2.1, и с использованием леммы 1.2 убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2.3. а) Пусть выполнены условия (A) с $s>1$ из § 1

$$\|f\|_{q_1,r_1,Q_T}=\mu_2,$$

где

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{2q_1}=\frac{5}{4},\quad q_1\in[1;\ 2],\quad r_1\in[1,\ 4/3],\ \omega(x)\in L_2(0,\ 1);$$

тогда для погрешности схемы метода прямых (2.6) будет верна оценка

$$\left\{\int\limits_0^t\|v-Pu\|_0^2\,dt+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a},\ \left(\int\limits_0^t(v-Pu)dt\right)_{\bar{x}}^2\right]\right\}^{1/2}\leqslant Ch\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{r,\,Q_t};$$

б) пусть выполнено условие (A) с $s>1$,

$$\|f\|_{r,\,Q_t}\leqslant\mu_2,\quad k(x)\in W_2^1(0,\ 1);\quad \omega(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ 1);$$

тогда для погрешности схемы метода прямых (2.6) будет верна оценка

$$\left\{\int\limits_0^t\|v-Pu\|_0^2\,dt+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a},\ \left(\int\limits_0^t(v-Pu)\,dt\right)_{\bar{x}}^2\right]\right\}^{1/2}\leqslant Ch^2\left|\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right|_{r,\,Q_t}.$$

§ 3. Сходимость метода прямых для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+A(t)\,u=f(t),\ t>0,\ u(0)=u_0,\ u'(0)=u_0^1, \tag{3.1}$$

где $A(t):H\to H$ — линейный оператор с независящей от t областью определения D, плотной в H, причем $A=A^*>0$. Пусть существует постоянный линейный оператор $T:H\to H$, обладающий свойствами (2.2′), (2.2″). Введем в рассмотрение вместо (3.1) задачу вида

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\widetilde{A}(t)\,v=\vec{f}(t),\ t>0,\ v(0)=PTu_0,\ v((0)=(PTu)'_{t=0}, \tag{3.2}$$

где $v\in X$ и P — оператор из H в X. Для погрешности $z=v-Pu$ будет справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.2, и, кроме того, пусть $\widetilde{A}(t)\widetilde{A}'(t)=\widetilde{A}'(t)\,\widetilde{A}(t)$, где оператор $A(t)$ определяется уравнением E(3.1), а $\widetilde{A}(t)$ получается из него по формуле (2.2′). Тогда для разности $z=v-Pu$ будет справедлива оценка

$$\int_0^t \left[\left\| \widetilde{A}^{-1}(\xi) \int_0^\xi \widetilde{A}(\eta) z(\eta) \right\|_X^2 + \left\| \int_0^\xi (\xi_t - \eta) \widetilde{A}(\eta) z(\eta)\, d\eta \right\|_{\widetilde{A}^{-1}(\xi)}^2 \right] d\xi \leqslant$$

$$\leqslant E \exp\left\{ t \left[\max(\mu, 0) + \frac{1}{4\varepsilon} \right] \right\} \int_0^t (t-\xi) \| \widetilde{\psi}(\xi) \|_X^2\, d\xi. \tag{3.3}$$

Если же оператор A—постоянный, то вместо (3.3) имеет место неравенство

$$\left\{ \max_{0<t\leqslant T} \left[\left\| \int_0^t z(\xi)\, d\xi \right\|_X^2 + \left\| \widetilde{A}^{1/2} \int_0^t (t-\xi) z(\xi)\, d\xi \right\|_X^2 \right] \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sqrt{T} \left[\int_0^T \| P(Tu - u) \|_X^2\, d\xi \right]^{1/2}.$$

Дадим применение этой теоремы к установлению скорости сходимости метода прямых для первой краевой задачи для уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + q(x) u = f(x, t),\ x \in (0, 1),\ t > 0, \tag{3.4}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,\ u(x, 0) = \omega_1(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \omega_2(x).$$

С помощью операторов T^x и P из § 2 строим схему метода прямых вида

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \left(\frac{1}{a} v_{\bar{x}} \right)_x + dv = PV^x(f(\cdot, t)),\ x \in \omega_k,\ t > 0, \tag{3.5}$$

$$v(0, t) = v(1. t) = 0,\ v(x, 0) = PT^x(\omega_1(\cdot)),\ \frac{dv(x, 0)}{dt} = PT^x(\omega_2(\cdot)).$$

Используя теорему 3.1, нетрудно получить утверждение о сходимости схемы (3.5), аналогичное теореме 2.3.

В заключение отметим, что приведенные выше результаты имеют место и для уравнений эллиптического типа и легко распространяются на квазилинейный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лисковец О. А., Дифференциальные уравнения, 1965, № 12, 1622—1678.
2. Акопян Ю. Р., Оганесян Л. А. В сб. „Вар.-разн. методы решения задач. мат. физ.". Н., ВЦ СО АН СССР. 1976. 27—36.
3. Злоткин А. А.. Ж. вычисл. матем. и матем. физ.. 1978, 18, № 6 1454—1495.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. ДАН СССР. 1960, 131, № 3, 514—517.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1961 № 3, 1, 425—440.
6. Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г. ДАН УССР, 1978 серия „А". № 4, 302—305.
7. Бурханов Ш. А., Гумииская Н. А., Макаров В. Л., Приказчиков В. Г ДАН УССР, 1978, серия „А", № 9, 778—781.
8. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем. М., 1971.

ა. სამარსკი, ვ. მაკაროვი

ზუსტი სხვაობიანი სქემების გამოყენება წრფეთა მეთოდის კრებადობის სიჩქარის შეფასებისათვის

რეზიუმე

განხილულია წრფეთა მეთოდი წრფივი და კვაზიწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის, რომელიც დაფუძნებულია ოპერატორის ნაწილის აპროქსიმაციაზე სასრულსხვაობიანი თანაფარდობებით. ზუსტი სხვაობიანი სქემების საშუალებით დადგენილია მიახლოებითი ამონახსნის კრებადობის სიჩქარე დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის სიგლუვისათვის მოთხოვნილ ბუნებრივ პირობებში, რომელნიც უზრუნველყოფს მის არსებობას.

A. SAMARSKY, V. MAKAROV

THE APPLICATION OF EXAST DIFFERENCE SCHEMES TO ESTIMATION OF THE RATE OF CONVERGENCE OF THE STRAIGHT LINE METHOD

Summary

The article deals with the straight line method for linear and quasilinear partial differential equations based on the approximation of the part of differential operator by finite difference relations. The rate of convergence of the approximate solution under natural requirements on the smothness of solution of differential problem which ensure its existence is established with the help of the exact difference scheme operator.