ИЮЛЬ 1980 г., ТОМ XVI, № 7

УДК 518 : 517.944.947

В. Л. МАКАРОВ, А. А. САМАРСКИЙ

К ВОПРОСУ О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ УСЕЧЕННЫХ СХЕМ m-го РАНГА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Получены оценки скорости сходимости усеченных разностных схем m-го ранга на неравномерной сетке для краевых задач, связанных с уравнением

$$(k(x)\,u')' - q(x)\,u = -f(x), \quad x \in (0,\ 1),$$

в предположении, что: 1) $0 \leqslant c_1 \leqslant k(x) \leqslant c_2$, $k(x)$ — суммируемая функция на [0, 1], 2) $q(x) \geqslant 0$, $q(x) \in L_p(0,\ 1)$, $p \geqslant 1$, 3) $f(x) \in L_r(0,\ 1)$, $r \geqslant 1$. Показано, что при этих предположениях порядок скорости сходимости усеченных разностных схем по сравнению со случаем k, q, $f \in Q(0,\ 1)$ понижается и становится зависящим от p и r.

1. В работе [1] построены точная схема и схемы любого порядка точности (усеченные схемы) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$L^{(k,q,f)}u \equiv \frac{d}{dx}\left[k(x)\,\frac{du}{dx}\right] - q(x)\,u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad (1)$$

с краевыми условиями общего вида. При этом предполагалось, что коэффициенты $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ являются кусочно-непрерывными функциями, удовлетворяющими неравенствам

$$0 < c_1 \leqslant k(x) \leqslant c_2, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant c_3, \quad |f(x)| \leqslant c_4.$$

В [1] показано, что усеченные схемы m-го ранга на любой последовательности неравномерных сеток имеют точность $O(\|h^{2(m+1)}\|_1)$, где $\|y\|_1 = (1,\ |y|] = \sum_{i=1}^{N} h_i\,|y_i|$. Точные и усеченные схемы замечательны тем, что их можно использовать в качестве эталонных схем для исследования точности произвольных стандартных схем при более низких требованиях на гладкость k, q, f, чем это требуется при использовании обычной техники теории разностных схем. Другим интересным направлением применения точных разностных схем является доказательство сходимости метода прямых и метода сеток для линейных и квазилинейных уравнений в частных производных при естественных (незавышенных) требованиях к гладкости решения дифференциальной задачи [2].

В данной работе показано, что при дальнейшем ослаблении предположений о гладкости коэффициентов дифференциального уравнения (1) по сравнению с [1] точность усеченной схемы становится зависящей не только от ее ранга, но и от классов функций, которым принадлежат коэффициенты $q(x)$, $f(x)$. Точнее, пусть выполнены условия A):

1) $0 \leqslant c_1 \leqslant k(x) \leqslant c_2$, $k(x) \in L_1(0,\ 1)$;

2) $q(x) \geqslant 0$, $q(x) \in L_p(0, 1)$, $p \geqslant 1$;
3) $f(x) \in L_r(0, 1)$, $r \geqslant 1$.

В этом случае порядок точности усеченной схемы m-го ранга, который равнялся $O(h^{2m+2})$ при $k, q, f \in Q^{(0)}$ [1], понижается и зависит от p и r:

$$\|y - u\|_C = O(h^{2(m+1)-n}),$$

где $h = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} h_i$,

$$n = \begin{cases} 0, \quad \text{если } (m+2 < p) \wedge (p < r(p-m-1)), \\ \dfrac{m+1}{p} - \min\left\{\dfrac{p-1}{p}, \dfrac{r-1}{r}\right\}, \quad \text{если } (m+1 \geqslant p) \vee \\ \qquad \vee \{(m+1 < p \leqslant m+2) \wedge (p \geqslant r(p-m-1))\}, \\ \dfrac{m+2-p}{p}, \quad \text{если } (m+1 < p \leqslant m+2) \wedge (p < r(p-m-1)), \\ \dfrac{m+2-r}{r}, \quad \text{если } (m+2 < p) \wedge (p \geqslant r(p-m-1)). \end{cases} \tag{2}$$

Приведен пример, показывающий, что это оценка достигается.

2. Понадобится описание полученной в [1] точной разностной схемы. Для простоты будем рассматривать первую краевую задачу

$$L^{(k,q,f)} u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = a, \quad u(1) = b. \tag{3}$$

На отрезке [0, 1] введем произвольную неравномерную сетку

$$\hat{\omega}_h = \{x_i : i = \overline{1, N-1}\}, \quad x_i - x_{i-1} = h_i > 0, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1.$$

Точная трехточечная консервативная схема для задачи (3) имеет вид

$$\left(\frac{1}{a} u_{\bar{x}}\right)_{\hat{x}} - du = -\varphi(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad u_0 = a, \quad u_N = b, \tag{4}$$

где

$$a = \frac{1}{h} v_1(x), \quad d = \hat{T}^x(q(\cdot)), \quad \varphi = \hat{T}^x(f(\cdot)), \tag{5}$$

$$\hat{T}^x(W(\cdot)) = \frac{h^{-1}}{v_1(x)} \int_{x-h}^{x} v_1(\xi) W(\xi)\, d\xi + \frac{h^{-1}}{v_2(x)} \int_{x}^{x+h} v_2(\xi) W(\xi)\, d\xi.$$

Здесь $v_1(x)$, $v_2(x)$ — шаблонные функции, являющиеся решениями задач Коши:

$$L^{(k,q,0)} v_1(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i; \quad v_1(x_{i-1}) = 0; \quad k \frac{dv_1}{dx}\bigg|_{x=x_{i-1}} = 1,$$

$$L^{(k,q,0)} v_2(x) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}; \quad v_2(x_{i+1}) = 0; \quad k(x) \frac{dv_2}{dx}\bigg|_{x=x_{i+1}} = -1. \tag{6}$$

В [1] предполагалось, что $k, q, f \in Q^{(0)}$. В [2] показано, что при условии A) точная разностная схема существует, единственна и также имеет вид (4), (5). При этом $v_1(x)$ и $v_2(x)$ понимаются как обобщенные решения задач Коши (6). В дальнейшем всюду предполагаются выполненными условия A).

3. Для построения усеченных разностных схем введем линейную систему координат, свою для каждой из функций $v_j(x)$:

$$x = \begin{cases} x_i + sh_i, & -1 \leqslant s \leqslant 0 \quad \text{для } j = 1, \\ x_i + sh_{i+1}, & 0 \leqslant s \leqslant 1 \quad \text{для } j = 2 \end{cases}$$

и произведем замену

$$\alpha(s, h) = \frac{1}{h} v_1(x + sh), \quad -1 \leqslant s \leqslant 0,$$

$$\beta(s, h_{+1}) = \frac{1}{h_{+1}} v_2(x + sh_{+1}), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Введенные функции $\alpha(s, h)$, $\beta(s, h_{+1})$ определяются как обобщенные решения следующих задач Коши:

$$\frac{d}{ds}\left(k^*(s)\frac{d\alpha}{ds}\right) - h^2 q^*(s)\alpha = 0, \quad -1 < s < 0, \quad \alpha(-1, h) = 0,$$

$$k^* \frac{d\alpha}{ds}\Big|_{s=-1} = 1, \tag{7}$$

$$\frac{d}{ds}\left(k^*(s)\frac{d\beta}{ds}\right) - h_{+1}^2 q^*(s)\beta = 0, \quad 0 < s < 1, \quad \beta(1, h_{+1}) = 0,$$

$$k^* \frac{d\beta}{ds}\Big|_{s=1} = -1,$$

где

$$k^*(s) = \begin{cases} k(x + sh), & -1 \leqslant s \leqslant 0, \\ k(x + sh_{+1}), & 0 \leqslant s \leqslant 1, \end{cases} \quad q^*(s) = \begin{cases} q(x + sh), & -1 \leqslant s \leqslant 0, \\ q(x + sh_{+1}), & 0 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Коэффициенты точной разностной схемы (4) определяются с помощью следующих формул:

$$a(x) = \alpha(0, h), \quad d(x) = \hat{T}^x(q(\cdot)), \quad \varphi(x) = \hat{T}^x(f(\cdot)), \tag{8}$$

$$\hat{T}^x(W(\cdot)) = \frac{h^{-1}h}{\alpha(0, h)} \int_{-1}^{0} \alpha(s, h) W^*(s)\, ds + \frac{h^{-1}h_{+1}}{\beta(0, h_{+1})} \times$$

$$\times \int_{0}^{1} \beta(s, h_{+1}) W^*(s)\, ds.$$

Из (7) следует, что шаблонные функции $\alpha(s, h)$ и $\beta(s, h_{+1})$ можно искать в виде разложений:

$$\alpha(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \alpha_k(s), \quad \beta(s, h_{+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{+1}^{2k} \beta_k(s),$$

где $\alpha_k(s)$ и $\beta_k(s)$ определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k(s) = \int_{-1}^{s} p^*(t) \int_{-1}^{t} q^*(\xi)\alpha_{k-1}(\xi)\, d\xi dt, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \alpha_0(s) = \int_{-1}^{s} p^*(t)\, dt,$$

$$p^* = \frac{1}{k^*},$$

$$\beta_k(s) = \int_s^1 p^*(t) \int_t^1 q^*(\xi)\, \beta_{k-1}(\xi)\, d\xi dt, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \beta_0(s) = \int_s^1 p^*(t)\, dt$$

и зависят, вообще говоря, от h и h_{+1}. Представим $\alpha(s, h)$ и $\beta(s, h_{+1})$ в виде

$$\alpha(s, h) = \Pi_1^{(m)}(s, h) + h^{2m+2}\, \Omega_1^{(m+1)}(s, h),$$
$$\beta(s, h_{+1}) = \Pi_2^{(m)}(s, h_{+1}) + h_{+1}^{2m+2}\, \Omega_2^{(m+1)}(s, h_{+1}), \tag{9}$$

где

$$\Pi_1^{(m)}(s, h) = \sum_{k=0}^{m} h^{2k} \alpha_k(s), \quad \Pi_2^{(m)}(s, h_{+1}) = \sum_{k=0}^{m} h_{+1}^{2k} \beta_k(s). \tag{10}$$

Определение 1. Разностную схему

$$\left(\frac{1}{\overset{m}{a}}\, \overset{m}{y}_{\bar{x}}\right)_{\hat{x}} - \overset{m}{d}\, \overset{m}{y} = -\overset{m}{\varphi}(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad \overset{m}{y}_0 = a, \quad \overset{m}{y}_N = b, \tag{11}$$

получающуюся заменой $\alpha(s, h)$, $\beta(s, h_{+1})$ в формулах (4) и (8) выражениями (10), будем называть усеченной схемой m-го ранга на неравномерной сетке.

Далее нам понадобится следующая

Лемма 1 [5]. *Пусть имеются две разностные схемы*

$$\left(\frac{1}{a}\, y_{\bar{x}}\right)_{\hat{x}} - dy = -\varphi(x), \quad x \in \tilde{\omega}_h, \quad y_0 = a, \quad y_N = b, \tag{12}$$

$$\left(\frac{1}{\tilde{a}}\, \tilde{y}_{\bar{x}}\right)_{\hat{x}} - \hat{d}\, \tilde{y} = -\tilde{\varphi}(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad \tilde{y}_0 = a, \quad \tilde{y}_N = b, \tag{13}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям $0 < M_1 \leqslant a$, $0 < M_1 \leqslant \tilde{a}$; $0 \leqslant d$, $0 \leqslant \tilde{d}$, *тогда будет иметь место оценка*

$$\|y - \tilde{y}\|_C \leqslant 2M_1 \left\{\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{(-1)} + 2M_1 \|\varphi\|_1^* \left(\|d - \tilde{d}\|_1^* + \left(1, \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{\tilde{a}}\right|\right)\right)\right\}. \tag{14}$$

Из свойств шаблонных функций вытекает, что $0 \leqslant M_1 \leqslant a$, $0 < M_1 \leqslant \overset{m}{a}$, $0 \leqslant d$, $0 \leqslant \overset{m}{d}$, и, следовательно, для оценки точности усеченной схемы m-го ранга на неравномерной сетке мы можем воспользоваться леммой 1. Полагая в (14) $y = u$, $\tilde{y} = \overset{m}{y}$, приходим к неравенству

$$\|u - \overset{m}{y}\|_C \leqslant 2M_1 \left\{\|\varphi - \overset{m}{\varphi}\|_{(-1)} + 2\|\varphi\|_1^* \left(\|d - \overset{m}{d}\|_1^* + \left\|\frac{1}{a} - \frac{1}{\overset{m}{a}}\right\|_1\right)\right\}. \tag{14'}$$

Для оценки близости коэффициентов точной и усеченной разностных схем нам нужно оценить $\Omega^{(m+1)}(s, h)$ и $\Omega_2^{(m+1)}(s, h_{+1})$. Из (7), (9) находим

$$\Omega_1^{(m+1)}(s, h) = \int_{-1}^{s} p^*(t) \int_{-1}^{t} q^*(\xi)\, \Omega_1^{(m)}(\xi, h)\, d\xi dt,$$
$$\Omega_2^{(m+1)}(s, h_{+1}) = \int_s^1 p^*(t) \int_t^1 q^*(\xi)\, \Omega_2^{(m)}(\xi, h_{+1})\, d\xi dt. \tag{15}$$

Имеет место

Лемма 2. *Пусть выполнены условия A), тогда будут иметь место неравенства*

$$\Omega_1^{(m)}(s,\ h)\leqslant M\frac{(m!)^{\frac{1-p}{p}}h^{-\frac{m}{p}}}{\prod\limits_{t=1}^{m}[(2t+1)p-t]}\left[\varkappa^2\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}p\right]^m(1+s)^{2m+1-\frac{m}{p}},\tag{16}$$

$$-1\leqslant s\leqslant 0,$$

$$\Omega_2^{(m)}(s,\ h_{+1})\leqslant M\frac{(m!)^{\frac{1-p}{p}}h_{+1}^{-\frac{m}{p}}}{\prod\limits_{t=1}^{m}[(2t+1)p-t]}\left[\varkappa^2\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}p\right]^m(1-s)^{2m+1-\frac{m}{p}},\tag{16'}$$

$$0\leqslant s\leqslant 1,$$

где $\sqrt{\varkappa}=\|q\|_{L_p(x_{i-1},x_i)}/c_1$ для формулы (16) и $\sqrt{\varkappa}=\|q\|_{L_p(x_i,x_{i+1})}/c_1$ для формулы (16').

Доказательство леммы проводится методом математической индукции с помощью формул (15).

Заметим, что при $q(x)\leqslant M_3<\infty$ из (16), (16') в пределе, когда $p\to\infty$, получаем оценки вида

$$\Omega_1^{(m)}(s,\ h)\leqslant M\frac{[\varkappa(1+s)]^{2m+1}}{(2m+1)!},\quad \Omega_2^{(m)}(s,\ h_{+1})\leqslant M\frac{[\varkappa(1-s)]^{2m+1}}{(2m+1)!},\tag{17}$$

которые приведены в работе [1].

Справедлива

Лемма 3. *Пусть выполнены условия A), тогда будут справедливы следующие оценки:*

$$\|a-\overset{m}{a}\|_1\leqslant Mh^{2(m+1)-n},\quad n=\begin{cases}(m+1-p)/p, & \text{если } m+1\geqslant p,\\ 0, & \text{если } m+1<p,\end{cases}$$

$$\|d-\overset{m}{d}\|_1^*\leqslant Mh^{2(m+1)-n},\quad n=\begin{cases}(m+2-p)/p, & \text{если } m+2\geqslant p,\\ 0, & \text{если } m+2<p,\end{cases}$$

$$\|\varphi-\overset{m}{\varphi}\|_{(-1)}\leqslant Mh^{2(m+1)-n},\quad n=\begin{cases}(m+1)/p-(r-1)/r, & \text{если } p\geqslant r(p-m-1),\\ 0, & \text{если } p<r(p-m-1),\end{cases}$$

где M — постоянная, не зависящая от h.

Доказательство. Воспользовавшись выражениями для коэффициентов точной и усеченной разностных схем, а также леммой 2, получаем

$$\|a-\overset{m}{a}\|_1=\|h^{2m+2}\Omega_1^{(m+1)}(s,\ h)\|_1\leqslant M\sum_{i=1}^{N}h_i^{(m+1)\left(2-\frac{1}{p}\right)+1}\|q\|^{m+1}_{L_p(x_{i-1},x_i)}.\tag{18}$$

Далее имеем

$$\|d-\overset{m}{d}\|_1^*=\sum_{i=1}^{N-1}h_i^{2m+3}\left[\frac{1}{a_i}\int_{-1}^{0}\Omega_1^{(m+1)}(s,\ h_i)\,q^*(s)\,ds+\right.$$

$$\left.+\frac{\Omega_1^{(m+1)}(0,\ h_i)}{a_i\overset{m}{a_i}}\int_{-1}^{0}\overset{m}{\alpha}(s,\ h_i)\,q^*(s)\,ds\right]+\sum_{i=1}^{N-1}h_{i+1}^{2m+3}\left[\frac{1}{a_{i+1}}\times\right.$$

$$\times \int_0^1 \Omega_2^{(m+1)}(s,\ h_{i+1})\, q^*(s)\, ds + \frac{\Omega_2^{(m+1)}(0,\ h_{i+1})}{\overset{m}{a}_{i+1}\overset{m}{a}_{i+1}} \int_0^1 \overset{m}{\beta}(s,\ h_{i+1})\, q^*(s)\, ds \Big] \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{i=1}^{N} h_i^{(m+1)\left(2-\frac{1}{p}\right)} \|q\|^{m+1}_{L_p(x_{i-1}, x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{i=1}^{N} h_i^{(m+1)\left(2-\frac{1}{p}\right)+\frac{p-1}{p}} \|q\|^{m+2}_{L_p(x_{i-1}, x_i)}, \tag{19}$$

$$\overset{m}{\varphi} - \overset{m}{\varphi}\|_{(-1)} \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} \hbar_i |\varphi_i - \overset{m}{\varphi}_i| \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} h_i^{2m+3} \left[\frac{1}{a_i} \int_{-1}^{0} \Omega_1^{(m+1)}(s,\ h_i)\, |f^*(s)|\, ds + \right.$$

$$+ \frac{\Omega_1^{(m+1)}(0,\ h_i)}{\overset{m}{a}_i a_i} \int_{-1}^{0} \overset{m}{\alpha}(s,\ h_i)\, |f^*(s)|\, ds + \sum_{i=1}^{N-1} h_{i+1}^{2m+3} \left[\frac{1}{a_{i+1}} \times \right.$$

$$\times \int_0^1 \Omega_2^{(m+1)}(s,\ h_{i+1})\, |f^*(s)|\, ds + \frac{\Omega_2^{(m+1)}(0,\ h_{i+1})}{\overset{m}{a}_{i+1}\overset{m}{a}_{i+1}} \int_0^1 \overset{m}{\beta}(s,\ h_{i+1})\, |f^*(s)|\, ds \Big] \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{i=1}^{N} h_i^{(m+1)\left(2-\frac{1}{p}\right)} \|q\|^{m+1}_{L_p(x_{i-1}, x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{i=1}^{N} h_i^{(m+1)\left(2-\frac{1}{p}\right)+\frac{t-1}{t}} \|q\|^{m+1}_{L_p(x_{i-1}, x_i)} \|f\|_{L_r(x_{i-1}, x_i)}. \tag{20}$$

Из неравенств (18)—(20) следует утверждение леммы.

Объединяя леммы 1 и 3, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия A), тогда при достаточно малом h точность усеченной разностной схемы m-го ранга определяется оценкой вида*

$$\|u - \overset{m}{y}\|_C \leqslant Mh^{2(m+1)-n}, \tag{21}$$

где n определяется по формулам (2).

Следствие 1. *При $q(x)$, $f(x) \in L_2(0, 1)$ усеченная разностная схема (11) нулевого ранга имеет второй порядок точности.*

4. Приведем в качестве иллюстрации один пример, показывающий, что оценка (21) теоремы 1 является неулучшаемой. Пусть дана краевая задача

$$u''(x) - \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) u(x) = -x\delta\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0,$$

$$u(1) = 1, \tag{22}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Точная разностная схема для (22) имеет вид

$$u_{\bar{x}x,\,i} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \quad u_0 = 0,$$

$$\frac{1}{h}\left[\frac{u_{k+1} - u_k}{h + h^2/4} - \frac{u_k - u_{k-1}}{h}\right] - \frac{1}{2h(1 + h/4)} u_k = -\frac{1}{4h(1 + h/4)},$$

$$\frac{1}{h}\left[\frac{u_{k+2}-u_{k+1}}{h}-\frac{u_{k+1}-u_k}{h+h^2/4}\right]-\frac{1}{2h(1+h/4)}u_{k+1}=-\frac{1}{4h(1+h/4)},$$

$$u_{\overline{x}x,i}=0,\quad k+2\leqslant i\leqslant N-1,\quad u_N=1.$$

Здесь предполагается, что

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{h}{2},\quad x_k=\frac{1}{2}-\frac{h}{2}.$$

Нетрудно получить и схему нулевого ранга

$$\overset{0}{y}_{\overline{x}x,i}-\frac{\delta_{k,i}+\delta_{k+1,i}}{2h}\overset{0}{y}_i=-\frac{1}{2}\frac{\delta_{ki}+\delta_{k+1,i}}{2h},\quad i=\overline{1,\ N-1},$$

$$\overset{0}{y}_0=0,\quad \overset{0}{y}_N=1,$$

решение которой имеет вид ($\delta_{k,i}$ — символ Кронекера)

$$\overset{0}{y}_i=\begin{cases}\dfrac{4+h}{(4-h)(1+h)}x_i, & 0\leqslant i\leqslant k,\\ -\dfrac{4+h}{(4-h)(1+h)}(1-x_i)+1, & k+1\leqslant i\leqslant N,\end{cases}\qquad(23)$$

в то время как решение дифференциальной задачи (22) определяется формулой

$$u(x)=x.\qquad(24)$$

Легко видеть, что погрешность решения (23) является величиной порядка $O(h)$, и, следовательно, для случая $p=r=1$ оценка скорости сходимости схемы нулевого ранга теоремы 1 неулучшаемая.

5. В заключение заметим, что теорема 1 играет большую роль при построении схем метода прямых и конечноразностных схем для уравнений математической физики (в том числе и квазилинейных) более простых, чем схемы, приведенные в работах [2, 4]. Для этой цели оператор точной схемы $T^x(v(\cdot))$ нужно заменить оператором $\overset{m}{T}{}^{(x)}(v(\cdot))$ усеченной схемы m-го ранга с соответствующим m.

Приведенные выше результаты можно распространить и на задачу Штурма—Лиувилля.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках.— ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 3, с. 425—440.

2. Макаров В. Л., Самарский А. А. Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— Препринт № 13, ИПМ АН СССР, 1979.

3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М., Наука, 1971.

4. Макаров В. Л., Самарский А. А. Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— ЖВМ и МФ, 1980, т. 20, № 2.

5. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., Наука, 1977.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Поступила в редакцию 29 декабря 1979 г.