ИЮЛЬ 1980 г., ТОМ XVI, № 7

УДК 517.946

В. А. ГАЛАКТИОНОВ, С. П. КУРДЮМОВ,
А. П. МИХАЙЛОВ, А. А. САМАРСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СТАДИЯ РЕЖИМОВ С ОБОСТРЕНИЕМ И ЭФФЕКТИВНАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛА В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. В настоящей работе на примере задачи для квазилинейного параболического уравнения

$$u_t=[k(u)u_x]_x; \quad k(u)>0, \quad u>0, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(0, x)=u_0(x)\geqslant 0, \quad x\in \mathrm{R}^1_+=(0, \infty); \quad \sup u_0<\infty, \tag{2}$$

$$u(t, 0)=u_1(t)\to+\infty, \quad t\to T^-; \quad 0<t<T<+\infty, \tag{3}$$

исследуется асимптотическое поведение ее решений при $t\to T^-$.

Задача (1)—(3) описывает, в частности, процесс диффузии тепла в нелинейной теплопроводной среде. Температура в граничном условии (3) изменяется в так называемом режиме с обострением, т. е. неограниченно возрастает при $t\to T^-$. В этом заключается существенное отличие рассматриваемой задачи от традиционных задач нелинейной теплопроводности.

2. Изучение режимов с обострением стимулируется тем, что при их развитии в сплошной нелинейной среде проявляется ряд необычных свойств процессов переноса (тепла, магнитного поля и т. д.).

Так, в работах [1, 2] на примере уравнения (1) с $k(u)=u^\sigma$, $\sigma>0$, исследовался эффект метастабильной локализации тепла.

Локализация горения в процессах, описываемых уравнениями вида

$$u_t=[k(u)u_x]_x+Q(u) \tag{4}$$

при $k(u)=u^\sigma$, $Q(u)=u^\beta$, $\sigma>0$, $\beta>1$, рассматривалась в работах [3, 4]. Метастабильная локализация тепла и горения дает, в частности, возможность сконцентрировать любое количество энергии в ограниченных участках среды, удержать его в течение конечного времени практически без распространения из зоны локализации и может иметь ряд важных физических приложений [5].

Локализация является также внутренней причиной возникновения и сложного взаимодействия в нелинейной среде различного типа метастабильных нестационарных диссипативных структур [6, 7].

Указанные эффекты не ограничиваются задачами теплопроводности и горения. Они проявляются также при наличии в среде большой суммы нелинейных диссипативных процессов, характерных для гидродинамики и физики плазмы [8, 9].

3. Разработка теории режимов с обострением (в том числе для постановки экспериментальных исследований) требует применения разнообразных математических методов. Так, связанные с этим вопросы изучались путем построения и анализа автомодельных решений [1, 3, 10], с помощью различных вариантов метода осреднения [7, 11], а также путем прямого численного расчета соответствующих задач.

Особенно следует отметить метод построения автомодельных решений, который является эффективным средством исследования многих задач математической физики [26] и в том числе задач нелинейной теплопроводности [10, 12, 13, 27]. В частности, при изучении локализации тепла существенно использовались построенные в [10] автомодельные решения задачи (1)—(3) с $k(u)=u^\sigma$, с помощью которых был выделен класс граничных режимов, приводящих к локализации, получены оценки сверху и снизу для решений неавтомодельных задач и т. д. [1, 14]. При этом в силу существования теорем сравнения для решений параболических уравнений роль автомодельных решений значительно возрастает. В такой ситуации они являются не только частными решениями, но служат границами между классами (неавтомодельных) решений, принципиально различающимися по своим свойствам.

4. Нетривиальные инвариантно-групповые автомодельные решения допускает, как правило, лишь узкий класс уравнений. Например, в работе [15] установлено, что построение таких решений уравнения (1) возможно только при $k(u)=u^\sigma$ и $k(u)=\exp u$ (аналогичное исследование для уравнения (4) проведено в [16]).

В значительной мере преодолеть эту трудность позволяет предложенный в [17—19] подход, расширяющий обычно используемые теоремы сравнения. Сущность этого метода состоит в том, что сравниваются решения задач, соответствующих не только разным краевым условиям, но и разным параболическим уравнениям (в случае уравнения (1) — разным функциям $k(u)$). С помощью такого подхода установлена, например, метастабильная локализация тепла в задаче (1)—(3) с произвольной функцией $k(u)$, даны соответствующие оценки [20].

Еще один метод исследования основан на том, что решения параболических уравнений могут при определенных условиях описываться автомодельными решениями более простых уравнений, например решениями некоторых уравнений первого порядка. Примеры такого «вырождения» уравнений (1), (4) с $k(u)=1$, $Q(u)=(1+u)\ln^\beta(1+u)$, $\beta>1$, в уравнения первого порядка типа Гамильтона — Якоби и их приложения к изучению эффектов локализации тепла и горения даны в [21—23]. В работе [24] вопросы, связанные с «вырождением» уравнения (1), изучаются для произвольных $k(u)$.

Сочетание указанных методов значительно расширяет возможность исследования свойств решений параболических уравнений.

5. Наряду с разработкой новых подходов актуальным является более эффективное использование существующих методов. В частности, важен вопрос о сходимости решений неавтомодельных задач к соответствующим автомодельным решениям. Обычно факт сходимости или «выход» на нестационарное автомодельное решение устанавливается путем численного расчета исходной задачи с последующей обработкой решения в автомодельных переменных.

В данной работе доказана сходимость решения задачи (1)—(3) при $k(u)=u^\sigma$, $\sigma>0$, к соответствующим автомодельным решениям и установлены оценки скорости сходимости в различных нормах (§ 2). Полученные оценки используются в § 3 для доказательства существования эффективной метастабильной локализации тепла в задаче (1)—(3).

§ 2. О СХОДИМОСТИ К АВТОМОДЕЛЬНЫМ РЕШЕНИЯМ

Покажем, что решение краевой задачи (1)—(3) для уравнения со степенной нелинейностью ($k(u)=u^\sigma$)

$$u_t=[u^\sigma u_x]_x,\quad (t,\ x)\in S_T=(0,\ T)\times R^1_+;\quad \sigma>0, \tag{5}$$

и граничным законом

$$u_1(t)=(T-t)^{-1/\sigma},\quad t\in(0,\ T), \tag{6}$$

сходится в некоторой специальной норме к автомодельному решению уравнения (5), удовлетворяющему (6). Это решение имеет вид [1, 2]

$$u_a(t,\ x)=(T-t)^{-1/\sigma}f_a(x),\quad (t,\ x)\in S_T, \tag{7}$$

где

$$f_a(x)=\begin{cases}(1-x/x_0)^{2/\sigma}, & 0\leqslant x\leqslant x_0=[2(\sigma+2)/\sigma]^{1/2},\\ 0, & x>x_0.\end{cases} \tag{8}$$

Введем обозначение

$$f(t,\ x)=(T-t)^{1/\sigma}u(t,\ x),\quad (t,\ x)\in S_T. \tag{9}$$

Получим интегральную и поточечную оценки скорости сходимости при $t\to T^-$ функции (9) (называемой «автомодельным представлением» решения $u(t,\ x)$) к $f_a(x)$, определяемой по формуле (8).

Сделаем одно общее замечание об особенностях доказательства сформулированных в работе утверждений. Решение вырождающегося уравнения (1) может не иметь производных, входящих в уравнение. Тем не менее мы считаем это решение достаточно гладким (по крайней мере $u\in C^{1,2}_{t,x}(S_T)$), что оправдывается возможностью построения последовательности классических решений уравнения (1), равномерно сходящейся на каждом ограниченном множестве к обобщенному решению [25] (тем самым все необходимые оценки можно сначала получить для достаточно регулярных решений из указанной последовательности, а затем совершить предельный переход).

1. Интегральная оценка скорости сходимости. При выводе интегральной оценки будем предполагать, что функция $u_0(x)$ в (2) удовлетворяет включению $u_0\in L^1(R^1_+)$, т. е.

$$\int_0^\infty u_0(x)\,dx<\infty. \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть выполняется условие (10). Тогда функция (9) сходится при $t\to T^-$ к $f_a(x)$, причем справедлива оценка*

$$\int_0^\infty |f(t,\ x)-f_a(x)|\,dx=O[(T-t)^{1/\sigma}]\xrightarrow[t\to T^-]{}0. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть функции $u_1(t,\ x)$ и $u_2(t,\ x)$, $(t,\ x)\in S_T$ являются решениями уравнения (1), причем $u_1(0,\ x)\geqslant u_2(0,\ x)$ при $x\in R^1_+$ и $u_1(t,\ 0)\equiv u_2(t,\ 0)$ для всех $t\in(0,\ T)$. Пусть, кроме того, $u_1(0,\ x)\in L^1(R^1_+)$. Тогда для любого $t\in(0,\ T)$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty \{u_1(t,\ x)-u_2(t,\ x)\}\,dx\leqslant\int_0^\infty\{u_1(0,\ x)-u_2(0,\ x)\}\,dx. \tag{12}$$

Доказательство. Функция

$$E(t)=\int_0^\infty \{u_1(t, x)-u_2(t, x)\}dx$$

определена и имеет непрерывную производную dE/dt для всех $t\in(0, T)$, причем

$$\frac{dE}{dt}(t)=k[u_1(t, 0)]\{[u_2(t, 0)]_x-[u_1(t, 0)]_x\}.$$

В силу условий леммы и теорем сравнения [25] имеем $u_2(t, x)\leqslant u_1(t, x)$ всюду в S_T и поэтому $(\partial u_2/\partial x)(t, 0)\leqslant(\partial u_1/\partial x)(t, 0)$ для всех $t\in(0, T)$. Отсюда $dE/dt\leqslant 0$ и, следовательно, $E(t)\leqslant E(0)$ при всех $t\in(0, T)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Определим две неотрицательные гладкие функции $u_0^+(x)$ и $u_0^-(x)$ такие, что $u_0^+(0)=u_0^-(0)=u_0(0)$, $u_0^\pm\in L^1(\mathbf{R}_+^1)$ и

$$u_0^+(x)\geqslant \max\{u_0(x), T^{-1/\sigma}f_a(x)\},$$

$$u_0^-(x)\leqslant \min\{u_0(x), T^{-1/\sigma}f_a(x)\}.$$

Через $u^\pm(t, x)$ обозначим решения уравнения (5) с начальными условиями $u^\pm(0, x)=u_0^\pm(x)$ и граничными законами (6). Тогда из принципа максимума получаем, что при всех $(t, x)\in S_T$

$$u^+(t, x)\geqslant \max\{u(t, x), u_a(t, x)\},$$

$$u^-(t, x)\leqslant \min\{u(t, x), u_a(t, x)\}$$

и поэтому

$$|u-u_a|\leqslant(u^+-u_a)+(u_a-u^-)=u^+-u^-$$

всюду в S_T. Отсюда заключаем, что

$$\int_0^\infty |u(t, x)-u_a(t, x)|dx\leqslant\int_0^\infty (u^+(t, x)-u^-(t, x))dx.$$

Применяя к интегралу, стоящему в правой части, полученное в лемме неравенство (12), придем к оценке

$$\int_0^\infty |u(t, x)-u_a(t, x)|dx\leqslant\int_0^\infty (u_0^+(x)-u_0^-(x))dx<\infty.$$

Учитывая, что (см. (7)—(9))

$$\int_0^\infty |u-u_a|dx=(T-t)^{-1/\sigma}\int_0^\infty |f(t, x)-f_a(x)|dx,$$

получим при $t\to T^-$ оценку (11) и, таким образом, утверждение о сходимости $f(t, x)\to f_a(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 допускает расширение на более широкий класс граничных режимов

$$u_1(t)=(T-t)^n,\quad t\in(0, T);\quad n=\text{const}<0. \tag{13}$$

Автомодельное решение уравнения (5) с условием (13) имеет вид [10]

$$u_a(t, x) = (T-t)^n f_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(T-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}}, \tag{14}$$

где функция $f_a(\xi)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{d}{d\xi}\left(f_a^\sigma \frac{df_a}{d\xi}\right) - \frac{1+n\sigma}{2}\xi\frac{df_a}{d\xi} + nf_a = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}_+^1, \tag{15}$$

$$f_a(0) = 1, \quad f_a(\infty) = 0.$$

Интегральная оценка (11) в этом случае выводится аналогичным образом и при $n < -1/(\sigma+2)$ имеет вид

$$\int_0^\infty |f(t, \xi) - f_a(\xi)|\, d\xi = O[(T-t)^{-\frac{1+n(\sigma+2)}{2}}] \underset{t\to T^-}{\longrightarrow} 0,$$

где

$$f(t, \xi) = (T-t)^{-n} u(t, \xi(T-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}), \quad (t, \xi) \in S_T.$$

Автомодельные решения (14) подробно исследованы в [10], где выделены три типа решений, принципиально различных по своим физическим свойствам: LS-режим $\left(n \in \left(-\frac{1}{\sigma}, 0\right)\right)$, S-режим $\left(n = -\frac{1}{\sigma}\right)$, HS-режим $\left(n < -\frac{1}{\sigma}\right)$. Из доказанных выше утверждений следует, что решения неавтомодельных задач «выходят» с известной точностью на автомодельный режим и поэтому заранее определены основные детали их подведения при $t \to T^-$.

В случае S-режима приведем не только интегральную, но и поточечную оценку сходимости к автомодельному решению (7).

2. Поточечная оценка скорости сходимости. При выводе поточечной оценки откажемся от предположения (10) и будем считать функцию $u_0(x)$ ограниченной в $\overline{\mathbf{R}}_+^1$, т. е.

$$\sup_{x \in \mathbf{R}_+^1} u_0(x) = M < \infty. \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть выполняется условие (16). Тогда функция (9) сходится при $t \to T^-$ к $f_a(x)$, причем справедлива оценка*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}_+^1} |f^\sigma(t, x) - f_a^\sigma(x)| = O[(T-t)^{2/(\sigma+2)}] \underset{t\to T^-}{\longrightarrow} 0. \tag{17}$$

Доказательство. Исходя из замечания, сделанного в начале этого параграфа, будем формально считать, что $u \in C_{t,x}^{1,2}(S_T)$.

Положим всюду в S_T

$$U(t, x) = u^\sigma(t, x), \quad V_a(t, x) = u_a^\sigma(t, x).$$

Тогда функция $z = U - V_a$ удовлетворяет в S_T уравнению

$$z_t = Uz_{xx} + z(V_a)_{xx} + \frac{1}{\sigma} z_x[2(V_a)_x - z_x]. \tag{18}$$

Функция z удовлетворяет включению $z\in C^{1,1}_{t,x}(S_T)$ в силу такой же гладкости V_a (см. (8)). Поэтому в точке положительного максимума функции z выполняется условие $z_x=0$ и неравенство $z_{xx}\leqslant 0$ в некоторой достаточно малой ее окрестности. Тогда из уравнения (18) получаем, что в точках положительного максимума z

$$z_t=\frac{dz}{dt}\leqslant z(V_a)_{xx}=z(T-t)^{-1}\frac{\sigma}{\sigma+2}$$

и поэтому при t, достаточно близких к T, справедлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^1_+} z(t,x)=O[(T-t)^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}}]. \tag{19}$$

В точках отрицательного минимума функции z выполняется неравенство (см. (18))

$$z_t=\frac{dz}{dt}\geqslant z(V_a)_{xx}$$

и поэтому при $t\to T^-$

$$\inf_{x\in\mathbf{R}^1_+} z(t,x)=-O[(T-t)^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}}]. \tag{20}$$

Суммируя (19), (20) и учитывая, что $|z|=(T-t)^{-1}|f-f_a|$, получим оценку (17) и, следовательно, условие $|f-f_a|\to 0$ при $t\to T^-$. Теорема доказана.

§ 3. ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТЕПЛА

1. Рассмотрим вопросы, связанные с локализацией тепловых возмущений в задаче (1)—(3). Нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. *В задаче (1)—(3) с начальным распределением u_0, удовлетворяющим условию* $\operatorname{mes}\operatorname{supp} u_0(x)=l_0<\infty$, *существует метастабильная локализация тепла, если*

$$\lim_{t\to T^-}\operatorname{mes}\operatorname{supp} u(t,x)=l^*<\infty \quad \text{(отметим, что } l^*\geqslant l_0). \tag{21}$$

Определение 2. *В задаче (1)—(3) существует эффективная метастабильная локализация тепла, если*

$$\lim_{h\to\infty}\ \lim_{t\to T^-}\operatorname{mes}\{x: u(t,x)\geqslant h\}=L^*<\infty. \tag{22}$$

Величины l^* и L^* будем называть глубиной локализации. Определение 1 предусматривает возможность конечной скорости распространения возмущений в процессах, описываемых уравнением (1) (в противном случае $\operatorname{supp} u(t,x)=\mathbf{R}^1_+$ для всех $t\in(0,T)$). Локализация в смысле (21) означает, что тепловые возмущения, несмотря на неограниченный рост температуры в точке $x=0$, проникают в течение всего процесса в область конечных размеров (вне этой области температура всегда равна нулю).

Формула (22) в определении 2 отражает тот факт, что температура при $t\to T^-$ неограниченно возрастает в конечной области (области локализации тепла), а в остальной части пространства ограничена равномерно по $t\in(0,T)$. При этом никаких ограничений на функцию $u_0(x)$

в (2) (кроме ее ограниченности в $\overline{R}^1_+$) не накладывается. В этом заключается существенное различие метастабильной локализации тепла в смысле определений 1, 2 и более глубокий физический смысл последнего, поскольку в большинстве реальных физических процессов обращение в нуль функции $u(t, x)$ (температуры) не имеет места.

2. Локализацию тепла в смысле (21) наглядно демонстрирует аналитическое решение (7), (8) уравнения (5). На примере задачи, рассмотренной в § 2, будет показано, что между двумя определениями локализации существует тесная связь.

Теорема 3. *В краевой задаче (5), (6) с ограниченным в $\overline{R}^1_+$ начальным распределением (2) существует эффективная локализация тепла в смысле определения 2, причем*

$$L^* = [2(\sigma+2)/\sigma]^{1/2}, \tag{23}$$

т. е. $u(t, x) \to \infty$ при $t \to T^-$ и всех $x \in (0, L^*)$, $u(t, x) < \infty$ для всех $t \in (0, T]$, $x > L^*$.

Замечание. Глубина локализации (23) совпадает с размером носителя аналитического решения (7), (8).

Доказательство теоремы 3. Докажем сначала, что для всех $x \in (0, L^*)$ решение задачи неограниченно возрастает при $t \to T^-$. Для этого воспользуемся неравенством (17), из которого получим оценку $u(t, x)$ снизу (см. доказательство теоремы 2)

$$u^\sigma(t, x) \geqslant (T-t)^{-1} f_a^\sigma(x) - M_1 (T-t)^{-\sigma/(\sigma+2)},$$

где

$$M_1 = \sup_{x \in R^1_+} |u_0^\sigma(x) - f_a^\sigma(x) T^{-1}| T^{\frac{\sigma}{\sigma+2}} < \infty.$$

Тогда в силу положительности функции $f_a(x)$ для всех $x \in (0, L^*)$ (см. (8)) заключаем, что $u(t, x) \to \infty$ при $t \to T^-$ и любых $x \in (0, L^*)$.

Покажем теперь, что функция $u(t, x)$ ограничена в области $x > L^*$ равномерно по $t \in (0, T)$. Рассмотрим оценку, полученную при доказательстве теоремы 2

$$\int_0^\infty |u(t, x) - u_a(t, x)|\, dx \leqslant \int_0^\infty (u_0^+(x) - u_0^-(x))\, dx.$$

Перепишем ее в следующем эквивалентном виде:

$$\int_0^\infty \{|u - u_a| - u_0\}\, dx \leqslant \int_0^\infty \{u_0^+ - u_0^- - u_0\}\, dx. \tag{24}$$

Функцию u_0^+ в (24) при этом выбираем так, чтобы $(u_0^+ - u_0) \in L^1(R^1_+)$, поэтому интеграл, стоящий в правой части, существует даже тогда, когда $u_0 \overline{\in} L^1(R^1_+)$.

Из оценки (24) с учетом того, что $u_a(t, x) \equiv 0$ при $x > L^*$, получаем неравенство

$$\int_{L^*}^\infty (u - u_0)\, dx \leqslant \int_0^{L^*} u_0 dx + \int_0^\infty (u_0^+ - u_0^- - u_0)\, dx < \infty. \tag{25}$$

Из (25) и принципа максимума заключаем, что при всех $x > L^*$ функция $u(t, x)$ ограничена для любых $t \in (0, T]$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция* u_0 *в (2) такова, что*

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[u_0^{\sigma+1}(x)\right]\geqslant 0, \quad x\in\mathbf{R}^1_+. \tag{26}$$

Тогда при всех $x>L^*$, *где* L^* *вычисляется по формуле (23), и* $t\in(0,T]$ *справедлива оценка*

$$u(t,x)\leqslant\left[N+\int\limits_{L^*}^{x}u_0(y)\,dy\right]/(x-L^*)<+\infty, \tag{27}$$

$$N=\int\limits_0^{L^*}\left|u_0(x)-T^{-1/\sigma}f_a(x)\right|dx.$$

Доказательство. В силу (26) и неравенства $u_1'(t)>0$ (см. (6)) краевые условия задачи являются критическими и поэтому $u_t\geqslant 0$, $u_x\leqslant 0$ почти всюду в S_T [17, 18]. Следовательно, $u-u_0\geqslant 0$ для любых $(t,x)\in S_T$. Тогда из оценки (25) получаем для всех $x>L^*$ неравенство

$$\int\limits_{L^*}^{x}u(t,y)\,dy\leqslant\int\limits_0^{x}u_0\,dy+\int\limits_0^{\infty}(u_0^+-u_0^--u_0)\,dy. \tag{28}$$

Поскольку $u_x\leqslant 0$, в S_T справедлива оценка

$$\int\limits_{L^*}^{x}u(t,y)\,dy\geqslant u(t,x)(x-L^*),$$

что вместе с (28) дает неравенство (27).

Замечание 1. Из (27) прямо следует оценка

$$u(t,x)\leqslant u_0(L^*)+N/(x-L^*)<\infty, \quad x>L^*,$$

при выводе которой учитывается монотонность u_0.

Замечание 2. В силу теорем сравнения [25] эффективная локализация тепла имеет место в случае любых граничных законов вида (13) при $n\in(-1/\sigma,0)$, т. е. LS-режимов. В случае $n<-1/\sigma$ (HS-режим) локализация тепла отсутствует, более того, $u(t,x)$ неограниченно возрастает при $t\to T^-$ всюду в $\mathbf{R}^1_+$ [14].

3. Полученные в § 2, 3 оценки позволяют провести исследование эффективной локализации тепла для уравнений (1) с нестепенными нелинейностями путем применения методов сравнения решений параболических уравнений [17—19]. Мы рассмотрим только один пример; в общем случае методика такого использования операторного метода сравнения [19] изложена в [20].

Пример. Рассмотрим уравнение (1) с коэффициентом

$$k(u)=\exp(u^\sigma)-1, \quad u\geqslant 0; \quad \sigma\geqslant 1. \tag{29}$$

Преобразование (оператор) $E(u)=k(u)$, $u\geqslant 0$ является допустимым в смысле [20] и поэтому в задаче (1)—(3) с краевыми данными

$$\begin{gathered} u_1(t)=E^{-1}[(T-t)^{-1}]=\ln^{1/\sigma}[1+(T-t)^{-1}], \quad t\in(0,T),\\ u_0(x)\leqslant E^{-1}[T^{-1}(1-x/\sqrt{6})^2], \quad x\in(0,\sqrt{6}),\\ u_0(x)\equiv 0, \quad x\geqslant\sqrt{6} \end{gathered} \tag{30}$$

имеет место метастабильная локализация тепла в смысле (21), причем $l^*\leqslant\sqrt{6}$. Функция E^{-1} в (30) является обратной к E и имеет вид

$$E^{-1}(u)=\ln^{1/\sigma}[1+u], \quad u\geqslant 0.$$

Из оценок §§ 2, 3 следует, что граничный закон (30) приводит к эффективной локализации тепла (т. е. в смысле (22)) в задачах для уравнения (1), (29), если $u_0(x)$ ограничена в $\overline{R}^1_+$. При этом справедлива оценка глубины локализации $L^* \leqslant \sqrt{6}$.

Литература

1. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.— ДАН СССР, 1975, т. 223, № 6.
2. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте.— Препринт № 103, ИПМ АН СССР, 1977.
3. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.— ДАН СССР, 1976, т. 227, № 2.
4. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением.— Препринт № 74, ИПМ АН СССР, 1976.
5. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, № 9.
6. Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В. и др.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 6.
7. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды.— Препринт № 106, ИПМ АН СССР, 1977.
8. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.— ДАН СССР, 1974, т. 219, № 3.
9. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.— ПМ и ТФ, 1977, № 1.
10. Галактионов В. А., Михайлов А. П. Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности.— Препринт № 53, ИПМ АН СССР, 1977.
11. Еленин Г. Г., Плохотников К. Э. Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла.— Препринт № 91, ИПМ АН СССР, 1977.
12. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.— В сборнике, посвященном семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе. М., АН СССР, 1950.
13. Баренблатт Г. И.— ПММ, 1953, т. 17, № 6.
14. Михайлов А. П. Метастабильная локализация тепловых возмущений в среде с нелинейной теплопроводностью.— Препринт № 64, ИПМ АН СССР, 1977.
15. Овсянников Л. В.— ДАН СССР, 1959, т. 125, № 3.
16. Дородницын В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником и стоком.— Препринт № 57, ИПМ АН СССР, 1979.
17. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.—ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 6.
18. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.— ДАН СССР, 1979, т. 248, № 3.
19. Галактионов В. А. Условия ψ-критичности и методы сравнения решений параболических уравнений.— Препринт № 151, ИПМ АН СССР, 1979.
20. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Метастабильная локализация возмущений в задачах для уравнений типа нелинейной теплопроводности.— Препринт № 181, ИПМ АН СССР, 1979.
21. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью.— Препринт № 28, ИПМ АН СССР, 1979.
22. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 2.
23. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений.— Препринт № 161, ИПМ АН СССР, 1979.
24. Галактионов В. А.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9.
25. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу-Юй-Линь.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, т. 22, № 5.
26. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М., Наука, 1967.
27. Gilding B. H., Peletier L. A.— J. Math. Anal. Appl., 1977, vol. 57, N 3.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 4 марта 1980 г.