47

препр
В-40

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, Ю.А. Повещенко,
Ю.П. Попов, А.А. Самарский.

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕПЛОВЫХ СТРУКТУР

Препринт № 77 за 1978г.

Москва.

## Аннотация

В работе с помощью численных и аналитических методов изучается взаимодействие диссипативных нестационарных структур в нелинейной среде [3+8, I3, I8]. Коэффициент теплопроводности среды и объемный источник, моделирующий ее горение, нелинейно зависят от температуры.

Необычные свойства процессов горения в среде обусловлены развитием при определенных (резонансных) способах ее возбуждения цепной реакции, протекающей в режиме с обострением [3+8], когда температура в отдельных точках неограниченно возрастает за конечное время. При этом происходит локализация процессов горения на отдельных участках среды в виде различного типа пространственных структур [5,8].

В работе изучаются особенности взаимодействия областей интенсивного горения. Рассматриваются способы возбуждения локализованного горения среды, отличающиеся от резонансных. Они приводят к возникновению квазиструктур, существующих меньшее время, чем сложные структуры. Рассмотрены особенности эволюции сложной квазиструктуры, состоящей из простых, в двумерной и трехмерной постановках. Выясняется роль симметрии начального распределения температур в синхронизации процессов в сложных квазиструктурах. Показано, что в многомерном случае возможна локализация горения в выделенных направлениях при ее отсутствии по другим направлениям.

Полученные в работе результаты представляют интерес для установления закономерностей развития организаций в нелинейных средах.

## Abstract

The interaction of dissipative nonstationar structures in nonlinear medium [3÷8,13,18] is investigated analitically and numerically in the paper. The heat conductivity coefficient of a medium and the bulk source, simulating its burning, are the nonlinear functions of temperature.

The unusual properties of the medium deflagration processes are due to the chain reaction developing, when the special (resonance) types of its ignition are imposing. The reaction goes in the aggravation regime [3÷8], i.e. the temperature of some points arises infinitely for the limited time interval. The localization of the burning takes place in the process in the form of various structures [3,8].

The details of the intensive deflagration regions interaction are studied also. The possibilities of the local burning ignition which differ from resonante one, are considered. Such way of ignition leads to the arising of quasistructures. The life time of quasistructures is less than that of complex structures. The details of complex quasistructure ( composed of simple one ) evolution are investigated in two- and threedimensional approcaches. The role of the initial temperature distribution symmetry in the coordination of the processes in complex quasistructures is considered.

The possibility of burning localization in definite directions while being absent in other ones is shown.

The aim of investigation of the phenomena considered is the establishment of the nonlinear medium organization principles.

СОДЕРЖАНИЕ


I. Введение 8

2. Постановка задачи 11

3. Особенности эволюции сложной квазиструктуры в двумерном случае 13

3.I. Качеотвенная картина взаимодействия 13

3.2. Развитая стадия процесса. Особенноети симметризации квазиструктуры 19

3.3. Фундаментальная область. Величина перекрытия простых квазиструктур 25

4. Интегральные характеристики распределения температур. Их эволюция 35

5. Применение метода осреднения. Автомодельная обработка решения 42

6. Более сложные начальные распределения. Характер взаимодействия квазиструктур 45

7. Стадия динамики. Ее линеаризованное описание 59

8. Трехмерный расчет. Особенности процесса взаимодействия в многомерных задачах 63

9. Методика расчета 75

## I. Введение

В последние годы большое внимание уделяется изучению нелинейных свойств сплошных сред. Это обусловлено использованием в современной физике мощных внешних воздействий - сверхсильных полей, интенсивных лазерных пучков и т.д. Возникает необходимость нелинейного описания таких процессов. Рассмотрение сложных систем, в частности, биологических также стимулирует развитие нелинейной математической физики.

Общей чертой этого большого класса проблем является сильная, обычно резонансная зависимость "отклика" системы на внешнее воздействие. Определенный класс внешних (резонансных) воздействий приводит к появлению в среде самоподдерживающихся диссипативных структур разной сложности. Эти явления имеют место в физике плазмы (например, эффект Т-слоя), в термодинамике неравновесных процессов, применяемой в математических моделях биологии [I3] .

Для исследования конкретных физических проблем необходимы методы анализа получаемых уравнений и изучение свойств их решений Для этого естественно рассматривать, как и в классической линейной математической физике, модельные задачи.

Данная работа продолжает исследование нелинейной задачи:

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = div\left[\varkappa(M,t,T)\, grad T(M,t)\right] + q(M,t,T), \qquad T|_{\Gamma} = T_{\Gamma}(t),\ T|_{t=0} = T_0(M),\ M \in G + \Gamma. \tag{I}$$

Широкие возможности приложений уравнения (I) в физике и биологии вызывают интерес к нему, как к наиболее естественному обобщению линейных параболических уравнений [8,9,I3,I6,I7,I8] .

В работах [3+II] изучались свойства решений (I), когда коэффициент теплопроводности и источник являются степенными функциями

температуры $\chi(T)=K_0T^{\sigma}$ , $q(T)=q_0T^{\beta}$. Решение при $\beta>1$ существует конечное время, называемое временем обострения $t_f$ . При $\beta>\sigma+1$ наблюдается локализация горения: несмотря на неограниченный рост температуры в некоторой области или точке пространства при $t\to t_f$ , горение среды локализовано в конечной области.

Можно выделить три класса режимов с обострением. $HS$ - режим $(\beta<\sigma+1)$ область эффективного горения $\sigma_{eff}$ растет. $S$ - режим $(\beta=\sigma+1)$ $\sigma_{eff}$ не меняется на развитой стадии и $LS$ -режим $(\beta>\sigma+1)$ , где $\sigma_{eff}$ сокращается.

В работах [5,8] было показано, что в $LS$-режиме существуют собственные функции горения среды. Эти функции имеют одинаковый закон роста и практически до $t=t_f$ остаются подобными себе. Если в линейной математической физике собственные функции отражают краевые условия, геометрию области, то здесь зачастую эти факторы несущественны. Собственные функции здесь отражают внутренние свойства среды. Они получаются как решения автомодельной задачи и описывают горение в виде простых и сложных структур [5,8] . Простая структура соответствует первой собственной функции, сложные - старшим.

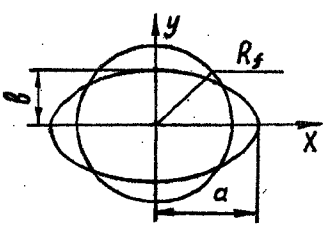
Для исследования резонансных свойств горения среды в виде сложных структур необходимо точное задание начальных возбуждений. В реальных физических процессах флуктуации и другие факторы искажают начальные распределения. Это приводит к необходимости рассматривать неавтомодельные начальные профили простой формы. В работе рассмотрено двухпараметрическое семейство распределений $T|_{t=0}=A\varrho^{-k(r-r_0)^2}$, которые будем называть простыми квазиструктурами. Рассмотрим перекрытие в пространстве таких профилей температуры. Обычно в таком распределении можно выделить, исходя из физических соображений (симметрии, наличия локальных максимумов и т.д.), простые квазиструктуры. Каждая из них обладает своей областью локали-

зации. Если эти области пересекаются и наличие остальных квазиструктур существенно сказывается на развитии данной, то необходимо рассматривать процессы их взаимодействия. Такое распределение температуры вызывает горение среды в виде сложной квазиструктуры.

В работах [3+9] показано, что для одномерных задач существует характерный размер $L_f$ – фундаментальная длина. Если размер начального возбуждения превосходит $L_f$, то наблюдается локализация тепла и горение идет в режиме с обострением. До выхода на эту длину интенсивного горения нет.

В многомерном случае можно говорить о фундаментальной области $G_f$. В случае цилиндрической и сферической симметрии она играет ту же роль, что и в одномерных задачах и имеет соответственно форму круга и шара.

Однако в многомерном случае у фундаментальной области появляются новые свойства. Приведем пример. Рассмотрим горение в $S$ - режиме ($\beta = \delta + 1$) на плоскости. Фундаментальная область в этом случае – круг, радиуса $R_f$. Зададим начальное распределение температуры в виде эллипса с полуосями $a$ и $b$, так что $a > R_f$, $b < R_f$.




Казалось бы, по аналогии с одномерным случаем, интенсивное горение и локализация тепла будет наблюдаться, когда фронт структуры дойдет до границы $G_f$ или перекроет ее. Однако этого не происходит.

Интенсивное горение начинается без выхода на $G_f$. Далее наблюдалось сокращение области эффективного горения $G_{eff}$ по направлению $X$ и рост вдоль оси $Y$. То есть локализация по одному направлению сопровождается растеканием тепла по другому. Это позволяет говорить о векторном характере локализации горения.

В $LS$ -режиме при росте температуры в 80-100 раз и определенных параметрах, $G_{eff}$ имеет форму сжимающегося со временем эллипса с медленно меняющимся эксцентриситетом. Этот процесс медленно идет в широком интервале температур. Это связано с тем, что для направлений, где диаметр $G$ минимален, подток тепла идет в основном из центральных областей, поэтому здесь имеет место аналог задачи с краевым режимом, а не просто задача с объемным источником.

Величина пересечения фундаментальных областей простых квазиструктур определяет длительность и характер их взаимодействия. Анализ процессов для различных начальных распределений свидетельствует о резонансных свойствах изучаемой среды. Например, при удалении двух простых квазиструктур друг от друга наблюдалось увеличение интервала температур, где происходило эффективное взаимодействие, в десятки раз. Эффект носил пороговый характер, так как при большем удалении имело место "прервавшееся взаимодействие". Под последним мы понимаем затекание структур друг на друга (о чем свидетельствует, например, движение их максимумов к общему центру) лишь до определенного момента времени. Далее, не сливаясь, структуры развиваются независимо. Это связано с конкуренцией процесса затекания на общий центр, поскольку области локализации структур перекрыты, и сокращения областей эффективного горения в $LS$-режиме.

В общем случае при $t \to t_f$ сложная квазиструктура вырождается в одну или несколько простых невзаимодействующих структур.

В работе показано, что с увеличением размерности пространства может иметь место стабилизация взаимодействия простых квазиструктур. Это означает, что эффективное взаимодействие квазиструктур, сопровождающееся сближением их максимумов, происходит за большие времена и в более широком интервале температур. Это связано с возможностью оттока по другим пространственным направле-

ниям.

Фундаментальную роль играет пространственная симметрия распределения температуры. С увеличением степени симметрии времена обострения увеличивались в несколько раз.

В сложной квазиструктуре (состоящей, например, из трех простых квазиструктур) на стадии динамики наблюдалось движение локальных максимумов на общий центр.

Если несимметрия велика, то развивается выделенная часть распределения. В остальной части пространства температура до $t_f$ меняется незначительно. Это так называемый "хвост" распределения. Он может иметь сложную проотранственную форму.

Работа с неавтомодельными профилями требует представлений о ходе всего процесса. Поэтому в работе уделено много внимания качественному анализу результатов численного эксперимента и упрощенному аналитическому описанию процессов на разных этапах зволюции сложной квазиструктуры.

Можно выделить три стадии процесса. Первая - стадия перестройки начального профиля. Идет сложная перестройка всего начального распределения. Локальные максимумы неподвижны. Наиболее удобны для математического списания этой стадии моменты распределения температур, то есть величины вида $\int_{\mathcal{D}_1} f_1(\bar{r}) T^{\gamma_1} dV / \int_{\mathcal{D}_2} f_2(\bar{r}) T^{\gamma_2} dV$ где области интегрирования $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, веса $f_1(\bar{r})$ и $f_2(\bar{r})$ и показатели $\gamma_1$ и $\gamma_2$ определяются спецификой рассматриваемой задачи.

Вторая - стадия динамики. Квазиструктуры эффективно взаимодействуют, что сопровождается движением локальных максимумов температуры. Описание процессов вблизи максимумов возможно в рамках линейной задачи. Такое описание дает результаты, хорошо согласующиеся с численным экспериментом.

Третья - асимптотическая стадия. Сложная квазиструктура распадается на невзаимодействующие структуры или вырождается в одну простую (после слияния максимумов). Эффективными оказыва -

ются обобщения метода осреднения. Вместо уравнения в частных производных рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определенных параметров **квазиструктуры**.

Постановка многомерных численных экспериментов, анализ больших массивов информации представляют самостоятельный интерес. Как правило, необходим учет специфики каждой задачи и довольно точные представления об эволюции решения. Применение пакета программ ТЕКОН [15] позволило эффективно изучить рассматриваемый класс задач.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается процесс горения в среде с объемным источником и коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры по степенному закону. Температура $T(M,t)$ ( $M$ здесь и далее точка пространства) удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} = div(K_0 T^{\sigma} grad\, T) + q_0 T^{\beta} \\ &M \in G + \Gamma \\ &T|_{M\in\Gamma} = 0 \\ &T|_{t=0} = T_0(M) \end{aligned} \qquad (I)$$

Здесь $K_0>0$, $q_0>0$, $\beta>1$, $\sigma>0$ – заданные параметры.

Задача (I) рассматривается в одномерной, двумерной и трехмерной постановке в декартовых координатах.

Одна из возможных физических интерпретаций задачи (I) – описание неравновесных нестационарных процессов в нелинейной сплошной среде. Именно поэтому нужны двумерные и трехмерные постановки. Действительно, одномерной постановке в реальном трехмерном физическом пространстве соответствуют бесконечные по $y$ и $z$ плоскости $T=const$, и только если $T=T(x,y,z,t)$ мы имеем дело с

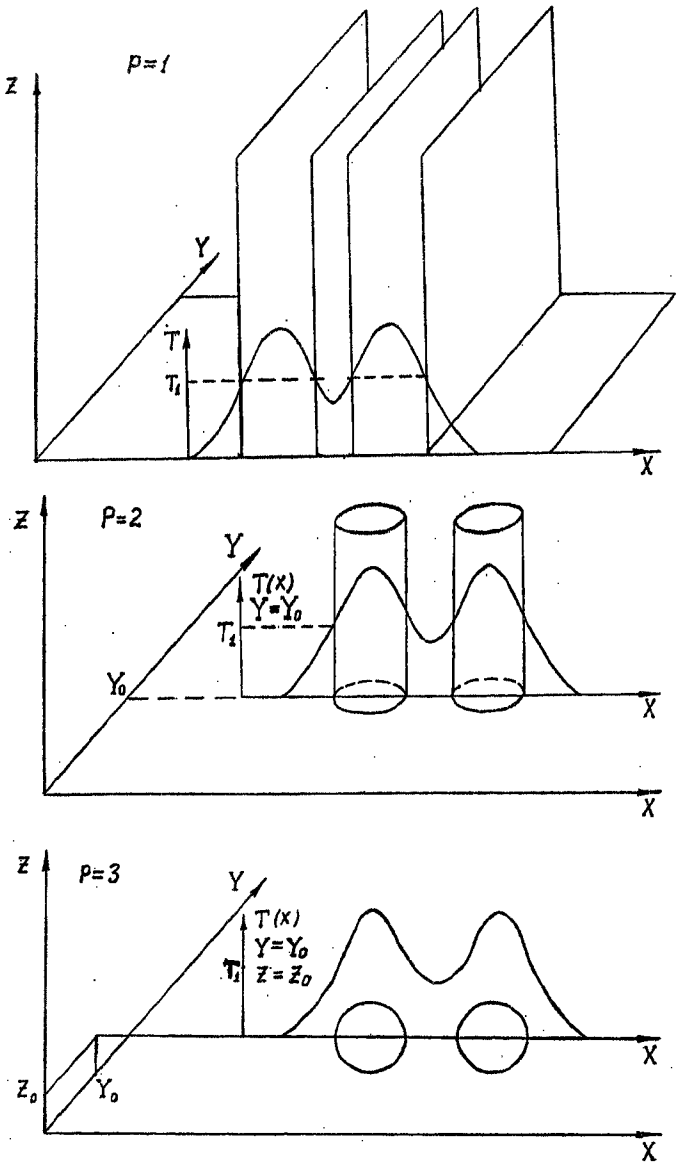



Рис 2.1

Поверхности $T=T_1$ P – размерность пространства

решением, занимающим конечную область пространства. Сказанное иллюстрируется рисунком 2.I. Здесь и далее рисунки идут по ходу изложения. Первая цифра – часть в которой помещен рисунок, вторая – номер рисунка в этой части.

Физические процессы, описываемые уравнением (I) обладают свойством локализации. Однако в реальном трехмерном пространстве решения могут быть локализованы только в трехмерной постановке. Этим обусловлен интерес к многомерным задачам.

В качестве простых квазиструктур в начальный момент времени взяты распределения температур вида $T(\vec{r}) = Ae^{-K(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}$, зависящие от параметров $A$, определяющего амплитуду квазиструктуры и $K$, определяющего ее полуширину. Сложная квазиструктура задается формулой

$$T(\vec{r}) = max\left[B_1 e^{-K_1(\vec{r}-\vec{r}_1)^2}, \ldots, B_N e^{-K(\vec{r}-\vec{r}_N)^2}\right]$$

В двумерных задачах выводились видовые проекции профиля температуры на разные моменты времени (к примеру рисунки 3.8, 3.I0, 3.I2) и их линии уровня $T = 0.95A_1$, $T = 0.75A_1$, $T = 0.5A_1$ $T = 0.25\,A_1$, $T = 0.I\,A_1$, где $A_1$ – абсолютный максимум температуры на данный момент (соответственно рисунки 3.9, 3.II, 3.I3). Рассматривались также наиболее интересные распределения температуры вдоль прямых $x = const$, $y = const$. Выбор прямых определяется начальным распределением.

## 3. Особенности эволюции сложной квазиструктуры в двумерном случае.

### 3.I. Качественная картина взаимодействия.

Рассматривая эволюцию сложной квазиструктуры, мы можем выделить три различных этапа – стадию перестройки начального профиля,

стадию динамики и асимптотическую стадию.

Введем обозначения:

$A_1(t)$ – величина абсолютного максимума температуры

$A_2(t)$ – температура седловой точки $B$ на рисун-

$\Delta = \frac{A_1 - A_2}{A_1}$

$\Delta r$ – расстояние между локальными максимумами распределения температуры (если их больше двух, то мы имеем дело с набором векторов $\Delta \vec{r}_i$ )

Основное внимание в работе уделено рассмотрению случая $\beta \geq \sigma + 1$ , так как при $\beta < \sigma + 1$ в $HS$ – режиме отсутствует явление локализации тепла и происходит быстрое слияние максимумов (см. рис. 3.I, 3.2).

Стадия перестройки профиля имеет место в интервале $0 < t < t_1$ (см. рис. 3.3, 3.6). На этой стадии движение максимумов отсутствует. Идет сложная перестройка формы распределения температур. Амплитуда седловой точки $A_2$ сближается с $A_1$ . К моменту $t = t_1$ $0.05 \leq \Delta \leq 0.2$. По времени этот период в случае режимов с обострением варьируется в широких пределах, от нуля в случае сложных одномерных структур до $0.9\, t_f$ (см. рис.3.6).

Стадия динамики протекает в интервале $t_1 < t < t_2$. Здесь простые квазиструктуры эффективно взаимодействуют. Локальные максимумы движутся к общему центру ( $\Delta r$ на рис 3.6 сокращается). В режимах с обострением $A_1$ может возрасти к концу этой стадии более чем на порядок, т.е. структура становится близка к моменту обострения. Стадия динамики занимает практически все время эволюции сложных одномерных структур.

Асимптотическая стадия имеет место в интервале $t_2 < t < t_f$ в режимах с обострением (см. рис.3.6) и в интервале $t_2 < t < \infty$

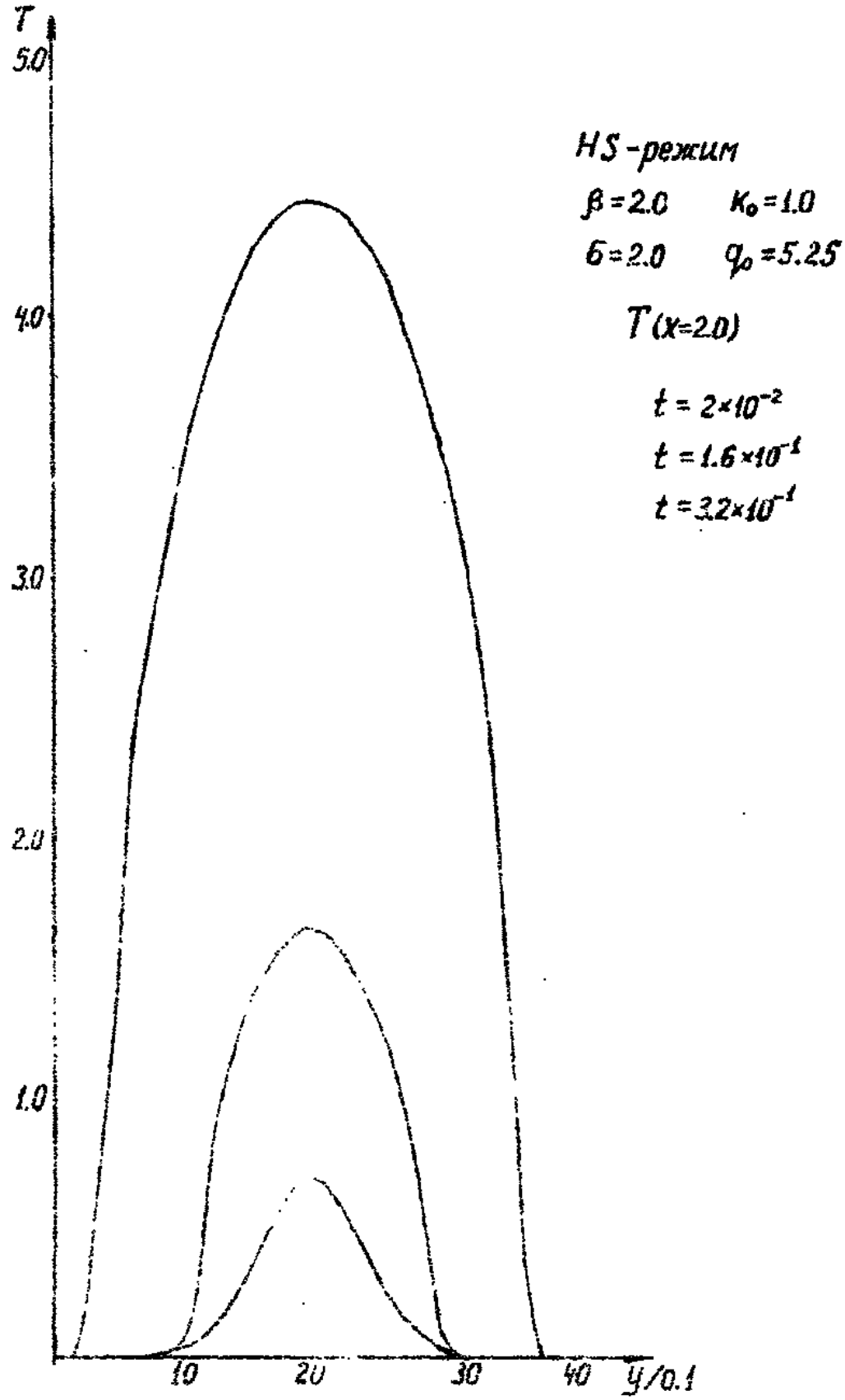

T
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
10
20
30
40
y/0.1
HS-режим
β=2.0
K₀=1.0
6=2.0
q₀=5.25
T(x=2.0)
t = 2×10⁻²
t = 1.6×10⁻¹
t = 3.2×10⁻¹

Рис 3.1

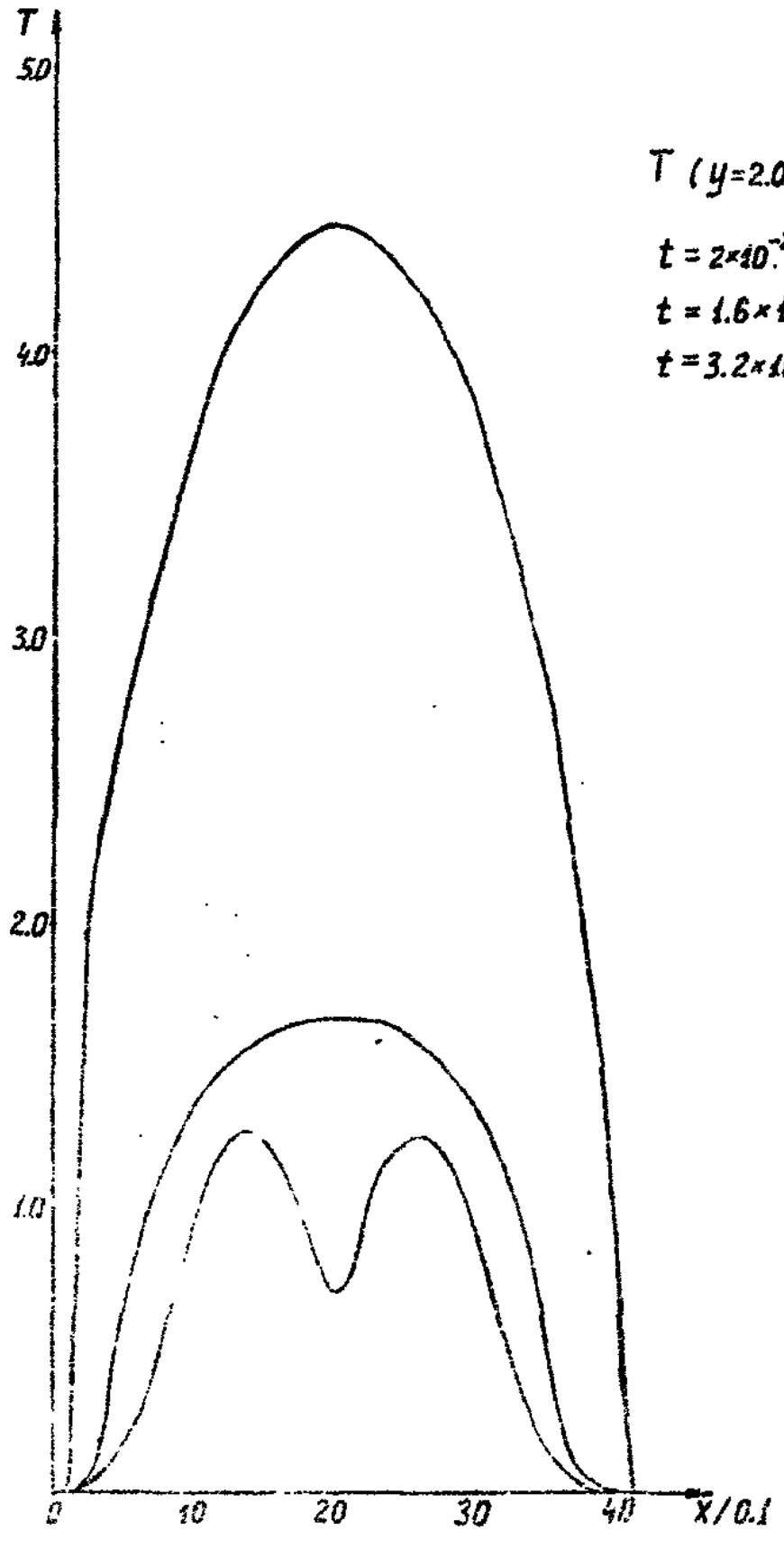



Рис 3.2

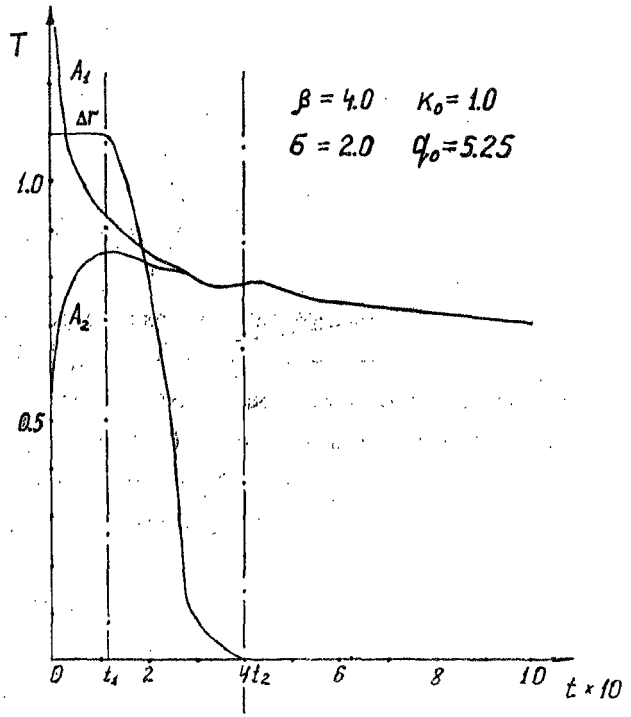



Рис 3.3

в остальных режимах. В $S$ и $LS$ – режимах с обострением при $\Delta r(t_2)=0$ сложная квазиструктура вырождается в одну, а при $\Delta r(t_2)\neq 0$ в несколько невзаимодействующих структур. В режимах без обострения наблюдалось $\Delta r(t_2)=0$ . Пример режима без обострения приведен на рисунке 3.3. Здесь на асимптотической стадии имеем медленное монотонное спадание амплитуды. Это связано с большим размером фундаментальной области и влиянием граничного условия $T|_{\Gamma_1}=0$ . Немонотонность производных по времени вблизи $t=t_2$

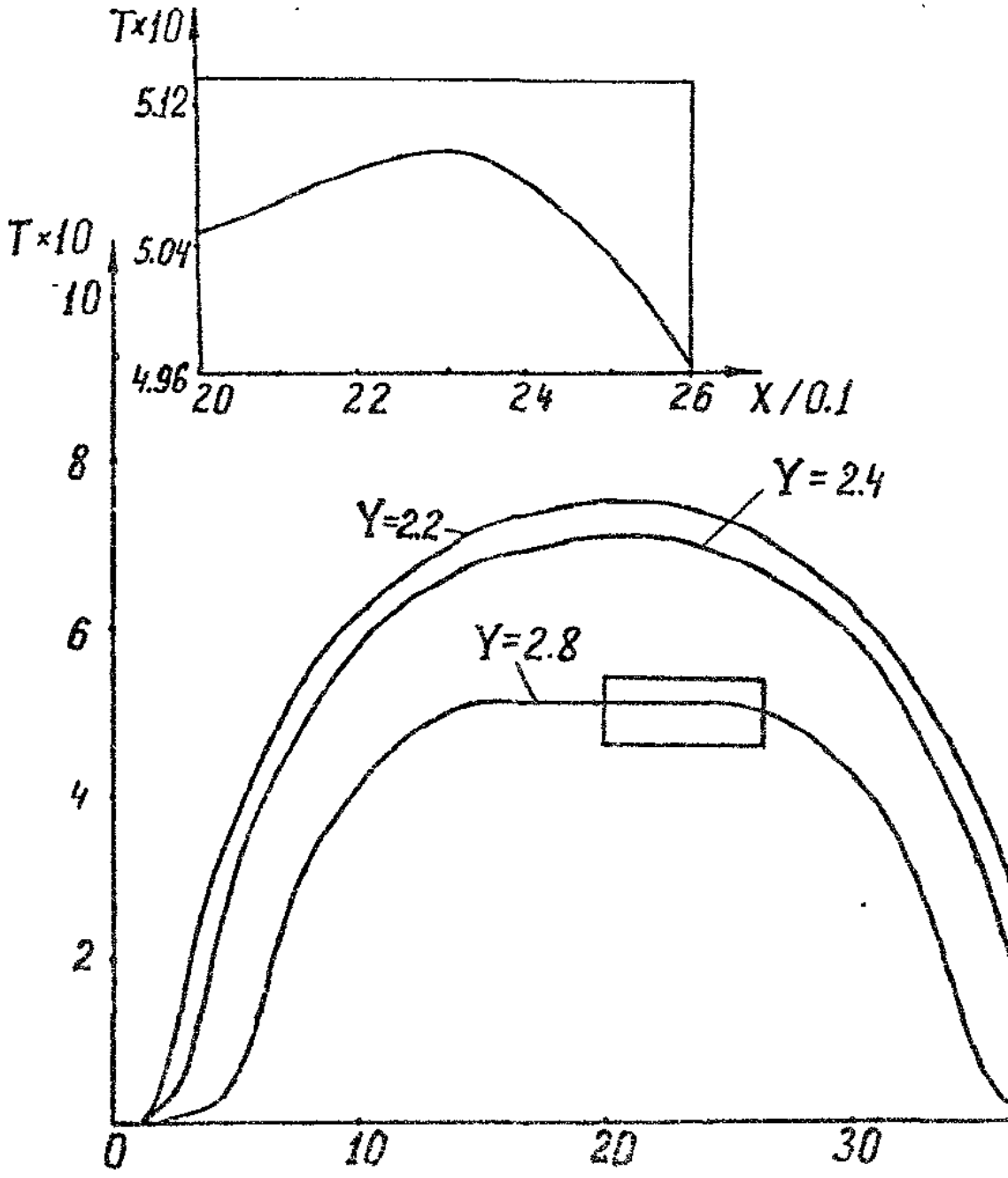



Рис 3.4

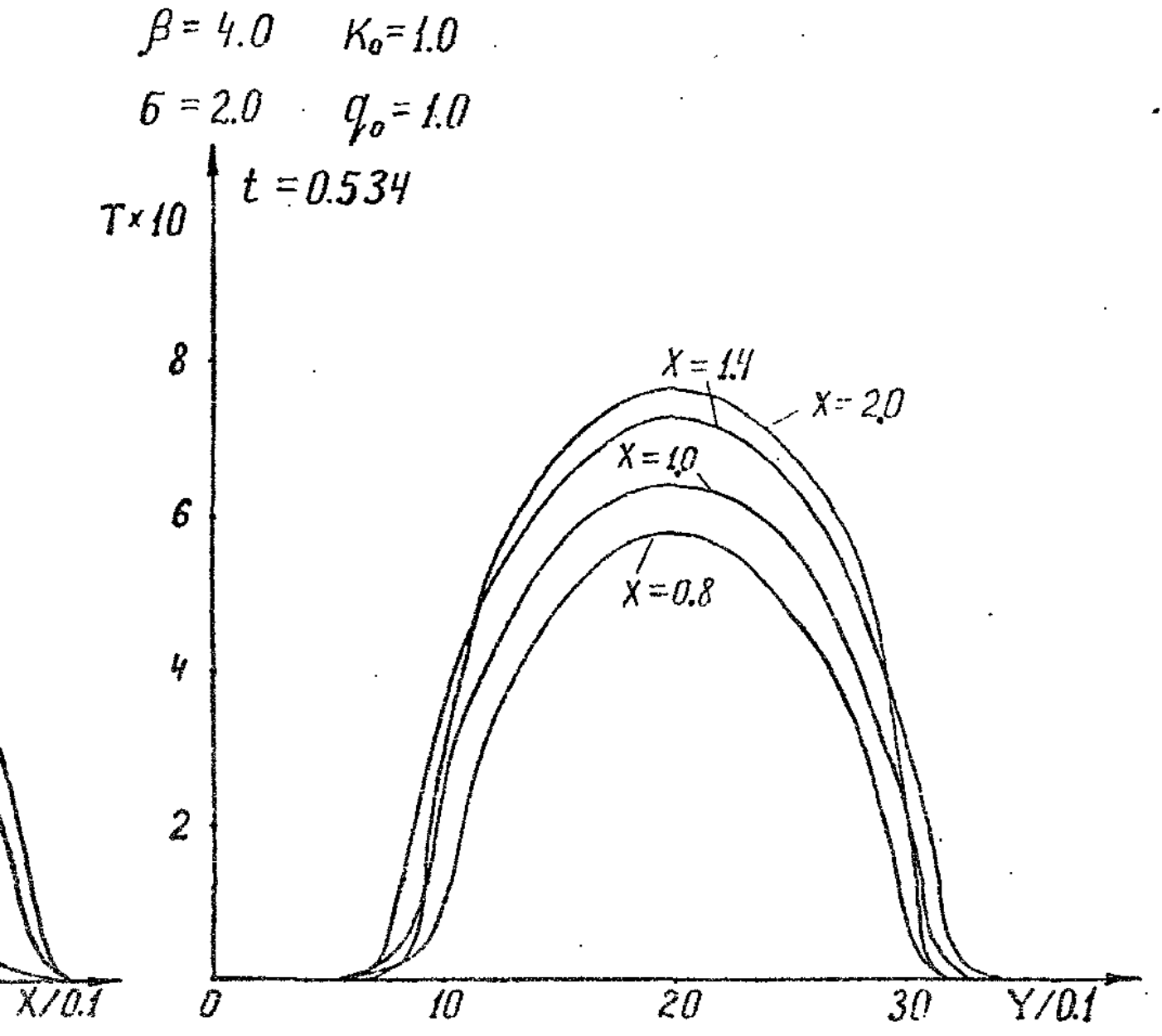
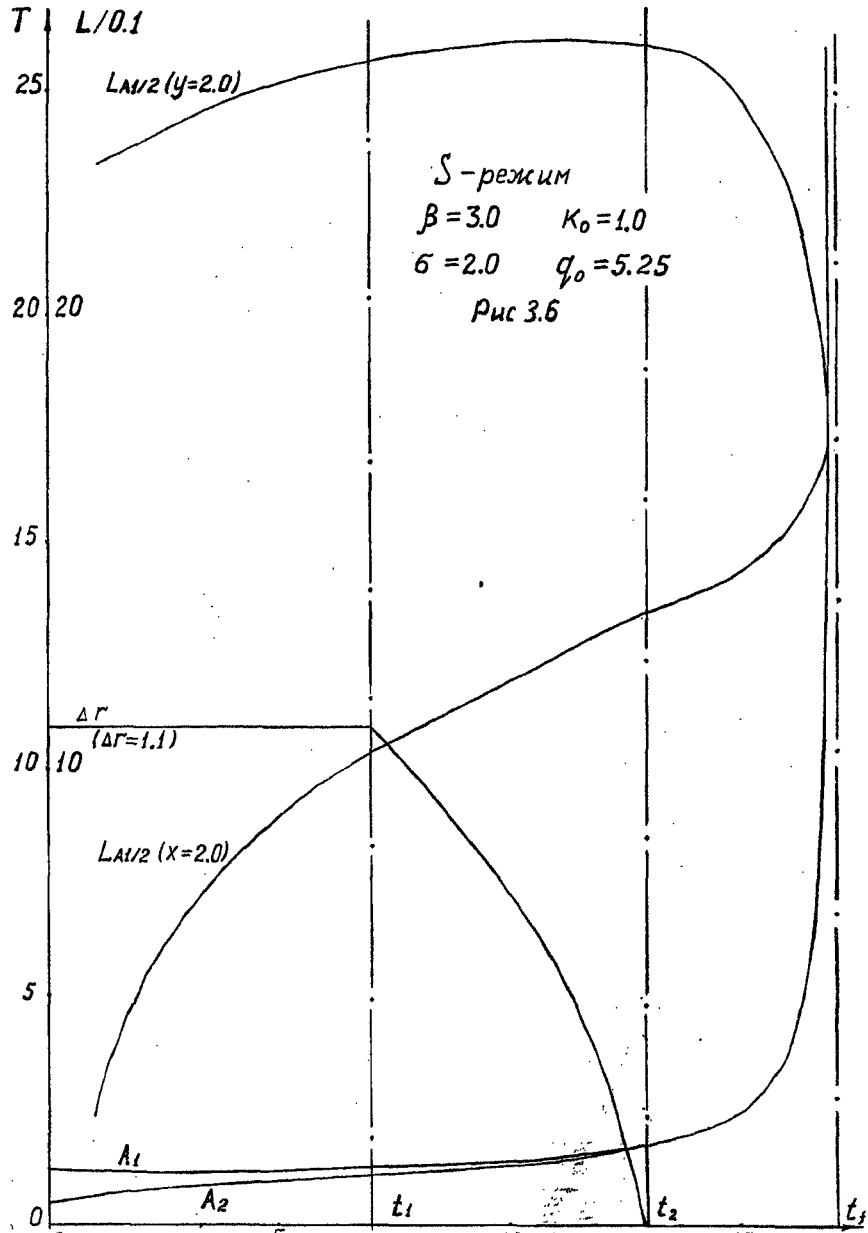

β = 4.0 K₀ = 1.0
б = 2.0 q₀ = 1.0
t = 0.534
T×10
8
6
4
2
X = 1.4
X = 2.0
X = 1.0
X = 0.8
X/0.1
0
10
20
30
Y/0.1

Рис 3.5


T
L/0.1
25
20
20
15
10
10
5
0
0
5
10
15
$L_{A1/2}(y=2.0)$
S-режим
$\beta = 3.0$
$K_0 = 1.0$
$\sigma = 2.0$
$q_0 = 5.25$
Рис 3.6
$\Delta r$
$(\Delta r = 1.1)$
$L_{A1/2}(x=2.0)$
$A_1$
$A_2$
$t_1$
$t_2$
$t_3$

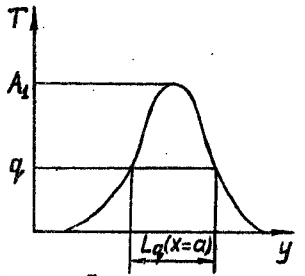
связана с перестройкой профиля.

В численном эксперименте наблюдается существенно двумерный эффект: взаимодействие простых квазиструктур происходит так, что сначала затекают области вблизи максимумов температуры, а весь остальной профиль перестраивается гораздо медленнее. Например, рассмотрим рис.3.4, 3.5. В области, где $T = 0.8\,A_1$ (положение соответствующих прямых видно на рисунке 6.5) затекание произошло и виден один максимум. При меньших температурах в распределении вдоль оси $X$ два максимума. Для режимов с обострением (см. рис. 3.10–3.12) это видно по линиям уровня. В области, где $T \geq 0.75A_1$ локальные максимумы затекают, в областях, где $T < 0.5A_1$ линии уровня меняются незначительно.

Здесь мы сталкиваемся с пространственным проявлением инерции профиля. В случае одномерных квазиструктур это явление было рассмотрено в работах [3,4] . В случае краевых режимов оно рассматривалось в [9,10] . Перестройка распределения температур происходит за конечное время. Это связано с нелинейным характером теплопроводности – процессы идут с разной скоростью при разных температурах.

## 3.2. Развитая стадия процесса. Особенности симметризации квазиструктуры

Численный эксперимент показывает, что в $L_5$-режиме с обострением на асимптотической стадии эффективно горит сокращающаяся область $G_{eff}$ . Вне этой области температура меняется очень мало. Рассмотрим, как меняется $G_{eff}$ со временем на развитой стадии, то есть при $A_1(t) \gg A_1(0)$. Пусть $T(y)$ – распределение температуры вдоль оси $x = a$ (см. рис.) $L_q(x=a)$ – полуширина этого распределения на уровне $T = q$ . Удобной характеристикой области




эффективного горения является линия уровня $T(x,y)=0.5A_1$. Это двумерный аналог полуширины.

Расчеты эволюции сложных квазиструктур в $S$ и $LS$-режимах показывают, что в случае $\Delta r(t_k)=0$ и односвязной $G_{eff}$, форма $G_{eff}$ сглаживается по мере приближения к $t_f$. Происходит симметризация эффективно горящей области. На асимптотической стадии в случае взаимодействия двух одинаковых квазиструктур в $S$ и $LS$-режимах $G_{eff}$ имеет форму эллипса. Для $S$-режима линии уровня на разные моменты времени приведены на рисунке 3.7, а изменение полуосей этого эллипса $L_{0.5A_1}(x=2.0)$ и $L_{0.5A_1}(y=2.0)$ на рисунке 3.6.

Аналогичные процессы происходят и в $LS$-режиме, но тут наряду с симметризацией происходит сокращение обеих полуосей эллипса (см. рис.3.14÷3.19).

Размеры эллипса в сечении $G_{eff}$ зависят от свойств нелинейной среды и начальных данных. Видно, что в $S$-режиме ($\beta=3$, $\delta=2$) процесс симметризации идет быстрее, чем в $LS$ - ($\beta=4$, $\delta=2$) при равных $K_a$ и $q_0$ (см. рис.3.7 и 3.14÷3.19).

Отношение полуосей эллипса получаемого на развитой стадии для двух эффективно взаимодействующих квазиструктур зависит от расстояния между ними при $t=0$. Это отношение стремится к единице при уменьшении расстояния между ними, т.е. эллипс стремится к кругу.

Таковы особенности процесса симметризации в двумерном случае, наблюдаемые в численном эксперименте.

Сравним ход процесса с эволюцией квазиструктуры в одномерном случае. Для одномерных задач характерен выход на соответствующее автомодельное решение при росте температуры в 5-7 раз. При этом

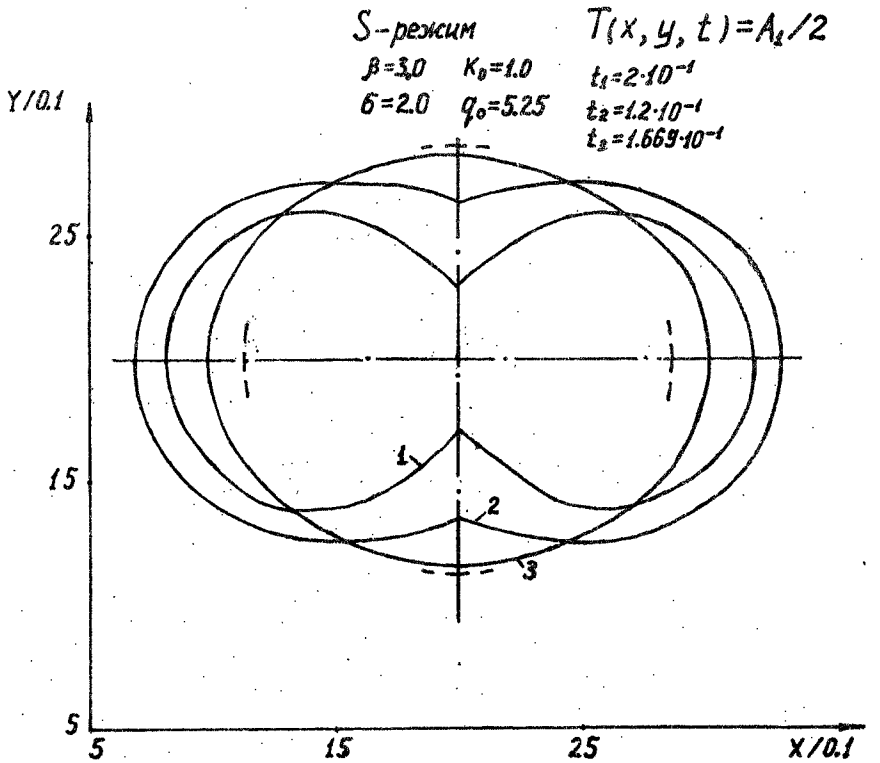



Рис 3.7

профиль решения внутри области $G_{eff}$ забывает начальные данные. В двумерном случае появляется новый элемент–форма области эффективного горения. Здесь также есть автомодельные цилиндрически-симметричные решения. Однако $G_{eff}$ сохраняет форму эллипса при росте температуры в 80–100 раз, причем влияние начальных данных сказывается не только на величине амплитуды квазиструктуры, но и на форме области $G_{eff}$. Квазиструктура с эллиптической формой не есть резонансно возбужденная собственная функция среды, поскольку она не является структурно устойчивой, т.е. ее форма из-

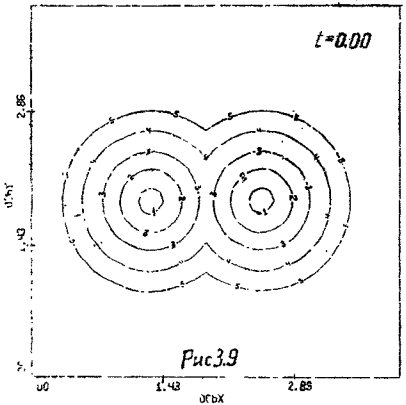



Рис 3.9

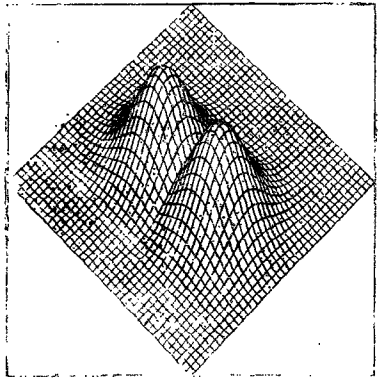


Рис 3.8

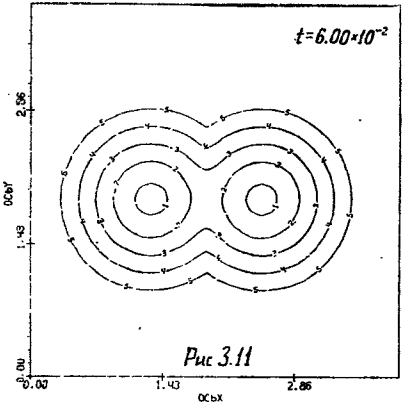



Рис 3.11

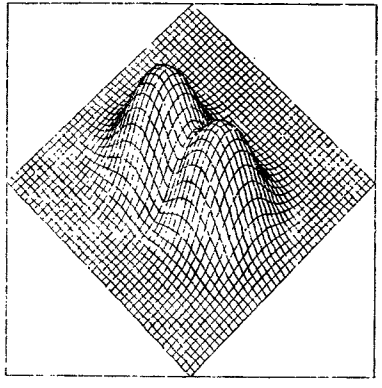


Рис 3.10

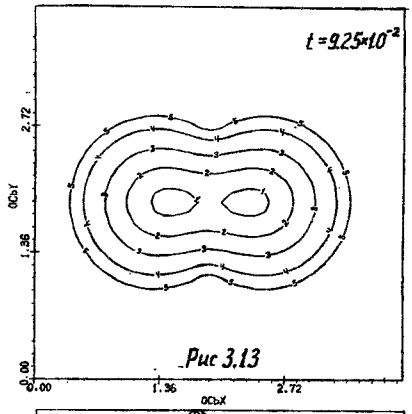



Рис 3.13

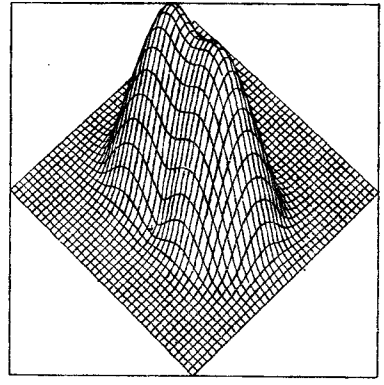


Рис 3.12

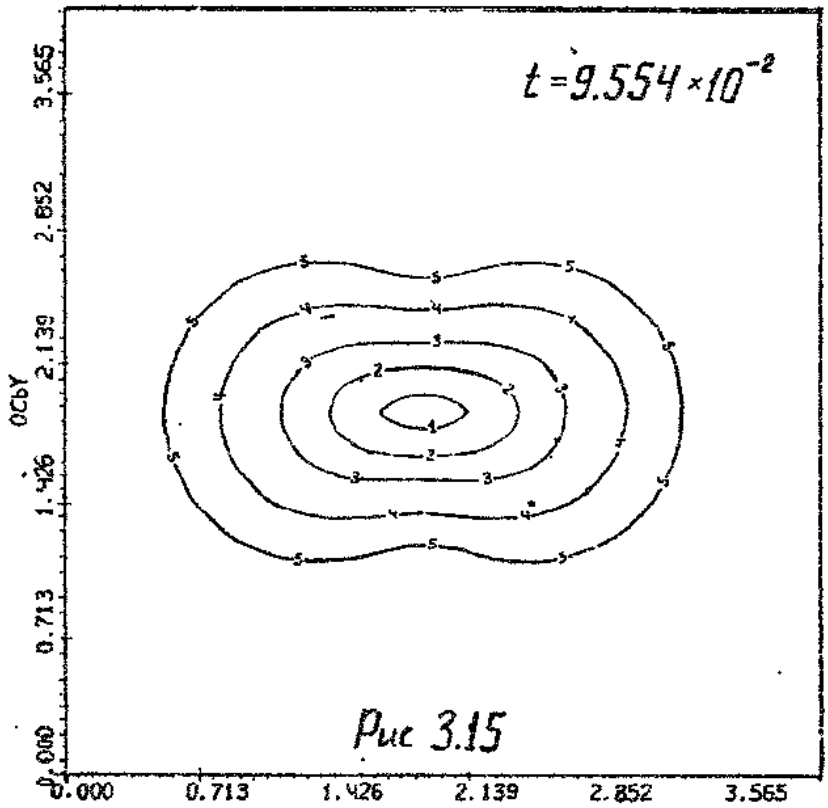



Рис 3.15

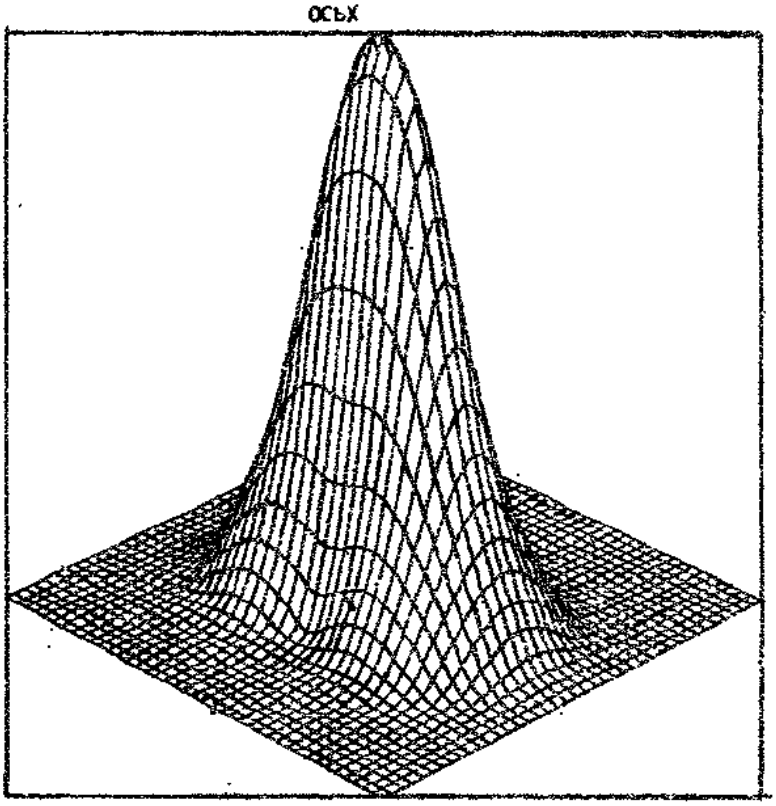


Рис 3.14

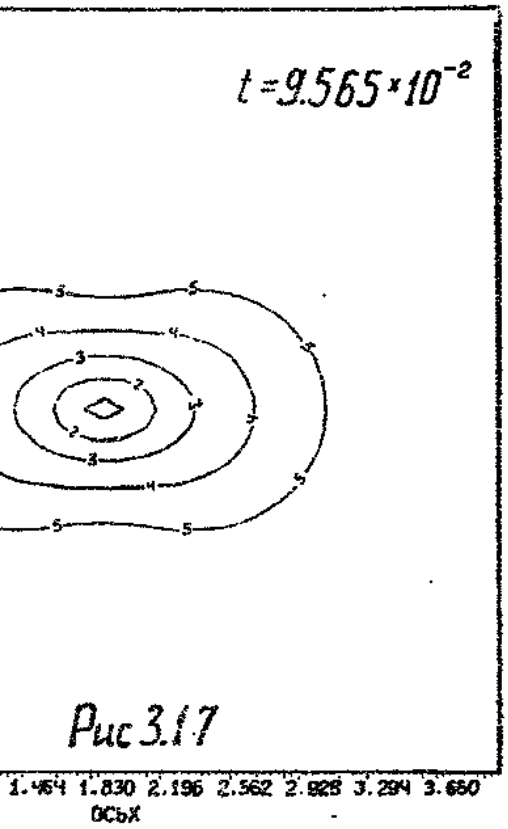



Рис 3.17

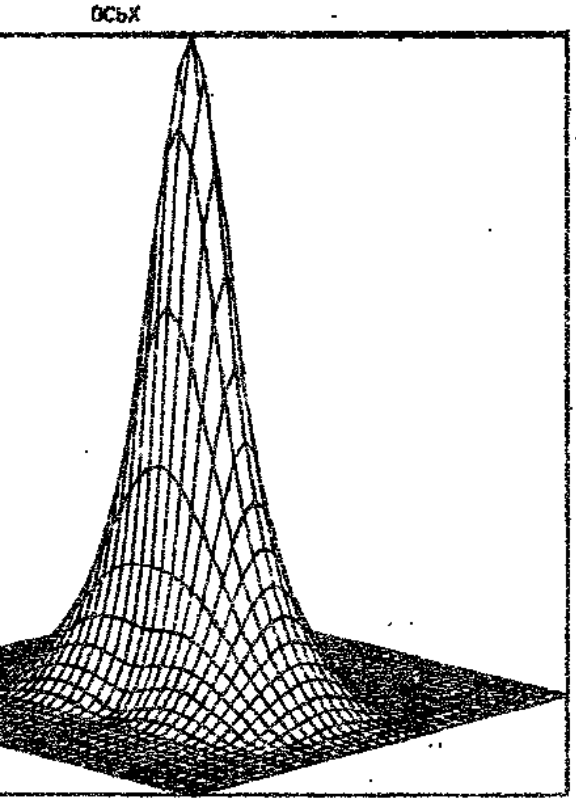


Рис 3.16

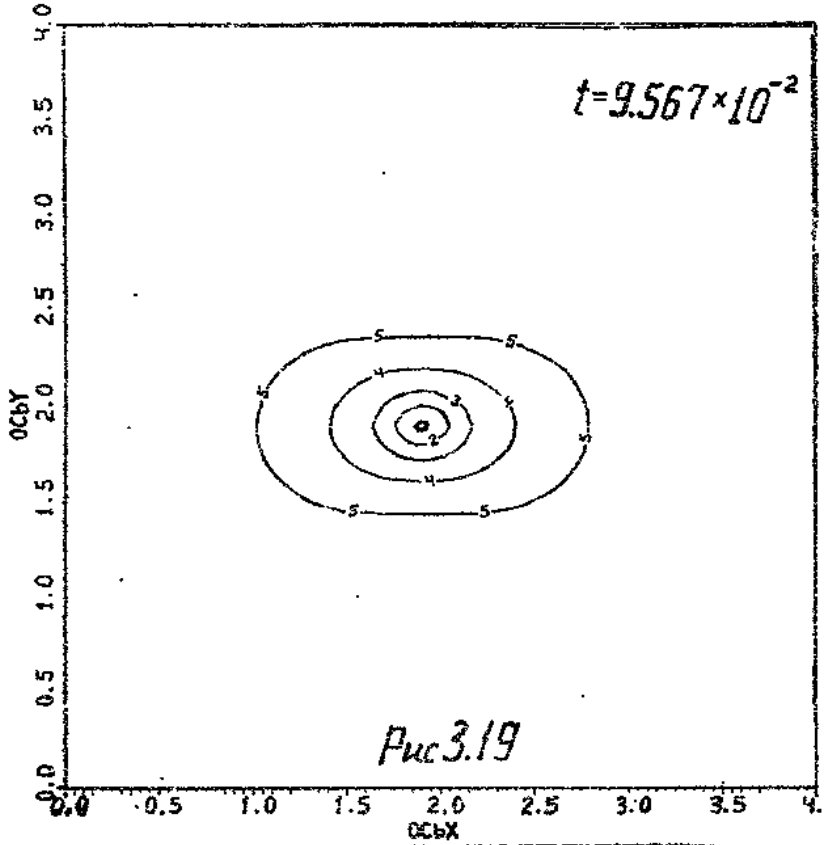



Рис 3.19

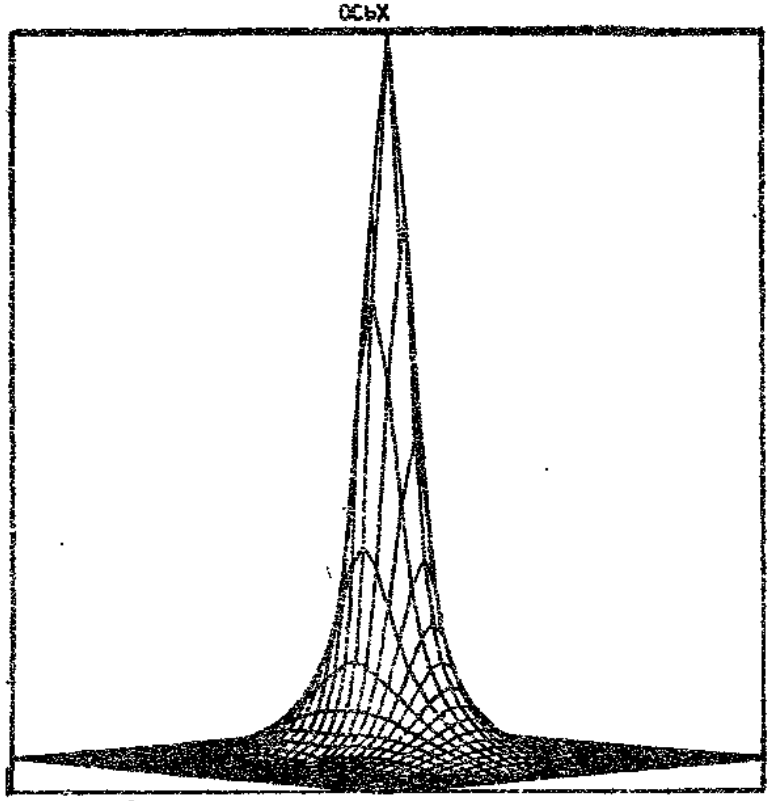


Рис 3.18

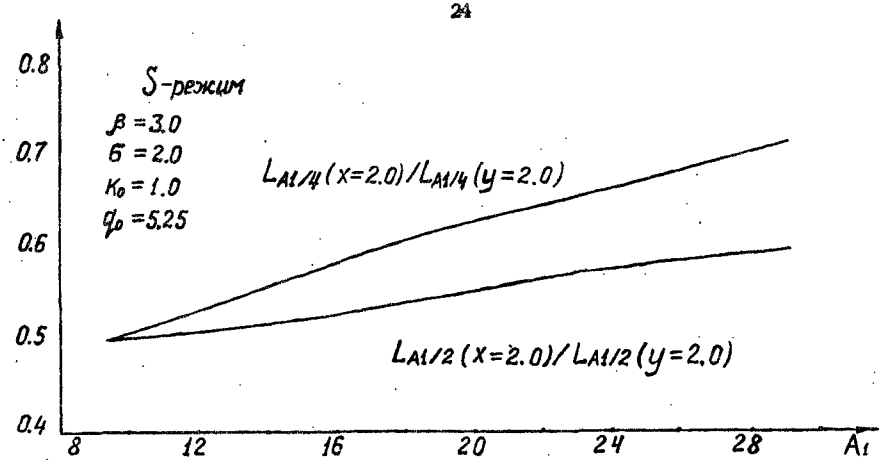



Рис 3.21

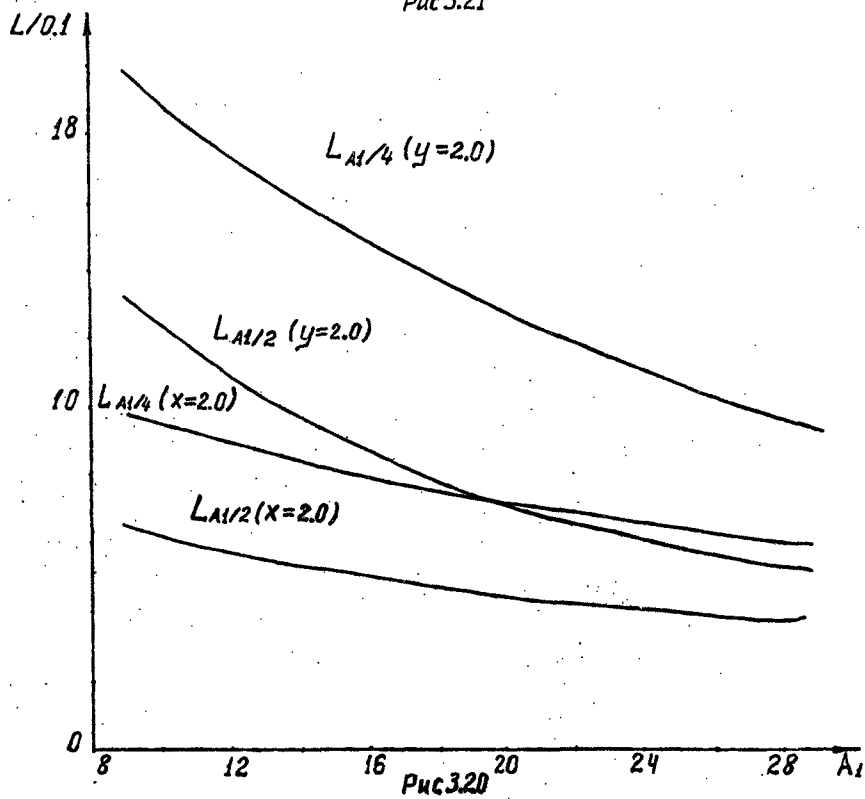



Рис 3.20

меняется со временем (понятие структурной устойчивости подробно анализируется в [5,8] ). Это следует из анализа самого уравнения (2.I). (Здесь первая цифра - номер части, где выписано уравнение, а вторая - его номер в этой части). Действительно, перейдем в систему локально ортогональных координат, где одним из семейств координатных поверхностей являются эллиптические цилиндры [I4] и раосмотрим оператор Лапласа в новых переменных. Коэффициенты Ламе при этом оказываются такими, что член при производной по одной координате зависит ст значения другой. Это неизбежно приволит к изменению эллиптической формы $G_{eff}$.

Для дальнейшего анализа процесса симметризации необходимо рассмотреть фундаментальную область нелинейной сплошной среды.

### 3.3. Фундаментальная область. Величина перекрытия квазиструктур

В работах [3÷9] показано, что $S$ и $LS$ - режимы горения приводят к локализации горения на фундаментальной длине. В $S$ - режиме при $\beta=\delta+1$ фундаментальная длина зависит лишь от свойств среды $K_0$, $q_0$, $\delta$, $\beta$. В $LS$ -режиме появляется также зависимость от энергии начального возмущения [3] . Если представить решение в виде

$$T(r,t)=g(t)f(\xi) \qquad \xi=\frac{r}{\varphi(t)}$$

то в одномерной, двумерной и трехмерной постановках, обладающих соответственно плоской цилиндрической и сферической симметрией, имеем

$$g(t)=\left(1-\frac{t}{t_f}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}}$$
$$\varphi(t)=\left(1-\frac{t}{t_f}\right)^{\frac{0.5(\beta-\delta-1)}{\beta-1}} \qquad (I)$$

для $f(\xi)$ получаются соответственно уравнения в плоской геометрии:

$$(f^{\sigma} f_{\xi})_{\xi} - \frac{0.5(\beta-\sigma-1)}{(\beta-1)t_f}\xi f_{\xi} + f^{\beta} - \frac{f}{(\beta-1)t_f} = 0 \qquad (2)$$

$$f_{\xi}(0) = 0$$

в цилиндрической геометрии

$$\frac{f^{\sigma} f_{\xi}}{\xi} + (f^{\sigma} f_{\xi})_{\xi} - \frac{0.5(\beta-\sigma-1)}{(\beta-1)t_f}\xi f_{\xi} + f^{\beta} - \frac{f}{(\beta-1)t_f} = 0 \qquad (3)$$

$$f_{\xi}(0) = 0$$

в сферической геометрии

$$\frac{2f^{\sigma} f_{\xi}}{\xi} + (f^{\sigma} f_{\xi})_{\xi} - \frac{0.5(\beta-\sigma-1)}{(\beta-1)t_f}\xi f_{\xi} + f^{\beta} - \frac{f}{(\beta-1)t_f} = 0 \qquad (4)$$

$$f_{\xi}(0) = 0$$

В $S$ -режиме решение (2) имеет конечный фронт. На фронте выполнены условия

$$f(\xi_f) = 0, \qquad f^{\sigma}(\xi_f) f_{\xi}(\xi_f) = 0$$

где $\xi_f$ - автомодельная координата фронта. Расстояние между двумя фронтами автомодельного решения и определяет, как показано в работе [3], фундаментальную длину $S$ -режима

$$L_{\tau(t)} = \frac{2\pi}{\sigma}\sqrt{\sigma+1}\sqrt{\frac{K_0}{q_0}}.$$

Решения уравнений (3) и (4) также имеют конечный фронт при $\beta = \sigma+1$ (рис.3.22) и определяют диаметр фундаментальной области. В рассматриваемой симметричной постановке фундаментальная область для (3) - круг, для (4) - шар. $LS$ - режим также обладает свойством локализации. Однако в отличие от $S$ -режима, автомодельное решение описывает часть профиля температуры получаемого при расчете в частных производных. Уравнения (2)÷(4) имеют фронт на бесконечнос-

ти. В то же время результаты расчета в частных производных говорят о локализации решения, если начальное распределение задано на конечном интервале. Связь автомодельного решения с фундаментальной длиной сложнее и требует, как показано в [3] привлечения мажорантных оценок и теорем сравнения. У неавтомодельных профилей растекание тепла продолжается пока не будет достигнута фундаментальная длина. На ней начинается интенсивное горение и происходит локализация тепла. Уравнения (3) и (4) отличаются от уравнения (2) первым членом, который приводит к увеличению диаметра фундаментальной области (см. рис.3.22, $p$ – размерность пространства)

$$L_{T(III)} > L_{T(II)} > L_{T(I)} \qquad (5)$$

В работах [5,8] показано, что в одномерной постановке нерезонансно возбужденный профиль вырождается в первую собственную функцию среды. В случае цилиндрической и сферической геометрии этот вывод также справедлив. Поэтому форма профиля в $S$ -режиме при $t \to t_f$ совпадает с формой этой функции (см. рис.3.22).

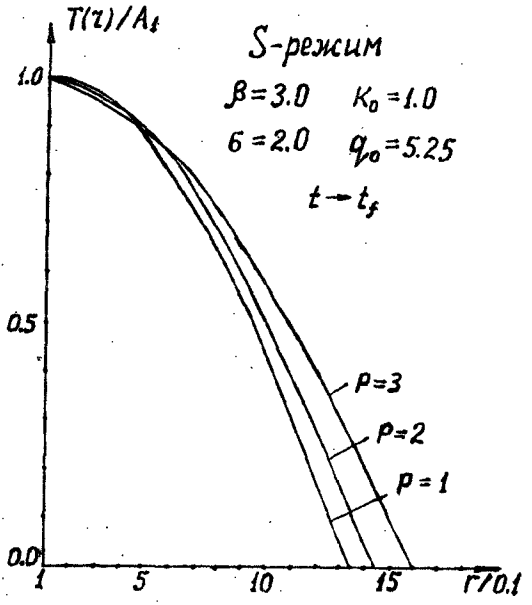



Рис 3.22

В двумерных расчетах сложные квазиструктуры состояли из простых, заданных формулой $T_0(X,Y)=Ae^{-K(X^2+Y^2)}$, $A=1.35, K=2.5$. Эффективный размер каждой из них был меньше фундаментальной области. Из-за этого интенсивное горение начиналось после длительной стадии выхода на фундаментальную область.

В случае цилиндрически и сферически симметричных квазиструктур диаметр фундаментальной области играет ту же роль, что и фундаментальная длина в плоском случае. Однако в двумерных задачах у фундаментальной области появляются новые свойства. В одномерном случае интенсивное горение начиналось, когда размеры возбуждения достигали $G_f$. Казалось бы, что для начала процесса интенсивного горения в двумерных задачах необходимо, чтобы распределение достигло или превысило границы $G_f$. Однако это не явля-

ется необходимым условием начала интенсивного горения. На рисунках 3.6, 3.7 видно, что эффективное горение началось без перекрытия квазиструктурой всей фундаментальной области. На развитой стадии идет медленный процесс сокращения $G_{eff}$ по направлению $y$ и рост по направлению $x$ (см. рис.5.2). Таким образом локализация сложной квазиструктуры зависит от направления и, следовательно, носит векторный характер. Медленный характер выхода на цилиндрически-симметричное решение виден на рис.3.20и 3.21, где изображены зависимости полуосей сечений квазиструктуры от амплитуды распределения. Изучение зависимости параметров структуры от ее амплитуды при $t \to t_f$ является удобным, поскольку графики изменения этих величин от времени не позволяют проследить тенденцию поведения параметров при $t \to t_f$) (см. рис.3.6).

Физически растекание вдоль оси $y$ при локализации вдоль оси $x$ на развитой стадии, по-видимому, связано с тем, что для областей у границы $G_{eff}$ вдоль оси $y$ рост температуры в основном происходит за счет оттока тепла из $G_{eff}$, а не за счет объемных источников. Для этих областей мы имеем аналог краевой задачи, для которой характерны свои глубины локализации.

Рассмотрим взаимодействие двух одинаковых квазиотруктур. Оценим величины их пересечения в проведенных численных экспериментах. Из методических соображений расчеты проводились таким образом, что начальное распределение температур оотавалось одним и тем же, менялась лишь мощность иоточника $q_0$. Удобно рассматривать величину пересечения квазиструктур, учитывающую не только их пространственное расположение, но и свойства сплошной среды (значения $\beta$, $\delta$, $K_0$, $q_0$). Применим к начальному раопределению одну из разновидностей автомодельной обработки [5].

В работах [5,8] метод автомодельной обработки был применен для анализа эволюции одномерной квазиструктуры. Пусть процесс го-

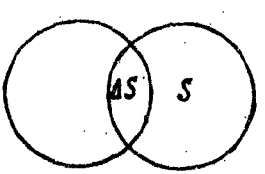
рения начинается не при $t=0$ , а при $t^{-} \to -\infty$ и продолжается до $t_f=0$ . При этом уравнение (2.I), как показано в [3] , приводится по аналогии с уравнениями (3.2)+(3.4), к автомодельному виду

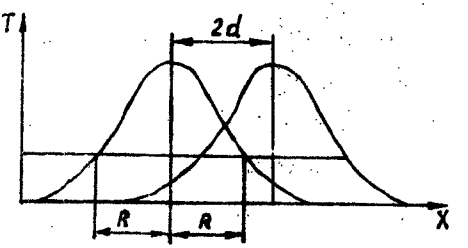
$$\frac{1}{\beta-1} f + \frac{\beta-6-1}{2(\beta-1)} \xi \frac{df}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left[f^{6} \frac{df}{d\xi}\right] + f^{\beta}$$
$$T = (q_0 t)^{-\frac{1}{\beta-1}} f\left(\frac{r}{(|q_0 t|)^{\frac{6}{2(\beta-1)}} |\kappa_0 t|^{1/2}}\right) \qquad (6)$$

Из (6) видно, что эволюция распределения $T(r,t)$ , заданного в начальный момент профилем $T_0(r)$ в среде, где мощность источника равна $q_0$ идет так же, как для профиля $T^*(r,t)$ в среде с $q_0$=I, где

$$T^*(r,t) = q_0^{\frac{1}{\beta-1}} T\left(r q_0^{\frac{6}{2(\beta-1)}}, t\right) \qquad (7)$$

Отметим, что все преобразования являются строгими для автомодельных распределений температуры. Переведем начальные профили $T_0(x,y)$ использованные в численном эксперименте, преобразованием вида (7) в профили $T^*(x,y)$ и для них оценим величину пересечения простых квазиструктур.



Рассмотрим линии уровня $T^*(x,y,t)=A^*$ ( $A^*$ достаточно мало). Поскольку во всех расчетах использовались квазиструктуры принадлежащие двухпараметрическому семейству $T(r)=Ae^{-\kappa(r-r_0)^2}$ то величина пересечения на уровне $T(x,y,0)=A^*$ достаточна для характеристики пространственного пересечения двух структур. В случае более сложных пространственных распределений квазиструктур необходимо анализировать пересечение областей локализации. Величину пересечения двух простых квазиструктур будем характеризовать параметром $\delta_R=\frac{R-d}{R}$ , где $R$ - радиус линии уровня $T^*(x,y,0)=A^*$, а $2d$ - расстояние между центрами квазиструктур. Для двумерных квазиструктур введем кроме $\delta_R$ величину $\delta_S$ . Она равна отношению площади пересечения квазиструктур к площади одной простой квазиструктуры $\delta_S=\frac{\Delta S}{S}$ . В рассматриваемом случае двух одинаковых квазиструктур для величины $\delta_S$ имеем выражение

$$\delta_S=\frac{2}{\pi}\left(\arccos\frac{d}{R}-\frac{d}{R}\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}}\right)$$

Зависимость введенных величин $\delta_S$ и $\delta_R$ от отношения $\frac{d}{R}$ видна на рисунке 3.29. В одномерном случае $\delta_R$ можно интерпретировать и как отношение соответствующих площадей.

Рассмотрим результаты проведенных двумерных расчетов.

$\beta=4.0$ $\sigma=2.0$ . $\kappa_0=1.0$ $A^*=0.1$

| $\Delta r$ | $q_0$ | $d/R$ | $\delta_R$ | $\delta_S$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta r(t_2)=0.0$ | $<5.25$ | $<0.4908$ | $>0.5092$ | $>0.4012$ |
| $\Delta r(t_2)\neq 0.0$ | 5.5 | 0.4965 | 0.5035 | 0.3938 |
| $\Delta r=const$ | $>7.5$ | $>0.5353$ | $<0.4647$ | $<0.3525$ |

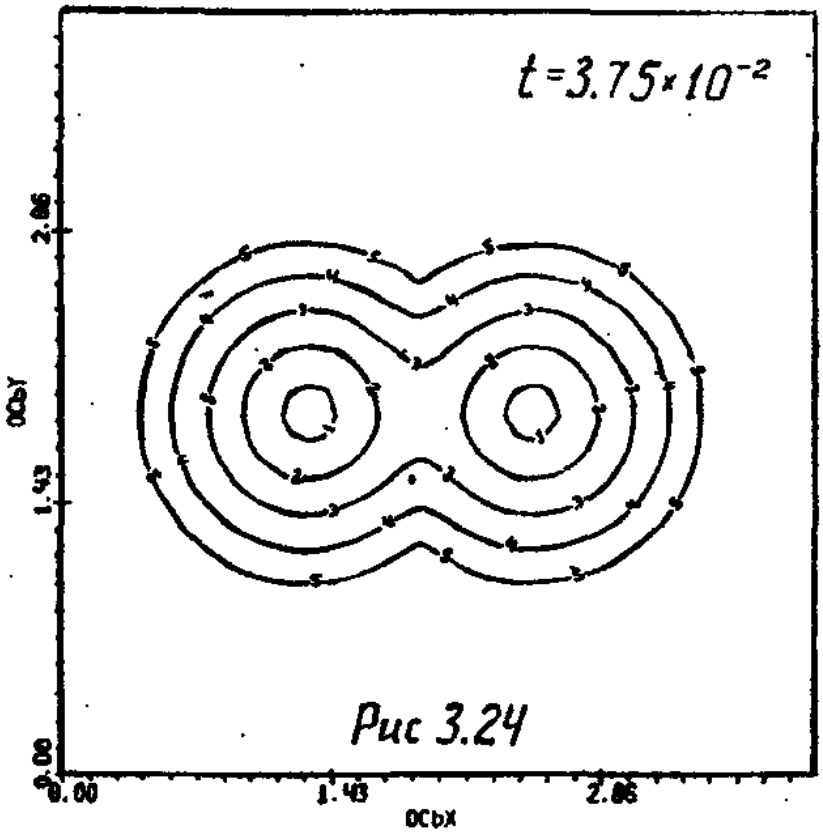



Рис 3.24

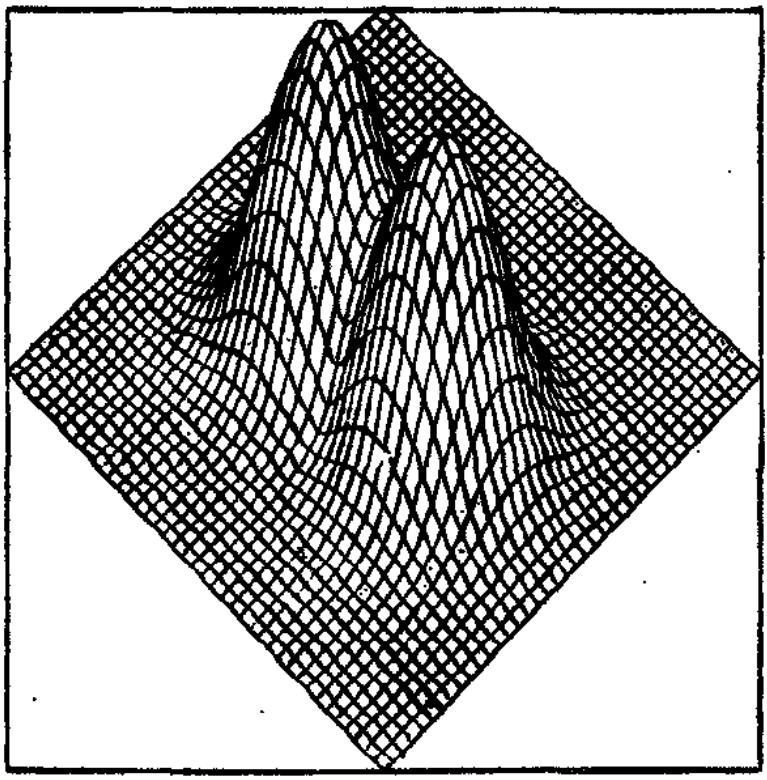


Рис 3.23

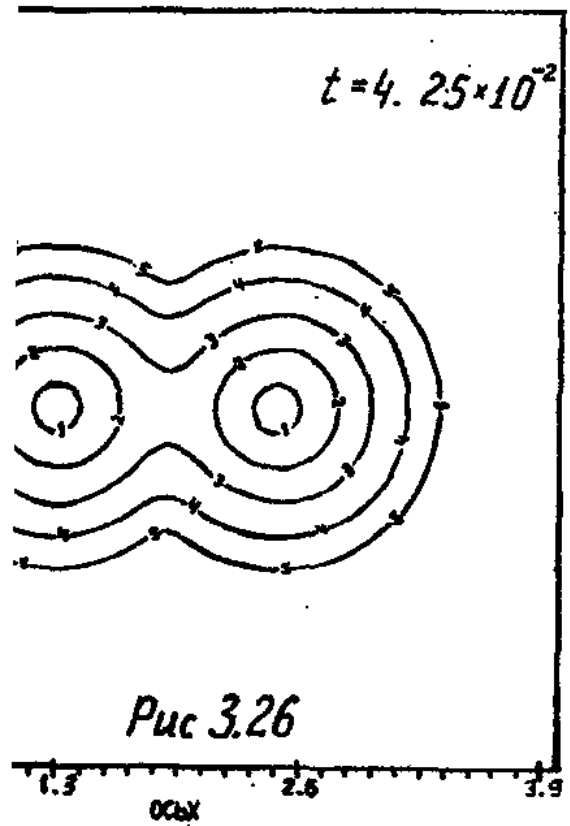



Рис 3.26

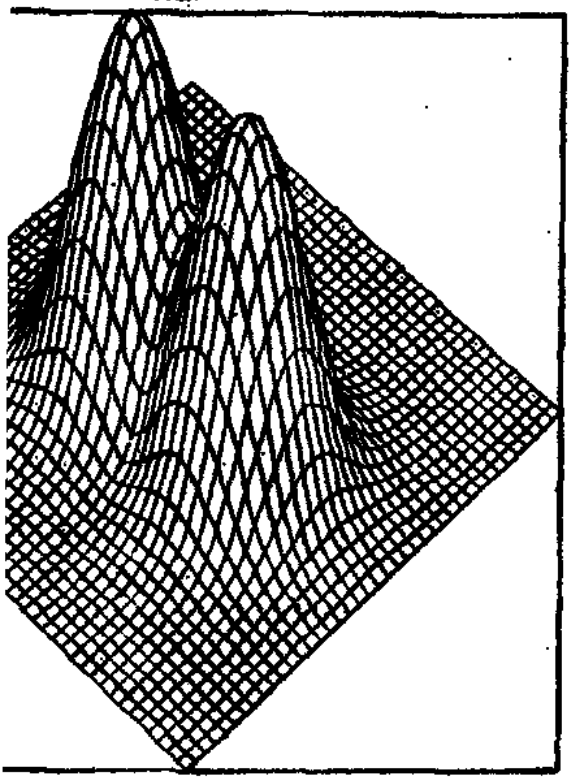


Рис 3.25

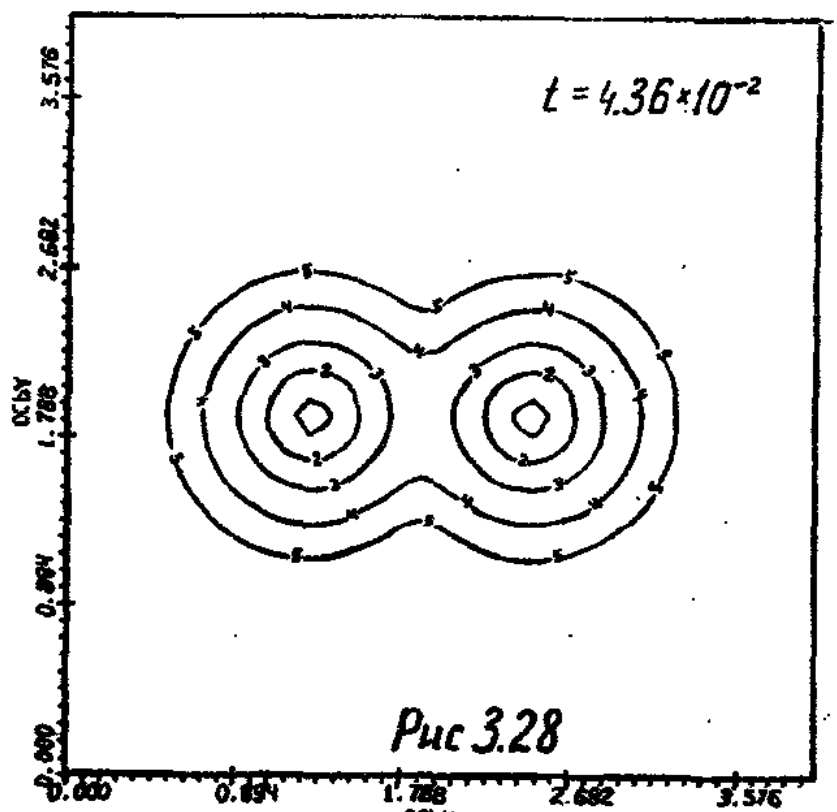



Рис 3.28

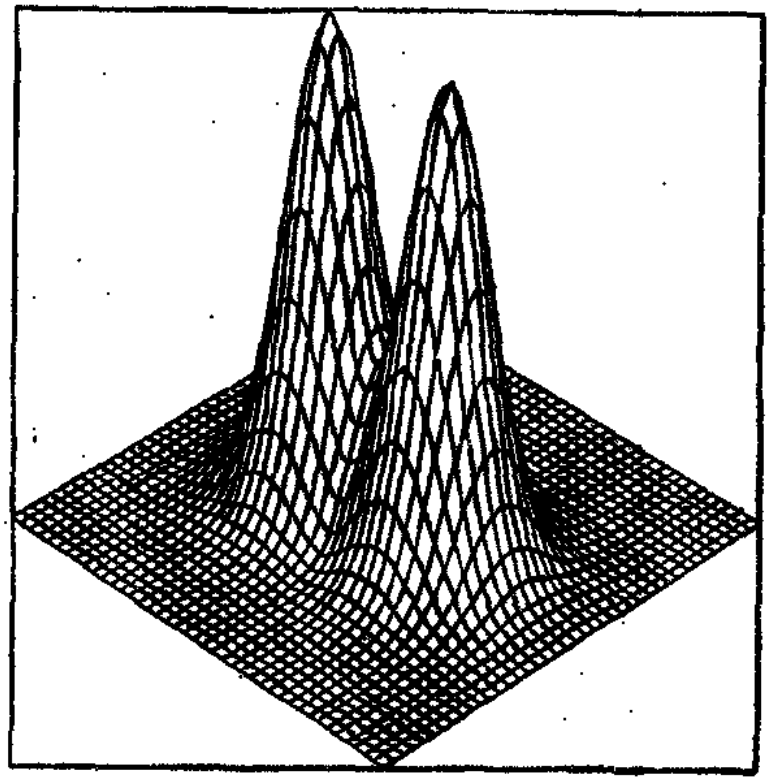


Рис 3.27

Зо всех расчетах, где значение $\delta_s$ не превышало 0.350, эффективного взаимодействия не было. Части сложной квазиструктуры развивались независимо (см. рис.3.23÷3.28). При значении $\delta_s = 0.3838$ наблюдается "прервавшееся взаимодействие": локальные максимумы температуры двигаются навстречу друг другу до момента $t_2$, что свидетельствует об эффективном взаимодействии, после чего простые квазиструктуры развиваются независимо. Это связано с тем, что в $LS$-режиме наряду с затеканием простых квазиструктур идет процесс сокращения $G_{eff}$ каждой из них, препятствующий взаимодействию.

Рассмотрим как меняется продолжительность стадии динамики $\Delta t = t_2 - t_1$ и интервал температур $\Delta A_1 = A_1(t_2) - A_1(t_1)$ в зависимости от величины пересечения простых квазиструктур (см. рис. 3.30). Видно, что при $\delta_R \to \delta_R^*$ (при $\delta_R^*$ начинается "прервавшееся взаимодействие") $\Delta A_1$ возрастает более, чем на порядок. Это одно из проявлений резонансных свойств среды. Действительно, в случае структур близких к собственным функциям сплошной среды, интервал $\Delta A_1$ тем шире, чем ближе распределение к резонансному. Это связано с тем, что при резонаненом возбуждении процессы затекания простых квазиструктур и процеос сокращения $G_{eff}$ каждой из них идут с одинаковой скоростью. Здесь также при определенных значениях $\delta_R$ мы имеем согласованность скоростей этих процессов.

Таким образом резонансные свойства проявляются не только при резонансном возбуждении среды в виде сложной структуры, но и при задании начального распределения в виде определенной квазиструктуры.

Итак, для эффективного взаимодействия необходима определенная степень перекрытия квазиструктур, величина которой зависит от свойств нелинейной среды, определяющих размеры и форму фундаментальной области.

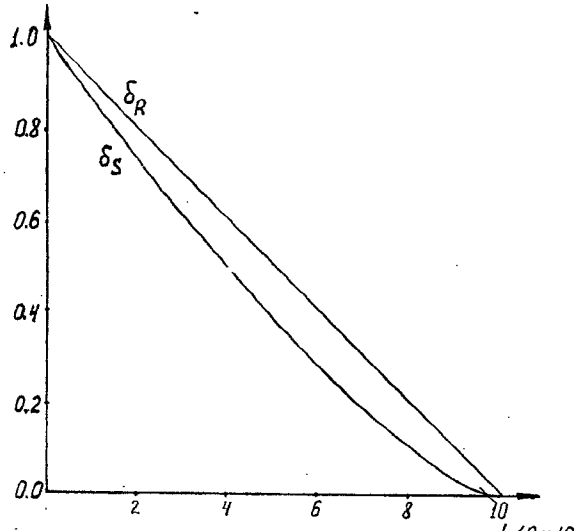



Рис 3.29

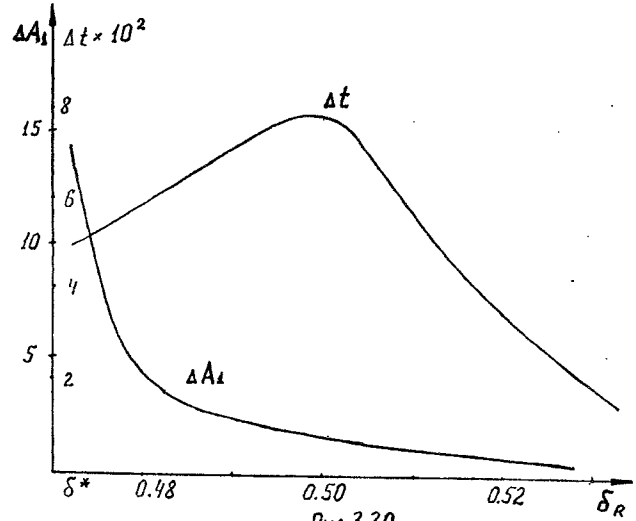
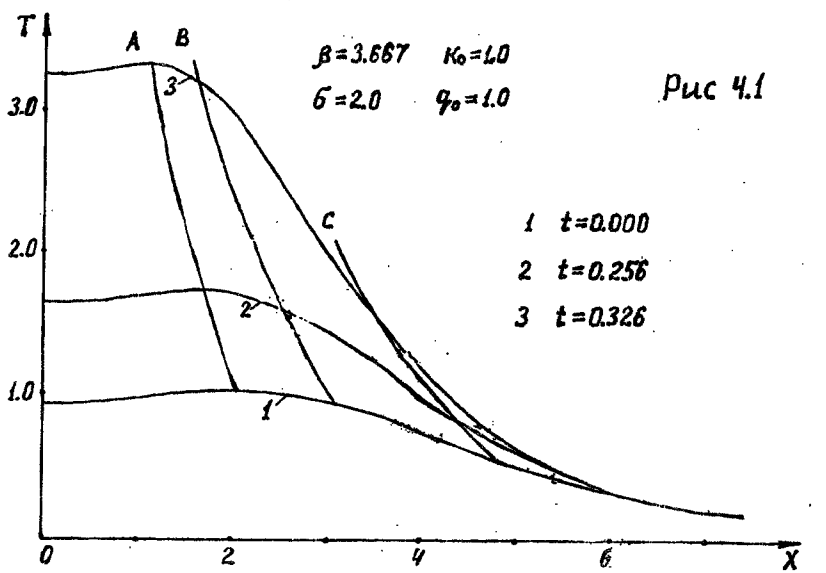



Рис 3.30

## 4. Интегральные характеристики распределения температур. Их эволюция.

Рассмотрим, какие величины эффективно описывают стадию перестройки профиля сложной двумерной квазиструктуры, и какие соотношения связывают их.

В одномерных задачах, т.е. в случае бесконечных по $y$ и $z$ плоскостей, основное внимание было уделено исследованию автомодельных и близких к ним распределений температур [5 , 8]. Из (3.I) и (3.2) следует, что выделенные точки (положения локальных максимумов, полуширин и т.д.) в этом случае характеризуются определенными значениями автомодельной переменной. Описывая эволюцию таких структур, достаточно было следить за траекториями выделенных точек, так как профиль оставался подобным себе.




На рисунке 4.I. изображена эволюция второй собственной функции. Кривая $A$ - траектория правого максимума, $B$ - точки, где

$T(x,t) = T(0,t)$ , и $C$ – полуширины. Все они следуют автомодельному закону $X = \xi\left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{\frac{0.5(\beta-\delta-1)}{\beta-1}}$

Для двумерных квазиструктур на стадии перестройки профиля, когда происходит сложное изменение всего распределения, такое описание непременимо. Ни одно сечение, а тем более положение выделенных точек не дает представления о всей структуре. Для описания необходимы усредненные интегральные характеристики.

Назовем энергией квазиструктуры величину

$$E = \int_G T\,dS \qquad (1)$$

Здесь и далее имеется в виду двумерный случай (в одномерном и трехмерном $dS$ переходит соответственно в $dx$ и $dV$ ).

Назовем координатами центра энергии величины

$$\overset{0}{X} = \frac{\int_G T(x,y)\,x\,dS}{\int_G T(x,y)\,dS}$$

$$\overset{0}{Y} \quad \frac{\int_G T(x,y)\,y\,dS}{\int_G T(x,y)\,dS} \qquad (2)$$

В дальнейшем центр энергии будем называть центром квазиструктуры. Для анализа симметричных относительно прямой $X = 0$ квазиструктур введем $X$ и $Y$ – моменты, вычисленные не по всей области $G_{eff}$, а по ее части лежащей по одну сторону оси. Пусть $G^+$ – часть области при $X > 0$ , $G^-$ –при $X < 0$ , тогда

$$X^+ = \frac{\int_{G^+} T\,x\,dS}{\int_G T\,dS}$$

$$X^- = \frac{\int_{G^-} T\,y\,dS}{\int_G T\,dS} \qquad (3)$$

Важность такой характеристики, как энергия квазиструктуры, можно проиллюстрировать следующим примером.

Рассмотрим зависимость энергии квазиструктуры от времени для

класса одномерных автомодельных распределений. Соотношения (3.2)+ (3.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{\xi^n}(f^\sigma f_\xi)_\xi - \frac{0.5(\beta-\sigma-1)}{t_f(\beta-1)}\xi f_\xi + f^\beta - \frac{f}{(\beta-1)t_f} = 0$$

$$T(r,t) = (1-\frac{t}{t_f})^{-\frac{1}{\beta-1}} f(\xi)$$

$$\xi = \frac{r}{q_0^{\frac{\sigma}{2(\beta-1)}} K_0^{1/2} (1-\frac{t}{t_f})^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}} \qquad (4)$$

$$n = 0,1,2$$

где $n=0$ соответствует случаю плоской геометрии, $n=1$ – цилиндрической и $n=2$ – сферической. Выясним, когда энергия структуры в $LS$ -режиме конечна. Из условия конечности потока при $r=0$ следует ограниченность энергии в конечной области. Поэтому сходимость интеграла определяется асимптотикой на бесконечности. Выражение для нее получено в [3]

$$f|_{\xi\to\infty} = const\ \xi^{-\frac{2}{\beta-(\sigma+1)}} \qquad (5)$$

Отсюда

$$E = \int_0^\infty T(r,t)dr \sim \int_0^\infty \xi^{-\frac{2}{\beta-(\sigma+1)}} d\xi$$

Как видим, для интегрируемости необходимо

$$\beta < \sigma+3 \qquad (6)$$

Поведение энергии различно в зависимости от того, имеет место (6) или нет. Это должно сказываться на свойствах нелинейной среды. И действительно в работах [5,8] показано, что в случае $\beta > \sigma+3$ при определенных начальных данных наряду с $LS$ режимами с обострением возможны автомодельные решения в виде нелокализованных

тепловых волн.

Из соотношений (3.3), (3.4) видно, что цилиндрически и сферически – симметричные задачи отличаются от (3.I) первым , быстро убывающим на бесконечности членом. Поэтому (5) является асимптотикой и в этом случае.

В цилиндрической геометрии

$$E = 2\pi \int T(r,t)\,dr$$

и условие интегрируемости дает

$$\beta < 6+2 \qquad (7)$$

В сферической геометрии

$$E = 4\pi \int T(r,t)\,r^2\,dr$$

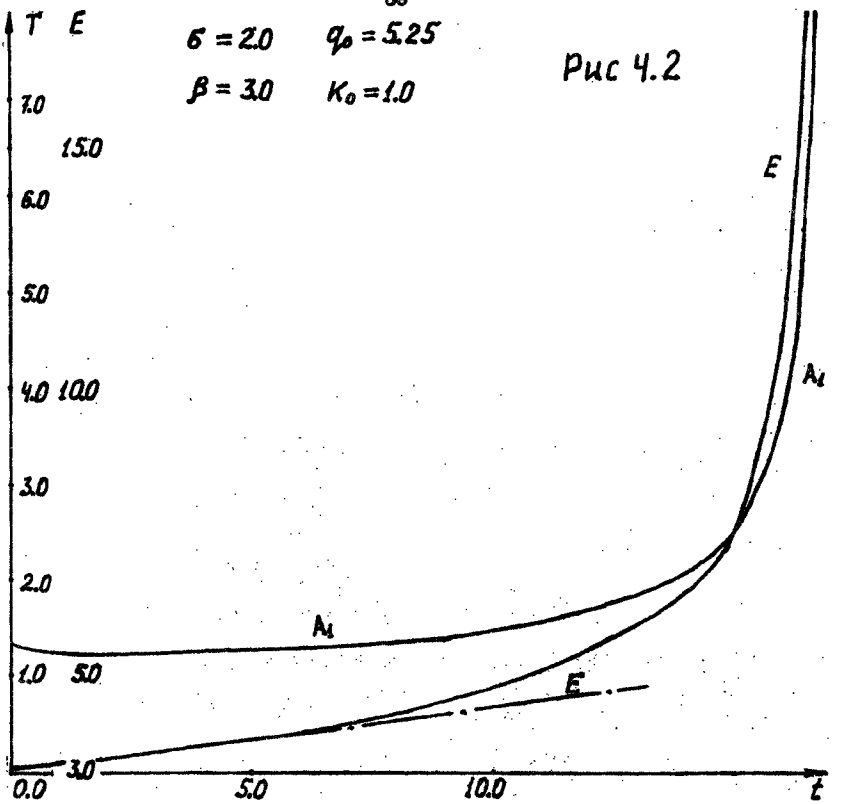
и это условие запишется в виде

$$\beta < 6 + 5/3 \qquad (8)$$

Неравенства (7) и (8) совпадают с глобальным условием существования автомодельного решения [5]. В случае плоской геометрии способ его получения обоснован в работе [5].

Таким образом энергия квазиструктуры отражает существенные черты процесса горения.

Графики изменения моментов квазиструктуры показывают, что на стадии динамики они зависят от времени почти линейно, далее искривляются и на асимптотической стадии наблюдается их быстрый рост. Однако $E(t)$ меняется медленнее, чем амплитуда структуры. (см.рис.4.2).




На стадии перестройки профиля, когда идет медленное изменение профиля всей квазиструктуры, можно линеаризовать уравнение (2.I) около начального распределения температур. Рассмотрим двумерный случай

$$T_1 = T + T_0 \qquad T \ll T_0 \qquad T_0 = T(x, y, 0)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_1^{\sigma}\frac{\partial T_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_1^{\sigma}\frac{\partial T_1}{\partial t}\right) + q_0 T_1^{\beta} \tag{9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_0^{\sigma}\frac{\partial T_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(T_0^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(T_0^{\sigma-1}\sigma T\frac{\partial T}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_0^{\sigma}\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_0^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_0^{\sigma-1}\sigma T\frac{\partial T}{\partial y}\right)+$$

$$+q_0T_0^{\beta}+q_0\beta T_0^{\beta-1}$$

В (9) учтем члены до второго порядка малости по параметру $\frac{T}{T_0}$ Проинтегрировав по пространству в предположении, что интеграл существует, имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t}=I+\int q_0\beta T_0^{\beta-1}T\,dS$$

здесь $E=\int_S T\,dS$ , $I=\int q_0\beta T_0^{\beta-1}dS$

По теореме о среднем получим

$$\frac{\partial E}{\partial t}=I+\alpha E$$

где $\alpha=q_0\beta T_0^{\beta-1}(M^*)$

$M^*$ - точка принадлежащая области локализации квазиструктуры Полагая начальным профиль $T_0$ достаточно гладким и учитывая характер процесса горения на стадии перестройки будем считать, что

$\alpha$ - слабо зависит от времени. Тогда

$$E=\frac{I}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) \qquad (10)$$

На рисунке 4.2. представлена зависимость $E(t)$, наблюдаемая в численном эксперименте. При перестройке и в начале стадии динамики она хорошо описывается формулой (10).

Далее будет показано, что на развитой стадии квазиструктура развивается по автомодельному закону. При этом $A_1(t)\sim(1-\frac{t}{t_f})^{\frac{1}{\beta-1}}$ и при $\beta<\sigma+2$ в двумерном случае $E(t)\sim(1-\frac{t}{t_f})^{\frac{\beta-\sigma-2}{\beta-1}}$

Из соображений симметрии, и учитывая закон изменения энергии, имеем для симметричных профилей

$$|X^+-X^0|=|X^0-X^-|$$

$$|Y^+-Y^0|=|Y^0-Y^-|$$

При $\Delta r(t_2)=0$ и $\delta+2>\beta>\delta+1$ в режимах с обострением получаем

$$\lim_{t\to t_f}|x^+|=\lim_{t\to t_f}|x^-|=\lim_{t\to t_f}|x^0|$$

$$\lim_{t\to t_f}|Y^+|=\lim_{t\to t_f}|Y^-|=\lim_{t\to t_f}|Y^0|$$

При несимметричных распределениях температуры в $LS$ -режиме с определенного момента $t^*$ наблюдалось развитие одной квазиструктуры, а все остальное распределение менялось незначительно (см. рис.6.1÷6.4,6.6). Пусть энергия всего распределения при $t=t^*$ равна $E_0(t^*)$ . Для энергии одной, быстро развивающейся квазиструктуры, очевидно, имеем

$$E(t)=E_1\left(1-\frac{t-t^*}{t_f}\right)^{\gamma}$$

где $E$ – ее энергия, а $\gamma=\frac{\beta-\delta-2}{\beta-1}$

Отсюда для координат центра квазиструктуры можно записать приближенное равенство, которое выполняется все более точно при $t\to t_f$

$$X^0(t^*)E_0(t^*)+X_1\left[E_1\left(1-\frac{t-t^*}{t_f}\right)^{\gamma}-E_1\right]=\left[E_0(t^*)+E_1\left(1-\frac{t-t^*}{t_f}\right)^{\gamma}-E_1\right)\overset{0}{X}(t)$$

Здесь – положение центра быстро развивающейся квазиструктуры

$$\overset{0}{X}(t)=\frac{X^0(t^*)E_0(t^*)+X_1\left(E_1\left(1-\frac{t-t^*}{t_f}\right)^{\gamma}-E_1\right)}{E_0(t^*)+E_1\left(1-\frac{t}{t_f}\right)^{\gamma}-E_1} \qquad (11)$$

Значения $\overset{0}{X}(t)$ , $\overset{0}{Y}(t)$ , полученные в численном эксперименте хорошо ложатся на кривую (11) (например, рис.6.13).

Анализ изменения моментов квазиструктуры позволяет не только описывать процессы на стадии перестройки, но и помогает раосмотреть особенности горения сложных профилей температуры.

## 5. Применение метода осреднения. Автомодельная обработка решения

В работах [5,6,10] для анализа задач со степенным источником и степенным коэффициентом теплопроводности был предложен метод осреднения. Качеотвенно эволюция структуры в одномерном случае описывалаоь абсолютным максимумом температуры и полушириной. Они связаны в методе осреднения системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения являются точными для автомодельных профилей и приближенными для всех остальных. Однако в работах [3-5] показано, что на развитой стадии простая одномерная квазиструктура развивается по автомодельному закону, поэтому метод дает не только качеотвенное, но и хорошее количественное согласие о численным экспериментом. Вблизи момента обострения простые квазиструктуры развиваются независимо. Это позволяет надеяться, что на развитой стадии применение двумерного варианта метода осреднения хорошо согласуется с результатами расчета в частных производных. Будем предполагать, что

$$T(x,y,t)=g(t)\times f\left(\frac{x}{\psi_1(t)},\frac{y}{\psi_2(t)}\right) \qquad (1)$$

Обозначим

$$\frac{x}{\psi_2(t)}=\xi_1$$
$$\frac{y}{\psi_2(t)}=\xi_2 \qquad (2)$$

Исходное уравнение в двумерном случае имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(T^{\sigma} \frac{\partial T}{\partial x}\right) + K_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(T^{\sigma} \frac{\partial T}{\partial y}\right) + q_0 T^{\beta} \qquad (3)$$

Подставим (I) в (3) и проинтегрируем по всему пространству, считая, что

$$T|_{+\infty} = T_{-\infty} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{+\infty} = \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{-\infty} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{+\infty} = \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{-\infty} = 0$$

Считая профили температуры такими, что интегралы, используемые в дальнейшем равномерно сходятся, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty}\int f\left(\frac{x}{\psi_1(t)}, \frac{y}{\psi_2(t)}\right) g(t)\, dx\, dy = q_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int g^{\beta}(t) f^{\beta}\left(\frac{x}{\psi_1(t)}, \frac{y}{\psi_2(t)}\right) dx\, dy$$

Интегрируя по частям, получим

$$(g \psi_1 \psi_2)^{\cdot} = \frac{q_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int f^{\beta}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2}{\int_{-\infty}^{\infty}\int f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2} g^{\beta} \psi_1 \psi_2 \qquad (4)$$

Это первое уравнение, связывающее величины $g$, $\psi_1$, $\psi_2$. Второе уравнение получается умножением (3) на $T$ и интегрированием по всему пространству

$$0.5 \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty}\int T^2 dx\, dy + K_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int T^{\sigma}\left(T_x^2 + T_y^2\right) dx\, dy = q_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int T^{\beta+1} dx\, dy$$

$$0.5 \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty}\int T^2 dx\, dy = g \dot{g} \psi_1 \psi_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int f^2(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \frac{g^2}{2}\left(\psi_1 \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_1 \psi_2\right) \int_{-\infty}^{\infty}\int f^2 d\xi_1 d\xi_2$$

В итоге

$$\dot{g}\psi_1\psi_2+\frac{g}{2}(\psi_1\dot{\psi}_2+\psi_2\dot{\psi}_1)=q_0\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{\beta+1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{2}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}g^{\beta}\psi_1\psi_2- \tag{5}$$

$$-K_0 g^{6+1}\left[\frac{\psi_2}{\psi_1}\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{6}(\xi_1,\xi_2)(\xi_1)^2 d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{2}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}-\frac{\psi_1}{\psi_2}\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{6}(\xi_1,\xi_2)(\xi_2)^2 d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{2}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}\right]$$

Умножая уравнение (3) один раз на $X$ , другой – на $y$ , интегрируя по всему пространству и вычитая второе из первого, получим

$$2g(\psi_2\dot{\psi}_1-\psi_1\dot{\psi}_2)-\frac{2K_0}{6+1}\frac{\dot{g}^{6+1}\psi_1\psi_2}{\psi_1^2}\cdot\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{6+1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}\xi_1^2 f(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}+$$

$$+\frac{2K_0}{6+1}\cdot\frac{g^{6+1}\psi_1\psi_2}{\psi_2^2}\cdot\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{6+1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}\xi_2^2 f(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}= \tag{6}$$

$$=q_0 g^{\beta}\left[\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{\beta}(\xi_1,\xi_2)\xi_1^2\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi_1,\xi_2)\xi_1^2\,d\xi_1 d\xi_2}-\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{\beta}(\xi_1,\xi_2)\xi_2^2\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi_1,\xi_2)\xi_2^2\,d\xi_1 d\xi_2}\right]$$

Вводя обозначения

$$a=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{\beta}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}$$

$$c=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{\beta+1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{2}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}$$

$$i=1,2\qquad b_i=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{6+1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}\xi_i^2 f(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}$$

$$p_i=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{6+1}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}\xi_i^2 f(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}\cdot\frac{2K_0}{6+1}$$

$$q_i=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}f^{\beta}(\xi_1,\xi_2)\xi_i^2\,d\xi_1 d\xi_2}{\iint_{-\infty}^{\infty}\xi_i^2 f(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2}$$

имеем

$$\dot{g}\psi_1\psi_2 + g(\psi_1\dot{\psi}_2 + \psi_2\dot{\psi}_1) = q_0 a g^{\beta}\psi_1\psi_2$$

$$\dot{g}\psi_1\psi_2 + \frac{g}{2}(\psi_1\dot{\psi}_2 + \psi_2\dot{\psi}_1) = q_0 c g^{\beta}\psi_1\psi_2 - \qquad (7)$$

$$-g^{\sigma+1}\kappa_0\frac{b_2\psi_2}{\psi_1} - g^{\sigma+1}\kappa_0\frac{b_1\psi_1}{\psi_2}$$

$$2g(\psi_2\dot{\psi}_1 - \psi_1\dot{\psi}_2) - \frac{p_1 g^{\sigma+1}}{\psi_1^2} + \frac{p_2 g^{\sigma+1}}{\psi_2^2} = (q_1 - q_2)g^{\beta}$$

Третье уравнение в (7) связано с несимметрией начального распределения. Однако расчеты в частных производных показывают, что на развитой стадии идет процесс симметризации и закон роста амплитуды $g(t)$ близок к закону роста цилиндрически-симметричной квазиструктуры, поэтому дальнейшим упрощением, которое мы используем будет $\psi_1 \approx \psi_2$ .

При этом два первые уравнения в (7) дают

$$\dot{g}S + g\dot{S} = q_0 a g^{\beta} S$$

$$\dot{g}S + \frac{g}{2}\dot{S} = q_0 c g^{\beta} S - \kappa_0 g^{\sigma+1}(b_2 - b_1) \qquad (8)$$

где $S = \psi_1\psi_2$

Система (8) аналогична осредненным уравнениям для одномерной квазиструктуры, исследование которых было проведено в работах [5,6, 8] . В этих работах одномерные профили характеризовались амплитудой и полушириной. В (8) $S$ также естественно отождествлять с сечением квазиструктуры на уровне $A_1(t)/2$ , двумерным аналогом полуширины. Сравнения решения системы (8) с результатами численного эксперимента приведены на рисунке 5.I. Наблюдаемая эволюция параметров структуры $g$ и $S$ хорошо описывается системой (8) на асимптотической стадии и не описывается на стадии перестройки профиля.

В работах [5,8] был предложен метод автомодельной обработки результатов численного эксперимента. Вместо функции $T(r,t)$ здесь рассматривалась функция $F(r;t) = T(rA_1^{\alpha}; t)/A_1$

где $\alpha$ выбиралась из размерностных соображений.

Как показано в [5], решение $T(r,t)$ не обладает устойчивостью по Ляпунову, но при $t \to t_f$ выходит на автомодельный профиль, то есть обладает структурной устойчивостью. Анализ $F(r,t)$ позволяет проследить выход на автомодельное решение [5]. На рисунке 5.2 приведены профили автомодельно обработанного решения в случае взаимодействия двух одинаковых квазиструктур. Виден медленный выход на автомодельное цилиндрически-симметричное решение (аналогичная картина наблюдается в $LS$ -режиме).

Анализ системы (8) показывает, что на развитой стадии должно выполняться

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{-\frac{1}{\beta - 1}} \qquad (9)$$

На рисунке (5.3) $A_1^{1-\beta}(t)$ при $t \to t_f$ с высокой точностью представляет прямую, что подтверждает (9).

Таким образом, метод осреднения дает верные представления об эволюции двумерных квазиотруктур на асимптотической стадии.

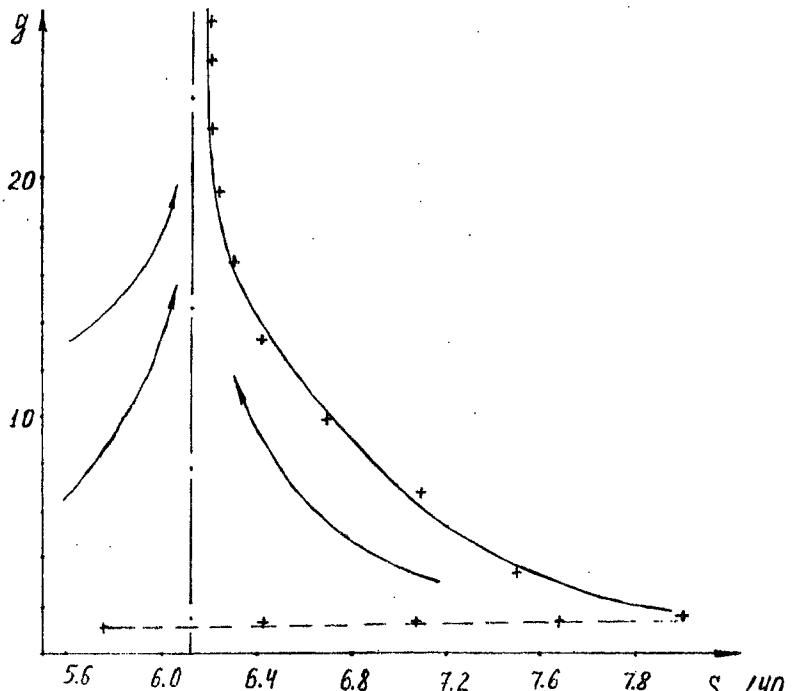



Рис 5.1

S – режим

$\beta = 3.0$ $K_0 = 1.0$

$\delta = 2.0$ $q_0 = 5.25$

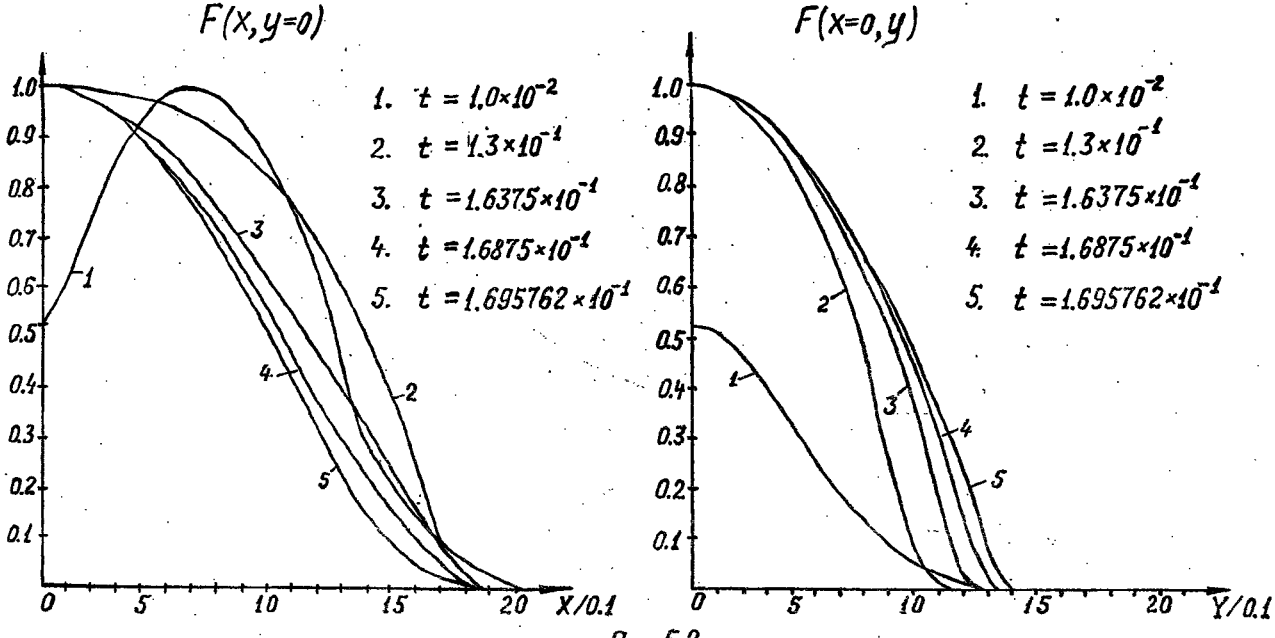



Рис 5.2

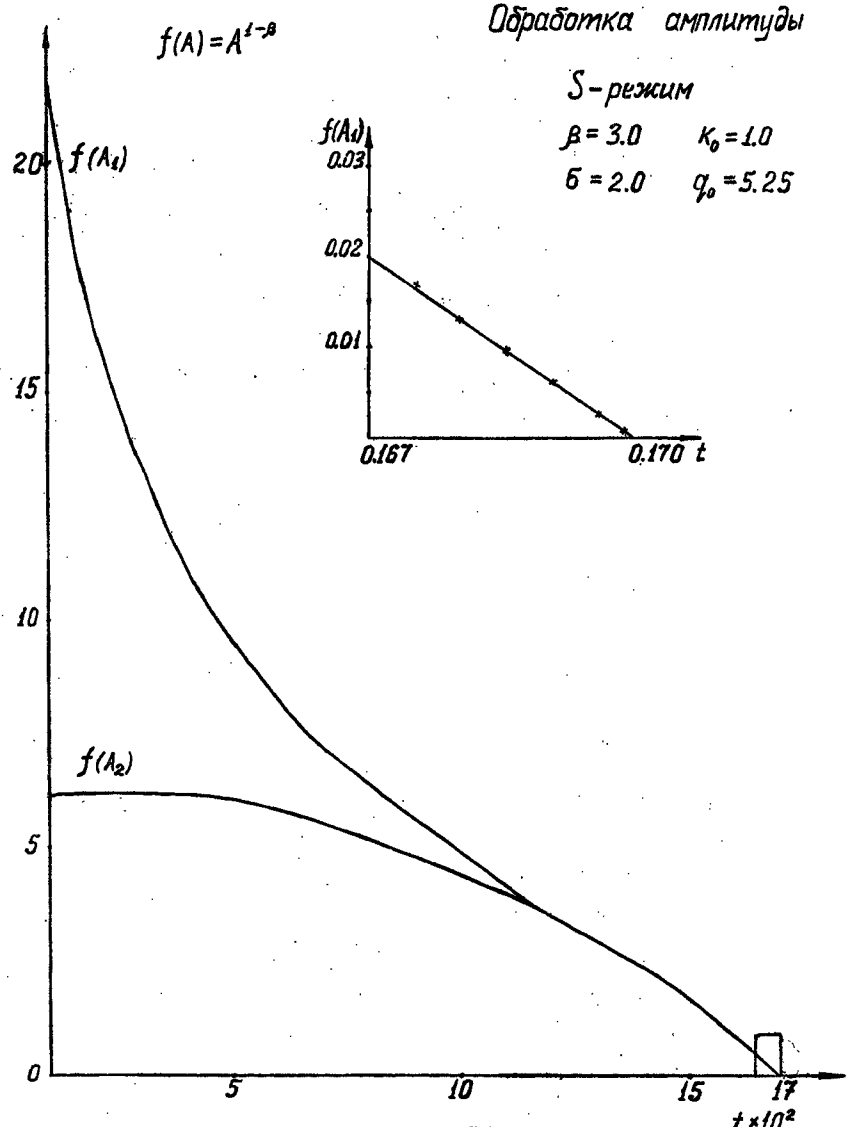

Обработка амплитуды
S-режим
β = 3.0
K₀ = 1.0
б = 2.0
q₀ = 5.25
f(A) = A^(1-β)
f(A₁)
f(A₂)
f(A₁)
0.03
0.02
0.01
0.167
0.170
t
20
15
10
5
0
5
10
15
17
t×10²

Рис 5.3

## 6. Более сложные начальные распределения. Характер взаимодействия квазиструктур

Предыдущие двумерные расчеты относились к случаю, когда начальное распределение было задано двумя одинаковыми квазиструктурами вида

$$T(x,y,0) = \max\left[A e^{-\kappa[(x-\alpha)^2+(y-c)^2]}, A e^{-\kappa[(x-\beta)^2+(y-c)^2]}\right] \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда начальное распределение несимметрично и задано формулой (см.рис.6.I,6.2)

$$T(X,Y,0) = \max[1.35\,EXP((-(X-1.4)^2-(Y-2.0)^2)/0.4),$$
$$1.75\,EXP((-(X-2.6)^2-(Y-2.0)^2)/0.676)]$$

Параметры среды взяты следующими $\delta = 2.0$, $\beta = 4.0$, $K_0 = 1.0$, $q_0 = 5.25$.

Величина пересечения двух простых квазиструктур $\delta_S$ меньше 0.3525(см. таблицу в части 3), поэтому эффективного взаимодействия нет. Квазиструктура меньшей амплитуды практически не влияет на квазиструктуру с большей амплитудой. Здесь нет стадии динамики. Характерной чертой горения сложных неавтомодельных профилей в $LS$ -режиме является интенсивное горение в сокращающейся области при практически постоянной температуре остальной части пространства. Если рассмотреть распределение в одномерном случае, то видно, что $G_{eff}$ сокращается и за областью эффективного горения остается практически постоянный след (см.рис.4.I). В двумерном случае наблюдается та же ситуация. Только след остается на плоскости и поэтому может иметь сложную пространственную форму (см. рис.6.II, 6.I2).

Рассмотрим теперь случай, когда начальное распределение со-

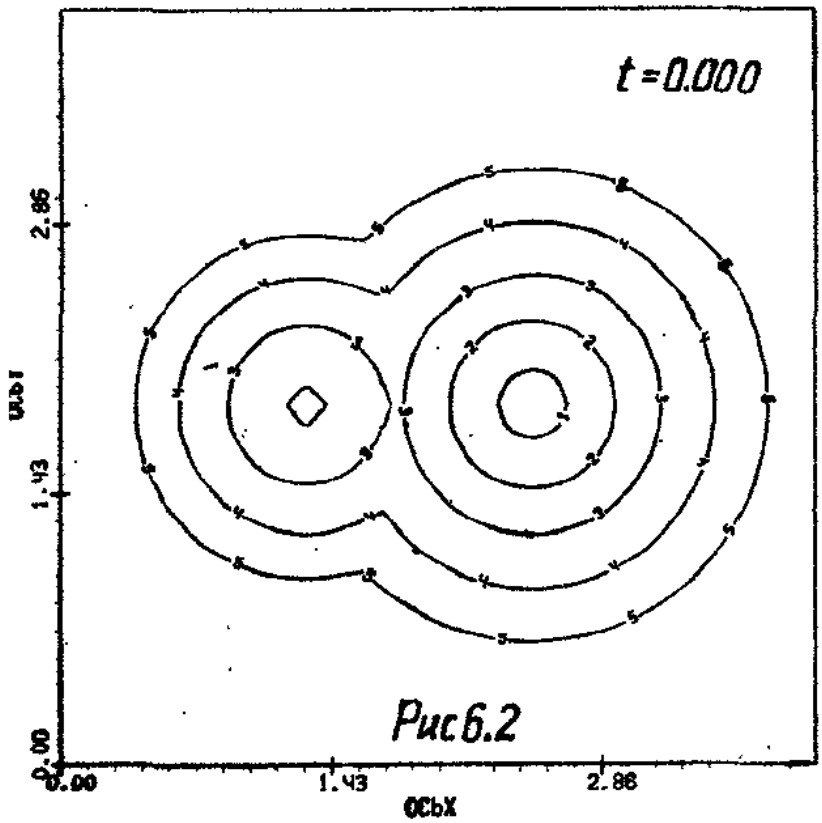

t=0.000
2.86
1.43
0.00
0.00
1.43
2.86
0CbX
0CbY
3.766
3.228
2.690
2.152
1.614
1.076
0.538
0.000
0.000
0.538

Рис 6.2

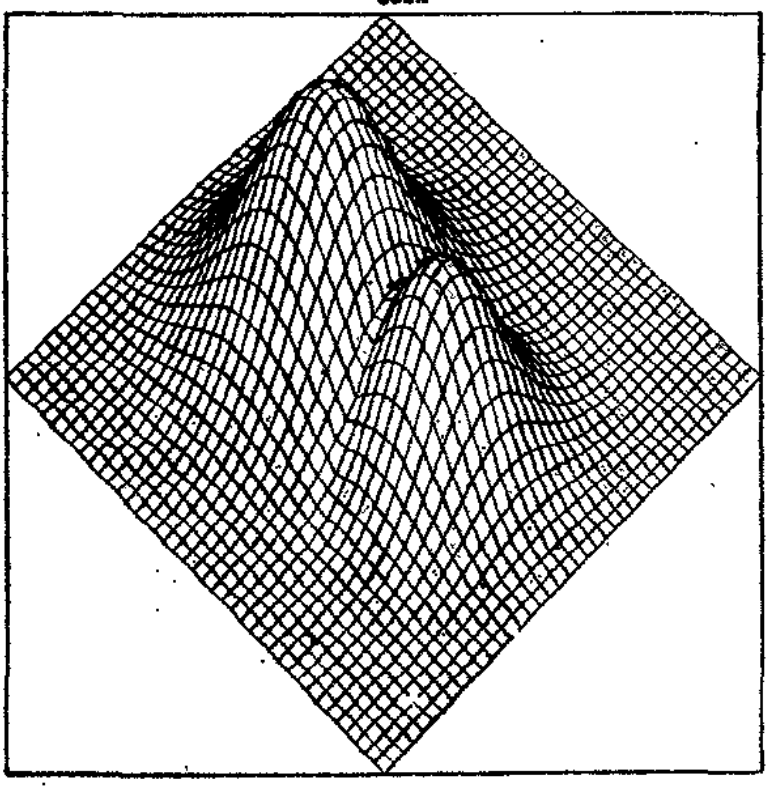


Рис 6.1

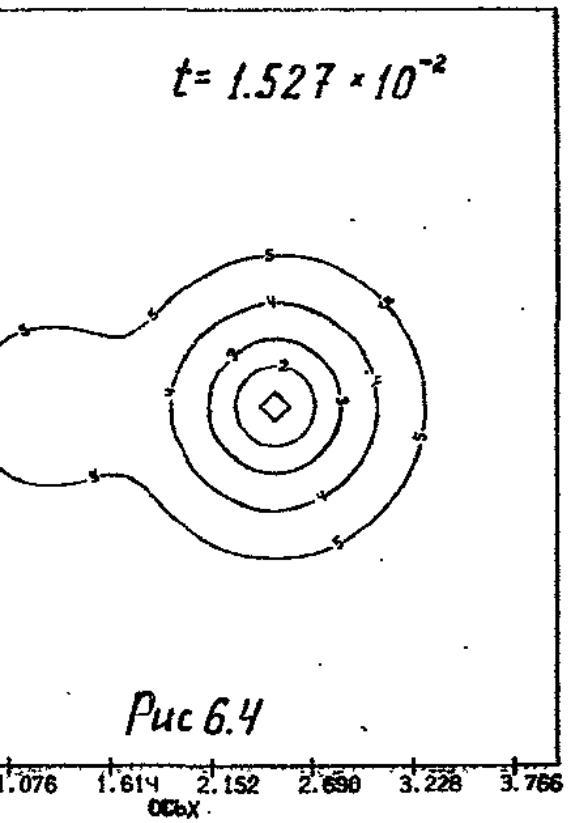



Рис 6.4

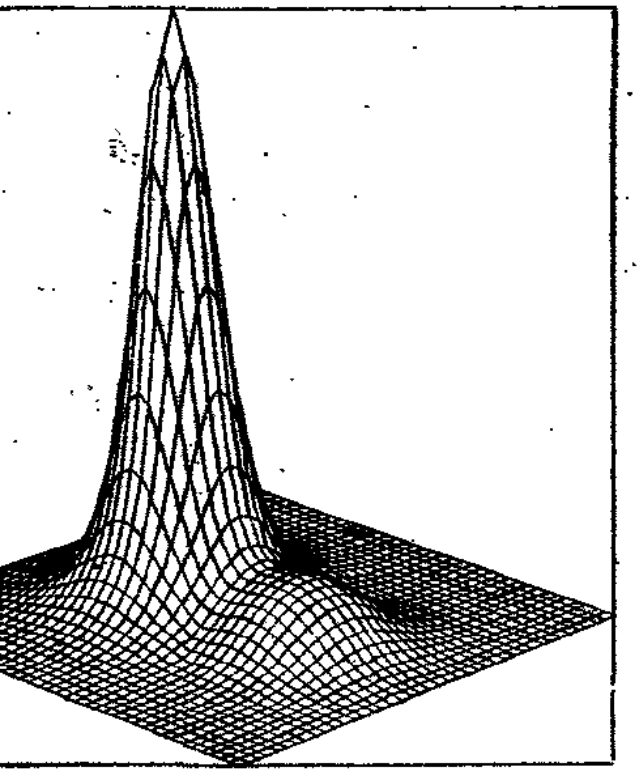


Рис 6.3

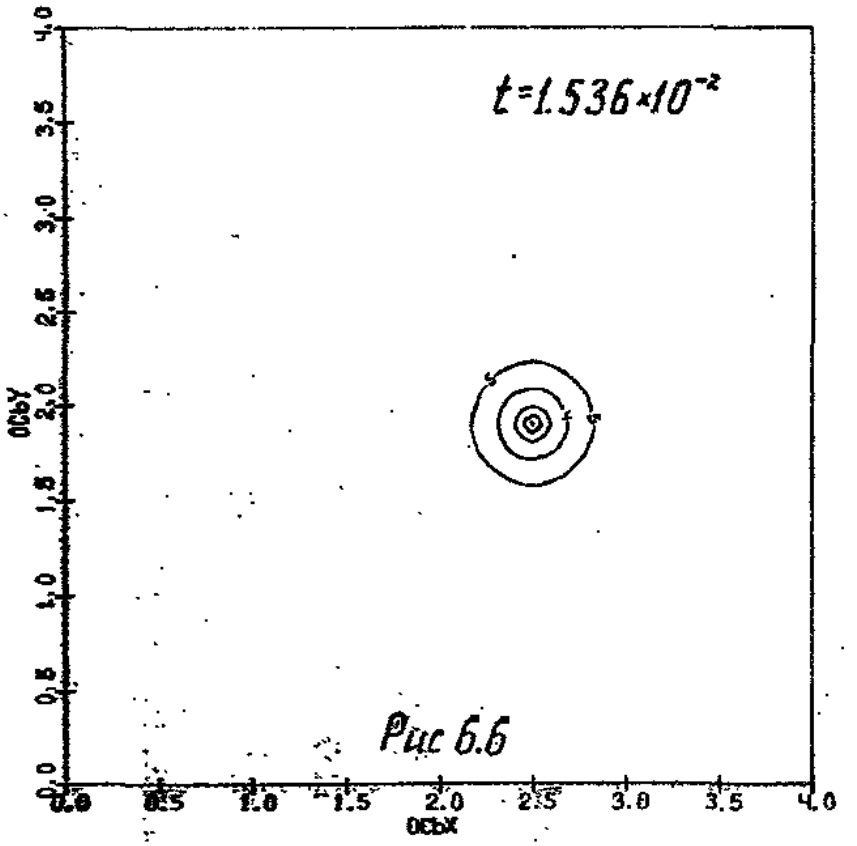



Рис 6.6

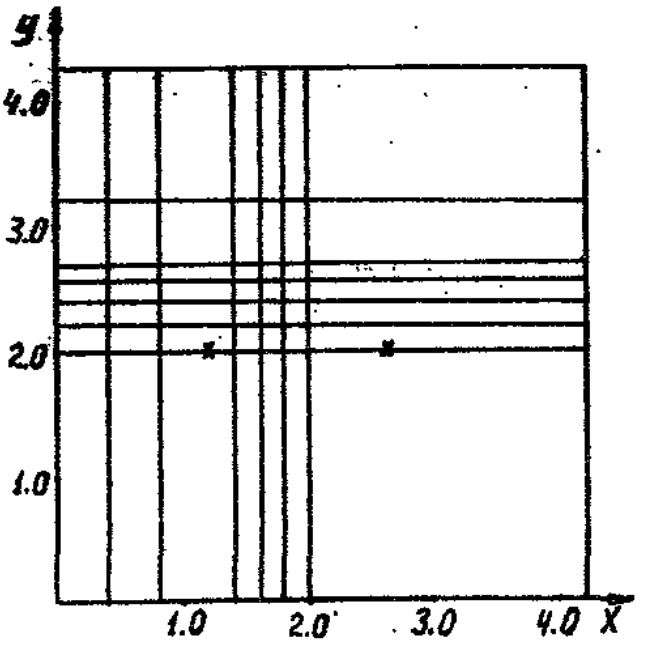
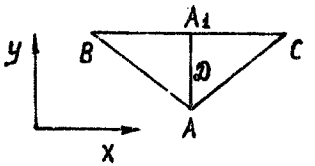



Рис. 6.5

держит три одинаковых квазиструктуры с максимумами в точках $A,B,C$. Здесь




$$\frac{AA_1}{AB}=\frac{3}{5},\quad \frac{A_1B}{AB}=\frac{4}{5}.$$

Стороны AB и AC выбраны так, что если бы не было квазиструктуры с максимумом в B или в C (в дальнейшем будем их называть квазиструктурами B или C, соответственно), то две оставшиеся квазиструктуры эффективно бы взаимодействовали. Их взаимодействие представлено на рисунках 3.8÷3.I9, а рост амплитуды – на рисунке 6.2I .

В процессе эволюции сложной квазиструктуры также как и в случае двух квазиструктур можно выделить стадии перестройки профиля, динамики и асимптотическую (см. рис.6.7÷6.I3). На стадии динамики максимум квазиструктуры A движется по линии $AA_1$. Внешне это напоминает векторное взаимодействие. Амплитуда A растет быстрее амплитуд B и C. Это видно по линиям уровня (см. рис.6.I0, 6.I2) и по изменению координаты $\overset{0}{Y}$ центра квазиструктуры (см. рис.6.I3). При $t\to t_f$ координата $\overset{0}{Y}$ центра квазиструктуры стремится к точке $D$ и описывается зависимостью вида (4.II).

Физически структура $A$ выделена. Она взаимодействует с B и $C$ в то время как последние эффективно взаимодействуют только с A, практически не влияя друг на друга. Пусть сложная квазиструктура состоит из $M$ простых квазиструктур с фиксированным в пространстве положением локальных максимумов, а каждая простая квазиструктура характеризуется $N$ параметрами со значениями в определенных интервалах. В случае треугольника $ABC$ $m=3$ и $n=2$ (параметры A и K на рис.6.2I). Будем говорить, что начальное распределение обладает согласованной симметрией, если $m\cdot n$ его параметров таковы,

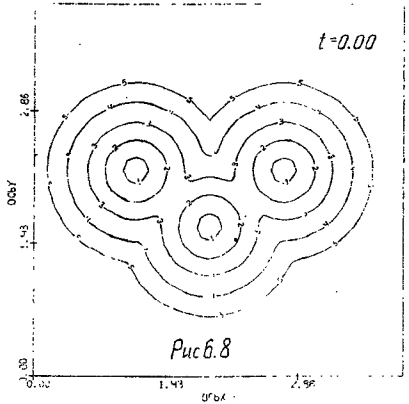



Рис 6.8

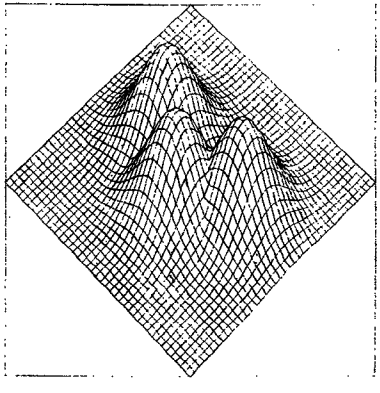



Рис 6.7

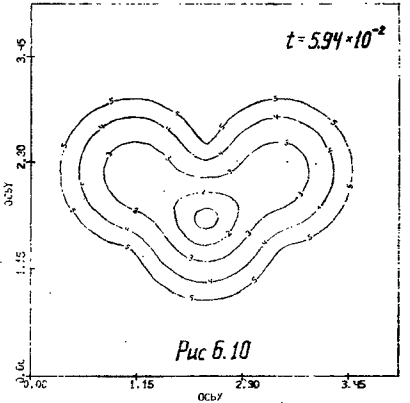



Рис 6.10

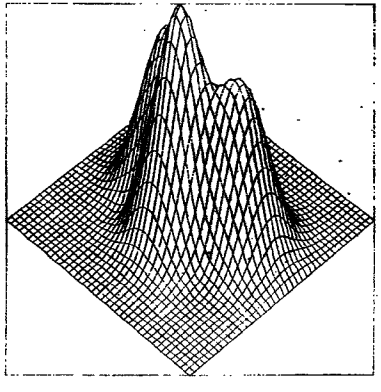



Рис 6.9

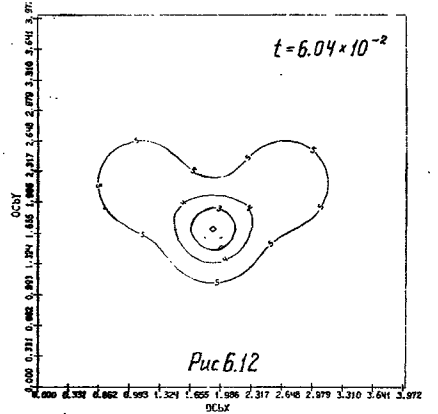



Рис 6.12

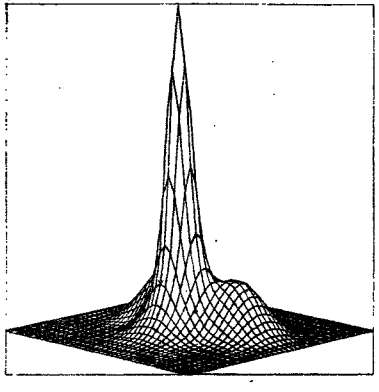
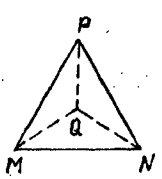



Рис 6.11

что интервал температур, где происходит стадия динамики, является максимальным при изменении параметров в заданных пределах.

Проведенные расчеты показывают, что в случае двух простых квазиструктур для согласованной симметрии необходимо равенство всех $n$ параметров, характеризующих каждую из них. Для треугольника $ABC$ и двухпараметрического семейства квазиструктур, по-видимому, начальным профилем с согласованной симметрией будет профиль, где амплитуда структуры $A$, в соответствии с ее выделенным положением в пространстве, несколько ниже, чем у одинаковых квазиструктур $B$ и $C$.

Отсюда следует, что если все три квазиструктуры поставить в одинаковые условия, то продолжительность стадии динамики и, соответственно, времени обострения должна возрасти. Это можно реализовать, поставив три одинаковые квазиструктуры с максимумами в вершинах равностороннего треугольника $MNP$ (см. рис.) Выберем $MN = AB$. Эволюция такого распределения изображена на рисунках 6.15÷6.20. Видно, что время обострения действительно возрастает. Удлиняется стадия динамики, в течение которой локальные максимумы движутся к общему центру (точка $Q$). Обратим внимание на то, что в случае треугольника $MNP$ бóльшая энергия заключена в меньшем пространстве, чем в случае треугольника $ABC$. Несмотря на это $t_{f\,\Delta MNP} > t_{f\,\Delta ABC}$. Сравним времена обосрения в проведенных расчетах. Имеют место две тенденции. С увеличением степени симметрии наблюдалось увеличение продолжительности стадии динамики (именно поэтому $t_{f\,\Delta MNP} > t_{f\,\Delta ABC}$). С другой стороны играет роль величина поверхности структуры, граничащая с холодным фоном. С ростом этой величины более сильно проявляется инерция



профиля. Из-за этого увеличивается продолжительноотъ отадии перестройки. Напримеp в случае треугольника $MNP$ эффективная граница с холодным фоном (см. рис.6.I6) меньше, чем в случае системы двух простых квазиструктур на расотоянии $MN$ (см.рис.3.9).

Таким образом, симметрия начального профиля играет важную роль в процессе взаимодействия квазиструктур.

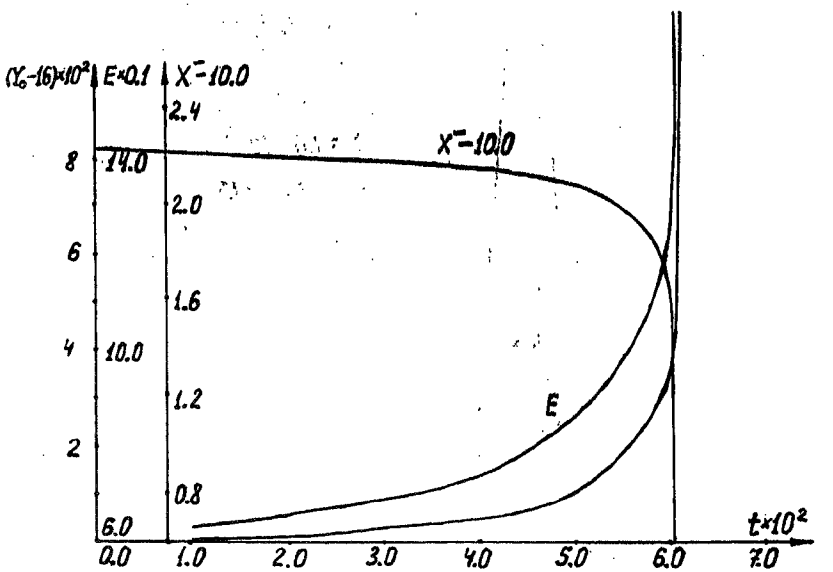



Рис 6.13

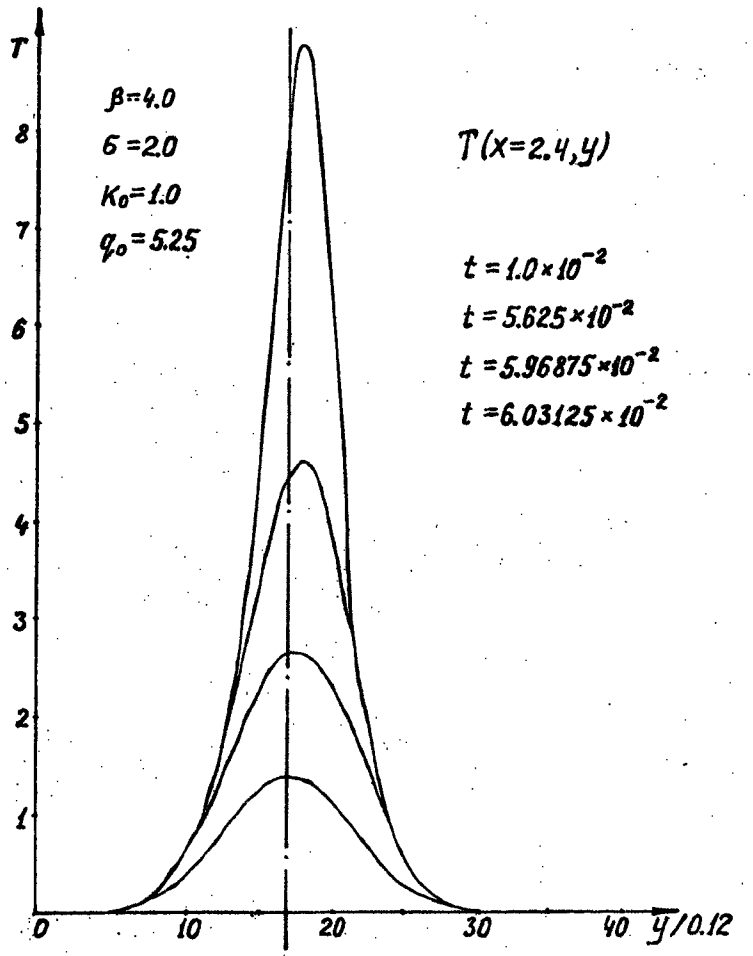

T
8
7
6
5
4
3
2
1
0
10
20
30
40
y/0.12
β=4.0
6=2.0
K₀=1.0
q₀=5.25
T(x=2.4,y)
t=1.0×10⁻²
t=5.625×10⁻²
t=5.96875×10⁻²
t=6.03125×10⁻²

Рис 6.14

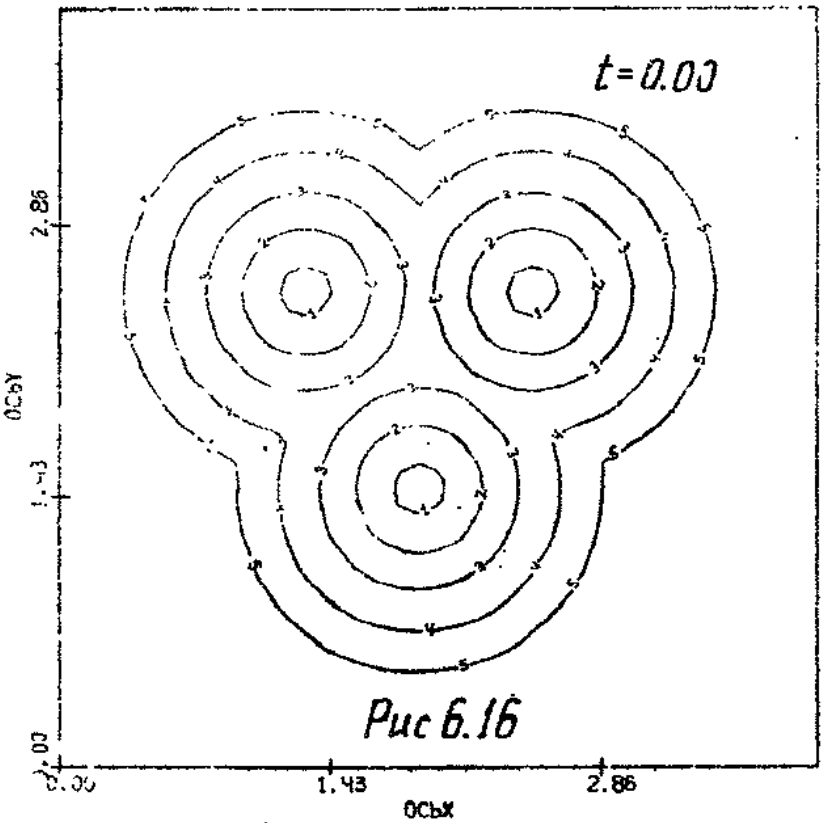



Рис 6.16

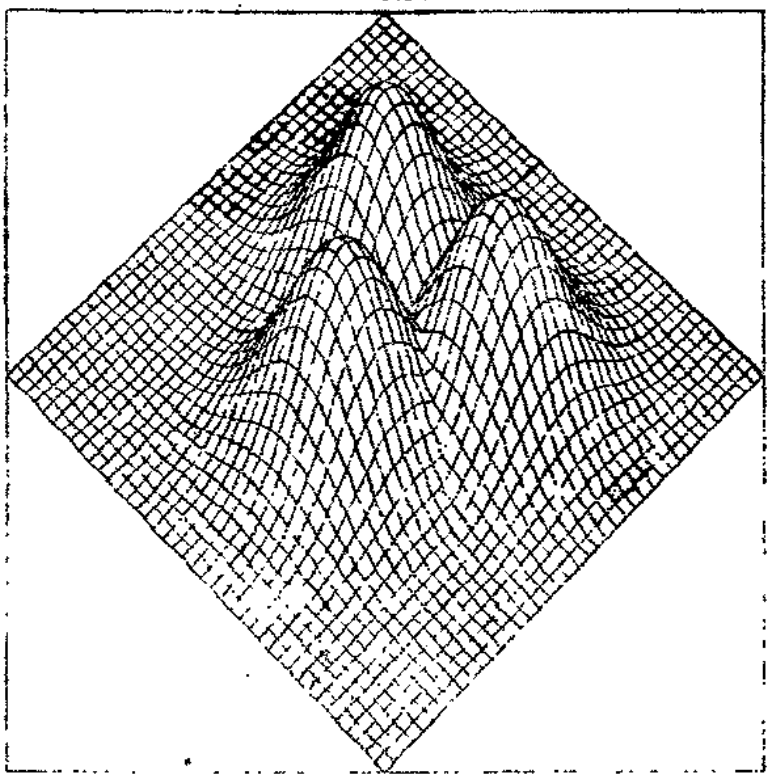


Рис 6.15

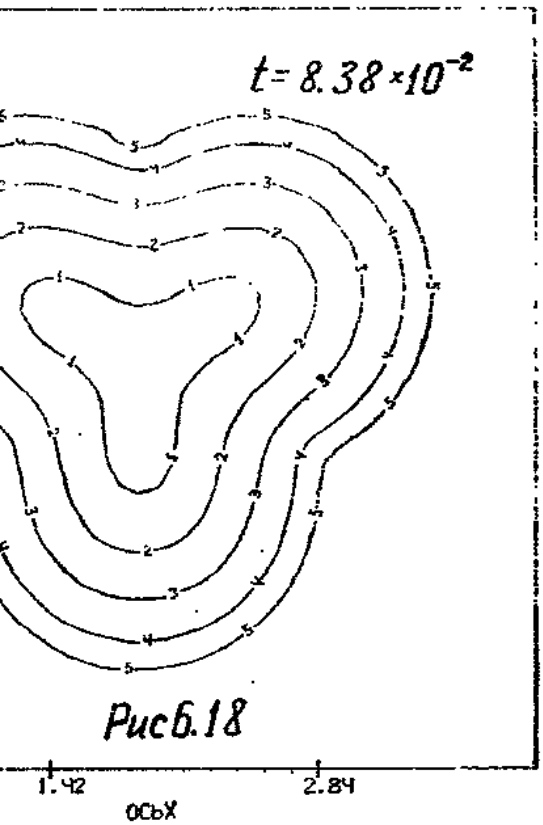



Рис 6.18

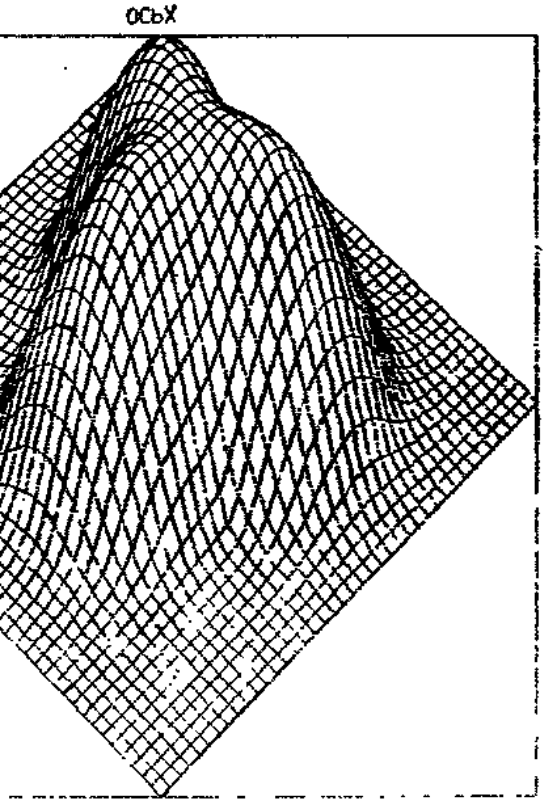


Рис 6.17

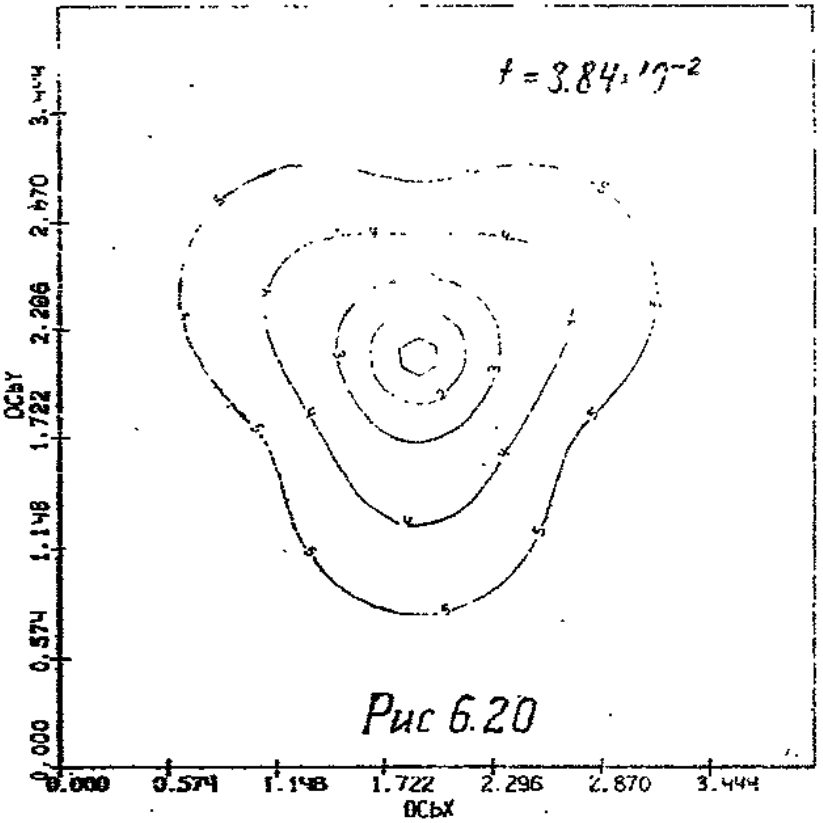



Рис 6.20

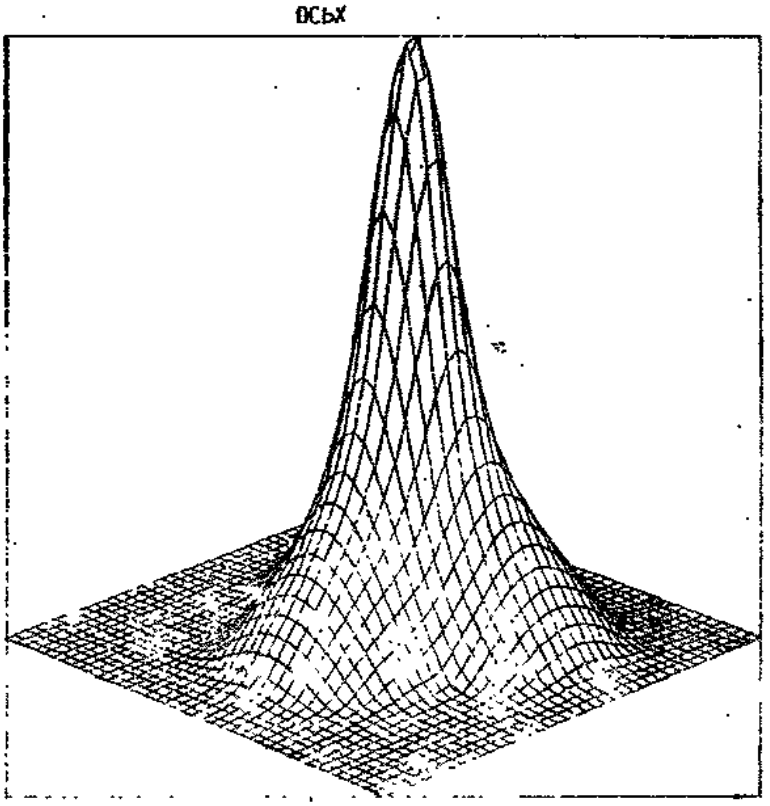


Рис 6.19

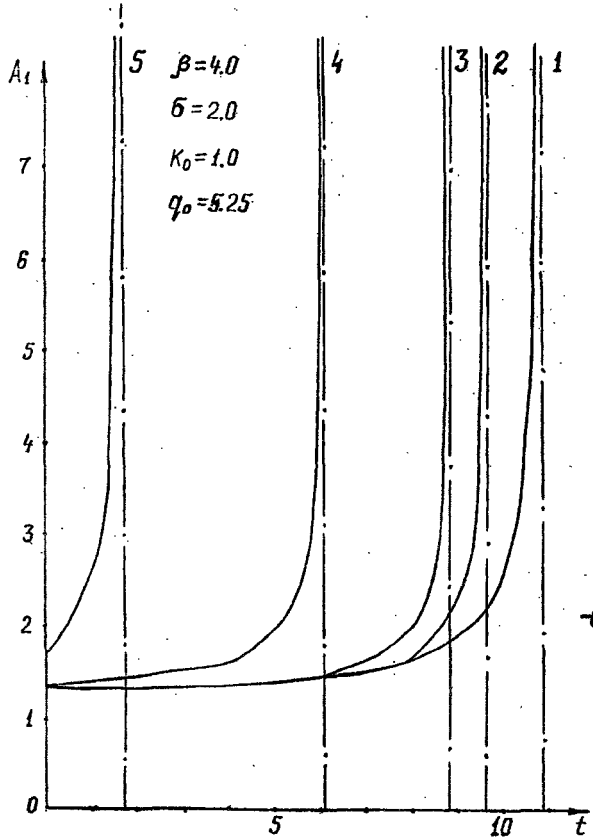



Рис 6.21

*Рост амплитуды структур и последовательность времен обострения.*

1 $T = A \times EXP(-KX^2 - Ky^2)$

2 $T = MAX[A \times EXP(-(X-1.2)^2 \times K - Ky^2), A \times EXP(-KX^2 - Ky^2)]$

Рис 3.8 ÷ 3.19

3 $T = MAX[A \times EXP(-KX^2 - K(y-0.6\sqrt{3})^2), A \times EXP(-K(X-0.6)^2 - K(y+0.6)^2), A \times EXP(-K(X+0.6\sqrt{3})^2 - K(y+0.6)^2)]$

Рис 6.15 ÷ 6.20

4 $T_1 = MAX[A \times EXP(-KX^2 - Ky^2), A \times EXP(-K(X+0.96)^2 - K(y-0.72)^2), A \times EXP(-K(X-0.96)^2 - K(y-0.72)^2)]$ Рис 6.7 ÷ 6.12

$A = 1.35 \qquad K = 2.5$

5 $T = MAX[1.75 \times EXP(-X^2/0.519 - y^2/0.519), 1.35 \times EXP(-y^2/0.4 - (X-1.2)^2/0.4]$ Рис 6.1 ÷ 6.6

## 7. Стадия динамики. Делинеаризованное описание.

Рассмотрим стадию динамики. Было показано, что метод осреднения плохо описывает этот этап. Встает вопрос о математическом описании взаимодействующих квазиструктур.

Две произвольно поставленные квазиструктуры не будут взаимодействовать с движением максимумов до окончания перестройки профиля. Затекают уже сглаженные максимумы. В проведенных расчетах с двумя квазиструктурами затекание максимумов не начиналось пока отношение $A_2(t)/A_1(t)$ не превышало 0.8–0.9. Численные эксперименты показывают, что на стадии динамики $A_1(t) \sim (t-\tilde{t})^{-\frac{1}{\beta-1}}$, то есть горение идет в темпе гомотермии. Поэтому естественно стадию динамики для неавтомодельных профилей около локальных максимумов описывать линеаризованным около гомотермии уравнением.

Пусть $T_1 = T_0 + T$, $\frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0$ [$T_0$ – гомотермия]. $T \ll T_0$, так как рассматривается стадия динамики и область у вершины квазиструктуры. Тогда

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(T_1^{\sigma} \frac{\partial T_1}{\partial x}\right) + K_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(T_1^{\sigma} \frac{\partial T_1}{\partial y}\right) + q_0 T_1^{\beta} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[T_0^{\sigma} + \sigma T_0^{\sigma-1} T\right] \times \frac{\partial T}{\partial x}\right) +$$
$$+ K_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\left[T_0^{\sigma} + \sigma T_0^{\sigma-1} T\right] \frac{\partial T}{\partial y}\right) + q_0 T_0^{\beta} + q_0 \beta T_0^{\beta-1} T \qquad (2)$$

с точностью до второго порядка по малому параметру ( $T/T_0$).

Пусть $T_0$ удовлетворяет уравнению для гомотермии

$$\frac{\partial T}{\partial t} = q_0 T^{\beta}$$

тогда из (2), пренебрегая членами второго порядка малости, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_0 \frac{\partial}{\partial X}\left[T_0^{\delta} \frac{\partial T}{\partial X}\right] + K_0 \frac{\partial}{\partial y}\left[T_0^{\delta} \frac{\partial T}{\partial y}\right] + q_0 \beta T_0^{\beta-1} T \quad (4)$$

Искомую функцию представим в виде

$$T(x, t) = f(t) F(x, y, t)$$

Тогда

$$F \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial F}{\partial t} = K_0 f \frac{\partial}{\partial x}\left[T_0^{\delta} \frac{\partial F}{\partial x}\right] + K_0 f \frac{\partial}{\partial y}\left[T_0^{\delta} \frac{\partial F}{\partial y}\right] + q_0 \beta T_0^{\beta-1} f F$$

Положим

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial t} = q_0 \beta T_0^{\beta-1} f$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial t} = K_0 T_0^{\delta}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]$$

Вводя новую переменную

$$\tau = \int_0^t T_0^{\delta}(t) dt$$

имеем $$\frac{\partial F}{\partial t} = T_0^{\delta} \frac{\partial F}{\partial \tau}$$

Пусть взаимодействуют две симметричные относительно прямых $x = 0$ и $y = 0$ структуры. В этом случае имеем следующую линейную задачу

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = K_0\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]$$

$$F_x|_{x=0} = 0$$

$$F_y|_{y=0} = 0 \quad (5)$$

$$F_x|_{x=\alpha} = F_{0x}(\alpha, y)$$

$$F_y|_{y=\beta} = F_{0y}(x, \beta)$$

$$F|_{\tau=0} = F_0(x, y)$$

Если выбрать $T_0$, так что $T_0|_{t=t_1}$ равно амплитуде $A_2$ в случае двух структур, то сопоставление линейной и нелинейной задачи дает следующее.

С точностью, обеспечиваемой численным экспериментом времена стадии динамики, полученные в линейной и нелинейной задачах совпадают. С высокой точностью описывается форма распределения температуры в пространстве. При описанном выборе $T_0$ хорошо согласуются амплитуды распределения (на рисунке 7.I слева сечение решения нелинейной задачи осью симметрии параллельной оси $X$, справа – аналогичное сечение линейной задачи).

В общем случае $F$ можно найти аналитически, если известна функция Грина $G(x,y,\xi,\eta,\tau)$ соответствующей линейной задачи.

$$F(x,y,\tau)=\iint_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta,\tau)F(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

Такой подход в ряде случаев позволяет найти $F(x,y,\tau)$ без численного решения линейной задачи. Начальное значение $T_0$ можно также выбирать на уровне, где сглаженная часть профиля переходит в нелинейный "хвост".

Итак, для неавтомодельных профилей на стадии динамики линеаризованное описание дает хорошее согласие с численным экспериментом.

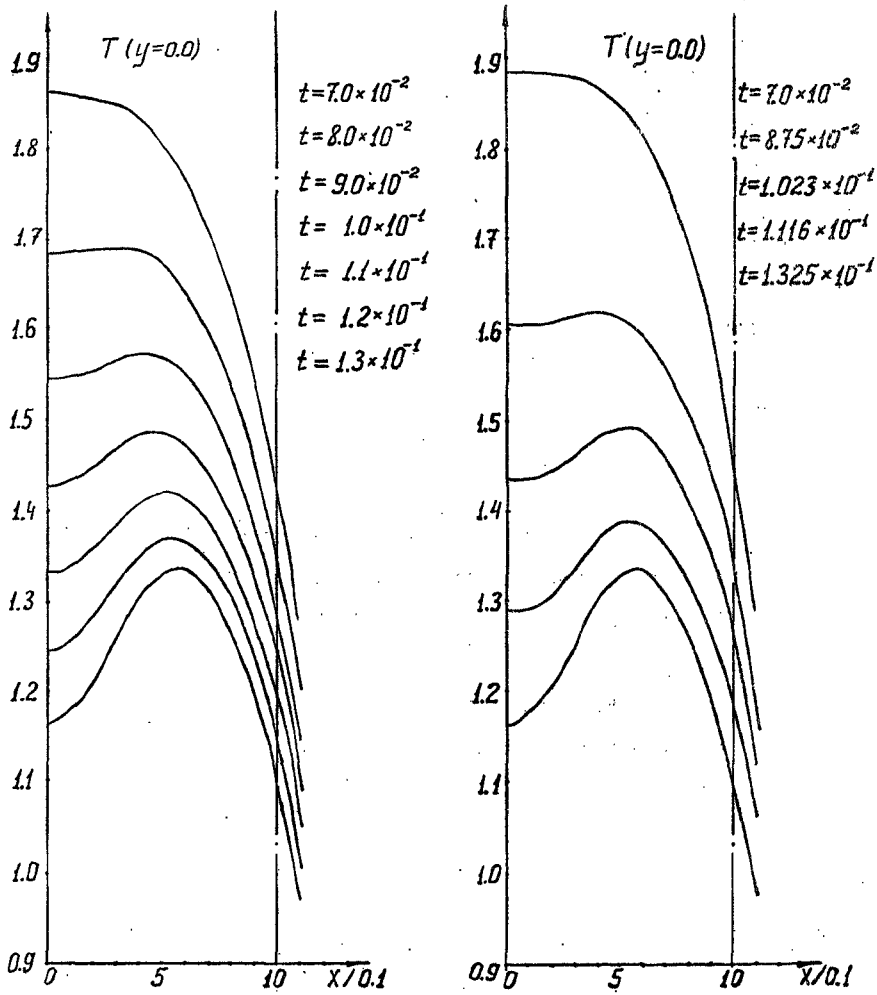

T (y=0.0)
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0
5
10
X/0.1
t=7.0×10⁻²
t=8.0×10⁻²
t=9.0×10⁻²
t= 1.0×10⁻¹
t= 1.1×10⁻¹
t= 1.2×10⁻¹
t= 1.3×10⁻¹
T (y=0.0)
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0
5
10
X/0.1
t=7.0×10⁻²
t=8.75×10⁻²
t=1.023×10⁻¹
t=1.116×10⁻¹
t=1.325×10⁻¹

Рис 7.1

## 8. Трехмерный расчет. Особенности процесса взаимодействия в многомерных задачах.

Сравним результаты одномерных, двумерных и трехмерных расчетов. Выясним, как меняется решение с увеличением размерности пространства. Рассмотрим три задачи:

Одномерную

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(T^6 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + Q_0 T^\beta$$
$$X_1 \le X \le X_2 \qquad (I)$$
$$T(X_1, t) = T(X_2, t) = 0$$
$$T(X, 0) = \max\left[A e^{-K(X-\alpha)^2}, A e^{-K(X-\beta)^2}\right]$$

двумерную

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(T^6 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + K_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(T^6 \frac{\partial T}{\partial y}\right) + Q_0 T^\beta$$
$$X_1 \le X \le X_2 \qquad Y_1 \le Y \le Y_2 \qquad (2)$$
$$T(X_1, Y, t) = T(X_2, Y, t) = T(X, Y_1, t) = T(X, Y_2, t) = 0$$
$$T(X, Y, 0) = \max\left[A e^{-K(X-\alpha)^2 - K(Y-c)^2}, A e^{-K(X-\beta)^2 - K(Y-c)^2}\right]$$

и трехмерную

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(T^6 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + K_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(T^6 \frac{\partial T}{\partial y}\right) + K_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(T^6 \frac{\partial T}{\partial z}\right) + Q_0 T^\beta$$
$$X_1 \le X \le X_2 \qquad Y_1 \le Y \le Y_2 \qquad Z_1 \le Z \le Z_2$$
$$T(X_1, Y, Z, t) = T(X_2, Y, Z, t) = T(X, Y_1, Z, t) =$$
$$= T(X, Y_2, Z, t) = T(X, Y, Z_1, t) = T(X, Y, Z_2, t) = 0 \qquad (3)$$
$$T(X, Y, Z, 0) = \max\left[A e^{-K(X-c)^2 - K(Y-\alpha)^2 - K(Z-d)^2}, A e^{-K(X-c)^2 - K(Y-\beta)^2 - K(Z-d)^2}\right]$$

В реальном пространстве начальное распределение для задачи (I) это бесконечные плоскости перпендикулярные оси $X$ , для (2) - бесконечные по оси $Z$ цилиндры, для (3) - две пересекающиеся сферы (когда мы говорим о форме распределения, то имеем ввиду поверхности $T=const$ ).

Значения параметров в численных расчетах задач (I)+(3) были следующими $A=1.35$, $K$ =I.III, $K_0$=I.0, $q_0$ =5.25, $|\beta-\alpha|$= =I.2, $\beta$ =4, $\delta$ =2.

Качественная картина в трехмерном случае аналогична взаимодействию двумерных структур. Можно выделить стадию перестройки профиля, стадию динамики и асимптотическую стадию. Поскольку $\beta>\delta+1$ наблюдается $LS$ - режим с сокращающейся областью эффективного горения. На рисунках 8.2, 8.3 представлены распределения температур вдоль осей симметрии. Профили температур в сечениях сложной квазиструктуры плоскостями $X$ =I.5, $X$ =2.25, $y$ =0,75, $y$ =I.5 изображены на рисунках 8.4+8.27. Более четко проявилась в трехмерных расчетах инерция профиля. Действительно на рисунках 8.20, 8.2I видно, что в плоскости $X$ =I.5, квазиструктуры уже провзаимодействовали и мы видим распределение с одним максимумом температуры. При меньших температурах (плоскость $X$ =2.25) затекание идет медленнее, поэтому ближе к границе области распределение имеет два максимума (см.рис.8.22, 8.23).

Сравним зависимости $A_1(t)$ и $A_2(t)$ для задач (I)+(3) (см.рис.8.28). Видим, что $t_{f\,III}>t_{f\,II}>t_{f\,I}$ . Это связано с возможностью оттока тепла по другим пространственным направлениям.

В отличие от предыдущих двумерных расчетов, где серией тестов была показана несущественность влияния граничного условия и фактически постановка задачи эквивалентна решению в бесконечной области, здесь, как видно из рисунков 8.2, 8.3, необходим учет

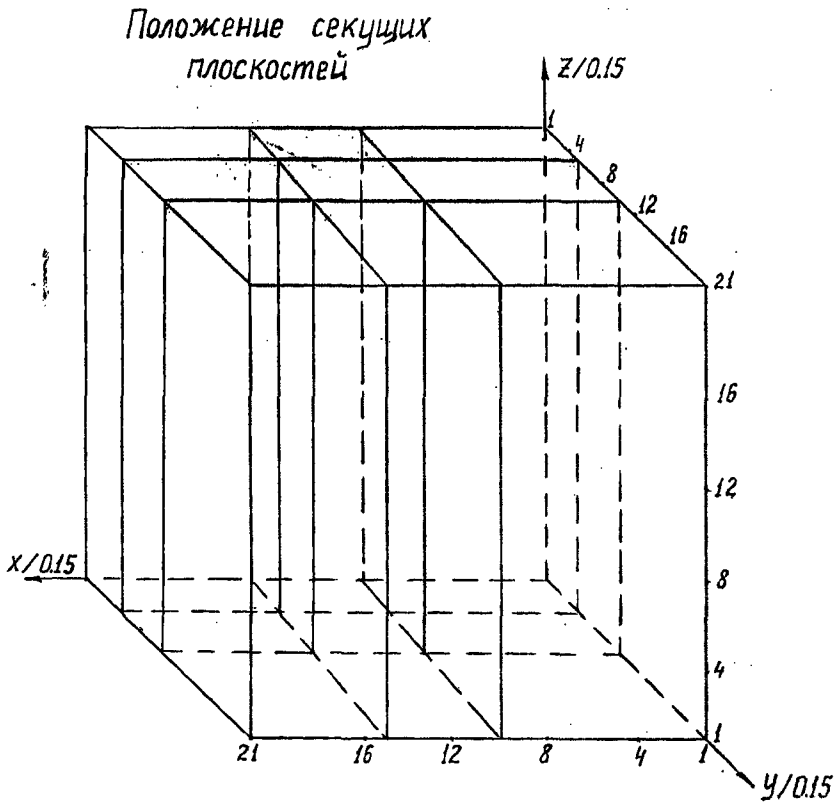

Положение секущих плоскостей
Z/0.15
1
4
8
12
16
21
16
12
8
4
1
X/0.15
21
16
12
8
4
1
Y/0.15

Рис 8.1

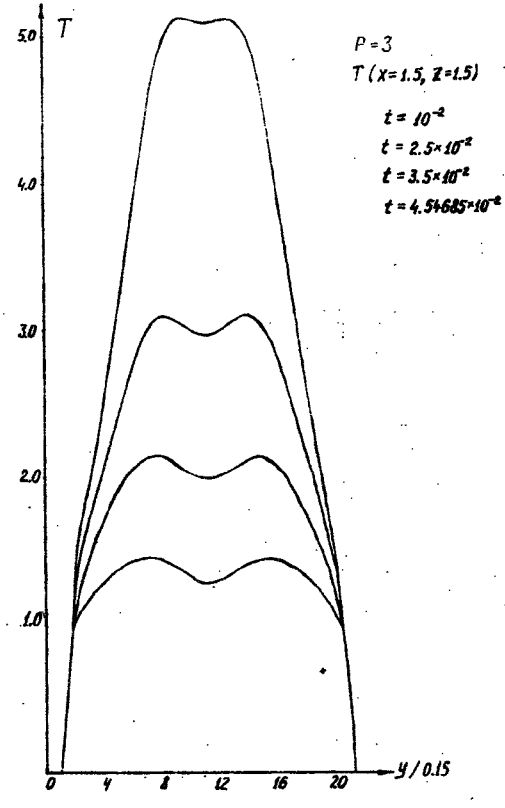

T
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
P = 3
T (x=1.5, z=1.5)
t = 10⁻²
t = 2.5×10⁻²
t = 3.5×10⁻²
t = 4.54685×10⁻²
0
4
8
12
16
20
y / 0.15

Рис 8.2

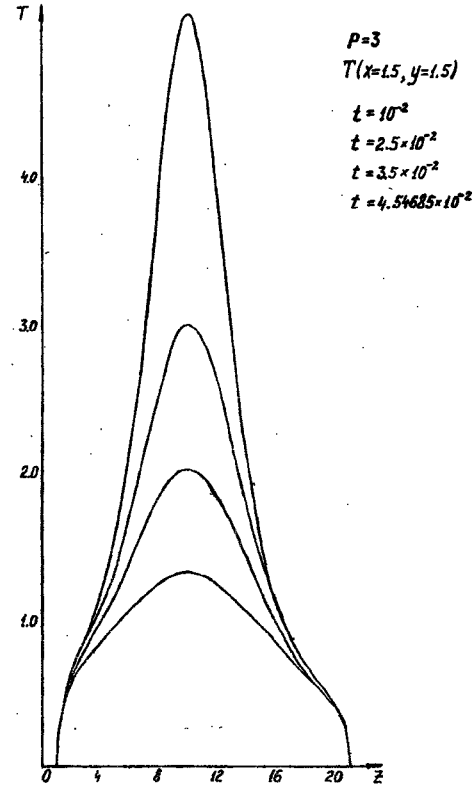
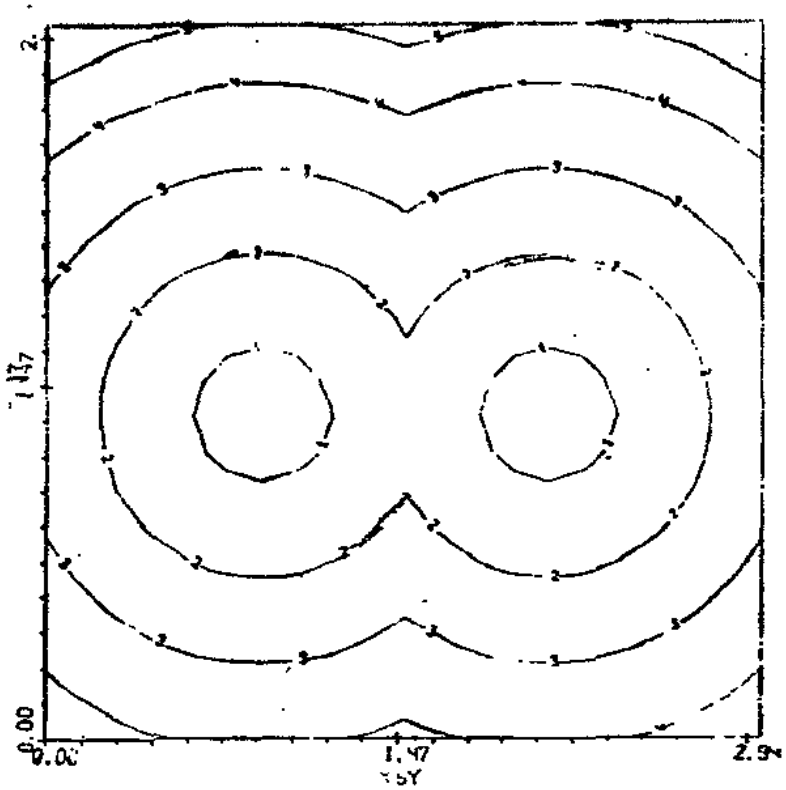
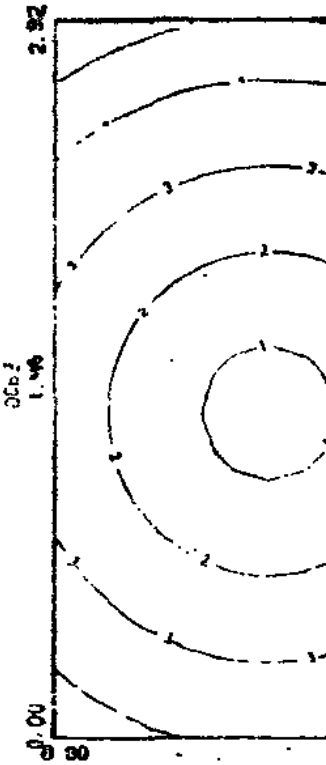
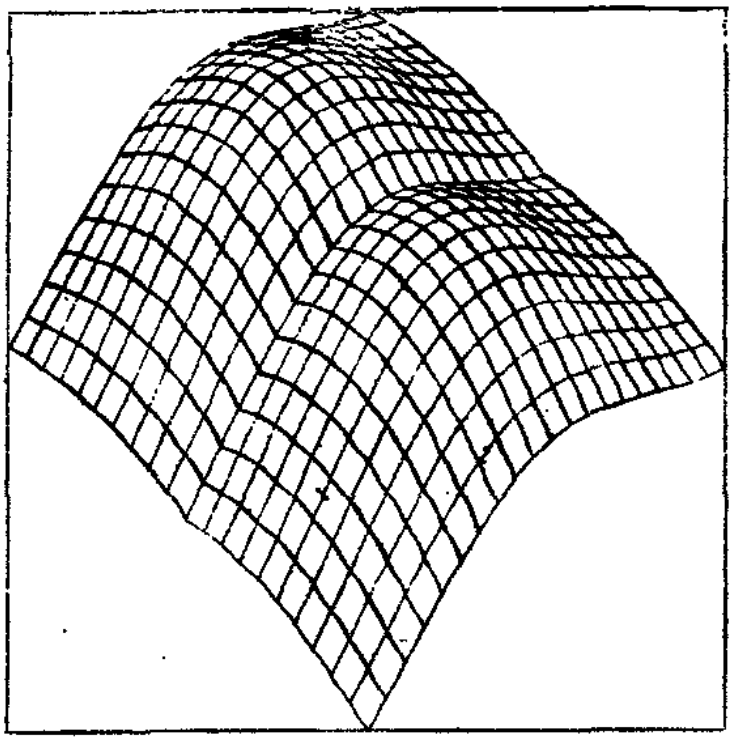

T
4.0
3.0
2.0
1.0
P=3
T(x=1.5, y=1.5)
t = 10⁻²
t = 2.5×10⁻²
t = 3.5×10⁻²
t = 4.54685×10⁻²
0
4
8
12
16
20
z

Рис 8.3

Рис 8.5



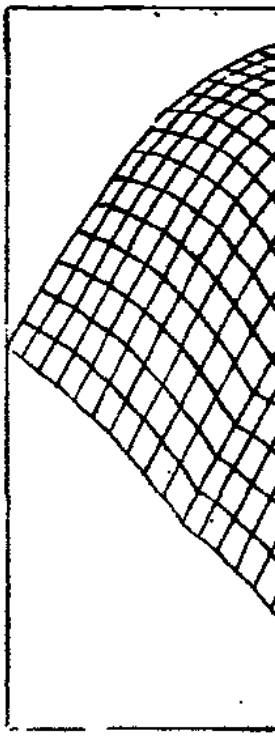


Рис 8.4 X=1.50

Рис 8.7

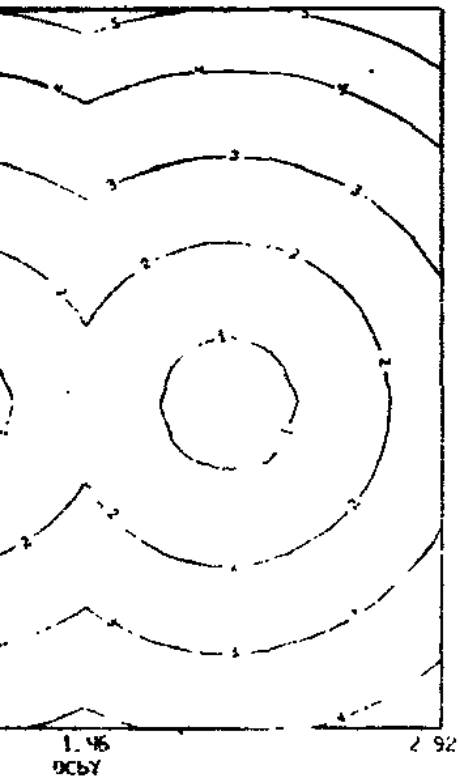
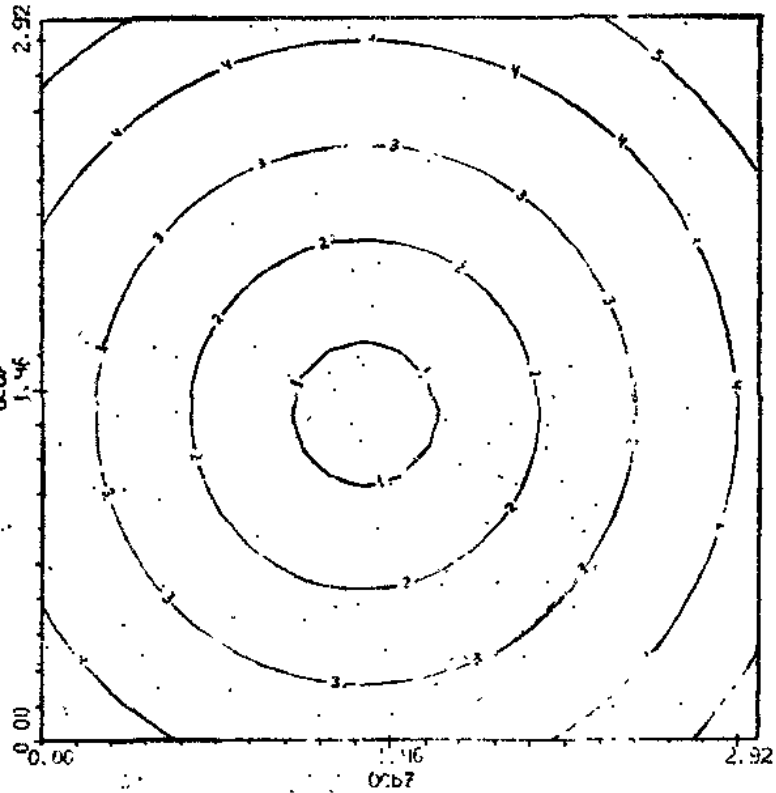
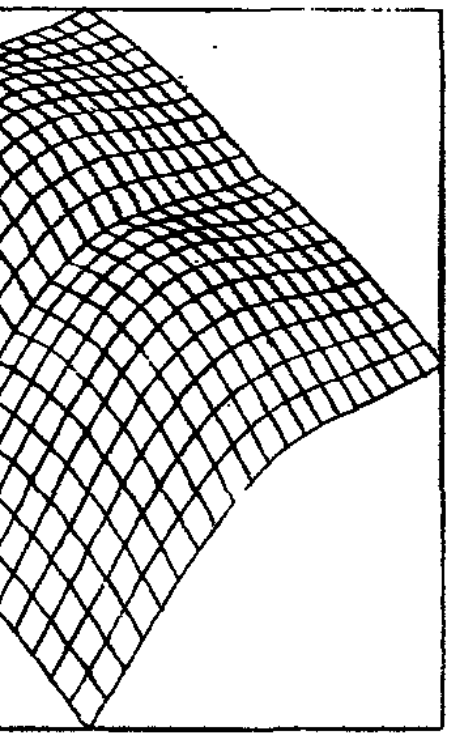



Рис 8.9




87



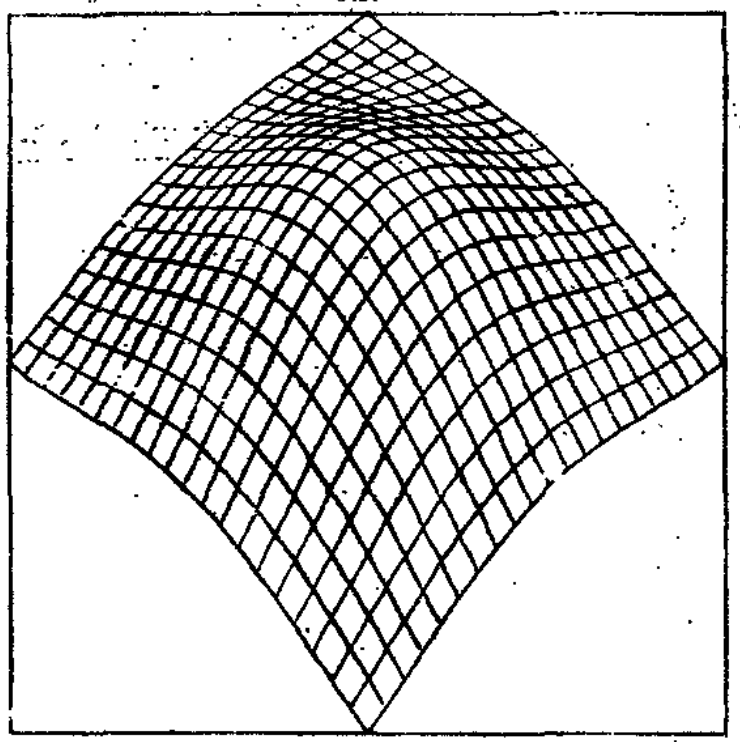


Рис 8.6 X=2.25

t=0.000

Рис 8.8 y=1.50

Рис 8.11

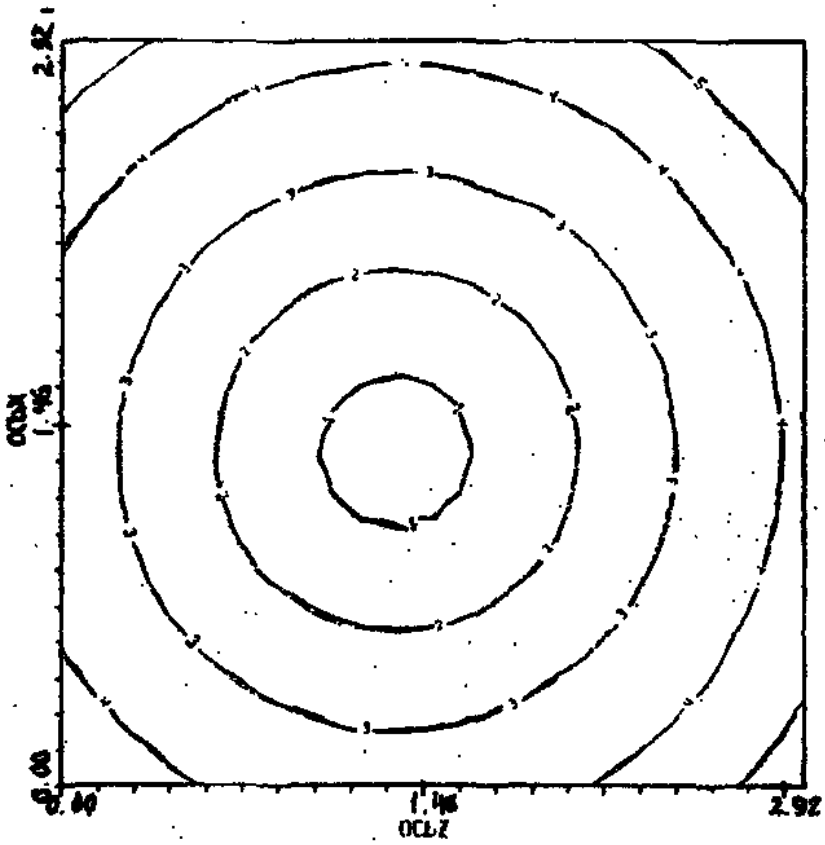
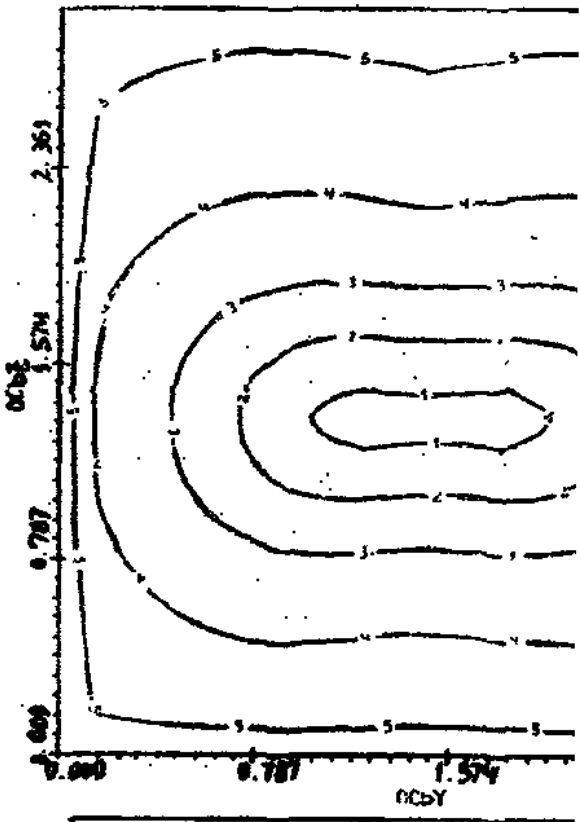
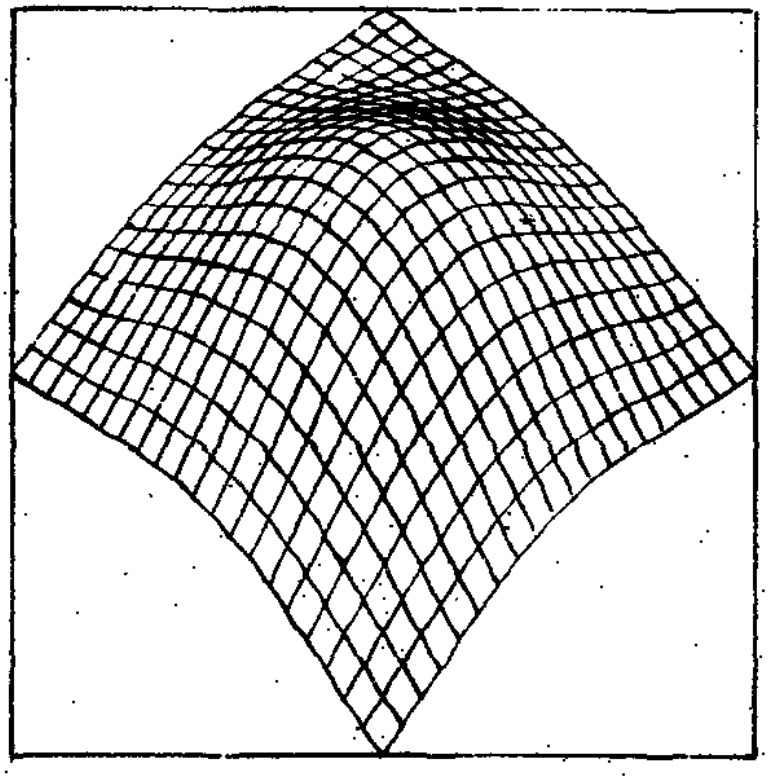



Рис 8.13



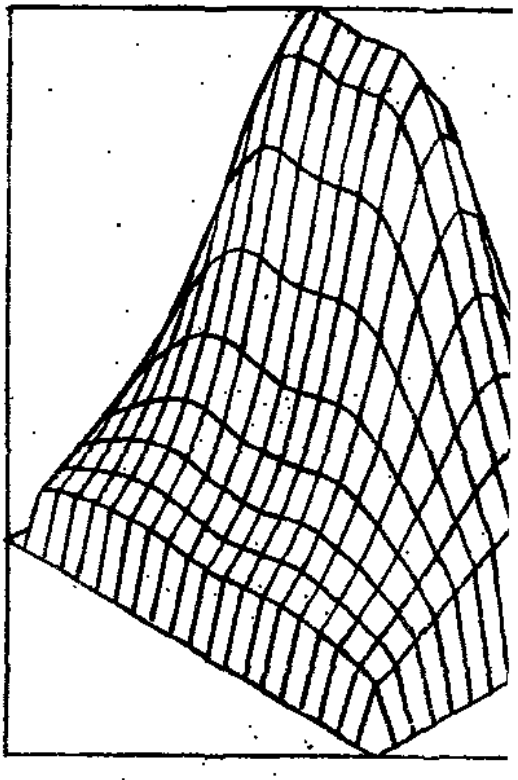
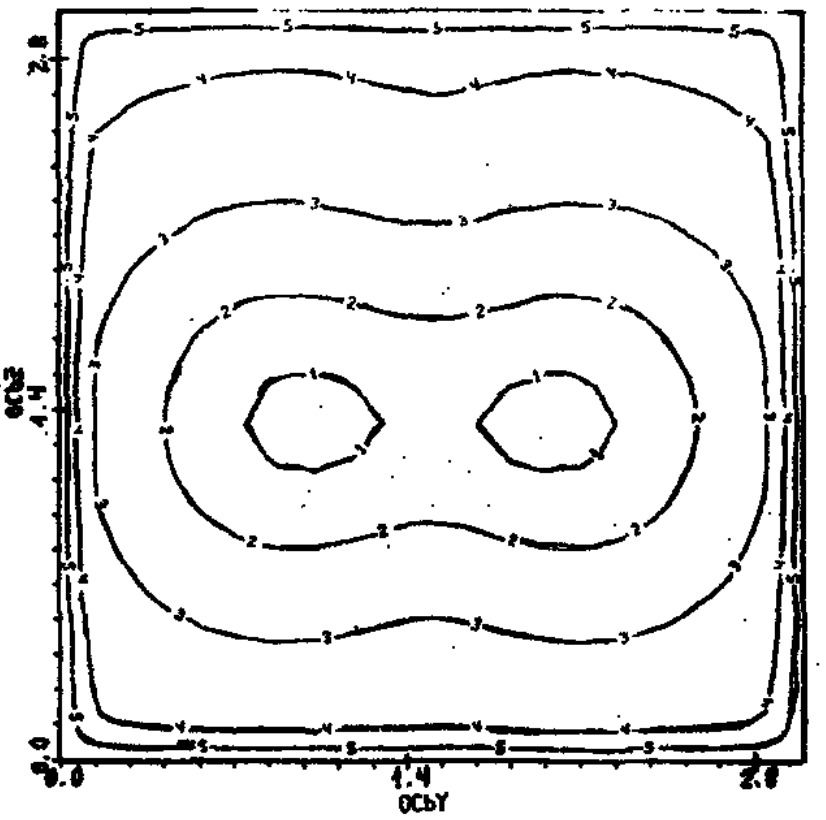


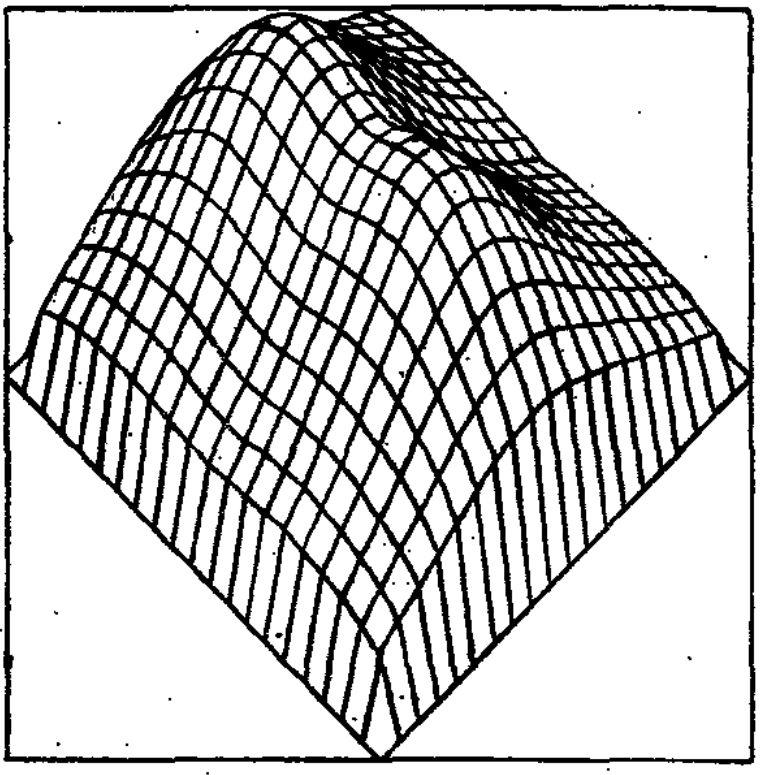
Рис 8.10 $y=0.75$

$t=0.000.$

Рис 8.12

Рис 8.15

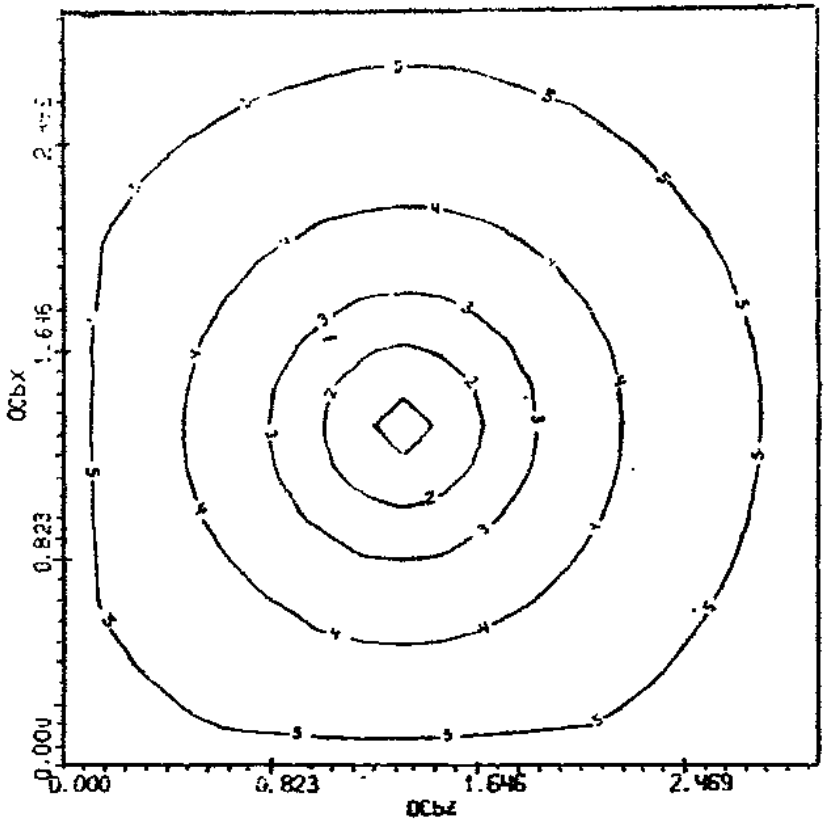




X=1.50 Рис 8.14 X=2.25

$t = 4.531 \times 10^{-2}$

Рис 8.17



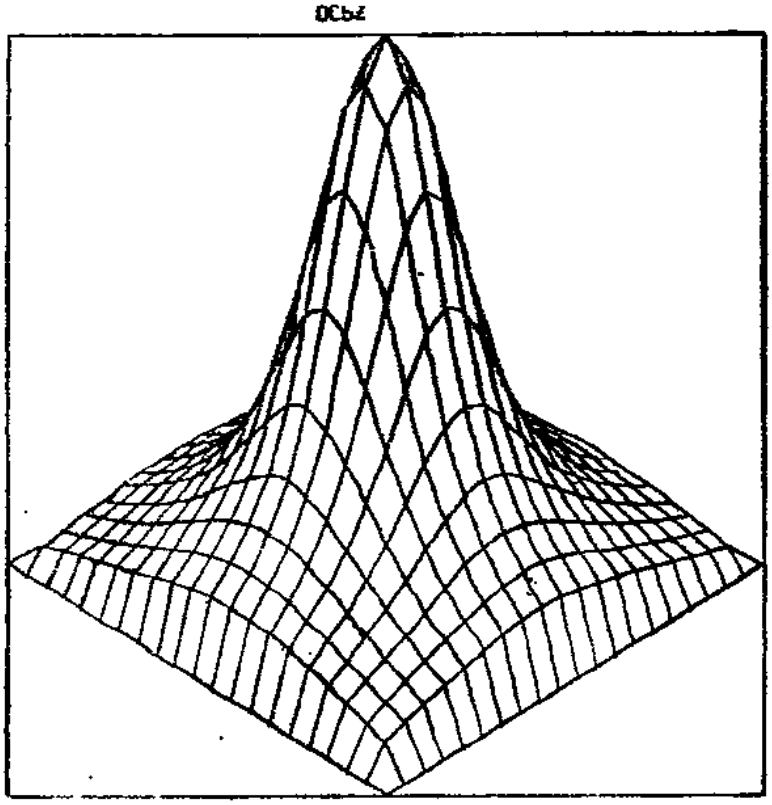
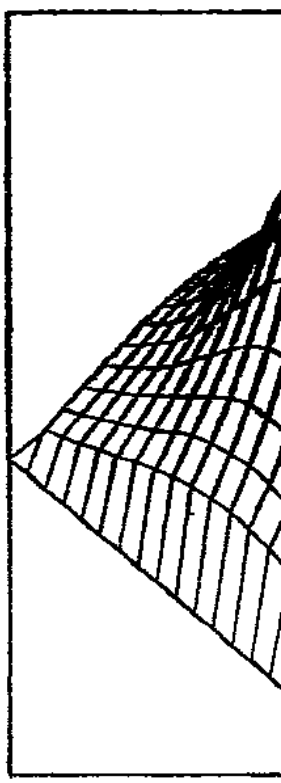



Рис 8.16

$y = 1.50$



$t = 4.531 \times 10^{-2}$

Рис 8.19

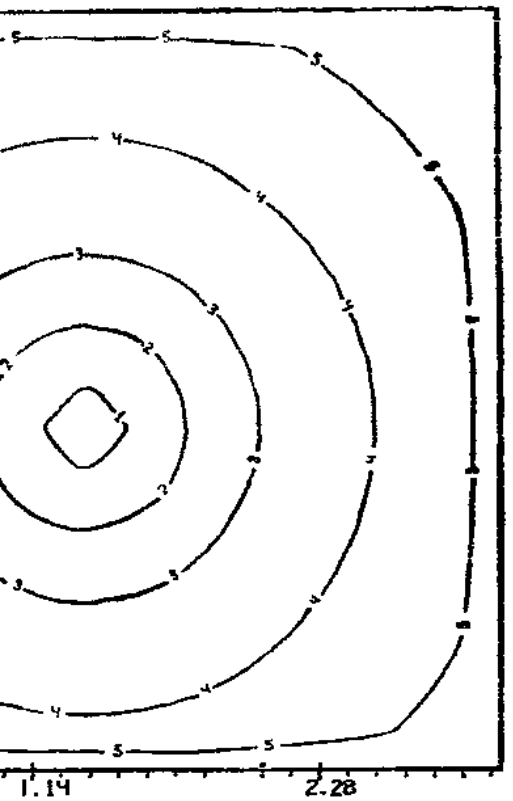
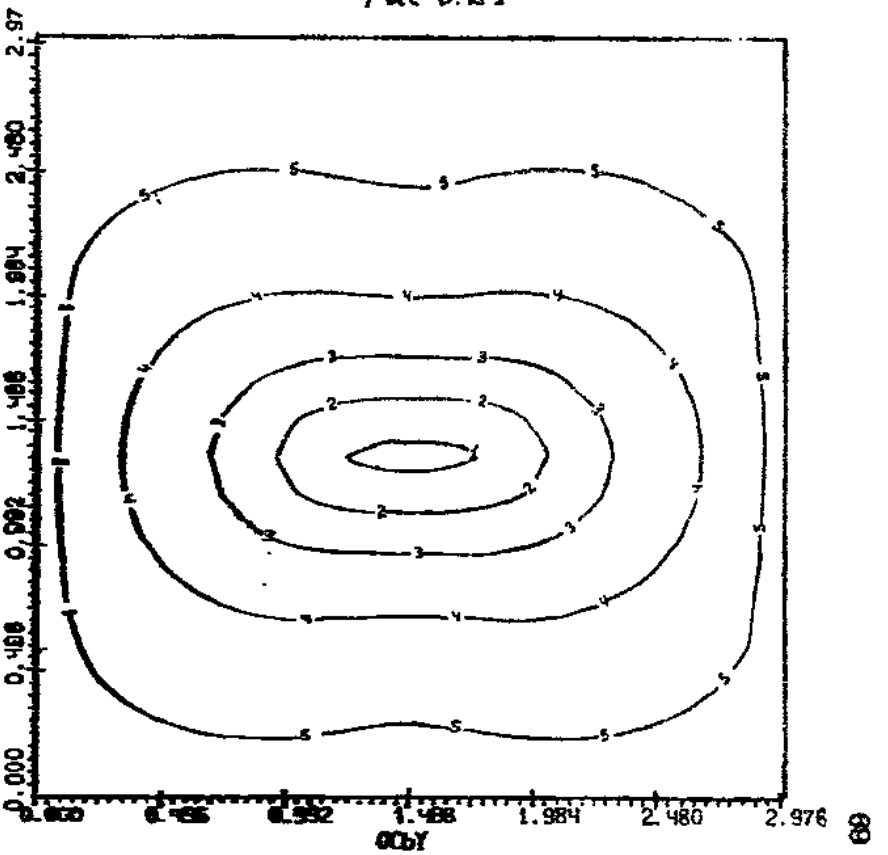
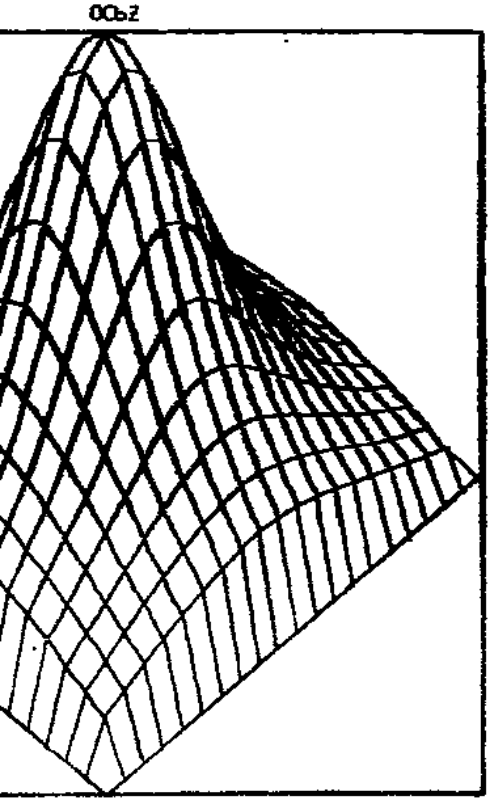



Рис 8.21



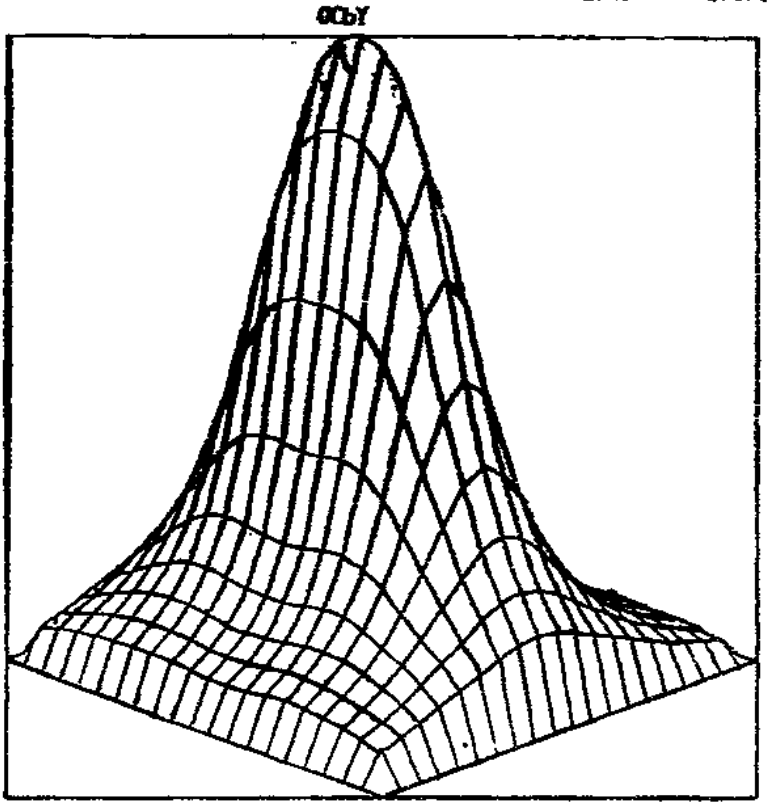




Рис 8.18 $y = 0.75$

Рис 8.20 $X = 1.50$

$t = 4.609 \times 10^{-2}$

Рис 8.23

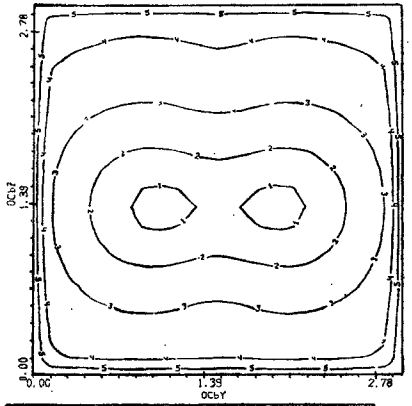



Рис 8.25

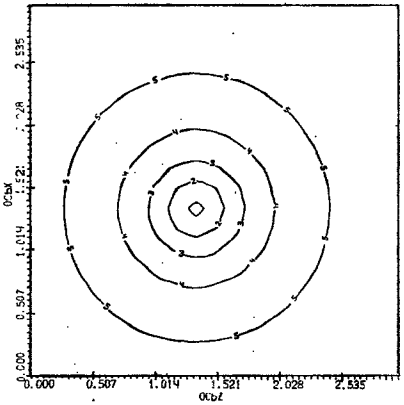
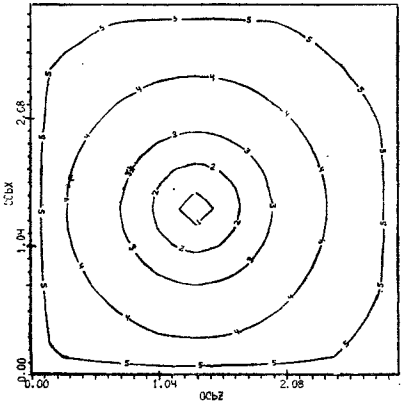



Рис 8.27




а

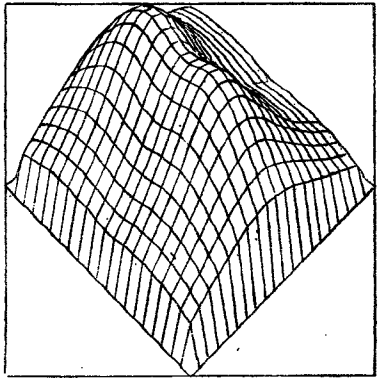


Рис 8.22 X=2.25

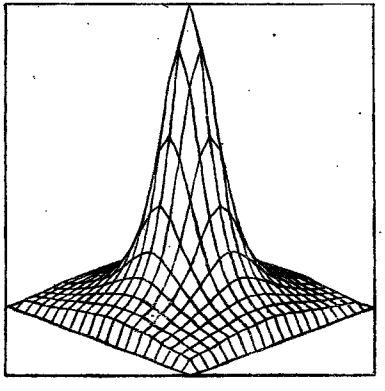


Рис 8.24 Y=1.50

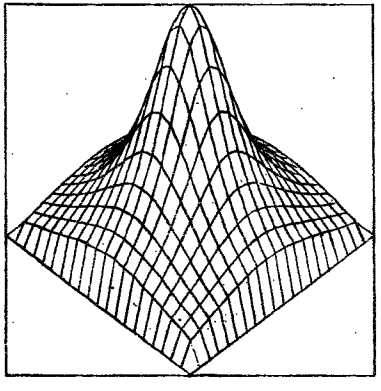


Рис 8.26 Y=0.75

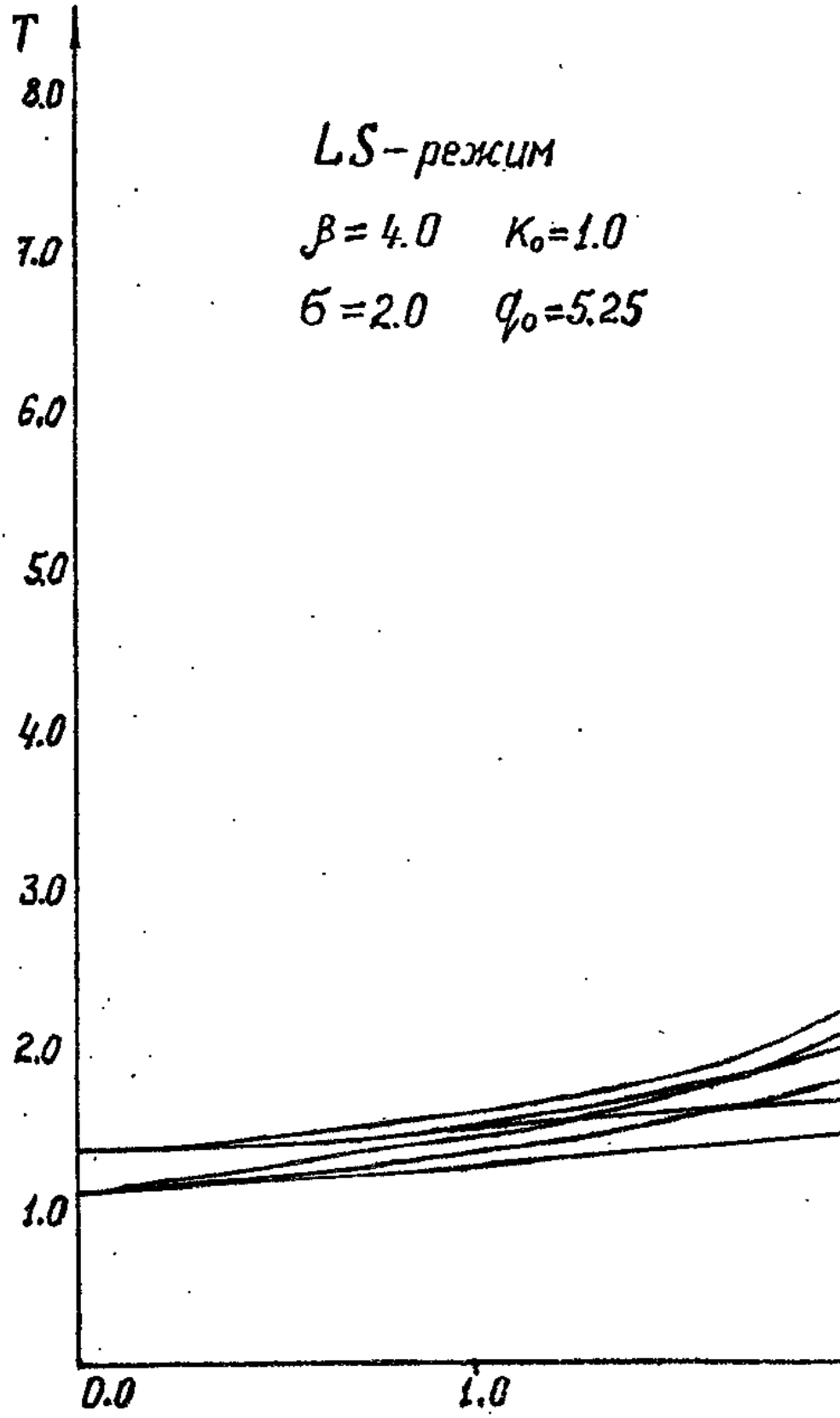
$t = 4.609 \times 10^{-2}$

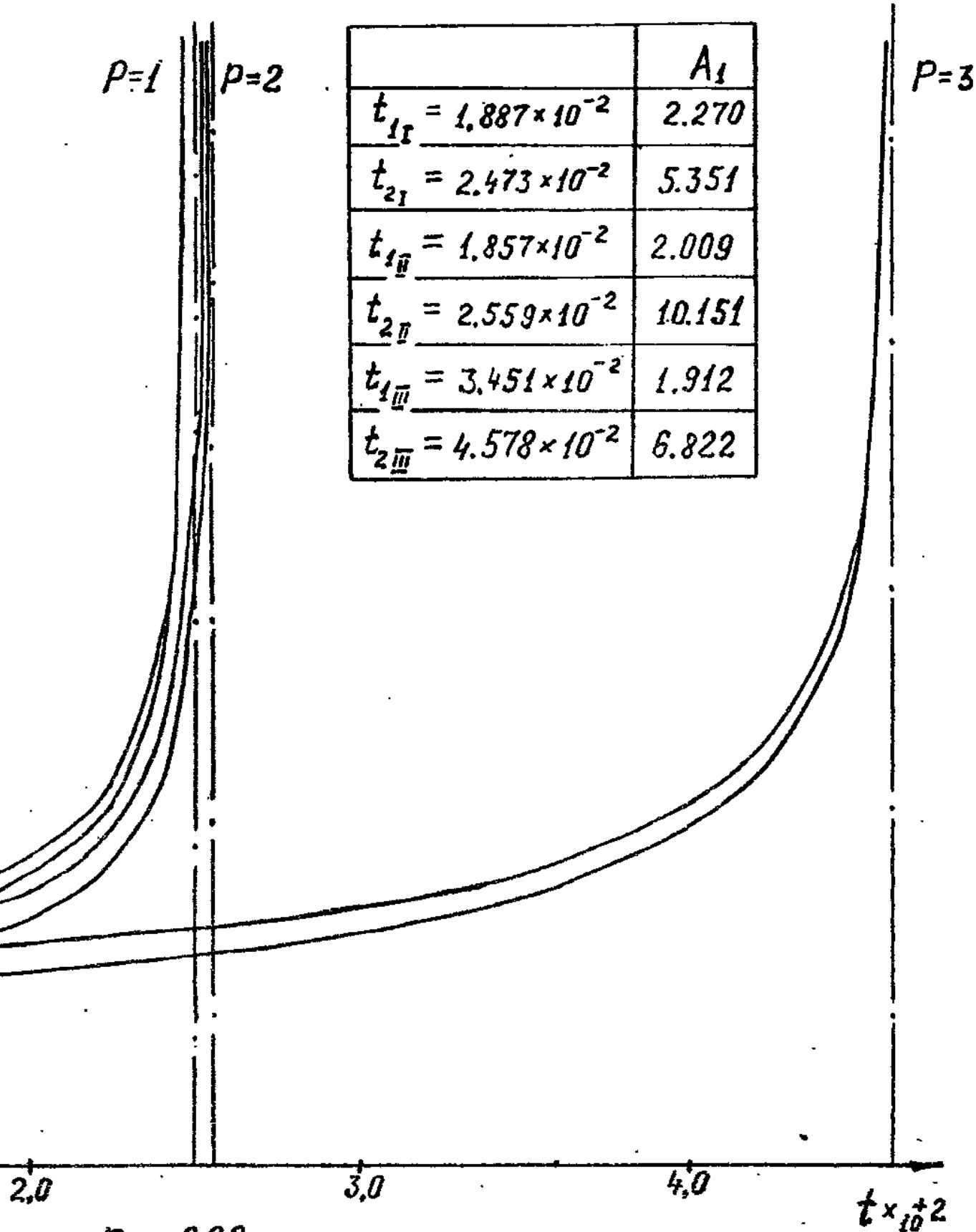
оттока тепла через границу. Исходя из этого области в задачах (I)+(3) выбирались так, чтобы отношения истоков вовне к энергии квазиструктур были одинаковы.

Начальные распределения таковы, что они перекрывают фундаментальные области в (I) и (2). Поэтому в этих задачах амплитуда структуры горит по закону близкому к горению гомотермического фона $A_1(t) \sim (1-\frac{t}{t_f})^{-\frac{1}{\beta-1}}$. На рисунке 8.28, видно, что времена обострения в этих случаях близки. В задаче (3) $t_f$ значительно больше, чем в задачах (I) и (2). Это связано с пространственным расположением структур. Действительно, если выделить в пространстве около центра симметрии распределения фундаментальную область, то отношение энергии сосредоточенной в фундаментальной области ко всей энергии минимально в задаче (3). Именно поэтому здесь для эффективного горения требуется длительная перестройка $G_{eff}$.

Рассмотрим стадию динамики. Ее можно характеризовать двумя параметрами: продолжительностью $t_2-t_1$ и интервалом температур, в котором эта стадия происходит $\Delta A = A_1(t_2)-A_1(t_1)$. Будем считать, что структуры затекли, если расстояние между локальными максимумами не превышает 0.I5. На рисунке 8.28 видим, что продолжительность стадии монотонно возрастает с повышением размерности пространства. Возможность оттока по другим пространственным направлениям увеличивает времена процессов. С этим связано и то, что $\Delta A_{III} > \Delta A_I$. Это позволяет говорить о стабилизации процесса взаимодействия в многомерном случае.

В работах [3+I0] было показано, что важную роль в рассматриваемых задачах играет резонансность возбуждения нелинейной среды. Если начальное возмущение близко к автомодельному, то $t_2$ близко к $t_f$, а $\Delta A$ в десятки раз превышает $A_1(0)$. О близости распределения к собственным функциям нелинейной среды позволяет


T
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
1.0
LS – режим
β = 4.0
K₀ = 1.0
б = 2.0
q₀ = 5.25




| | $A_1$ |
|---|---|
| $t_{1_I} = 1.887 \times 10^{-2}$ | 2.270 |
| $t_{2_I} = 2.473 \times 10^{-2}$ | 5.351 |
| $t_{1_{II}} = 1.857 \times 10^{-2}$ | 2.009 |
| $t_{2_{II}} = 2.559 \times 10^{-2}$ | 10.151 |
| $t_{1_{III}} = 3.451 \times 10^{-2}$ | 1.912 |
| $t_{2_{III}} = 4.578 \times 10^{-2}$ | 6.822 |

Рис 8.28

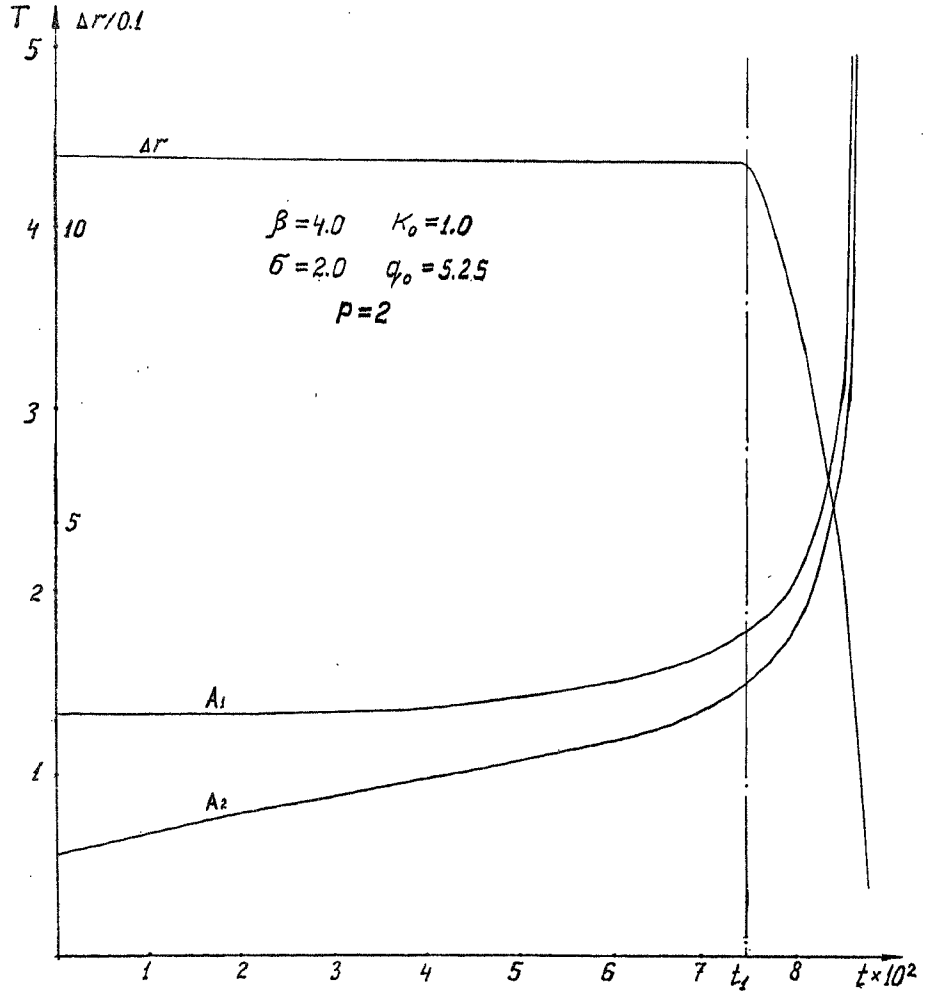

T
Δr/0.1
5
4
3
2
1
Δr
10
5
β=4.0
K₀=1.0
б=2.0
q₀=5.25
P=2
A₁
A₂
1
2
3
4
5
6
7
t₁
8
t×10²

Рис 8.29

судить отношение $\Delta A / A_1(0)$ . Как видно на рисунке 8.28 наиболее близким к резонансному возбуждению является распределение температур в двумерном случае. Об этом говорит широкий интервал, в котором происходит стадия динамики и закон горения, близкий к закону горения гомотермии (собственные функции нелинейной среды развиваются по закону гомотермии). Таким образом мы сталкиваемся здесь с резонансными свойствами нелинейной сплошной среды, т.е. выделенностью определенных распределений температуры.

Другой важной чертой развития сложных квазиструктур (см.рис. 8.29) является "прервавшееся взаимодействие". После стадии перестройки профиля наступает стадия динамики. Структуры сближаются до расстояния $\Delta r(t_2)$, а затем развиваются независимо (см.рис.8.29).

Рассмотрим эволюцию профилей представленных на рисунке 8.2 при разных значениях параметров $q_0$ . Как показано в части 3 это соответствует семейству квазиструктур с разной степенью пространственного перекрытия. В двумерных задачах "прервавшееся взаимодействие" наблюдалось при $q_0$=5.5. В то же время в одномерном случае при этом значении $q_0$ квазиструктуры взаимодействуют до конца. Здесь "прервавшееся взаимодействие" наблюдалось при $7.125 \leq q_0 \leq 8.0$. То, что в двумерном случае эффект наблюдается при меньших значениях $q_0$ и, следовательно, при больших величинах пересечения квазиструктур, связан физически с инерцией профиля. Возможность оттока по другим пространственным направлениям приводит к необходимости большего перекрытия квазиструктур. Таким образом в области, превышающей область локализации, из эффективного взаимодействия двух квазиструктур в задаче (3) вытекает, что в задачах (2) и (1) квазиструктуры также будут эффективно взаимодействовать.

## 9. Методика расчета.

При переходе от дифференциальных уравнений к разностным использовался интегро-интерполяционный метод построения разностных схем [I]. Для рассчетов применялась неявная консервативная разностная схема.

Реализующий схему алгоритм содержит итерационный процесс по нелинейности с последующим решением линейной системы алгебраических уравнений. Для решения линейной системы уравнений использовалась двухслойная итерационная схема с чебышевским набором параметров [I]. Оценка границ спектра линейной задачи производилась по теореме о кругах Гершгорина.

При расчете режимов с обострением оказалась существенной алгоритмическая симметрия методики [I5]. Иопользование итерационного процесса для решения линейной системы алгебраических уравнений, позволяет не выделять какого-либо направления в пространстве и тем самым не вноит дополнительных вычислительных возмущений.

Для расчетов режимов с обострением необходим переменный шаг по времени, сокращающийся по мере приближения структуры к $t_f$ В работах [3,5] шаг по времени выбирался с учетом числа сделанных итераций. При иопользовании данной методики наиболее эффективным оказывается алгоритм учитывающий границы спектра и число итераций по нелинейности.

Расчеты производились с использованием пакета прикладных программ ТЕКОН [I5], что позволило на исследуемом классе задач значительно сократить процесс отладки и затраты машинного времени.

На тестсвых расчетах изучалось влияние величины пространст-

венного шага сетки, граничных условий и критерия автоматического выбора временого шага. В рассматриваемом диапазоне этих параметров численное решение изменялось несущественно. Было показано, что в расчетах, использованных в частях I+7 влиянием граничных условий можно пренебречь (об этом позволяет судить анализ изменения моментов квазиструктуры). Таким образом задача (2.I) для этих случаев была эквивалентна задаче в бесконечной области, что связано о явлением локализации тепла. В проведенных раочетах (например, в случае трех одинаковых простых квазиструктур см.рис. 6.I5+6.I9) численное решение оказалось устойчивым по отношению к малым возмущениям.

Мы признательны Г.Г.Еленину и Е.С.Куркиной за ценное обсуждение ряда вопросов. Мы благодарим также Н.В.Змитренко и А.П.Михайлова.

## Литература


I. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. "Наука", I974.

2. А.А.Самарский, Ю.П.Попов. Разностные схемы газовой динамики, "Наука", I974.

3. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов обострения. Препринт ИПМ АН СССР № 74, I976.

4. А.А.Самарский, Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла. ДАН, т.227, № 2, 32I, I976.

5. Г.Г.Еленин, С.П.Курдюмов. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт ИПМ АН СССР, № I06, I977.

6. Г.Г.Еленин, К.Э.Плохотников. Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла. Препринт ИПМ АН СССР, № 9I, I977.

7. С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов, К.Э.Плохотников. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой кристалл. Препринт ИПМ АН СССР № 22, I977 г.

8. Г.Г.Еленин. Исследование некоторых гидродинамических и тепловых структур в одномерном приближении. Диссертация, I978, (выполнена в ИПМ АН СССР).

9. А.П.Михайлов. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. Диссертация, I978, (выполнена в ИПМ АН СССР).

I0. К.Э.Плохотников. Локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. Диплом, I977 (выполнен в МФТИ).

II. А.В.Лыков. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, I970, № I05, I09–I50.

I2. Проблемы математической физики и вычислительной математики, "Наука", I977.

I3. П.Гленсдорф, И.Пригожин. Термодинамическая теория структуры, устойчивоти и флуктуаций. "Мир", I973.

I4. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике. "Наука", I973.

I5. Ю.А.Повещенко, Ю.П.Попов. ТЕКОН. Пакет программ для решения тепловых задач . Препринт ИПМ АН СССР № 65 , I978.

I6. Н.В.Змитренко. Автомодельные режимы сжатия конечной массы плазмы. Диссертация (выполнена в ИПМ АН СССР), I978.

I7. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов, А.А.Самарский. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью. Письма в ЖЭТФ, том.26, вып.9, стр.620–624.

I8. Волькенштейн. Общая физика. "Наука", I978.

I9. С.П.Курдюмов, Н.В.Змитренко. $N$ и $S$ -режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. Обзор ПМТФ, I977, № 3.

20. А.А.Самарский, Г.Г.Еленин, С.П.Курдюмов, Н.В.Змитренко, С.П. Михайлов. Горение нелинейной среды в виде сложных структур. ДАН, т.237, № 6, I977.