

Академик А. А. САМАРСКИЙ, Г. Г. ЕЛЕНИН, Н. В. ЗМИТРЕНКО,
С. П. КУРДЮМОВ, А. П. МИХАЙЛОВ

ГОРЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ В ВИДЕ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР

В работах (1-4) установлено, что в неподвижной среде с коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла, степенным образом зависящими от температуры, имеют место режимы горения среды с «обострением», сопровождающиеся обращением температуры в бесконечность в конечный момент времени t_f . S - и LS -режимы «обострения» приводят к локализации горения на фундаментальной длине (L_T) и возникновению тепловых структур. Эффект метастабильной локализации тепла (и магнитного поля) рассматривался также в работах (5-10, 12).

В настоящей работе продолжено исследование LS -режима горения среды. Показано, что на развитой стадии процесса распределение температуры внутри области локализации горения описывается решениями нелинейной задачи на собственные значения, имеющей дискретный спектр. Численно находятся собственные функции (с.ф.) этой задачи и дается теоретическая оценка их числа и характера в зависимости от параметров среды. Первой с.ф. соответствует простая структура, старшим собственным функциям — сложные структуры. Формулируется принцип создания сложных структур из простых. Простые структуры не взаимодействуют, если расстояния между ними больше L_T . При определенном перекрытии фундаментальных длин простых структур с определенными максимумами температуры возникают сложные структуры. Степень перекрытия фундаментальных длин простых структур и их максимумы температуры определяются из вида старших собственных функций автомодельной задачи (см. также (2-5)). При таком объединении локализованные и невзаимодействующие простые структуры, имевшие в общем случае разные значения времени обострения t_f , превращаются внутри области локализации сложной структуры в сходящиеся к общему центру симметрии волны горения, обладающие общим временем t_f . Численный эксперимент показал, что при резонансном задании начальных данных (согласованном с с.ф. автомодельной задачи) возбуждается горение сложных структур. Горение происходит конечное время в соответствии с автомодельными законами. При нерезонансном возбуждении простые структуры либо сливаются, либо горят независимо, причем на асимптотической стадии процесс вырождается в горение одной простой структуры с наименьшим значением t_f при практически неизменной температуре в окружающей ее среде. Показано, что в рассматриваемой среде можно создать конечное число типов сложных структур, имеющих одинаковый темп горения (одинаковые значения t_f). Таким образом, установлены условия усложнения организации нелинейной среды, горящей в режиме обострения.

1. Для задачи иницирования горения в среде с нелинейной теплопроводностью

$$T_t = (k_0 T^\sigma T_r)_r + q_0 T^\beta, \quad t > 0, \quad k_0 > 0, \quad q_0 > 0, \quad \beta > 1, \tag{1}$$

$$T(r, 0) = T_0(r), \quad T_r(0, t) = 0, \quad T^\sigma T_r|_{r \rightarrow +\infty} \rightarrow 0, \quad T|_{r \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$$

в области $0 \leq r < +\infty$ исследуется автомодельное решение (см. (1-5)) вида

$$T(r, t) = q_0^n (t_f - t)^n f_0 f(\xi), \tag{2}$$

$$\xi = r (k_0 q_0^{n\sigma})^{-1/2} f_0^{m/n} (t_f - t)^{-m}, \quad n = (1 - \beta)^{-1},$$

$$m = (1 + n\sigma)/2, \quad f_0 = (\beta - 1)^n, \quad t_f = (f_0 f(0))^{\beta-1} T_0(0)^{1-\beta} / q_0.$$

Функция $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$(f^\sigma f')' - \frac{m \xi}{n} f' + f^\beta - f = 0 \quad (3)$$

и граничным условиям

$$f(0) = 0, \quad f^\sigma f' |_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad f |_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (4)$$

2. При $\xi \rightarrow \infty$, $\beta > \sigma + 1$ решения задачи (3), (4) имеют асимптотику

$$f(\xi) \sim \lambda \xi^{-2/(\beta - \sigma - 1)}, \quad \lambda > 0. \quad (5)$$

Наряду с задачей (4) для уравнения (3) рассмотрим задачу

$$f'(0) = 0, \quad f(\xi) |_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \lambda \xi^{-2/(\beta - \sigma - 1)}, \quad (6)$$

где λ — собственное число.

Численное интегрирование задачи (3), (6) при фиксированных значениях σ и β позволяет найти несколько собственных функций, соответствующих различным значениям постоянных λ_i , $i=1, 2, \dots, N$. Так, например, для $\sigma=2$, $\beta=3,666$ построено четыре решения задачи (см. рис. 1). В этом случае значения $\lambda_1=8,75$, $\lambda_2=7,98 \cdot 10^4$, $\lambda_3=3,85 \cdot 10^2$, $\lambda_4=9,48 \cdot 10^3$. Конечное число с.ф. построено и для других значений σ и β ($\beta > \sigma + 1$). В общем случае с.ф. имеют немонотонный, колебательный характер в ограниченной области $0 \leq \xi < \xi_0$. Каждая с.ф. $f_i(\xi)$, $i=1, 2, \dots, N$, имеет максимумы в точках $\xi_1 < \dots < \xi_{mi}$. Наибольший максимум i -й с.ф. расположен в точке ξ_{mi} . Для двух различных с.ф. с $\lambda_{i+1} > \lambda_i$ выполняется неравенство $f_i(\xi_{mi}) > f_{i+1}(\xi_{m_{i+1}})$. Наибольший и единственный максимум имеет первая с.ф. Старшая с.ф. с максимальным собственным значением λ_N в области, где она немонотонна, имеет характер малых колебаний относительно гомотермического решения ($f(\xi) \equiv 1$). Так, в случае $\sigma=2$, $\beta=3,666$ величина $f_N(\xi_{mN}) - 1 = 0,001$.

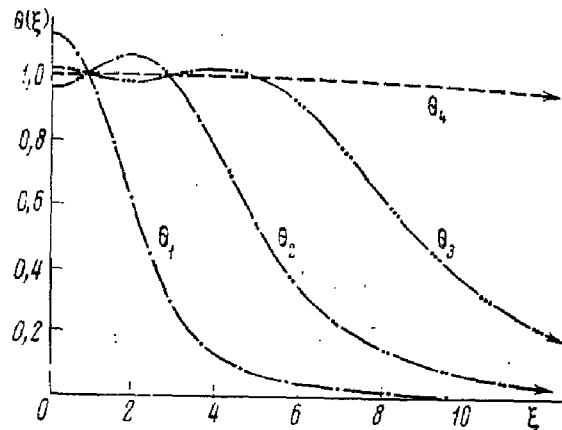


Рис. 1

3. Для определения качественного характера старшей с.ф. $f_N(\xi)$ рассмотрим модельное уравнение, описывающее поведение решений (3) вблизи гомотермического решения ($f(\xi) \equiv 1$). Пусть $f(\xi) = 1 + y(\xi)$, $|y(\xi)| \ll 1$, тогда в рамках линейного приближения получим из (3) уравнение

$$y'' - 0,5(\beta - \sigma - 1)\xi y' + (\beta - 1)y = 0, \quad (7)$$

решение которого при условии $y'(0) = 0$ имеет вид

$$y(\xi) = C_1 \Phi(-(\beta - 1)(\beta - \sigma - 1)^{-1}, 0,5, 0,25(\beta - \sigma - 1)\xi^2), \quad (8)$$

где $\Phi(a, b, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция ⁽¹¹⁾, C_1 — произвольная постоянная. Если σ и $\beta = \beta_M$ таковы, что

$$(\beta_M - 1)(\beta_M - \sigma - 1)^{-1} = M, \quad M = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

то

$$y(\xi) = C_2 H_{2M}(0,5\sqrt{\beta - \sigma - 1}\xi), \quad (10)$$

где $H_{2M}(x)$ — полином Эрмита степени $2M$. Полином Эрмита имеет M нулей на полуоси $0 \leq x < +\infty$ в точках $x_1 < x_2 < \dots < x_M$. Если при фиксированном σ значение β таково, что справедливо неравенство

$$\sigma + 1 < \beta_M \leq \beta < \beta_{M-1}, \quad (11)$$

то решение (8) имеет M нулей на полуоси $0 < \xi < +\infty$ (см. (11)).

4. Численные расчеты показывают, что число с.ф. задачи (3), (5) совпадает с числом нулей решения (8). Итак, задача (3), (5) имеет конечное число с.ф. $f_i(\xi)$, $i=1, 2, \dots, N$. Число N определяется по формуле (12) с помощью функции $[a]$ — целой части числа a :

$$N = [a - [a/a]] + 1, \\ a = (\beta - 1)(\beta - \sigma - 1)^{-1}. \quad (12)$$

Каждое решение $f_i(\xi)$ представляет собой при $i \geq 2$ тепловую волну, удовлетворяющую задаче (1), в которой все максимумы температуры в соответствии с автомодельными законами (2) движутся к центру симметрии $r=0$ и приходят в центр за время обострения t_i .

5. Исследование структурной устойчивости решений (2) задачи (1) проводили численно (см. (6)). Каждое из решений $f_i(\xi)$ (12) использовали в качестве начального условия задачи (1). Полученные численные решения в различные моменты

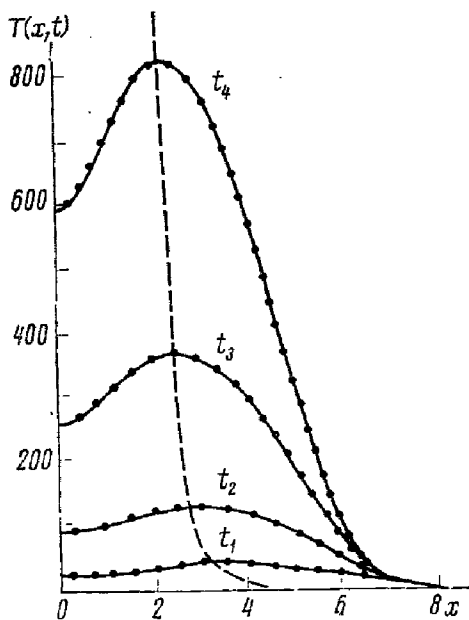


Рис. 2

времени t_i сравнивали с решением (2). Численный эксперимент показал, что первая с.ф., имеющая один центральный максимум, устойчива. Сравнение численного решения (сплошная линия) с автомодельным решением (штриховая), имеющим один нецентральный максимум (вторая с.ф.), приведено на рис. 2 ($t_1=0,436656$; $t_2=0,436863$; $t_3=0,46888$; $t_4=0,46896$). Оба решения с достаточной точностью совпадают в области локализации при росте температуры в 700 раз по сравнению с начальной температурой. Благодаря явлению локализации горения в LS -режиме происходит обрезание «хвоста» автомодельного решения (1-4).

Распределения температуры, соответствующие старшим с.ф., являются резонансными начальными данными для возбуждения горения сложных структур. Для выяснения роли резонансного возбуждения горения рассматривали также нерезонансные начальные данные в виде температурных распределений (12), подвергнутых возмущениям типа растяжения — сжатия. Задавали начальное условие вида $T_i(x, 0) = f_i(Rx)$, где $R < 1$ соответствует растяжению, а $R > 1$ — сжатию распределения температуры соответствующего с.ф. горения. На рис. 3 приведены результаты расчета сжатого профиля ($i=2$, $\sigma=2$, $\beta=3,1818$, $R=1,002$, $t_1=0,436630$; $t_2=0,436845$; $t_3=0,436868$; $t_4=0,436874$).

На рис. 3 и 4 штрих-пунктирными линиями показаны траектории движения максимума температур, штриховыми — соответствующие автомодельные траектории.

Сжатие начального профиля приводит к повышению скорости движения максимума температуры к центру симметрии и вырождению второй с.ф. в первую. При растяжении начального распределения ($i=2$, $\sigma=2$, $\beta=3,1818$, $R=0,99$) максимум температуры прекращает движение в центр и горение локализуется на фундаментальной длине (ф.д.) LS -режима (см. рис. 4, $t_1=0,436710$; $t_2=0,436886$; $t_3=0,436906$; $t_4=0,436911$). Процесс горения в виде старших с.ф. соответствует автомодельным законам при

увеличении температуры в структуре лишь в несколько десятков раз. Затем происходит вырождение старших с.ф. При этом умеренные растяжения приводят к локализации горения в области максимумов температуры, близких к центру симметрии. При более сильных растяжениях происходит локализация горения в области максимумов температуры, находящихся на больших расстояниях от центра симметрии.

6. Описанное выше поведение решения исходной задачи объясняется с помощью введенного в ⁽¹⁻⁵⁾ понятия ф.д. LS-режима. Вычисления показывают, что ф.д. для каждого максимума температуры в волне близка по величине к расстоянию между соседними минимумами, окружающими

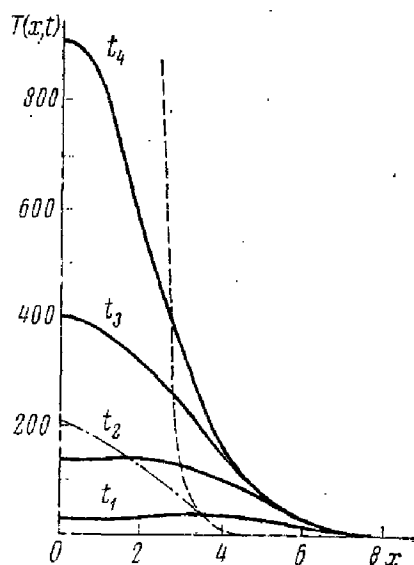


Рис. 3

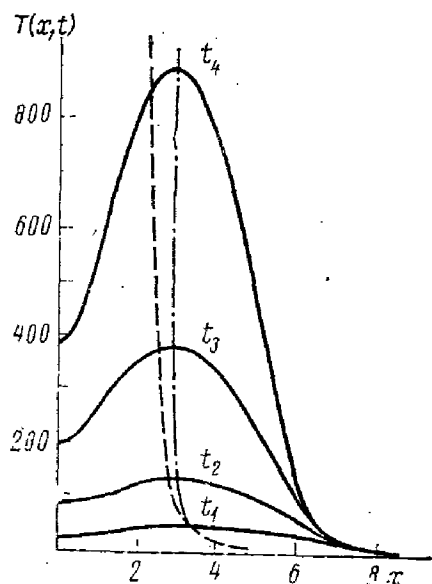


Рис. 4

данный максимум. При задании начальных данных в соответствии с автомодельным решением, т. е. при определенном перекрытии ф.д. и определенном подборе максимумов температуры, в простых структурах образуется волна горения, сходящаяся за время t_f к общему центру симметрии в соответствии с автомодельным законом. При растяжении начального автомодельного распределения температуры не происходит перекрытия ф.д. и каждый максимум температуры $T_{\max i}$ инициирует горение в резонансной области, ограниченной ф.д., независимо от соседних областей. При сжатии начального автомодельного распределения температуры происходит чрезмерное перекрытие ф.д., нарушение согласованного режима горения и быстрое вырождение старших с.ф. в первую с.ф. Аналогичный процесс отмечался также в работе ⁽³⁾.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Самарский, Н. В. Змитренко и др., ДАН, т. 227, № 2, 321 (1976).
- ² С. П. Курдюмов, Препринт ИПМ АН СССР, № 39, 1976. ³ Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов и др., Препринт ИПМ АН СССР, № 74, 1976. ⁴ А. А. Самарский, С. П. Курдюмов и др., Препринт ИПМ АН СССР, № 109, 1976. ⁵ Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 1, 3 (1977). ⁶ А. А. Самарский, И. М. Соболев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 3, № 4, 702 (1963). ⁷ С. П. Курдюмов, В сб.: Проблемы теории плазмы, Киев, «Наукова думка», 1976. ⁸ А. А. Самарский, Н. В. Змитренко и др., ДАН, т. 223, № 6, 1344 (1975). ⁹ С. П. Курдюмов, В сб.: Материалы объединенного семинара по вычислительной физике, Сухуми, 1973, Тбилиси, Изд. ТГУ, 1976. ¹⁰ С. П. Курдюмов, Препринт ИПМ АН СССР, № 18, 1975. ¹¹ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра, М., «Наука», 1965. ¹² Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, ДАН, т. 218, 1306 (1974); ДАН, т. 219, 578 (1974); Препринты ИПМ АН СССР, № 19, 1974; Деп. ВИНТИ, № 3398, 1973.