ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ВАРИАЦИОННО – РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Препринт № 34 за 1977г.

Москва.

УДК 517.949.8

АННОТАЦИЯ

В работе показано, что разностные схемы двумерной гидродинамики, получаемые из вариационного принципа, имеют второй порядок аппроксимации на гладких решениях. Рассмотрены случаи декартовых и цилиндрических координат.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

ВВЕДЕНИЕ .... 4.

§ I. Исходные уравнения .... 5.

§ 2. Аппроксимация лагранжиана и уравнения неразрывности .... 7.

§ 3. Дифференциально-разностные уравнения. Аппроксимация по пространственным переменным .... 10.

§ 4. Аппроксимация по времени .... 13.

ЛИТЕРАТУРА .... 16.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [I] на основе вариационного принципа получены дифференциально-разностные (дифференциальные по времени, разностные по пространству) и разностные уравнения, приближенно описывающие динамику жидкости в двухмерных декартовых и цилиндрических координатах. Там же показано, что получаемые вариационным способом дифференциально-разностные аналоги уравнений гидродинамики оказываются полностью консервативными [2][4].

Однако в [I] остался открытым вопрос, с каким порядком точности полученные вариационно-разностные уравнения аппроксимируют дифференциальные уравнения гидродинамики. Трудность заключается в том, что расчеты по вариационно-разностным схемам проводятся в лагранжевых переменных, т.е. расчетные сетки жестко связаны с частицами жидкости, и с течением времени могут сильно искажаться.

В настоящей работе на примере двухмерных плоских и цилиндрических координат показано, что вариационные дифференциально-разностные схемы гидродинамики имеют второй порядок аппроксимации по шагам пространственной сетки.

Полностью консервативные вариационно-разностные схемы имеют второй порядок аппроксимации также и по времени.

Авторы признательны В.А.Гасилову, Т.К.Коршия и В.Ф.Тишкину за плодотворные обсуждения и ряд конструктивных замечаний.

§ I. Исходные уравнения

Дифференциальные уравнения механики сплошных сред допускают различные формы записи. Естественно, что все эти формы эквивалентны. Однако разностные аналоги этих уравнений, вообще говоря, могут и не быть эквивалентными друг другу.

Целью настоящего параграфа является получение такого представления дифференциальных уравнений гидродинамики, которое аппрокоимировалось бы с максимальным порядком вариационно-разностными уравнениями, полученными в работе [I] .

Известно, что дифференциальные уравнения гидродинамики могут быть получены из вариационного принципа [I] . Пусть G - область, занимаемая средой в лагранжевых переменных α, β . Под ξ и μ будем понимать X и Y соответственно в случае декартовых координат, и R и Z - в случае цилиндрических координат. Тогда функционал действия для жидкой среды при отсутствии диссипативных процессов запишется в виде:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_{G} \frac{1}{\ell} \rho \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \left[\frac{u^2 + v^2}{2} - \varepsilon \right] d\alpha\, d\beta \right\} dt \quad (I)$$

где $\mathcal{L}$ - лагранжиан, ρ - плотность, u, v - проекции вектора скорости на оси ξ и μ соответственно, ε - удельная внутренняя энергия, t время, выражение

$$\frac{1}{\ell} \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{\ell} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \xi^{\ell}}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \mu}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial \xi^{\ell}}{\partial \beta} & \dfrac{\partial \mu}{\partial \beta} \end{Vmatrix} .$$

представляет собой якобиан перехода от лагранжевых координат α, β к эйлеровым ξ, μ ; ℓ – целочисленный параметр:

$$\ell = \begin{cases} 1 & \text{– для декартовых координат} \\ 2 & \text{– для цилиндрических координат} \end{cases}$$

Варьирование функционала (I) при соблюдении закона сохранения массы:

$$\rho \frac{1}{\ell} \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} = \rho^{\circ}(\alpha, \beta) \qquad (2)$$

и условия адиабатичности

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right)_S = -P \qquad (3)$$

где $\eta = 1/\rho$; P – давление, – энтропия приводит к выражению:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \iint_G \Big\{ \rho \frac{1}{\ell} \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} (u \delta u + v \delta v) +$$

$$P \left[\frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell-1} \delta \xi, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} + \frac{1}{\ell} \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \delta \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \right] \Big\} d\alpha\, d\beta \Big\} dt \qquad (4)$$

Требование равенства нулю вариации δS дает динамические уравнения гидродинамики в лагранжевых переменных:

$$\frac{1}{\ell} \rho \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \frac{du}{dt} + \xi^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(P \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right) - \xi^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial \beta}\left(P \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\right) = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\ell} \rho \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \beta}\left(P \frac{\partial \xi^{\ell}}{\partial \alpha}\right) - \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(P \frac{\partial \xi^{\ell}}{\partial \beta}\right) = 0 \qquad (6)$$

Условие (3) с учетом (2) может быть записано в следующей дифференциальной форме:

$$\rho \frac{1}{\ell} \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \frac{d\varepsilon}{dt} = -P \frac{d}{dt}\left\{ \frac{1}{\ell} \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \right\}. \qquad (7)$$

Система гидродинамических уравнений (2), (5)-(7) замыкается кинематическими уравнениями:

$$\frac{d\xi}{dt} = u; \qquad \frac{d\mu}{dt} = v \qquad (8)$$

и уравнением состояния $P = P(\rho, \varepsilon)$

§ 2. Аппроксимация лагранжиана и уравнения неразрывности

Пусть $\Omega(t_0)$ – область, занимаемая жидкой средой в плоскости эйлеровых переменных ξ, μ в момент времени t_0. Без ограничения общности полагая область $\Omega(t_0)$ односвязной обозначим через F непрерывное, взаимнооднозначное преобразование, переводящее $\Omega(t_0)$ в область G, имеющую форму единичного квадрата в плоскости α, β. Предположим также, что якобиан преобразования F всюду больше нуля $\left(\frac{\mathcal{D}(\xi, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} > 0\right)$

Связывая координаты α, β с частицами жидкости, примем их за лагранжевы координаты среды.

Введем в области G регулярную прямоугольную сетку $\omega: \{i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, M\}$ с шагами $\Delta\alpha = 1/(N-1)$; $\Delta\beta = 1/(M-1)$. Скорости и координаты жидкости будем относить к узлам сетки ω и обозначать $\xi_{i,j}$, $\mu_{i,j}$;

$u_{i,j}$; $v_{i,j}$. Термодинамические величины отнесем к центрам ячеек: $\rho_{i+1/2,j+1/2}$; $\varepsilon_{i+1/2,j+1/2}$; $P_{i+1/2,j+1/2}$. В дальнейшем ради простоты записи дробные индексы будем иногда заменять целыми по правилу: $P_{i+1/2,j+1/2} \sim P_{i,j}$

Аппроксимируем функционал (I) разностным по пространству выражением:

$$S_h = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \rho_{i+1/2,j+1/2} \left\langle \frac{1}{e} \frac{D(\xi^e, \mu)}{D(\alpha,\beta)} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} * \right.$$
$$\left. * \left\{ \frac{\langle u^2 \rangle_{i+1/2,j+1/2} + \langle v^2 \rangle_{i+1/2,j+1/2}}{2} - \varepsilon_{i+1/2,j+1/2} \right\} \Delta\alpha\,\Delta\beta \right\} dt \qquad (9)$$

Полагая

$$\left\langle \frac{1}{e} \frac{D(\xi^e, \mu)}{D(\alpha,\beta)} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{e} \begin{Vmatrix} \left\langle \frac{\partial \xi^e}{\partial \alpha} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} & \left\langle \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} \\ \left\langle \frac{\partial \xi^e}{\partial \beta} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} & \left\langle \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} \end{Vmatrix}$$

где

$$\left\langle \frac{\partial \xi^e}{\partial \alpha} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\xi^e_{i+1,j} + \xi^e_{i+1,j+1} - \xi^e_{i,j} - \xi^e_{i,j+1}}{2\Delta\alpha} + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

$$\left\langle \frac{\partial \xi^e}{\partial \beta} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\xi_{i+1,j+1} + \xi_{i,j+1} - \xi_{i+1,j} - \xi_{i,j}}{2\Delta\beta} + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\mu_{i+1,j+1} + \mu_{i+1,j} - \mu_{i,j+1} - \mu_{i,j}}{2\Delta\alpha} + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right\rangle_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\mu_{i+1,j+1} + \mu_{i,j+1} - \mu_{i+1,j} - \mu_{i,j}}{2\Delta\beta} + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

получим:

$$\left\langle \frac{1}{e} \frac{D(\xi^{e}, \mu)}{D(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{e \Delta\alpha \Delta\beta} \left[(\xi^{e}_{i+1, j+1} - \xi^{e}_{i,j})(\mu_{i,j+1} - \mu_{i+1,j}) - \right.$$

$$\left. - (\xi^{e}_{i,j+1} - \xi^{e}_{i+1,j})(\mu_{i+1,j+1} - \mu_{i,j}) \right] + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2); \quad (10)$$

Квадраты скоростей в центрах ячеек аппроксимируем также со вторым порядком:

$$\langle u^2 \rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{4} \left(u^2_{i,j} + u^2_{i+1,j} + u^2_{i+1,j+1} + u^2_{i,j+1} \right) + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

$$\langle v^2 \rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{4} \left(v^2_{i,j} + v^2_{i+1,j} + v^2_{i+1,j+1} + v^2_{i,j+1} \right) + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

Тогда очевидно, что и (9) аппроксимирует функционал (I) также со вторым порядком

$$S = S_M + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

Вводя обозначение:

$$V_{i,j} = \frac{1}{e} \left\{ (\xi^{e}_{i+1,j+1} - \xi^{e}_{i,j})(\mu_{i,j+1} - \mu_{i+1,j}) - (\xi^{e}_{i,j+1} - \xi^{e}_{i+1,j})(\mu_{i+1,j+1} - \mu_{i,j}) \right\}; \quad (11)$$

Можно представить (9) в виде:

$$S_M = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \rho_{i,j} V_{i,j} \left[\sum_{n=0,k=0}^{1} \left(\frac{u^2_{i+m,j+k} + v^2_{i+m,j+k}}{8} \right) - \varepsilon_{i,j} \right] \right\} dt \quad (9')$$

совпадающем с принятым в работе [I] .

Уравнение неразрывности (2), отнесенное к центру ячейки, запишется в виде:

$$\rho_{i+1/2, j+1/2} \left\langle \frac{1}{e} \frac{D(\xi^{e}, \mu)}{D(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} = \rho^{0}_{i+1/2, j+1/2} \quad (12)$$

Принимая во внимание (I0), (II), находим, что:

$$\left\langle \rho \frac{1}{\ell} \frac{\mathcal{D}(\xi^{\ell}, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} - \rho^{\circ} \right\rangle_{i+1/2,\, j+1/2} - \rho_{i+1/2,\, j+1/2} \frac{V_{i,j}}{\Delta\alpha \Delta\beta} + \rho^{\circ}_{i+1/2,\, j+1/2} = O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

т.е. что разностное уравнение [I]:

$$\rho_{i,j} V_{i,j} = \rho^{\circ}_{i,j} \Delta\alpha \Delta\beta = m_{i,j} \qquad (12')$$

аппроксимирует уравнение неразрывности (2) со вторым порядком.

§ 3. Дифференциально-разностные уравнения. Аппроксимация по пространственным переменным.

Полагая, что $\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} \right\rangle_{i+1/2,\, j+1/2} \equiv \frac{d \mathcal{E}_{i+1/2,\, j+1/2}}{d \eta_{i+1/2,\, j+1/2}}$, и

следовательно:

$$\frac{d \mathcal{E}_{i+1/2,\, j+1/2}}{d \eta_{i+1/2,\, j+1/2}} = P_{i+1/2,\, j+1/2} \qquad (3')$$

приравняем нулю первую вариацию функционала (9) при условии соблюдения закона сохранения массы (I2'). Это даст нам дифференциально-разностные аналоги динамических уравнений (5), (6) в виде [I]:

$$M_{i,j} \frac{d u_{i,j}}{dt} = \sum_{n,k}^{1} P_{i-n,\, j-k} \frac{\partial V_{i-n,\, j-k}}{\partial \xi_{i,j}} = 0 \qquad (13)$$

$$M_{i,j} \frac{d v_{i,j}}{dt} = \sum_{n,k}^{1} P_{i-n,\, j-k} \frac{\partial V_{i-n,\, j-k}}{\partial \mu_{i,j}} = 0 \qquad (14)$$

где
$$M_{i,j} = \frac{1}{4}\sum_{n,k=0}^{1} m_{i-n,j-k} = \frac{1}{4}\sum_{n,k=0}^{1} \rho_{i-n,j-k} V_{i-n,j-k} =$$
$$= \frac{1}{4}\Delta\alpha\,\Delta\beta \sum_{n,k}^{1} \left\langle \frac{1}{\ell}\rho\,\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)} \right\rangle_{i-n+1/2,\,j-k+1/2}$$

Эти уравнения могут быть представлены в следующей развернутой записи:

$$\left\{\frac{1}{4}\sum_{n,k=0}^{1}\left\langle \frac{1}{\ell}\rho\,\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right\rangle_{i-n+1/2,\,j-k+1/2}\right\}\frac{du_{i,j}}{dt} =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\xi_{i,j}^{\ell-1}\left\{\frac{1}{\Delta\alpha}\left[P_{i,j}\left(\frac{\mathcal{M}_{i+1,j+1}+\mathcal{M}_{i,j+1}-\mathcal{M}_{i+1,j}-\mathcal{M}_{i,j}}{\Delta\beta}\right) -\right.\right.$$
$$- P_{i-1,j}\left(\frac{\mathcal{M}_{i,j+1}+\mathcal{M}_{i-1,j+1}-\mathcal{M}_{i,j}-\mathcal{M}_{i-1,j}}{\Delta\beta}\right) + P_{i,j-1}\left(\frac{\mathcal{M}_{i+1,j}+\mathcal{M}_{i,j}-\mathcal{M}_{i+1,j-1}-\mathcal{M}_{i,j-1}}{\Delta\beta}\right) - P_{i-1,j-1}\left.\left(\frac{\mathcal{M}_{i,j}+\mathcal{M}_{i-1,j}-\mathcal{M}_{i,j-1}-\mathcal{M}_{i-1,j-1}}{\Delta\beta}\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{\Delta\beta}\left[P_{i,j}\left(\frac{\mathcal{M}_{i+1,j}+\mathcal{M}_{i+1,j+1}-\mathcal{M}_{i,j+1}-\mathcal{M}_{i,j}}{\Delta\alpha}\right) -\right.$$
$$P_{i-1,j}\left(\frac{\mathcal{M}_{i+1,j}+\mathcal{M}_{i+1,j-1}-\mathcal{M}_{i,j}-\mathcal{M}_{i,j-1}}{\Delta\alpha}\right) + P_{i,j-1}\left(\frac{\mathcal{M}_{i,j+1}+\mathcal{M}_{i,j}-\mathcal{M}_{i-1,j+1}-\mathcal{M}_{i-1,j}}{\Delta\alpha}\right)$$
$$\left.\left.- P_{i-1,j-1}\left(\frac{\mathcal{M}_{i,j}+\mathcal{M}_{i,j-1}-\mathcal{M}_{i-1,j}-\mathcal{M}_{i-1,j-1}}{\Delta\alpha}\right)\right]\right\} \qquad (13')$$

$$\left\{\frac{1}{4}\sum^{1}\left\langle \frac{1}{\ell}\rho\,\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right\rangle_{i-n+1/2,\,j-k+1/2}\right\}\frac{dv_{i,j}}{dt} =$$

$$
\begin{aligned}
= -\frac{1}{2\ell}\Bigg\{ & \frac{1}{\Delta\beta}\Bigg[P_{i,j}\left(\frac{\xi^{\ell}_{i+1,j}+\xi^{\ell}_{i+1,j+1}-\xi^{\ell}_{i,j}-\xi^{\ell}_{i,j+1}}{\Delta\alpha}\right) - \\
& - P_{i,j-1}\left(\frac{\xi^{\ell}_{i+1,j}+\xi^{\ell}_{i+1,j+1}-\xi^{\ell}_{i,j}-\xi^{\ell}_{i,j-1}}{\Delta\alpha}\right) + P_{i-1,j} \,* \\
& * \left(\frac{\xi^{\ell}_{i,j}+\xi^{\ell}_{i,j+1}-\xi^{\ell}_{i-1,j}-\xi^{\ell}_{i-1,j+1}}{\Delta\alpha}\right) - P_{i-1,j-1}\left(\frac{\xi^{\ell}_{i,j}+\xi^{\ell}_{i,j-1}-\xi^{\ell}_{i-1,j}-\xi^{\ell}_{i-1,j-1}}{\Delta\alpha}\right)\Bigg] - \\
& - \frac{1}{\Delta\alpha}\Bigg[P_{i,j}\left(\frac{\xi^{\ell}_{i+1,j+1}+\xi^{\ell}_{i,j+1}-\xi^{\ell}_{i+1,j}-\xi^{\ell}_{i,j}}{\Delta\beta}\right) - \\
& - P_{i-1,j}\left(\frac{\xi^{\ell}_{i,j+1}+\xi^{\ell}_{i-1,j+1}-\xi^{\ell}_{i,j}-\xi^{\ell}_{i-1,j}}{\Delta\beta}\right) + P_{i,j-1}\Bigg(\frac{\xi^{\ell}_{i+1,j}+\xi^{\ell}_{i,j}-}{} \\
& \frac{-\,\xi^{\ell}_{i,j-1}-\xi^{\ell}_{i+1,j-1}}{\Delta\beta}\Bigg) - P_{i-1,j-1}\left(\frac{\xi^{\ell}_{i,j}+\xi^{\ell}_{i-1,j}-\xi^{\ell}_{i-1,j-1}-\xi^{\ell}_{i,j-1}}{\Delta\beta}\right)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (14')
$$

Непосредственной проверкой легко установить, что уравнения (13$'$), (14$'$) аппроксимируют уравнения (5),(6) со вторым порядком относительно $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$.

Как показано в [1], из равенства (3) вытекает закон изменения удельной внутренней энергии в виде:

$$m_{i,j}\frac{d\,\mathcal{E}_{i,j}}{dt} = -P_{i,j}\frac{d\,V_{i,j}}{dt} \qquad (15)$$

Принимая во внимание (10) и (11), непосредственной проверкой также можно убедиться в том, что уравнение (15) аппроксимирует уравнение (7) со вторым порядком точности.

Уравнения (13),(14) консервативны [3], [1]. Система уравнений (12)-(15) полностью консервативна [2], [1].

В работе [1] принятое несколько отличное от (11) выражение для объема в цилиндрическом случае, а именно:

$$
\begin{aligned}
V^{*}_{i,j} = {} & \frac{1}{3}\left(R_{i+1,j+1}+R_{i+1,j}+R_{i,j+1}\right)\left[Z_{i+1,j}\left(R_{i+1,j+1}-R_{i,j+1}\right)+\right.\\
& + Z_{i+1,j+1}\left(R_{i,j+1}-R_{i+1,j}\right)+Z_{i,j+1}\left.\left(R_{i+1,j}-R_{i+1,j+1}\right)\right]+\frac{1}{3}\left(R_{i+1,j}+R_{i,j+1}+\right.\\
& \left.+R_{i,j}\right)*\left[Z_{i+1,j+1}\left(R_{i,j+1}-R_{i,j}\right)+Z_{i,j+1}\left(R_{i,j}-R_{i+1,j}\right)+Z_{i,j}\left(R_{i+1,j}-R_{i,j+1}\right)\right]\equiv\\
\equiv {} & \frac{2}{3}\Big\{\left(Z_{i+1,j}-Z_{i,j+1}\right)\left(R^{2}_{i,j}-R^{2}_{i+1,j+1}\right)+\left(Z_{i+1,j+1}-Z_{i,j}\right)\left(R^{2}_{i+1,j}-R^{2}_{i,j+1}\right)+\\
& +\left(Z_{i+1,j}R_{i+1,j}-Z_{i,j+1}R_{i+1,j}\right)*\left(R_{i,j}-R_{i+1,j+1}\right)+\left(Z_{i+1,j+1}R_{i+1,j+1}-\right.\\
& \left.-Z_{i,j}R_{i,j}\right)\left(R_{i+1,j}-R_{i,j+1}\right)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

Однако, можно показать, что $V^{*}_{i,j}=V_{i,j}+O(\Delta\alpha^{4}+\Delta\beta^{4})$ так что все выводы о порядке аппроксимации остаются в силе и в этом случае.

§ 4. Аппроксимация по времени

Заменим область изменения переменной t дискретным набором точек $t_n : (n=0,1,\ldots,K)$. Величины $u^{n}_{i,j}$; $v^{n}_{i,j}$; $\rho^{n}_{i,j}$; $\varepsilon^{n}_{i,j}$; $P^{n}_{i,j}$ будем относить к моменту времени t_n. Заменяя в уравнениях (13)-(15), производные по t разностями и учитывая уравнение неразрывности (12) и уравнение состояния, получим замкнутую систему разноотных уравнений в виде [I]

$$M_{i,j}\ \frac{\overset{n+1}{u}_{i,j}-\overset{n}{u}_{i,j}}{\tau_n}-\sum_{k,l=0}^{1}P^{(\sigma_1)}_{i-l,j-k}\left(\frac{\partial V_{i-l,j-k}}{\partial \xi_{i,j}}\right)^{*}=0 \qquad (18)$$

$$M_{i,j}\ \frac{\overset{n+1}{v}_{i,j}-\overset{n}{v}_{i,j}}{\tau_n}-\sum_{k,l=0}^{1}P^{(\sigma_1)}_{i-l,j-k}\left(\frac{\partial V_{i-l,j-k}}{\partial \mu_{i,j}}\right)^{*}=0 \qquad (19)$$

$$m_{i,j}\ \frac{\overset{n+1}{\varepsilon}_{i,j}-\overset{n}{\varepsilon}_{i,j}}{\tau_n}=-P^{(\sigma_1)}_{i,j}\sum_{l,k=0}^{1}\left[\left(\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i+l,j+k}}\right)^{*}u^{(\sigma_2)}_{i+l,j+k}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \mu_{i+l,j+k}}\right)^{*}v^{(\sigma_2)}_{i+l,j+k}\right] \qquad (20)$$

$$\overset{n}{\rho}_{i,j}\overset{n}{V}_{i,j}=m_{i,j} \qquad (21)$$

$$\frac{\overset{n+1}{\xi}_{i,j}-\overset{n}{\xi}_{i,j}}{\tau_n}=u^{(\sigma_3)}_{i,j} \qquad (22)$$

$$\frac{\overset{n+1}{\mu}_{i,j}-\overset{n}{\mu}_{i,j}}{\tau_n}=v^{(\sigma_3)}_{i,j} \qquad (23)$$

Здесь $\tau_n=t_{n+1}-t_n;\ \overset{n}{P}_{i,j}=P(\overset{n}{\rho}_{i,j};\overset{n}{\varepsilon}_{i,j});\ f^{(\sigma)}=\sigma \overset{n+1}{f}+(1-\sigma)\overset{n}{f}$

При $\sigma_2=\sigma_3=0.5$ и

$$\left(\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i+l,j+k}}\right)^{*}=\frac{\partial V^{(0.5)}_{i,j}}{\partial \xi^{(0.5)}_{i+l,j+k}};\quad \left(\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \mu_{i+l,j+k}}\right)^{*}=\frac{\partial V^{(0.5)}_{i,j}}{\partial \mu^{(0.5)}_{i+l,j+k}};$$

{где $V_{i,j}^{(0.5)}$ означает, что все входящие в выражения (II), (I7) сомножители берутся с весом 0.5}, уравнения (I8)-(23) полностью консервативны. Очевидно, что при $\sigma_1 = 0.5$ система разностных уравнений (I8)-(23) имеет второй порядок аппроксимации по временному шагу τ_n. При $\sigma_1 \neq 0.5$ имеет место первый порядок.

ЛИТЕРАТУРА

I. В.М.Головизнин, А.А.Самарский, А.П.Фаворский "Вариационный принцип получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики", Препринт ИПМ АН СССР, № 65, 1976 г.

2. А.А.Самарский, Ю.П.Попов "Разностные схемы газовой динамики", Наука, М., 1975 г.

3. А.А.Самарский "Введение в теорию разностных схем", Наука, М., 1971 г.

4. О.С.Мажорова, Ю.П.Попов "К расчету двумерных уравнений газовой динамики" Препринт ИПМ АН СССР

В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский. "Об аппроксимации вариационно - разностных уравнений гидродинамики."
Редактор А.П. Фаворский. Корректор В.М. Головизнин.

№ Т-07574 от 12.04.77г. Заказ № 4257. Тираж 150 экз.
формат бумаги 60Х90, 1/16 Объем 0,8 уч. изд. л.
055(02)2 Цена 6 коп.
Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.