ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Препр.
Г-61

В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский.

ОБ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ.

Препринт № 70 за 1976г.

Москва.

УДК 518:517.944/947

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе исследуется устойчивость линеаризованных дифференциально-разностных и разностных уравнений газодинамики, полученных из вариационного принципа. Вводится специальный вид линейной искусственной вязкости, не искажающей акустические колебания среды.

Рассматривается вопрос об оптимальном выборе величины коэффициента при искусственной вязкости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

§ I. Введение ..... 4.

§ 2. Исходные дифференциально-разностные и разностные уравнения ..... 5.

§ 3. Искусственная вязкость ..... 8.

§ 4. Линеаризация исходных уравнений. Акустическое приближение ..... I0.

§ 5. Анализ линейного приближения для одномерных дифференциально-разностных и разностных уравнений ..... I3.

§ 6. Анализ линейного приближения для двухмерных дифференциально-разностных и разностных уравнений ..... 20.

§ 7. Алгоритм нахождения "оптимального" коэффициента при искусственной вязкости ..... 3I.

§ 8. Исследование устойчивости линеаризированных дифференциально-разностных и разностных уравнений ..... 34.

§ I. ВВЕДЕНИЕ

В работе [I] на основании вариационного принципа получены системы дифференциально-разностных и разностных уравнений, моделирующие поведение неупругой сплошной среды в отсутствие диссипативных процессов.

Одним из важнейших свойств этих уравнений является полная консервативность [2] , и, следовательно, их изоэнтропичность.

Однако это последнее обстоятельство накладывает сильное ограничение на класс моделируемых задач, исключая из него течения с ударными волнами, сопровождающиеся увеличением энтропии. Для того, чтобы снять это ограничение, необходимо ввести какую-либо форму искусственной вязкости.

В настоящей работе рассматривается линейная искусственная вязкость, обладающая тем свойством, что она не искажает собственных функций линеаризированных около положения равновесия исходных дифференциально-разностных и разностных уравнений, т.е. не "портит" звуковые волны в определяемой этими уравнениями среде.

Численное значение коэффициента при такой искусственной вязкости предлагается выбирать из условия наибыстрейшего затухания самых высокочастотных колебаний, определяемых линеаризованными уравнениями.

При таком выборе искусственной вязкости оказывается возможным до конца исследовать проблему устойчивости линеаризованных систем уравнений в двухмерных декартовых и цилиндрических координатах на произвольных (нерегулярных) расчетных сетках.

Авторы выражают признательность А.В. Гулину, В.Ф. Тишкину и Т.К. Коршия за полезные обсуждения и помощь при оформлении этой работы.

§ 2. ИСХОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как уже отмечалось во введении, в работе [I] , на основании вариационных принципов построены дифференциально-разностные и разностные уравнения, описывающие поведение неупругой сплошной среды в двухмерных декартовых и цилиндрических координатах.

Если под ξ_{ij} , μ_{ij} понимать координаты узлов расчетной сетки (x_{ij}, y_{ij} соответственно, в случае декартовых координат, и R_{ij}, Z_{ij} - в случае цилиндрических координат), то вышеупомянутые дифференциально-разностные уравнения для обоих систем координат могут быть записаны в следующем единообразном виде:

$$M_{ij}\frac{du_{ij}}{dt} - P_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}} - P_{i-1,j}\frac{\partial V_{i-1,j}}{\partial \xi_{ij}} - P_{i-1,j-1}\frac{\partial V_{i-1,j-1}}{\partial \xi_{ij}} - P_{i,j-1}\frac{\partial V_{i,j-1}}{\partial \xi_{ij}} = 0 \quad (I)$$

$$M_{ij}\frac{dv_{ij}}{dt} - P_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}} - P_{i-1,j}\frac{\partial V_{i-1,j}}{\partial \mu_{ij}} - P_{i-1,j-1}\frac{\partial V_{i-1,j-1}}{\partial \mu_{ij}} - P_{i,j-1}\frac{\partial V_{i,j-1}}{\partial \mu_{ij}} = 0 \quad (2)$$

$$m_{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = -P_{ij}\frac{dV_{ij}}{dt} \quad (3)$$

$$\rho_{ij}V_{ij} = m_{ij} \quad (4)$$

$$\frac{d\xi_{ij}}{dt} = u_{ij} \quad (5)$$

$$\frac{d\mu_{ij}}{dt} = v_{ij} \quad (6)$$

$$P_{ij} = P(\rho_{ij}, \varepsilon_{ij}) \quad (7)$$

Здесь, как и в [I] приняты следующие обозначения: m_{ij} – масса лагранжевой ячейки с номером (i , j) аппроксимационной сетки; $M_{ij} = 1/4\,(m_{ij} + m_{i-1j} + m_{i-1j-1} + m_{ij-1})$ – "массы узлов", P_{ij} – давление внутри ячейки (i , j), V_{ij} – объем ячейки (i , j), ε_{ij} – удельная внутренняя энергия ячейки, ρ_{ij} – плотность ячейки.

Уравнения (I), (2) представляют собой законы изменения импульсов узлов, уравнение (3) – закон изменения внутренней энергии, (4) – закон сохранения массы. Формула (7) (уравнение состояния) задаёт термодинамические свойства среды. Величины $P_{ij}, \varepsilon_{ij}, \rho_{ij}$ считаются в каждый момент времени постоянными в пределах одной ячейки.

Следует отметить, что в уравнениях (I)–(3) отсутствуют члены, представляющие какие-либо диссипативные процессы.

Разностная система уравнений получается из (I)–(7) путем замены производных по времени соответствующими разностями, и имеют вид [I] :

$$M_{ij}\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n}}{\tau_n} - P_{ij}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}} - P_{i-1j}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}} - P_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}} - P_{ij-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}} = 0 \quad (I')$$

$$M_{ij}\frac{v_{ij}^{n+1}-v_{ij}^{n}}{\tau_n} - P_{ij}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} - P_{i-1j}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} - P_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} - P_{ij-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} = 0 \quad (2')$$

$$m_{ij}\frac{\varepsilon_{ij}^{n+1}-\varepsilon_{ij}^{n}}{\tau_n} = -P_{ij}^{(\sigma_1)}\Big[\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \xi_{ij}}u_{ij}^{(\sigma_4)} + \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \mu_{ij}}v_{ij}^{(\sigma_4)} + \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \xi_{i+1j}}u_{i+1j}^{(\sigma_4)} +$$

$$\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \mu_{i+1j}}v_{i+1j}^{(\sigma_4)} + \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \xi_{i+1j+1}}u_{i+1j+1}^{(\sigma_4)} + \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \mu_{i+1j+1}}v_{i+1j+1}^{(\sigma_4)} + \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \xi_{ij+1}}u_{ij+1}^{(\sigma_4)} + \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \mu_{ij+1}}v_{ij+1}^{(\sigma_4)}; \quad (3')$$

$$\rho_{ij}^{n+1}V_{ij}^{n+1} = m_{ij} \quad (4')$$

$$\frac{\xi_{ij}^{n+1}-\xi_{ij}^{n}}{\tau_n}=u_{ij}^{(\sigma_5)} \tag{5'}$$

$$\frac{\mu_{ij}^{n+1}-\mu_{ij}^{n}}{\tau_n}=v_{ij}^{(\sigma_5)} \tag{6'}$$

$$P^{n+1}=P(\rho^{n+1},\varepsilon^{n+1}) \tag{7'}$$

где $\tau_n=t_{n+1}-t_n$, $\sigma_K\in[0,1]$, K = I,2,3,4,5, все величины с верхним индексом n относятся к моменту времени t_n, а под выражениями типа $f^{(\sigma)}$ понимается среднее взвешенное между моментами t_n и t_{n+1}

$$f^{(\sigma)}=\sigma f^{n+1}+(1-\sigma)f^{n}$$

Отметим, что при $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=0.5$ уравнение энергии (4′) может быть записано в следующих алгебраических эквивалентных (4′) формах:

$$m_{ij}\frac{\varepsilon_{ij}^{n+1}-\varepsilon_{ij}^{n}}{\tau_n}=-P_{ij}^{(\sigma_1)}\frac{V_{ij}^{n+1}-V_{ij}^{n}}{\tau_n}$$

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{n+1}-\varepsilon_{ij}^{n}}{\tau_n}=-P_{ij}^{(\sigma_1)}\frac{1}{\tau_n}\left(\frac{1}{\rho_{ij}^{n+1}}-\frac{1}{\rho_{ij}^{n}}\right)$$

и, как показано в [I], при таких значениях весов система разностных уравнений (I)-(7) полностью консервативна.

Объем ячейки V_{ij} задается формулой:

$$V_{ij}=\frac{1}{2}\left[(x_{i+1j+1}-x_{ij})(y_{ij+1}-y_{i+1j})-(x_{i+1j}-x_{ij+1})(y_{i+1j+1}-y_{ij})\right] \tag{8}$$

в декартовых координатах, и формулой:

$$V_{ij}=\frac{1}{3}(R_{i+1j}+R_{i+1j+1}+R_{ij+1})\times\frac{1}{2}\left[x_{i+1j}(y_{i+1j+1}-y_{ij+1})+x_{i+1j+1}(y_{ij+1}-y_{i+1j})+\right. \tag{9}$$

$$\left.x_{ij+1}(y_{i+1j}-y_{i+1j+1})\right]+\frac{1}{3}(R_{i+1j}+R_{ij+1}+R_{ij})$$

$$\times\frac{1}{2}\left[x_{i+1j}(y_{ij+1}-y_{ij})+x_{ij+1}(y_{ij}-y_{i+1j})+x_{ij}(y_{i+1j}-y_{ij+1})\right]$$

в цилиндрических координатах.

§3. ИСКУССТВЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ.

Для того, чтобы уравнения (I)-(7) и (I')-(7') были пригодны для описания течений с ударными волнами, в них необходимо ввести искусственную вязкость.

Основные требования, которые обычно предъявляются к искусственной вязкости, следующие:

I. Искусственная вязкость не должна нарушать консервативность динамических уравнений.

2. Искусственная вязкость должна обеспечивать монотонность фронта "модельной" ударной волны, и размазывать его на наименьшее возможное количество ячеек.

Для того, чтобы удовлетворить первому требованию, достаточно ввести искусственную вязкость как некую добавку к давлению P_{ij} в ячейке. Выполнение же второго условия существенно зависит от типа искусственной вязкости и величины коэффициента при ней.

В настоящей работе для системы дифференциально-разностных уравнений (I)-(7) рассматривается искусственная вязкость q_{ij} в виде

$$q_{ij} = \varkappa C_{ij}^2 \frac{\rho_{ij}}{V_{ij}} \frac{dV_{ij}}{dt} = \varkappa C_{ij}^2 \frac{\rho_{ij}}{V_{ij}} \times$$

$$\left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}} u_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}} v_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j}} u_{i+1j} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j}} v_{i+1j} + \right. \qquad (10$$

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j+1}} u_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j+1}} v_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij+1}} u_{ij+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij+1}} v_{ij+1} \Big]$$

где C_{ij} – местная адиабатическая скорость звука, а $\varkappa$ – размерный коэффициент.

Для разностных уравнений (I')–(7') соответствующая (IO) форма вязкости будет выглядеть следующим образом:

$$q_{ij}^n = \varkappa^n (C_{ij}^2)^n \frac{\rho_{ij}^n}{V_{ij}} \Big[\frac{\partial V_{ij}^n}{\partial \xi_{ij}} u_{ij}^n + \frac{\partial V_{ij}^n}{\partial \mu_{ij}} v_{ij}^n + \frac{\partial V_{ij}^n}{\partial \xi_{i+1j}} u_{i+1j}^n + \frac{\partial V_{ij}^n}{\partial \mu_{i+1j}} v_{i+1j}^n +$$

$$\frac{\partial V_{ij}^n}{\partial \xi_{i+1j+1}} u_{i+1j+1}^n + \frac{\partial V_{ij}^n}{\partial \mu_{i+1j+1}} v_{i+1j+1}^n + \frac{\partial V_{ij}^n}{\partial \xi_{ij+1}} u_{ij+1}^n + \frac{\partial V_{ij}^n}{\partial \mu_{ij+1}} v_{ij+1}^n \Big] \qquad (IO')$$

Значения коэффициентов $\varkappa = \varkappa(t)$; $\varkappa^n$ обычно подбираются экспериментально. При этом, они оказываются зависящими от величины и регулярности ячеек расчетной сетки, а также от значения ряда термодинамических величин.

Последнее обстоятельство приводит к тому, что при проведении расчетов сложных течений (когда конфигурация разностной сетки в процессе расчетов существенно меняется) предсказать последствия "работы" искусственной вязкости с подобранным на простых течениях коэффициентами $\varkappa$ бывает очень трудно. Плохой подбор коэффициента $\varkappa$ приводит либо к сильному размазыванию ударных волн, либо к появлению "ряби", не имеющей физического смысла. Такой характер проявления "неоптимальности" $\varkappa$ наводит на мысль находить величины $\varkappa$ в каждый момент времени из условия наибыстрейшего затухания самого высокочастотного нормального колебания [5] линеаризованных уравнений (I)–(7), (I')–(7').

Действительно, если длинноволновые собственные колебания механических систем, определяемых этими уравнениями, аппроксимируют

собственные колебания соответствующих им распределенных систем с бесконечным количеством степеней свободы, то высокочастотная часть спектров систем (I)-(7), (I′)-(7′) является по-существу, "паразитной" и, по всей видимости, приводит к накоплению нерегулярностей типа "ряби". Слишком же интенсивное демпфирование всей высокочастотной части спектров может вызвать сильное размазывание рассчитываемых газодинамических структур.

§4. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ. АКУСТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ.

Пусть среда, определяемая уравнениями (I)-(7) находится в состоянии равновесия, т.е. $u_{ij}=0, v_{ij}=0, P_{ij}=const$. Внесем в координаты и скорости бесконечно малые возмущения $\delta\xi_{ij}, \delta\mu_{ij}, \delta u_{ij}, \delta v_{ij}$. Эволюция этих возмущений во времени, с точностью до бесконечно малых второго порядка, будет определяться линейными уравнениями:

$$M_{ij}\frac{d^2(\delta\xi_{ij})}{dt^2}-(\delta P_{ij}-q_{ij})\frac{\partial V_{ij}}{\partial\xi_{ij}}-(\delta P_{i-1j}-q_{i-1j})\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial\xi_{ij}}-$$
$$(\delta P_{i-1j-1}-q_{i-1j-1})\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial\xi_{ij}}-(\delta P_{ij-1}-q_{ij-1})\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial\xi_{ij}}=0 \qquad (II)$$

$$M_{ij}\frac{d^2(\delta\mu_{ij})}{dt}-(\delta P_{ij}-q_{ij})\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_{ij}}-(\delta P_{i-1j}-q_{i-1j})\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial\mu_{ij}}- \qquad (I2)$$
$$(\delta P_{i-1j-1}-q_{i-1j-1})\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial\mu_{i-1j-1}}-(\delta P_{ij-1}-q_{ij-1})\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial\mu_{ij-1}}=0$$

$$\delta P_{ij} = \left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial \rho_{ij}}\right)_S \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial V_{ij}} \delta V_{ij} = -\frac{(c_{ij})^2 \rho_{ij}}{V_{ij}} \Big[\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \delta \xi_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}} \delta \mu_{ij}$$

$$+ \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j}} \delta \xi_{i+1j} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j}} \delta \mu_{i+1j} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j+1}} \delta \xi_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j+1}} \delta \mu_{i+1j+1}$$

$$+ \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij+1}} \delta \xi_{ij+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij+1}} \delta \mu_{ij+1} \Big]$$

$$q_{ij} = \frac{\varkappa (c_{ij})^2 \rho_{ij}}{V_{ij}} \frac{dV_{ij}}{dt} = \varkappa \frac{(c_{ij})^2 \rho_{ij}}{V_{ij}} \Big[\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \delta u_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}} \delta v_{ij}$$

$$+ \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j}} \delta u_{i+1j} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j}} \delta v_{i+1j} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j+1}} \delta u_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j+1}} \delta v_{i+1j+1}$$

$$+ \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij+1}} \delta u_{ij+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij+1}} \delta v_{ij+1} \Big]$$

$(c_{ij})^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S$ – квадрат адиабатической скорости звука (S – энтропия)

Следует отметить, что члены, пропорциональные приращениям производных от объемов по координатам узлов (типа $\delta \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}}$) в (II), (I2) отсутствуют. Это связано с тем, что мы используем точные выражения (8) и (9) для объемов ячеек. В этом случае (как показано в [I]) на любых сетках выполняются равенства:

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}} + \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij}} + \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij}} + \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}} = 0$$

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}} + \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij}} + \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij}} + \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij}} = 0$$

В силу этих равенств и условия $P_{ij} = \mathrm{const}$

вышеупомянутые члены взаимно сокращаются.

Аналогичным образом получим акустическое приближение для разностных уравнений (I′)–(7′):

$$M_{ij}\frac{\delta u_{ij}^{n+1}-\delta u_{ij}^{n}}{\tau_n}-(\delta P_{ij}^{(\sigma_1)}-q_{ij}^{(\sigma_1)})\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}-(\delta P_{ij}^{(\sigma_1)}-q_{i-1j}^{(\sigma_1)})\frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}-$$

$$(\delta P_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}-q_{i-1j-1}^{(\sigma_1)})\frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}-(\delta P_{ij-1}^{(\sigma_1)}-q_{ij-1}^{(\sigma_1)})\frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}=0 \qquad (II')$$

$$M_{ij}\frac{\delta v_{ij}^{n+1}-\delta v_{ij}^{n}}{\tau_n}-(\delta P_{ij}^{(\sigma_1)}-q_{ij}^{(\sigma_1)})\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}}-(\delta P_{i-1j}^{(\sigma_1)}-q_{i-1j}^{(\sigma_1)})\frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}}-$$

$$(\delta P_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}-q_{i-1j-1}^{(\sigma_1)})\frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}}-(\delta P_{ij-1}^{(\sigma_1)}-q_{ij-1}^{(\sigma_1)})\frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}}=0 \qquad (I2')$$

Здесь $\delta P_{ij}^{(\sigma_1)}=-\left(\frac{c_{ij}^2\rho_{ij}^{(\sigma_1)}}{V_{ij}^{(\sigma_1)}}\delta V_{ij}^{(\sigma_1)}\right)$

$$q_{ij}^{(\sigma_1)}=\left\{\frac{\varkappa^{(\sigma_1)}(c_{ij})^{(\sigma_1)}\rho_{ij}^{(\sigma_1)}}{V_{ij}^{(\sigma_1)}}\left[\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij}}\delta u_{ij}^{(\sigma_1)}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij}}\delta v_{ij}^{(\sigma_1)}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{i+1j}}\delta u_{i+1j}^{(\sigma_1)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{i+1j}}\delta v_{i+1j}^{(\sigma_1)}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{i+1j+1}}\delta u_{i+1j+1}^{(\sigma_1)}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{i+1j+1}}\delta v_{i+1j+1}^{(\sigma_1)}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij+1}}\delta v_{ij+1}^{(\sigma_1)}+\frac{\partial V^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij+1}}\delta v_{ij+1}^{(\sigma_1)}\right]\right\}$$

$$\frac{\delta \xi_{ij}^{n+1}-\delta \xi_{ij}^{n}}{\tau_n}=\delta u_{ij}^{(\sigma_5)}$$

$$\frac{\delta \mu^{n+1}-\delta \mu_{ij}^{n}}{\tau_n}=\delta v_{ij}^{(\sigma_5)}$$

§ 5. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Прежде, чем приступить к исследованию устойчивости уравнений (II),(I2),(II'),(I2'), рассмотрим их одномерные аналоги [I] .

II.I. Пусть аппроксимационная сетка состоит из прямоугольных ячеек со сторонами, параллельными осям координат, а начальные возмущения для системы уравнений ((II),(I2)) заданы одномерными по μ , т.е. $\delta\mu_{ij}=0$; $\delta v_{ij}=0$, $\delta\xi_{ij}$, δu_{ij} от j не зависят. Тогда и в любой другой момент времени t возмущения будут оставаться одномерными, и их эволюция будет описываться уравнениями:

$$M_i\frac{d\delta u_i}{dt}-(\delta P_i-q_i)\frac{dV_i}{d\xi_i}-(\delta P_{i-1}-q_{i-1})\frac{dV_{i-1}}{d\xi_i}=0 \qquad (I3)$$

где

$$\delta P_i=-\frac{c_i^2\rho_i}{V_i}\left(\frac{dV_i}{d\xi_i}\delta\xi_i+\frac{dV_i}{d\xi_{i+1}}\delta\xi_{i+1}\right) \qquad (I4)$$

$$q_i=\varkappa\frac{c_i^2\rho_i}{V_i}\left(\frac{dV_i}{d\xi_i}\delta u_i+\frac{dV_i}{d\xi_{i+1}}\delta u_{i+1}\right) \qquad (I5)$$

Здесь индекс j опущен, поскольку от него ничего не зависит.

Подставляя в (I3),(I4),(I5) x_i вместо ξ_i , а вместо V_i его выражение в декартовых координатах:

$$V_i=x_{i+1}-x_i$$

получаем:

$$M_i\frac{d\delta u_i}{dt}+(\delta P_i-\delta P_{i-1})-(q_i-q_{i-1})=0 \qquad (I3')$$

$$\delta P_i = -\frac{c_i^2 \rho_i}{x_{i+1}-x_i}(\delta x_{i+1}-\delta x_i) \qquad (14')$$

$$q_i = \varkappa \frac{c_i^2 \rho_i}{x_{i+1}-x_i}(\delta u_{i+1}-\delta u_i) \qquad (15')$$

Приведем уравнения (13)-(15) к операторной форме. Введем обозначения:

$$\gamma_i = \frac{c_i^2 \rho_i}{x_{i+1}-x_i}\ ; \qquad \mathcal{D}_i = \gamma_i + \gamma_{i-1}\ ;$$

$$A1_i = -\gamma_i\ ; \qquad A2_i = -\gamma_{i-1}\ ; \qquad (16)$$

Подставляя (14´),(15´) в (13´) получаем:

$$M_i \frac{d\delta u_i}{dt} + A1_i(\delta x_{i+1} + \varkappa \delta u_{i+1}) + \mathcal{D}_i(\delta x_i + \varkappa \delta u_i) + A2_i(\delta x_i + \varkappa \delta u_{i-1}) = 0 \qquad (17)$$

Обозначая вектор-функцию (δx_i ; $i = 0, 1, \ldots, N$) через $\vec{\Psi}$ запишем (17) в матричном виде

$$\tilde{M}\ddot{\vec{\Psi}} + \mathcal{L}_x(\vec{\Psi} + \varkappa \dot{\vec{\Psi}}) = 0 \qquad (17')$$

где матрица $\tilde{M}$ является диагональной с элементами M_i, а матрица $\mathcal{L}_x$ имеет структуру, аналогичную структуре трехточечных разностных операторов для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами для второй краевой задачи [3] .

Поскольку все $M_i > 0$, то очевидно, что линейный оператор $\tilde{M}$ положительно определен.

Линейный оператор $\mathcal{L}_x$ самосопряжен и неотрицательно опреде-

лен [3] .

Запишем уравнение (I7') в нормальных координатах [5]. Перейдем вначале в систему координат $\{e'_i, i=0,1,\ldots,N\}$, связанную со старой системой координат $\{e_i, i=0,1,\ldots,N\}$ соотношениями:

$$e'_i = \sqrt{M_i}\, e_i \tag{I8}$$

Вектор $\vec{\Psi}$ преобразуется в $\vec{\Psi}'$ по закону:

$$\vec{\Psi}' = S^{-1}\vec{\Psi} \tag{I8'}$$

где S – матрица перехода, имеющая диагональный вид. Элементами главной диагонали этой матрицы являются величины $\frac{1}{\sqrt{M_i}}$. Тогда (I7') примет вид

$$\tilde{M} S \ddot{\vec{\Psi}}' + \mathcal{L}_x S(\vec{\Psi}' + \varkappa \dot{\vec{\Psi}}') = 0 \tag{I7''}$$

Умножая (I7'') слева на неособенную матрицу S^T (вследствие диагональности $S^T = S$), получим

$$\ddot{\vec{\Psi}}' + \tilde{\mathcal{L}}_x(\vec{\Psi}' + \varkappa \dot{\vec{\Psi}}') = 0 \tag{I7'''}$$

Очевидно, что $\tilde{\mathcal{L}}_x = S^T \mathcal{L}_x S$ – самосопряженный, неотрицательно определенный оператор. Оператор $\tilde{\mathcal{L}}_x$ по структуре совпадает с $\mathcal{L}_x$, а их коэффициенты связаны между собой соотношениями.

$$\tilde{\mathcal{D}}_i = \frac{\mathcal{D}_i}{M_i}; \quad \tilde{A1}_i = \frac{A1_i}{\sqrt{M_i M_{i+1}}}; \quad \tilde{A2}_i = \frac{A2_i}{\sqrt{M_i M_{i-1}}} \tag{20}$$

По известной теореме теории матриц [4], оператор $\tilde{\mathcal{L}}_x$ посредством ортогонального преобразования может быть приведен к диагональ-

ному виду с неотрицательными диагональными членами.

Обозначим через $\lambda_K (K=0,1,\dots,N)$ собственные числа оператора $\tilde{\mathcal{L}}_x$, а через e''_K – соответствующие им ортонормированные собственные функции (нормальные координаты). Переходя в систему координат $\{e''_K, K=0,1,\dots,N\}$, вместо операторного уравнения (I7''') получим следующую распавшуюся систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\Psi}''_K + \lambda_K(\Psi''_K + \varkappa\dot{\Psi}''_K) = 0 \\ &K = 0,1,\dots,N \end{aligned}\right\} \qquad (I9)$$

где Ψ_K коэффициенты разложения вектора возмущений $\vec{\Psi}$ по нормальным координатам. Таким образом, вопрос об устойчивости системы линейных уравнений (I3')-(I5') свелся к вопросу об устойчивости системы невзаимодействующих между собой линейных осцилляторов.

П.2. Приведем к форме (I9), удобной для исследования устойчивости, систему уравнений (I3), (I5), записанную в цилиндрических координатах:

$$M_i \frac{d\delta u_i}{dt} + R_i[(\delta P_i - \delta P_{i-1}) - (q_i - q_{i-1})] = 0 \qquad (2I)$$

$$\delta P_i = -\frac{2c_i^2\varrho_i^2}{(R_{i+1}^2 - R_i^2)}(R_{i+1}\delta R_{i+1} - R_i\delta R_i) \qquad (22)$$

$$q_i = \varkappa\frac{2c_i^2\varrho_i^2}{(R_{i+1}^2 - R_i^2)}(R_{i+1}\delta u_{i+1} - R_i\delta u_i) \qquad (23)$$

Как и в случае декартовых координат, вводя обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2c_i^2\varrho_i}{R_{i+1}^2 - R_i^2} = \gamma_i\ ; \quad \mathcal{D}_i = R_i^2(\gamma_i + \gamma_{i-1})\ ; \\ &A1_i = \gamma_i R_i R_{i+1}\ ; \quad A2_i = -\gamma_{i-1} R_i R_{i-1} \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

и подставляя (22),(23) в (21), получим:

$$M_i \frac{d\delta u_i}{dt} + A1_i(\delta R_{i+1} + \varkappa \delta u_{i+1}) + D_i(\delta R_i + \varkappa \delta u_i) + A2_i(\delta R_{i-1} + \varkappa \delta u_{i-1}) \quad (25)$$

Обозначая вектор-функцию $\{\delta R_i, i=0,1,\ldots,N\}$ через $\vec{\varphi}$, запишем (25) в матричном виде:

$$\tilde{M}\ddot{\vec{\varphi}} + \mathcal{L}_R(\vec{\varphi} + \varkappa\dot{\vec{\varphi}}) = 0 \quad (26)$$

Здесь $\tilde{M}$ – диагональная матрица с элементами M_i, матрица $\mathcal{L}_R$ по структуре аналогична трехточечным разностным операторам для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в цилиндрических координатах (вторая краевая задача [3]) и , следовательно, симметрична и неотрицательно определена.

Производя замену переменных

$$\varphi' = \sqrt{M_i}\,\delta R_i \quad (27)$$

или

$$\vec{\varphi}' = S^{-1}\vec{\varphi} \quad (27')$$

получим:

$$\ddot{\vec{\varphi}}' + \tilde{\mathcal{L}}_R(\vec{\varphi}' + \varkappa\dot{\vec{\varphi}}') = 0 \quad (26\ )$$

где $\tilde{\mathcal{L}} = S^T\mathcal{L}_R S$ так же симметричная, неотрицательно-определенная матрица (отметим, что вследствие диагональности $S^T = S$). Коэффициенты в матрицах $\mathcal{L}_R$ и $\tilde{\mathcal{L}}_R$ связаны между собой соотношениями (20).

Переходя в систему нормальных координат $\{e''_i, i=0,1,\dots,N\}$ представим линейную среду, описываемую уравнениями (2I)-(23) в виде набора независимых осцилляторов:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi}''_k + \lambda_k(\varphi''_k + \varkappa\dot{\varphi}_k) = 0 \\ &k=0,1,\dots,N;\ \lambda_k \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (I9')$$

где λ_k – собственные числа оператора $\tilde{\mathcal{L}}_R$, а φ''_k – коэффициенты разложения вектора возмущений $\vec{\varphi}$ по нормальным координатам.

II.3. Рассмотрим одномерное разностное уравнение в координатах ξ:

$$M_i \frac{\delta u_i^{n+1} - \delta u_i^n}{\tau_n} - (\delta P_i^{(\sigma_1)} - q_i^{(\sigma_1)}) \frac{\partial V_i^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_i} - (\delta P_{i-1}^{(\sigma_1)} - q_{i-1}^{(\sigma_1)}) \frac{\partial V_{i-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_i} = 0 \qquad (28)$$

где

$$\delta P_i^{(\sigma_1)} = \left[-\frac{(c_i^2)^{(\sigma_1)} \rho_i^{(\sigma_1)}}{V_i^{(\sigma_1)}} \left(\frac{\partial V_i^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i^{(\sigma_1)} + \frac{\partial V_i^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{i+1}} \delta \xi_{i+1}^{(\sigma_1)} \right) \right] \qquad (29)$$

$$q_i^{(\sigma_1)} = \left[\frac{\varkappa^{(\sigma_1)} (c_i^2)^{(\sigma_1)} \rho_i^{(\sigma_1)}}{V_i^{(\sigma_1)}} \left(\frac{\partial V_i^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_i} \delta u_i^{(\sigma_1)} + \frac{\partial V_i^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{i+1}} \delta u_{i+1}^{(\sigma_1)} \right) \right] \qquad (30)$$

$$\frac{\delta \xi_i^{n+1} - \delta \xi_i^n}{\tau_n} = \delta u_i^{(\sigma_5)} \qquad (3I)$$

Подставляя (29),(30) в (28) получим:

$$M_i \frac{\delta u_i^{n+1} - \delta u_i^n}{\tau_n} + A1_i(\delta \xi_{i+1}^{(\sigma_1)} + \varkappa^{(\sigma_1)} \delta u_{i+1}^{(\sigma_1)}) + \mathcal{D}_i(\delta \xi_i^{(\sigma_1)} + \varkappa^{(\sigma_1)} \delta u_i^{(\sigma_1)}) + \qquad (32)$$

$$A2_i(\delta \xi_{i-1}^{(\sigma_1)} + \varkappa^{(\sigma_1)} \delta u_{i-1}^{(\sigma_1)}) = 0$$

где:

$$\gamma_i^{(\sigma_1)} = \frac{(c_i^2)^{(\sigma_1)} \rho_i^{(\sigma_1)}}{V_i^{(\sigma_1)}}; \quad \mathcal{D}_i = \gamma_i^{(\sigma_1)} \frac{dV_i^{(\sigma_2)}}{d\xi_i} \frac{dV_i^{(\sigma_1)}}{d\xi_i} + \gamma_{i-1}^{(\sigma_1)} \frac{dV_{i-1}^{(\sigma_1)}}{d\xi_i} \frac{dV_{i-1}^{(\sigma_2)}}{d\xi_i};$$

$$A1_i = \gamma_i^{(\sigma_1)} \frac{dV_i^{(\sigma_1)}}{d\xi_{i+1}} \frac{dV_i^{(\sigma_2)}}{d\xi_i}; \quad A2_i = \gamma_{i-1}^{(\sigma_1)} \frac{dV_{i-1}^{(\sigma_1)}}{d\xi_{i-1}} \frac{dV_{i-1}^{(\sigma_2)}}{d\xi_i} \qquad (33)$$

Обозначая вектор функцию $\{\delta\xi_i^n, i=0,1,\dots,N\}$ через $\vec{\psi}^n$, а $\{\delta u_i^n, i=0,1,\dots,N\}$ через $\vec{u}^n$, запишем (28)-(31) в операторном виде:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{M}\left[\frac{\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^n}{\tau_n} + \mathcal{L}_\xi^{(\sigma_1\sigma_2)}\left[\vec{\psi}^{(\sigma_1)} + \varkappa \vec{u}^{(\sigma_1)}\right]\right] = 0 \\ &\frac{\vec{\psi}^{n+1}-\vec{\psi}^n}{\tau_n} = \vec{u}^{(\sigma_5)} \end{aligned}\right\} \qquad (32')$$

Оператор $\mathcal{L}_\xi^{(\sigma_1\sigma_2)}$ представляет собой трехдиагональную матрицу, на главной диагонали которой находятся величины $\mathcal{D}_i$, а на левой и правой прилегающих к ней диагоналях - соответственно $A2_i$ и $A1_i$.

Покажем, что оператор $\mathcal{L}_\xi^{(\sigma_1\sigma_2)}$ при $\sigma_1=\sigma_2$ самосопряжен и неотрицательно определен. Рассмотрим билинейную форму $(\vec{f}, \mathcal{L}_\xi^{(\sigma_1\sigma_2)}\vec{\psi})$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что:

$$\left(\vec{f}, \mathcal{L}_\xi^{(\sigma_1\sigma_2)}\vec{\psi}\right) = \sum_{i=0}^{N-1}\left[\gamma_i^{(\sigma_1)}\left(\frac{dV_i^{(\sigma_1)}}{d\xi_i}\psi_i + \frac{dV_i^{(\sigma_1)}}{d\xi_{i+1}}\psi_{i+1}\right) * \right.$$
$$\left. \times\left(\frac{dV_i^{(\sigma_2)}}{d\xi_i} f_i + \frac{dV_i^{(\sigma_2)}}{d\xi_{i+1}} f_{i+1}\right)\right] \qquad (34)$$

Из симметричности (34) при $\sigma_1=\sigma_2$ относительно ψ и f - следует самосопряженность $\mathcal{L}_R^{(\sigma_1\sigma_2)}$. Отсюда же вытекает, что

$$(\vec{\psi}, \mathcal{L}_\xi^{(\sigma_1\sigma_2)}\vec{\psi}) \geqslant 0$$

т.е. неотрицательная определенность оператора $\mathcal{L}_\xi^{(\sigma_1\sigma_2)}$.

Производя, вначале замену переменных

$$\vec{e}^{\,n} = S^{-1}\vec{\varphi}^{\,n}, \quad \vec{v}^{\,n} = S^{-1}\vec{u}^{\,n}$$

и переходя затем в нормальные координаты, приводим уравнения (28) (31) к форме, удобной для исследования устойчивости:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\tau_n}\left(W_k^{n+1} - W_k^{n}\right) + \lambda_k\left(Z_k^{(\sigma_1)} + \varkappa W^{(\sigma_1)}\right) = 0 \\ &\frac{Z_k^{n+1} - Z_k^{n}}{\tau_n} = W_k^{(\sigma_2)}, \quad (k = 0, 1, \ldots, N) \quad \lambda_k \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

где λ_k – собственные значения оператора $\tilde{\mathcal{L}}_\xi^{(\sigma_1,\sigma_2)} = S^T \mathcal{L}_\xi^{(\sigma_1,\sigma_2)} S$, Z_k, W_k – коэффициенты разложения возмущений координат и скоростей по нормальным координатам.

§6. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

П.I. Приведем уравнения (II)-(I2) к виду, удобному для исследования устойчивости, т.е. представим их в виде системы невзаимодействующих гармонических осцилляторов.

Введем обозначения:

$$\frac{c_{ij}^2 \rho_{ij}}{V_{ij}} = \gamma_{ij}$$

$$d_{11} = \gamma_{ij}\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}}\right)^2 + \gamma_{i-1j}\left(\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij}}\right)^2 + \gamma_{i-1j-1}\left(\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij}}\right)^2 + \gamma_{ij-1}\left(\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}}\right)^2$$

$$d_{12} = \gamma_{ij}\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}}\right) + \gamma_{i-1j}\left(\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij}}\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij}}\right) + \gamma_{i-1j-1}\left(\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij}}\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij}}\right) + \gamma_{ij-1}\left(\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij}}\right)$$

$$d_{21}=d_{12}\ ;$$

$$d_{22}=\gamma_{ij}\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}}\right)^2+\gamma_{i-1j}\left(\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij}}\right)^2+\gamma_{i-1j-1}\left(\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij}}\right)^2+\gamma_{ij-1}\left(\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij}}\right)^2\ ;$$

$$a1_{11}=\gamma_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j}}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}}+\gamma_{ij-1}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{i+1j}}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}}\ ;$$

$$a1_{12}=\gamma_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j}}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}}+\gamma_{ij-1}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{i+1j}}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}}\ ;$$

$$a1_{21}=\gamma_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j}}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}}+\gamma_{ij-1}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{i+1j}}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij}}\ ;$$

$$a1_{22}=\gamma_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j}}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}}+\gamma_{ij-1}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{i+1j}}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij}}\ ;$$

$$a3_{11}=\gamma_{i-1j}\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{i-1j}}\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij}}+\gamma_{i-1j-1}\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{i-1j}}\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij}}\ ;$$

$$a3_{12}=\gamma_{i-1j}\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{i-1j}}\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij}}+\gamma_{i-1j-1}\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{i-1j}}\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij}}\ ;$$

$$a3_{21}=\gamma_{i-1j}\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{i-1j}}\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij}}+\gamma_{i-1j-1}\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{i-1j}}\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij}}\ ;$$

$$a3_{22}=\gamma_{i-1j}\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{i-1j}}\frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij}}+\gamma_{i-1j-1}\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{i-1j}}\frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij}}\ ;$$

$$a2_{11} = \gamma_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}} + \gamma_{i-1j} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij+1}} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij}} ;$$

$$a2_{12} = \gamma_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}} + \gamma_{i-1j} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij+1}} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij}} ;$$

$$a2_{21} = \gamma_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}} + \gamma_{i-1j} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij+1}} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij}} ;$$

$$a2_{22} = \gamma_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}} + \gamma_{i-1j} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij+1}} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij}} ;$$

$$a4_{11} = \gamma_{ij-1} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij+1}} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}} + \gamma_{i-1j-1} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij+1}} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij}} ;$$

$$a4_{12} = \gamma_{ij-1} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij+1}} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}} + \gamma_{i-1j-1} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij+1}} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij}} ;$$

$$a4_{21} = \gamma_{ij-1} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij+1}} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij}} + \gamma_{i-1j-1} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij+1}} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij}} ;$$

$$a4_{22} = \gamma_{ij-1} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij+1}} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij}} + \gamma_{i-1j-1} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij+1}} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij}} ;$$

$$b1_{11} = \gamma_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\xi_{ij}}; \quad b1_{12} = \gamma_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}};$$

$$b1_{21} = \gamma_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}}; \quad b1_{22} = \gamma_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}};$$

$$b2_{11} = \gamma_{i-1j} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{i-1j+1}} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{ij}}; \quad b2_{12} = \gamma_{i-1j} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{i-1j+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}};$$

$$b2_{21} = \gamma_{i-1j} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \xi_{i-1j+1}} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{ij}}; \quad b2_{22} = \gamma_{i-1j} \frac{\partial V_{i-1j}}{\partial \mu_{i-1j+1}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}};$$

$$b3_{11} = \gamma_{i-1j-1} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{i-1j-1}} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij}}; \quad b3_{12} = \gamma_{i-1j-1} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{i-1j-1}} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{ij}};$$

$$b3_{21} = \gamma_{i-1j-1} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \xi_{i-1j-1}} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij}}; \quad b3_{22} = \gamma_{i-1j-1} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{i-1j-1}} \frac{\partial V_{i-1j-1}}{\partial \mu_{ij}};$$

$$b4_{11} = \gamma_{ij-1} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{i+1j-1}} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}}; \quad b4_{12} = \gamma_{ij-1} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{i+1j-1}} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}};$$

$$b4_{21} = \gamma_{ij-1} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{i+1j-1}} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij}}; \quad b4_{22} = \gamma_{ij-1} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{i+1j-1}} \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij}};$$

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}; \qquad A1_{ij} = \begin{pmatrix} a1_{11} & a1_{12} \\ a1_{21} & a1_{22} \end{pmatrix};$$

$$A2_{ij} = \begin{pmatrix} a2_{11} & a2_{12} \\ a2_{21} & a2_{22} \end{pmatrix}; \quad A3_{ij} = \begin{pmatrix} a3_{11} & a3_{12} \\ a3_{21} & a3_{22} \end{pmatrix};$$

$$A4_{ij} = \begin{pmatrix} a4_{11} & a4_{12} \\ a4_{21} & a4_{22} \end{pmatrix}; \quad B1_{ij} = \begin{pmatrix} b1_{11} & b1_{12} \\ b1_{21} & b1_{22} \end{pmatrix};$$

$$B2_{ij} = \begin{pmatrix} b2_{11} & b2_{12} \\ b2_{21} & b2_{22} \end{pmatrix}; \quad B3_{ij} = \begin{pmatrix} b3_{11} & b3_{12} \\ b3_{21} & b3_{22} \end{pmatrix};$$

$$B4_{ij} = \begin{pmatrix} b4_{11} & b4_{12} \\ b4_{21} & b4_{22} \end{pmatrix}; \quad \tilde{M}_{ij} = \begin{pmatrix} M_{ij} & 0 \\ 0 & M_{ij} \end{pmatrix};$$

Пусть $\vec{\tau}_{ij}$ – обозначает вектор с компонентами $(\delta\xi_{ij}, \delta\mu_{ij})$ Тогда уравнения (II)-(I2) могут быть записаны в следующей матричной форме:

$$\begin{aligned} &\tilde{M}_{ij}\ddot{\vec{\tau}}_{ij} + \mathcal{D}_{ij}\{\vec{\tau}_{ij} + \varkappa\dot{\vec{\tau}}_{ij}\} + A1_{ij}\{\vec{\tau}_{i+1j} + \varkappa\dot{\vec{\tau}}_{i+1j}\} + \\ &+ A2_{ij}\{\vec{\tau}_{ij+1} + \varkappa\dot{\vec{\tau}}_{ij+1}\} + A3_{ij}\{\vec{\tau}_{i-1j} + \varkappa\dot{\vec{\tau}}_{i-1j}\} + A4_{ij}\{\vec{\tau}_{ij-1} + \varkappa\dot{\vec{\tau}}_{ij-1}\} \\ &+ B1_{ij}\{\vec{\tau}_{i+1j+1} + \varkappa\dot{\vec{\tau}}_{i+1j+1}\} + B2_{ij}\{\vec{\tau}_{i-1j+1} + \varkappa\dot{\vec{\tau}}_{i-1j+1}\} + \\ &+ B3_{ij}\{\vec{\tau}_{i-1j-1} + \varkappa\dot{\vec{\tau}}_{i-1j-1}\} + B4_{ij}\{\vec{\tau}_{i+1j-1} + \varkappa\dot{\vec{\tau}}_{i+1j-1}\} = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Обозначая через $\vec{\Psi}$ блок-вектор с компонентами $\vec{\tau}_{ij}$:

$$\vec{\Psi}=\{\Psi_{00},\dots,\Psi_{(N+1)(M+1)}\}=\{\vec{\tau}_{00},\dots,\vec{\tau}_{N0},\dots,\vec{\tau}_{0M},\dots,\tau_{NM}\}$$

Представим (36)в операторной форме:

$$\tilde{\tilde{M}}\ddot{\vec{\Psi}}+\mathcal{X}\{\vec{\Psi}+\varkappa\dot{\vec{\Psi}}\}=0 \qquad (36')$$

II.2. Расомотрим некоторые свойства операторов в $\tilde{\tilde{M}}$ и $\mathcal{X}$. Оператор $\tilde{\tilde{M}}$ – блочно-диагональный оператор с элементами $\tilde{M}_{ij}$. Поскольку все $M_{ij}>0$, а матрицы $\tilde{M}_{ij}$ имеют диагональную структуру, то очевидно, что $\tilde{\tilde{M}}$ – самооопряжен и положительно определен. Оператор $\mathcal{X}$ представляется блок-матрицей, имеющей структуру, аналогичную структуре девятиточечных разностных операторов [I] , о той лишь разницей, что места соответствующих коэффициентов занимают матрицы A1,A2,A3,A4,B1,B2,B3,B4 в соответствии с рис. I.

Пуоть $\vec{\varphi}$ –блок-вектор о компонентами $\vec{\ell}_{ij}:\{\hat{\alpha}_{ij};\hat{\beta}_{ij}\}$, а f – блок-вектор с компонентами $\vec{P}_{ij}:\{\alpha_{ij},\beta_{ij}\}$ Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что

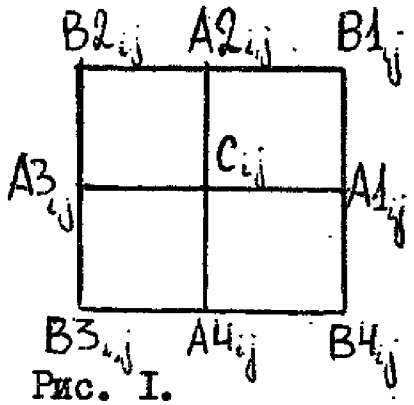

Рис. I.

<u>Имеет место тождество:</u>

$$(\mathcal{X}f,\varphi)=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\gamma_{ij}\Big\{\frac{\partial V_{ij}}{\partial\xi_{ij}}\alpha_{ij}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_{ij}}\beta_{ij}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\xi_{i+1j}}\alpha_{i+1j}+$$

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_{i+1j}}\beta_{i+1j}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\xi_{i+1j+1}}\alpha_{i+1j+1}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_{i+1j+1}}\beta_{i+1j+1}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\xi_{ij+1}}\alpha_{ij+1}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_{ij+1}}\beta_{ij+1}\Big\} \qquad (37)$$

$$\to \times \left\{ \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \hat{\alpha}_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}} \tilde{\beta}_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j}} \hat{\alpha}_{i+1j} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j}} \tilde{\beta}_{i+1j} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j+1}} \tilde{\alpha}_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j+1}} \hat{\beta}_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij+1}} \tilde{\alpha}_{ij+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij+1}} \hat{\beta}_{ij+1} \right\}$$

<u>Оператор $\mathcal{Z}$ неотрицательно определен</u>

Действительно, из выражения (37) следует, что:

$$(\mathcal{Z}\vec{f}, \vec{f}) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \alpha_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}} \beta_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j}} \alpha_{i+1j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j}} \beta_{i+1j} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1j+1}} \alpha_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j+1}} \beta_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij+1}} \alpha_{ij+1} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij+1}} \beta_{ij+1} \right\}^2 \quad (38)$$

Поскольку $\gamma_{ij} > 0$, то $(\mathcal{Z}\vec{f}, \vec{f}) \geq 0$, что и утверждалось.

<u>Оператор $\mathcal{Z}$ самосопряжен</u>

Это следует из симметрии правой части (57) относительно величин (α, β) и $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

П.3. Запишем уравнение (36′) в нормальных координатах [5]. Для этого перейдем вначале в систему координат $\vec{W}_{ij}$ связанную со старой системой координат $\vec{\tau}_{ij}$ соотношениям:

$$\vec{W}_{ij} = \sqrt{M_{ij}}\, \vec{\tau}_{ij} \quad (39)$$

Нетрудно видеть, что в новой системе координат оператор $\tilde{M}$ превратится в единичный, а $\mathcal{Z}$ преобразуется в $\tilde{\mathcal{Z}}$ по структуре совпадающий с $\mathcal{Z}$, с той лишь разницей, что элементы заменятся на следующие:

$$\tilde{\mathcal{D}}_{ij} = \frac{\mathcal{D}_{ij}}{M_{ij}}; \quad \tilde{A1}_{ij} = \frac{A1_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{i+1j}}}; \quad \tilde{A2}_{ij} = \frac{A2_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{ij+1}}};$$

$$\tilde{A3}_{ij} = \frac{A3_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{i-1j}}}; \quad \tilde{A4}_{ij} = \frac{A4_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{ij-1}}}; \quad \tilde{B1}_{ij} = \frac{B1_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{i+1j+1}}};$$

$$\tilde{B2}_{ij} = \frac{B_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{i-1j+1}}}; \quad \tilde{B3}_{ij} = \frac{B3_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{i-1j-1}}}; \quad \tilde{B4}_{ij} = \frac{B4_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{i+1j-1}}};$$

Очевидно, что оператор $\tilde{\mathcal{L}}$ является также неотрицательно определенным и самосопряженным.

По известной теореме теории матриц [4], отсюда следует, что он может быть приведен к диагональной форме посредством ортогонального преобразования, и что все его диагональные члены (собственные числа) будут вещественны и неотрицательны. Обозначая через λ_k $\{k=1,\dots,(N+1)(M+1)\}$ собственные числа оператора $\hat{\mathcal{L}}$ в порядке их возрастания, а через e'_k – соответствующие им ортонормированные функции (нормальные координаты), вместо операторного уравнения (36′) получим следующую распавшуюся систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{G}_k + \lambda_k\{G_k + \mathcal{D}\dot{G}_k\} = 0. \\ &k=1,2,\dots,(N+1)(M+1),\ \lambda_k \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

где G_k коэффициенты разложения возмущений по системе векторов $\{\vec{e}_k\}$.

II.4. Рассмотрим теперь линеаризованные разностные уравнения (I′)–(7′). Нетрудно видеть, что по структуре они аналогичны дифференциально-разностным уравнениям (I)–(7).

Пусть $\vec{z}^{\,n}_{ij}$ – обозначает вектор с компонентами $(\delta\xi^n_{ij}, \delta\mu^n_{ij})$, а $\vec{W}^n_{ij}$ – вектор с компонентами $(\delta u_{ij}, \delta v_{ij})$. Тогда уравнения (I′)–(7′) можно записать в виде:

$$\tilde{M}_{ij}\frac{\vec{W}_{ij}^{n+1}-\vec{W}_{ij}^{n}}{\tau_n}+\mathcal{D}_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\vec{\tau}_{ij}+\varkappa\vec{W}_{ij})^{(\sigma_1)}+A1_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\vec{\tau}_{i+1j}+\varkappa\vec{W}_{i+1j})^{(\sigma_1)}+$$

$$A2_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\vec{\tau}_{ij+1}+\varkappa\vec{W}_{ij+1})^{(\sigma_1)}+A3_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\vec{\tau}_{i+1j+1}+\varkappa\vec{W}_{i+1j+1})^{(\sigma_1)}+$$

$$A4_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\vec{\tau}_{ij-1}+\varkappa\vec{W}_{ij-1})^{(\sigma_1)}+B1_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\vec{\tau}_{i+1j+1}+\varkappa\vec{W}_{i+1j+1})^{(\sigma_1)}+ \qquad (40)$$

$$B2_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\vec{\tau}_{i-1j+1}+\varkappa\vec{W}_{i-1j+1})^{(\sigma_1)}+B3_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\vec{\tau}_{i-1j-1}+\varkappa\vec{W}_{i-1j-1})^{(\sigma_1)}+$$

$$B4_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\vec{\tau}_{i+1j-1}+\varkappa\vec{W}_{i+1j-1})^{(\sigma_1)}=0$$

Матричные коэффициенты $A1_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}, A2_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}, \ldots, B1_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}$ и т.д. (за исключением $\mathcal{D}_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}$), входящие в (40) отличаются от используемых в (36) только тем, что на γ_{ij} и производные типа

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij+1}},\quad \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1j}},\quad \frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \mu_{ij+1}}\frac{\partial V_{ij-1}}{\partial \xi_{ij}},\ \ldots$$

и т.д. входящие в определение этих матриц, "навешиваются" веса σ_1,σ_2, причем величины $\gamma_{ij}; \gamma_{i-1j}; \gamma_{i-1j-1}; \gamma_{ij-1}$ и производные от объемов по координатам ξ_{ij}, μ_{ij} берутся с весом σ_1, а остальные сомножители с весом σ_2.

Элементы $d_{\alpha,\beta}^{(\sigma_1,\sigma_2)}$ матрицы $\mathcal{D}_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}$ задаются выражениями:

$$d_{11}^{(\sigma_1,\sigma_2)}=\gamma_{ij}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij}}\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}+\gamma_{i-1j}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1,j}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij}}\frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}+$$

$$\gamma_{ij-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij}}\frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}+\gamma_{ij-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij}}\frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}};$$

$$d_{12}^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \gamma_{ij}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}} + \gamma_{i-1j}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}} +$$

$$\gamma_{i-1j-1}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}} + \gamma_{ij-1}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}} ;$$

$$d_{21}^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \gamma_{ij}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij}} \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} + \gamma_{i-1j}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij}} \frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} +$$

$$\gamma_{i-1j-1}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij}} \frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} + \gamma_{ij-1}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_1)}}{\partial \xi_{ij}} \frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} ;$$

$$d_{22}^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \gamma_{ij}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} + \gamma_{i-1j}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} +$$

$$\gamma_{i-1j-1}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial V^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}} + \gamma_{ij-1}^{(\sigma_1)} \frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_1)}}{\partial \mu_{ij}} \frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}}$$

Обозначая через $\vec{\Psi}$ блок-вектор с компонентами $\vec{\tau}_{ij}$

$$\vec{\Psi} = \{\vec{\tau}_{00}, \vec{\tau}_{01}, \ldots, \vec{\tau}_{0N}, \vec{\tau}_{1,0}, \ldots, \vec{\tau}_{1N}, \ldots, \vec{\tau}_{M0}, \ldots, \vec{\tau}_{MN}\}$$

а через $\vec{\varphi}$ блок-вектор о компонентами $\vec{W}_{ij}$

$$\vec{\varphi} = \{\vec{W}_{00}, \vec{W}_{01}, \ldots, \vec{W}_{0N}, \vec{W}_{10}, \ldots, \vec{W}_{1N}, \ldots, \vec{W}_{M0}, \ldots, \vec{W}_{MN}\}$$

Представим (40) в операторной форме:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{M}}\left(\dfrac{\vec{\varphi}^{n+1}-\vec{\varphi}^{n}}{\tau_n}\right)+\tilde{\mathcal{L}}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{\xi\mu}\left[\vec{\Psi}^{(\sigma_1)}+\varkappa\vec{\Psi}^{(\sigma_2)}\right]=0 \\ \dfrac{\vec{\Psi}^{n+1}-\vec{\Psi}^{n}}{\tau_n}=\vec{\varphi}^{(\sigma_5)} \end{cases} \qquad (41)$$

где оператор $\tilde{\tilde{M}}$ совпадает с используемым в (36′), а $\tilde{\mathcal{L}}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{\xi\mu}$ имеет такую же отруктуру, как и $\tilde{\mathcal{L}}$ (см. п.2, § 6).

Методом, описанным в п.2 настоящего параграфа, можно показать, что при $\sigma_1=\sigma_2$ оператор $\tilde{\mathcal{L}}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{\xi\mu}$ самосопряжен и неотрицательно определен.

Представим (41) в нормальных координатах: Произведем в начале замену переменных:

$$\vec{\tau}'^{n}_{ij}=\sqrt{M_{ij}}\,\vec{\tau}^{n}_{ij}$$

Скорости $\vec{W}^{n}_{ij}$ преобразуются аналогичным образом:

$$\vec{W}'^{n}_{ij}=\sqrt{M_{ij}}\,\vec{W}^{n}_{ij}$$

В новых координатах оператор $\tilde{\tilde{M}}$ превратится в единичный, а $\tilde{\mathcal{L}}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{\xi\mu}$ преобразуется в $\tilde{\mathcal{L}}'^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{\xi\mu}$, по структуре совпадающий с $\tilde{\mathcal{L}}^{(\sigma_1,\sigma_2)}$. Коэффициенты этих операторов связаны между собой соотношениями:

$$\tilde{\mathcal{D}}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}=\frac{\mathcal{D}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}}{M_{ij}},\quad \tilde{A1}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}=\frac{A1^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{i+1j}}},\quad \tilde{A2}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}=\frac{A2^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{ij+1}}},$$

$$\tilde{A3}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}=\frac{A3^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{i-1j}}},\quad \tilde{A4}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}=\frac{A4^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{ij-1}}},\quad \tilde{B1}^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}=\frac{B1^{(\sigma_1,\sigma_2)}_{ij}}{\sqrt{M_{ij}M_{i+1j-1}}}$$

$$\tilde{B2}_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \frac{B2_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}}{\sqrt{M_{ij}M_{i-1j-1}}}, \quad \tilde{B3}_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \frac{B3_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}}{\sqrt{M_{ij}M_{i-1j+1}}}, \quad \tilde{B4}_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \frac{B4_{ij}^{(\sigma_1,\sigma_2)}}{\sqrt{M_{ij}M_{i+1j-1}}}$$

Очевидно, что оператор $\tilde{\mathcal{L}}^{(\sigma_1,\sigma_2)}$ при $(\sigma_1=\sigma_2)$ самосопряжен и неотрицательно определен. Обозначая через $G_k, \{k=0,\ldots,(N+1)(M+1)\}$ коэффициенты разложения вектора возмущений по нормальным координатам, а через Ω_k коэффициенты соответствующего разложения скоростей, получаем уравнения (41) в искомом виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\Omega_k^{n+1}-\Omega_k^{n}}{\tau_n} + \lambda_k\left[G_k^{(\sigma_1)} + \varkappa\,\Omega_k^{(\sigma_1)}\right] = 0 \\ \dfrac{G_k^{n+1}-G_k^{n}}{\tau_n} = \Omega_k^{(\sigma_2)}, \; k=0,1,\ldots,(N+1)(M+1), \; \lambda_k \geqslant 0 \end{cases} \tag{35}$$

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ.

Хорошо известно, что нижняя часть спектров операторов типа $\tilde{\mathcal{L}}_{\varkappa}, \tilde{\mathcal{L}}_{R}, \tilde{\mathcal{L}}_{\xi}, \tilde{\mathcal{L}}_{\xi\eta}, \mathcal{L}_{\xi\eta}^{(\sigma_1,\sigma_2)}$ аппроксимируют нижние части спектров соответствующих им дифференциальных операторов, чего, однако, нельзя сказать о высоких гармониках.

Выберем коэффициент $\varkappa$ в (19), (19′), (19″) таким, чтобы искусственная вязкость гасила наиболее эффективно самую высокую гармонику с $\lambda^* = \max\limits_k \lambda_k$.

Из теории колебаний [6] известно, что наиболее быстрое демпфирование происходит при

$$\varkappa = \frac{2}{\sqrt{\lambda^*}} \tag{42}$$

Для оценки величины λ^* воспользуемся теоремой Гершгорина [4] : пусть $A = \|a_{k}\|$ произвольная $n \times n$ матрица с комплексными элементами. Каждое собственное число λ матрицы A всегда расположено в одном из кругов (на комплексной плоскости), задаваемых неравенствами:

$$|a_{ii} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{43}$$

Оценим максимальное собственное число матрицы $\tilde{\mathcal{Z}}_{\xi\mu}$.

Введем обозначения

$$(\Delta_\xi)_{ij} = (M_{ij})^{-1}\{|d_{11}| + |d_{12}|\} + (M_{ij}M_{i+1j})^{-1/2}\{|a1_{11}| + |a1_{12}|\} +$$

$$(M_{ij}M_{ij+1})^{-1/2}\{|a2_{11}| + |a2_{12}|\} + (M_{ij}M_{i-1j})^{-1/2}\{|a3_{11}| + |a3_{12}|\} +$$

$$(M_{ij}M_{ij-1})^{-1/2}\{|a4_{11}| + |a4_{12}|\} + (M_{ij}M_{i+1j+1})^{-1/2}\{|b1_{11}| + |b1_{12}|\} + \tag{44}$$

$$(M_{ij}M_{i+1j+1})^{-1/2}\{|b2_{11}| + |b2_{12}|\} + (M_{ij}M_{i-1j-1})^{-1/2}\{|b3_{11}| + |b3_{12}|\} +$$

$$(M_{ij}M_{i+1j-1})^{-1/2}\{|b4_{11}| + |b4_{12}|\};$$

$$(\Delta_\mu)_{ij} = (M_{ij})^{-1/2}\{(M_{ij})^{1/2}(|d_{21}| + |d_{22}| + (M_{i+1j})^{-1/2}\{|a1_{21}| + |a1_{22}|\} +$$

$$(M_{ij+1})^{-1/2}(|a2_{21}| + |a2_{22}|) + (M_{i+1j})^{-1/2}(|a3_{21}| + |a3_{22}|) + (M_{ij-1})^{-1/2} \times \tag{45}$$

$$(|a4_{21}| + |a4_{22}|) + (M_{i+1j+1})^{-1/2}(|B_{21}| + |B1_{22}|) + (M_{i-1j+1})^{-1/2} \times$$

$$(|B2_{21}|+|B2_{22}|)+(M_{i-1i-1})^{-1/2}(|B3_{21}|+|B3_{22}|)+(M_{i-1i-1})^{-1/2}(|B4_{21}+|B4_{22}|)\}$$

Из (43) следует, что

$$\lambda^* = \max_k \lambda_k \leq \max\{\max_{ij}(\Delta\xi)_{ij}; \max_{ij}(\Delta\mu)_{ij}\} \qquad (46)$$

Отметим, что в случае декартовых координат, на квадратной сетке при $\xi_{ij}=const, c_i=const$ в (46) реализуется знак равенства.

Выпишем конкретный вид коэффициента $\varkappa$ в простейшем случае одномерных течений, когда массы ячеек равны между собой ($m_i=m$).

В декартовых координатах:

$$\lambda^* \leq \max_i \frac{1}{2m^2}(c_i^2\xi_i^2+c_{i-1}^2\xi_{i-1}^2) \qquad (47)$$

следовательно

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m^2}{\max_i(c_i^2\xi_i^2+c_{i-1}^2\xi_{i-1}^2)}} \qquad (48)$$

В цилиндрических координатах:

$$\lambda^* \leq \max_i \left\{\frac{1}{m^2}\left[R_i^2(c_i^2\xi_i^2+c_{i-1}^2\xi_{i-1}^2)+R_iR_{i-1}c_i^2\xi_i^2+R_iR_{i-1}c_{i-1}^2\xi_{i-1}^2\right]\right\} \qquad (49)$$

Откуда

$$\varkappa = \sqrt{\frac{4m^2}{\max_i R_i^2[R_i(c_i^2\xi_i^2+c_{i-1}^2\xi_{i-1}^2)+R_{i-1}c_i^2\xi_i^2+R_{i-1}c_{i-1}^2\xi_{i-1}^2]}} \qquad (50)$$

Отметим, что для разностных уравнений (35),(35′) (как будет показано в следующем параграфе) оптимальный коэффициент искусственной вязкости $\varkappa$ также определяется из формулы типа (42)

$$\varkappa^n = \frac{2}{\sqrt{(\lambda^*)^n}}$$

где $(\lambda^*)^n$ – максимальное собственное значение оператора $\mathcal{L}_{\xi}^{\xi,\xi}$ или $\mathcal{L}_{\xi M}^{(\xi,\xi)}$ на момент времени t_n.

§ 8 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Исследуем свойства решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (I9^{III}), описывающей поведение невзаимодействующих между собой гармонических осцилляторов.

Подставляя в (I9^{III}) $G_k = A_k e^{\omega_k t}$, где A_k – комплексная постоянная, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_k^2 + \lambda_k(1+\varkappa\omega_k) = 0 \\ &k = 1, 2, \ldots, (N+1)(M+1), \lambda_k \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

откуда

$$\omega_k = -\frac{\varkappa\lambda_k}{2} \pm \sqrt{\frac{\varkappa^2\lambda_k^2}{2} - \lambda_k} \qquad (52)$$

Из (52) следует, что для того, чтобы амплитуда колебаний не нарастала экспоненциально со временем, т.е. чтобы система дифференциально-разностных уравнений (II),(I2) была механически устойчива [5], необходимо и достаточно, чтобы $\varkappa \geqslant 0$.

Отметим, что формула (42) следует из требования равенства подкоренного выражения в (52) для самой высокой гармоники.

Приступим к исследованию устойчивости разностных уравнений (35′), описывающих систему невзаимодействующих между собой "разностных" осцилляторов.

Будем искать решение этих уравнений в виде:

$$\left.\begin{aligned} G_k^n &= G_k^* q_k^n \\ \Omega_k^n &= \Omega_k^* q^n \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

где q_k, G_k^*, Ω_k^* – комплексные числа. Подставляя (53) в (35′), получаем:

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{q_k-1}{\tau_n} + \lambda_k \varkappa\left[\sigma_1 q_k + (1-\sigma_1)\right]\right\}\Omega_k^* + \lambda_k\left[\sigma_1 q_k + (1-\sigma_1)\right] G_k^* = 0, \\ \left[\sigma_5 q_k + (1-\sigma_5)\right]\Omega_k^* - \dfrac{q_k-1}{\tau_n} G_k^* = 0 \end{cases} \qquad (54)$$

Для того, чтобы решение уравнений (35′) существовало при любых начальных данных G_k^*, Ω_k^*, необходимо и достаточно, чтобы детерминант системы уравнений (54), рассматриваемой относительно неизвестных G_k^* и Ω_k^*, был равен нулю, т.е.

$$\left(\frac{q_k-1}{\tau_n}\right)^2 + \lambda_k \varkappa\left[\sigma_1 q_k + (1-\sigma_1)\right]\left(\frac{q_k-1}{\tau_n}\right) + \lambda_k\left[\sigma_1 q_k + (1-\sigma_1)\right]\left[\sigma_5 q_k + (1-\sigma_5)\right] = 0 \qquad (55)$$

Выражение (55) представляет собой квадратное уравнение относительно неизвестной величины q_k. Запишем его в виде

$$a q_k^2 - b q_k + c = 0$$

откуда

$$q_{k\,1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

где

$$a = 1 + \sigma_1 \lambda_k \tau^2 \left(\sigma_5 + \frac{\varkappa}{\tau}\right) \tag{56}$$

$$b = 2 - \lambda_k \tau^2 \left[\frac{\varkappa}{\tau}(1 - 2\sigma_1) + \sigma_5 + \sigma_1 - 2\sigma_1\sigma_5\right] \tag{57}$$

$$c = 1 + \lambda_k \tau^2 (1 - \sigma_1)\left[(1 - \sigma_5) - \frac{\varkappa}{\tau}\right] \tag{58}$$

Нетрудно видеть, что для того, чтобы система уравнений (II′),(I2′) не имела решений, растущих со временем экспоненциально, т.е. была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы

$$|q_k| \leq 1 \qquad \text{для всех} \quad k$$

Исследуем детально устойчивость уравнений (35′) в некоторых частных случаях:

Пусть

$$\varkappa = 0\,, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \alpha$$

Тогда

$$a = 1 - \lambda \tau^2 \alpha^2 \tag{59}$$

$$b = 2\left[1 - \lambda \tau^2 \alpha (1 - \alpha)\right] \tag{60}$$

$$c = 1 + \lambda \tau^2 (1 - \alpha)^2 \tag{61}$$

Для $\alpha = 0$ (чисто явная схема) получаем:

$$q_{k1,2} = 1 \pm \sqrt{\lambda \tau_n^2} \tag{62}$$

т.е.

$$|q_k| = \sqrt{1+\tau^2\lambda_k} > 1 \tag{63}$$

Неравенство (63) показывает, что уравнения (II′),(I2′) при $\varkappa \equiv 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_5 = 0$, σ_3, σ_4 – произвольны, неустойчивы. Однако, если выбирать τ_n из условия $\tau_n \lambda^* < C$, где C – некоторое действительное положительное число, то рост возмущений со временем T будет ограничен экспонентой $e^{\frac{C}{2}T}$.

Рост возмущений говорит о том, что в систему разностных осцилляторов (35′) происходит подкачка энергии, имеющая "разностное" происхождение.

Пусть $\alpha = 1$ (схема, неявная по давлению). Тогда:

$$q_k = \frac{1}{1+\lambda\tau^2} \pm \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda\tau^2)} - 1} \tag{64}$$

откуда получаем

$$|q_k| \equiv 1 \tag{65}$$

т.е. система уравнений (II′),(I2′) при $\varkappa \equiv 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_5 = 1$ $\sigma_{3,4}$ – произвольны, безусловно устойчива.

Для полностью консервативной схемы без учета диссипации:

$\varkappa \equiv 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0.5$

имеем:

$$q_k = \left(\frac{1-0.25\tau^2\lambda_k}{1+0.25\tau^2\lambda_k}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1-0.25\tau^2\lambda_k}{1+0.25\tau^2\lambda_k}\right)^2 - 1} \qquad (66)$$

Из (66) следует, что, как и в предыдущем случае $|q_k| \equiv 1$

Рассмотрим вопрос об устойчивости явной схемы $\sigma_1 = \sigma_5 = 0$ с ненулевой вязкостью $(\varkappa \neq 0)$. В этом случае

$$q_k = 1 - \frac{1}{2}\tau_k \eta \pm \sqrt{\tau_k\left(\frac{1}{4}\tau_k\eta^2 - 1\right)} \qquad (67)$$

где $\tau = \tau^2\lambda$, $\eta = \frac{\varkappa}{\tau}$

Зададим $\varkappa$ таким, чтобы для наиболее высокой гармоники с λ^* модуль q^* имел наименьшее возможное значение. Можно показать, что минимум q_k достигается тогда, когда подкоренное выражение в (67) равно нулю, т.е.

$$\varkappa = \frac{2}{\sqrt{\lambda^*}} \qquad (68)$$

Подставляя (68) в (67), для самой высокочастотной гармоники получаем:

$$q^* = 1 - \tfrac{1}{2}\tau_k \eta$$

Эта гармоника устойчива, когда

$$\tau\sqrt{\lambda^*} \leq 2 \qquad (69)$$

Отметим, что для оператора $\tilde{\mathcal{L}}_{\varkappa}^{(\sigma_1,\sigma_2)}$ на равномерной сетке с шагом h при $\rho_i = const$, $c_i^2 = const - \lambda^* = \frac{4c^2}{h^2}$ и ус-

ловие (69) имеет вид:

$$\frac{\tau c}{h} \leqslant 1 \tag{70}$$

При $\varkappa$, заданном формулой (68) исследуем устойчивоость более низких гармоник. Из (67) находим:

$$q_k = 1 - \frac{1}{2}\tau_k \eta \pm \sqrt{\tau_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda^*} - 1\right)} \tag{71}$$

Поскольку $\lambda_k < \lambda^*$, для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda^*}\right) \leqslant \eta\left(1 - \frac{1}{4}\tau_k \eta\right) \tag{72}$$

После несложных алгебраических преобразований находим, что неравенство (72) эквивалентно (69), т.е.

$$\tau\sqrt{\lambda^*} \leqslant 2$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский. Вариационный метод получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, 1976, № 65
2. Ю.П. Попов, А.А. Самарский. Полностью консервативные разностные схемы. ЖВМ и МФ 9, № 4 (1969), 953-958.
3. А.А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. М., 1971.
4. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. М., 1967.
5. Ф.Р. Гантмахер. Лекции по аналитической механике. М., 1963.
6. Л.И. Мандельштамм. Лекции по теории колебаний. М., 1972.

В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский.
"Об искусственной вязкости и устойчивости дифференциально-разностных и разностных уравнений газовой динамики".
Редактор А.В. Тулина. Корректор А.П. Фаворский.

№ Т-11484 от 28.06.76г. Заказ № 3774. Тираж 100 экз.
Формат бумаги 60X90, 1/16. Объем 1,7 уч. изд. л.
055(02)2 Цена 12 коп.

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.

©