Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 5

УДК 518.61:517.944/.947 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

1. Общая теория устойчивости трехслойных схем в гильбертовом пространстве H_h изучалась в ([1], [3]). В ([1]) были получены априорные оценки, выражающие устойчивость операторно-разностных трехслойных схем в специальных (составных) нормах, содержащих значения решения на двух соседних слоях. В ([3]) показана необходимость условия устойчивости $R > {}^1/_4A$, полученного в ([1]).

Здесь будет показано, что из результатов ([1]) следуют априорные оценки для решения в обычных энергетических нормах H_A и H_B через правые части в $H_{B^{-1}}$ и $H_{A^{-1}}$ (A и B — операторы трехслойной схемы, см. (1)). Получен ряд новых априорных оценок.

2. Будем пользоваться обозначениями из ([2]) : H_h — вещественное гильбертово пространство (со скалярным произведением (,) и нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$), зависящее от параметра h — элемента некоторого нормированного пространства; $\omega_\tau = \{t_k = k\tau,\ k = 0, 1, \ldots, k_0\}$ — сетка с шагом τ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$; $y_{h\tau}(t_k)$, $\varphi_{h\tau}(t_k)$ и т. д.— абстрактные функции аргумента $t_k \in \omega_\tau$ со значениями в H_h; $A_{h\tau}(t_k)$, $B_{h\tau}(t_k)$ и т. д.— линейные операторы, заданные на H_h. Индексы h, τ, как правило, опускаем.

Запись $A = A^* > 0$ означает, что A — самосопряженный оператор и $(Ax, x) > 0$, $\forall x \in H$, $x \neq 0$. Если $(Ax, x) - (Bx, x) \geqslant 0$, $\forall x \in H$, то пишем $A \geqslant B$ и т. д.

Воспользуемся также обозначениями

$$y = y_k,\ \hat{y} = y_{k+1},\ \check{y} = y_{k-1},\ y_t = (\hat{y} - y)/\tau,\ y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau,$$
$$y_{\overset{\circ}{t}} = (\hat{y} - \check{y})/2\tau, \quad y_{\bar{t}t} = (\hat{y} - 2y + \check{y})/\tau^2, \quad \|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)},$$
$$\|y\|_B = \sqrt{(By, y)}, \quad \|y\|_{B^{-1}} = \sqrt{(B^{-1}y, y)}.$$

3. Любая трехслойная схема может быть записана в виде

$$By_{\bar{t}t} + B_0 y_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \quad 0 < t = k\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0, \tag{1}$$

где y_0, $\bar{y}_0$ — любые элементы из H; $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция; $B = B(t)$, $A = A(t)$, $B_0 = B_0(t)$, $t \in \omega_\tau$.

В ([1]) изучались трехслойные схемы, записанные в одной из форм

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \tag{2_1}$$
$$(E + \tau^2 R) y_{\bar{t}t} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi. \tag{2_2}$$

Для удобства изложения мы вынуждены изменить обозначения и записывать любую трехслойную схему в канонической форме (1). Сравнивая (1) с (2_1) и (2_2), видим, что

$$B = \tau^2 R,\ B_0 = B \text{ для } (2_1); \quad B = E + \tau^2 R,\ B_0 = B \text{ для } (2_2).$$

Имея в виду эти соотношения, легко использовать результаты ([1]) для схемы (1).

Решение задачи (1) есть сумма решений двух задач

$$By_{\bar{t}t} + B_0 y_{\overset{\circ}{t}} + Ay = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0; \tag{1а}$$
$$By_{\bar{t}t} + B_0 y_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \quad y(0) = 0, \quad y_t(0) = 0. \tag{1б}$$

Будем предполагать, что исходное семейство схем (1) задается требованиями на операторы

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0, \quad B_0 \geqslant 0, \quad \forall t \in \omega_\tau; \tag{3}$$

$$(1 - c_0\tau)\check{A} \leqslant A \leqslant (1 + c_0\tau)\check{A}, \qquad (1 - c_0\tau)\hat{B} \leqslant \hat{B} \leqslant (1 + c_0\tau)\check{B}, \tag{4}$$

где $c_0 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от h и τ. Условия (4) означают, что A и B удовлетворяют условиям Липшица по t. Из ([1]) следует, что условие

$$B \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2 A \quad \left(R \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} A \ \text{ при } B = \tau^2 R\right), \tag{5}$$

где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$ — произвольная постоянная, не зависящая от h и τ, достаточно для устойчивости схемы (1) по начальным данным, так что для схемы (1а) имеет место оценка

$$\|Y_{k+1}\|_* \leqslant M_0 \|Y_1\|_*, \tag{6}$$

$$\|Y_{k+1}\|_*^2 = {}^1/_4 \|y_{k+1} + y_k\|^2_{A(t_k)} + ((B(t_k) - {}^1/_4\,\tau^2 A(t_k))\, y_{t,k},\, y_{t,k}),\ k > 0; \tag{7}$$

$$\|Y_1\|_*^2 = {}^1/_4 \|y_1 + y_0\|^2_{A(\tau)} + ((B(\tau) - {}^1/_4\,\tau^2 A(\tau))\, y_{t,0},\, y_{t,0}), \tag{8}$$

$$\|y\|^2_{A(t_k)} = (A(t_k)\, y,\, y),$$

$M_0 = M_0(c_0, \varepsilon) \geqslant 1$, $M_0 = 1$, если A и B — постоянные (не зависящие от t) операторы, т. е. $c_0 = 0$.

4. Лемма 1. *Если выполнены условия* (3) *и* (5), *то*

$$\|Y_{k+1}\|_* < \|y_k\|_{A(t_k)} + \|y_{t,k}\|_{B(t_k)}; \tag{9}$$

$$\|Y_{k+1}\|_*^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \|y_{k+1}\|^2_{A(t_k)}; \tag{10}$$

$$\|Y_{k+1}\|_*^2 \geqslant \beta\, (\|y_{k+1}\|_{A(t_k)} + \|y_{t,k}\|_{B(t_k)})^2 \qquad \beta = {}^1/_4\, \varepsilon/(1+\varepsilon). \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим

$$\hat{J} = {}^1/_4 \|\hat{y} + y\|_A{}^2 + ((B - {}^1/_4 \tau^2 A)\, y_t,\, y_t) = (Ay, \hat{y}) + \|y_t\|_B{}^2.$$

1) $\hat{J} = (Ay, y + \tau y_t) + \|y_t\|_B{}^2 = \|y\|_A{}^2 + \tau(Ay, y_t) + \|y_t\|_B{}^2 \geqslant \|y\|_A{}^2 + \tau \|y\|_A \|y_t\|_A + \|y_t\|_B{}^2$. В силу (5) имеем

$$\tau \|y_t\|_A \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon}} \|y_t\|_B,$$

$$\hat{J} \leqslant \|y\|^2_A + \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon}} \|y\|_A \|y_t\|_B + \|y_t\|^2_B \leqslant (\|y\|_A + \|y_t\|_B)^2.$$

Отсюда следует (9).

2) $\hat{J} = (A\hat{y}, y) + \|y_t\|^2_B = (A\hat{y}, \hat{y} - \tau y_t) + \|y_t\|^2_B =$

$$= \|\hat{y}\|^2_A - \tau(A\hat{y}, y_t) + \|y_t\|^2_B \geqslant \|\hat{y}\|^2_A - \tau\|\hat{y}\|_A \|y_t\|_A + \|y_t\|^2_B \geqslant$$

$$\geqslant \|\hat{y}\|^2_A - \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon}} \|\hat{y}\|_A \|y_t\|_B + \|y_t\|^2_B, \tag{12}$$

$$\hat{J} \geqslant (1 - c_0)\|\hat{y}\|^2_A + \left(1 - \frac{1}{c_0(1+\varepsilon)}\right)\|y_t\|^2_B.$$

Выбирая $c_0 = 1/(1+\varepsilon)$, получаем (10).

3) Из (12) следует (11).

Подставляя затем (9) в (8), (10) и (11) в (7) и пользуясь (6), видим, что справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3)—(5). *Тогда схема* (1) *устойчива в* H_A *по начальным данным, так что для* (1а) *имеют место оценки*:

$$\|y_{k+1}\|_{A(t_k)} \leqslant M_0 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\, (\|y(0)\|_{A(\tau)} + \|y_t(0)\|_{B(\tau)}), \tag{13}$$

$$\|y_{k+1}\|_{A(t_k)}+\|y_{t,k}\|_{B(t_k)}\leqslant M_0 2\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\|y(0)\|_{A(\tau)}+\|y_t(0)\|_{B(\tau)}\right). \quad (13)$$

5. Из устойчивости (13) по начальным данным схемы (1) следует ее устойчивость по правой части.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (3)—(5), *то для решения задачи* (1б) *имеет место априорная оценка*

$$\|y_{k+1}\|_{A(t_k)}\leqslant M_0\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\sum_{j=1}^{k}\tau\|\varphi_j\|_{B^{-1}(t_j)}. \quad (14)$$

Доказательство. Решение задачи (1б) ищем в виде

$$y_k=\sum_{j=1}^{k}\tau G_{k,j},\quad k=1,2,\ldots,\ y_0=0, \quad (15)$$

где $G_{k,j}$ как функция k при любом фиксированном $j=1,2,\ldots$ удовлетворяет уравнению (1а) и начальным условиям

$$G_{j,j}=0,\quad (0{,}5\tau B_0(t_j)+B(t_j))(G_{j+1,j}-G_{j,j})/\tau=\varphi_j.$$

Отсюда и из (15) следует, что $y(0)=y_t(0)=0$. Так как $B_0\geqslant 0$, $B=B^*>0$, то для решения уравнения $(0{,}5\tau B_0+B)w=\varphi$ будем иметь $\|w\|_B\leqslant\|\varphi\|_{B^{-1}}$, т. е. $\|(G_t)_{j,j}\|_{B(t_j)}\leqslant\|\varphi_j\|_{B^{-1}(t_j)}$. В силу теоремы 1

$$\|G_{k+1,j}\|_{A(t_k)}\leqslant M_0\sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\,\|(G_t)_{j,j}\|_{B^{-1}(t_j)}.$$

Пользуясь затем неравенством треугольника и (13)

$\|y_{k+1}\|_{A(t_k)}\leqslant\sum_{j=1}^{k}\tau\|G_{k+1,j}\|_{A(t_k)}$, получаем (14).

6. Рассмотрим теперь семейство схем

$$By_{\bar{t}t}+Ay=\varphi(t),\quad 0<t=k\tau<t_0,\quad y(0)=y_0,\quad y_t(0)=\bar{y}_0. \quad (16)$$

Будем, как обычно, обозначать (16а) задачу (16) с $\varphi=0$, а (16б) — задачу (16) с однородными начальными данными $y(0)=0$, $y_t(0)=0$. Предположим, что

$$A \text{ и } B \text{ — постоянные операторы, } A=A^*>0,\ B=B^*>0, \quad (17)$$

и справедливо условие (5).

Тогда схема (16) эквивалентна (ср. [2]) явной схеме

$$x_{\bar{t}t}+Cx=\tilde{\varphi},\quad 0<t\in\omega_\tau,\quad x(0)=x_0,\quad x_t(0)=\bar{x}_0, \quad (18)$$

где $C=B^{-1/2}AB^{-1/2}$, $x=B^{1/2}y$, $\tilde{\varphi}=B^{-1/2}\varphi$. Перепишем ее в виде

$$C^{-1}x_{\bar{t}t}+x=\Phi,\quad \Phi=C^{-1}\tilde{\varphi}=B^{1/2}A^{-1}\varphi, \quad (18^*)$$

и применим к ней теоремы 1 и 2 (при $A=E$, $B_0=0$, $B=C^{-1}$),

$$\|x_{k+1}\|\leqslant\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left[\|x_0\|+\|x_{t,0}\|_{C^{-1}}+\sum_{j=1}^{k}\tau\|\Phi_j\|_C\right],$$

учитывая, что $M_0=1$. Так как $\|x_k\|=\|y_k\|_B$, $\|\Phi\|_C^2=(C\Phi,\Phi)=(CC^{-1}\tilde{\varphi},C^{-1}\tilde{\varphi})=(C^{-1}\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})=(B^{1/2}A^{-1}\varphi,B^{-1/2}\varphi)=(A^{-1}\varphi,\varphi)$, $\|\Phi\|_C=\|\varphi\|_{A^{-1}}$, то в результате для (16) получим оценку

$$\|y_{k+1}\|_B\leqslant\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left[\|y(0)\|_B+\|By_t(0)\|_{A^{-1}}+\sum_{j=1}^{k}\tau\|\varphi_j\|_{A^{-1}}\right]. \quad (19)$$

Теорема 3. *Пусть выполнены* (5) *и* (17). *Тогда для схемы* (16) *верна априорная оценка* (19).

Следствие. *Для явной схемы* ($B = E$) *при условии* $E \geqslant {}^1/_4(1 + \varepsilon)\tau^2 A$ ($\varepsilon > 0$ — *любое число*) *имеет место оценка*

$$\|y_{k+1}\| \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left[\|y(0)\| + \|y_t(0)\|_{A^{-1}} + \sum_{j=1}^{k} \tau \|\varphi_j\|_{A^{-1}}\right]. \qquad (20)$$

Замечание 1. Из (20) видно, что второе начальное значение берется в более слабой норме. Оценка (20) удобна для исследования скорости сходимости в сеточной норме L_2 однородных разностных схем для уравнений с разрывными коэффициентами.

Замечание 2. Если

$$B = E + \tau^2 R, \quad A \text{ и } R \text{ — постоянные операторы, } R \geqslant 0, \qquad (21)$$

то из (5) для задачи (16б) следует оценка

$$\|y_{k+1}\| \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{j=1}^{k} \tau \|\varphi_j\|_{A^{-1}} \quad \text{при } B \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2 A.$$

Если же вместо (5) выполнено условие (см. ([1])) $R \geqslant {}^1/_4 A$, то для (16б) получаем

$$\|y_{k+1}\| \leqslant \sqrt{2}\, t_{k+1} \sum_{j=1}^{k} \tau \|\varphi_j\|. \qquad (22)$$

7. Оценка (20) может быть получена методом разделения переменных в случае конечномерного H и постоянного A.

Для переменного оператора $A = A(t)$ метод разделения переменных неэффективен.

Если $A = A(t)$ — переменный, а B — постоянный операторы, то оценка вида (19) имеет место, если

$$\rho^{-1}A \leqslant \hat{A} \leqslant \rho A, \quad \rho = e^{c_0\tau} \text{ для всех } t \in \omega_\tau, \qquad (23)$$

($c_0 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от τ и h). При этом в (19) правая часть умножается на постоянную $M = M(c_0) > 1$. Сравнивая (6) с (23), видим, что из (6) следует (23) при достаточно малом $\tau < \tau_0(c_0)$. В случае схемы (1) общего вида теорема 3 сохраняет силу, если $B_0 = B_0^*$ и операторы A, B, B_0 перестановочны, A и B постоянны.

8. Рассмотрим в качестве примера схему (16) с весами (см. ([1])). Для нее $B = E + \sigma\tau^2 A$. Условие (5) выполнено при $\sigma \geqslant (1+\varepsilon)/4 - 1/(\tau^2\|A\|)$. В частности, явная схема ($\sigma = 0$) устойчива, если $\tau \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{1+\varepsilon}}\dfrac{1}{\sqrt{\|A\|}}$.

Так, для уравнения колебаний струны

$$\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x^2,\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ \partial u(x,0)/\partial t = \bar{u}_0(x)$$

имеем $A = -\Lambda$, $\Lambda y = y_{\bar{x}x}$ (см. ([4])), и явная схема устойчива при $\tau \leqslant h/\sqrt{1+\varepsilon}$, где h — шаг сетки на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Теоремы 1, 2, 3 применимы для исследования и построения методом регуляризации ([1]) разностных схем (в частности, экономичных схем) для уравнений и систем уравнений математической физики.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 7, № 1, 62 (1967); 7, № 5, 1093 (1967). [2] А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4, 808 (1968). [3] А. В. Гулин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 4, 899 (1968). [4] А. А. Самарский, Лекции по теории разностных схем, гл. IV, М., 1969.