

УДК 518:517.9:538.3

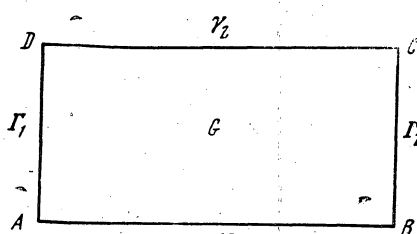
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Л. М. ДЕГТЯРЕВ, А. А. САМАРСКИЙ, А. П. ФАВОРСКИЙ

(Москва)

В работе рассмотрены вопросы, связанные с численным решением несамопряженных краевых задач, возникающих при исследовании полей электрических токов или температуры в среде с анизотропной электропроводностью и теплопроводностью [1]. Использование вариационного подхода позволяет перенести важнейшие свойства оператора исходной задачи на аппроксимирующий его разностный оператор. Построена дивергентная разностная схема второго порядка точности для дивергентного положительно определенного оператора исходной краевой задачи. Полученная схема использовалась при численном решении ряда конкретных физических задач.

1. Требуется найти функцию $u(x_1, x_2)$, непрерывную в замкнутой прямоугольной области \bar{G} (см. фиг. 1) с границей $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_2$ ($\gamma_1 = AB$, $\gamma_2 = CD$, $\Gamma_1 = AD$, $\Gamma_2 = BC$) и удовлетворяющую во внутренних точках области G уравнению



Фиг. 1

$$\mathcal{A}u = f, \tag{1}$$

$$\mathcal{A}u = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(r \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(r \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$u = 0 \text{ на } \gamma_1 \text{ и } \gamma_2, \tag{3}$$

$$ku = k \frac{\partial u}{\partial x_2} - r \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_2, \tag{4}$$

$$k(x_1, x_2) \geq c_1 > 0, \quad c_1 = \text{const.}$$

Квадратичная форма

$$[u, u] = \iint_G k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 \tag{5}$$

положительно определена:

$$[u, u] \geq \delta_0(u, u), \quad \delta_0 = \text{const} > 0, \quad (u, v) = \iint_G uv dx_1 dx_2. \quad (6)$$

В классе достаточно гладких коэффициентов k, r и функций u , удовлетворяющих (3), (4), дифференциальное выражение (2) задает линейный, положительно определенный оператор \mathcal{A} , который является самосопряженным только при $r \equiv 0$. Обсуждение вопросов, связанных с существованием и единственностью решения задачи (1)–(4), содержится в [2].

2. Краевые задачи вида (1)–(4) тесно связаны с вариационными принципами описания сплошных сред [3], поэтому для построения разностной схемы естественно воспользоваться вариационным подходом [4], основанным на определении решения задачи с помощью интегральных тождеств.

Пусть $C_1^{(2)}$ — семейство функций, дважды непрерывно дифференцируемых внутри G и удовлетворяющих краевым условиям (3). Функция $u \in C_1^{(2)}$ является решением задачи (1)–(4) тогда и только тогда, когда для любой $v \in C_1^{(2)}$ выполняется тождество

$$\Phi(u, v) = [u, v] - (f, v) \equiv 0, \quad (7)$$

$$[u, v] = \iint_G I(u, v) dx_1 dx_2, \quad (8)$$

$$I(u, v) = k \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + r \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right). \quad (9)$$

Справедливость этого утверждения следует из первой формулы Грина

$$\iint_G v \mathcal{A}u dx_1 dx_2 = [u, v] - \int_C v \left(k \frac{\partial u}{\partial x_2} - r \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 - \int_A v \left(k \frac{\partial u}{\partial x_2} - r \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1. \quad (10)$$

и из произведения в выборе $v \in C_1^{(2)}$. В свою очередь, (7) может служить определением обобщенного решения задачи (1)–(4).

3. Характерным для рассматриваемой задачи является положительная определенность и дивергентность оператора \mathcal{A} . Естественно потребовать, чтобы разностный аналог A оператора \mathcal{A} обладал такими же свойствами. Построение оператора разностной краевой задачи, которая аппроксимирует задачу (1)–(4), проведем исходя из равенств (7)–(9).

В прямоугольнике $\bar{G} = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2)$ построим сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_{1i_1} = i_1 h_1, x_{2i_2} = i_2 h_2; i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

с шагами h_1 и h_2 по направлениям x_1 и x_2 .

Аппроксимируем интегральную билинейную форму $[u, v]$ разностным выражением

$$[u, v]_h = \sum_{i_1=0, i_2=0}^{N_1-1, N_2-1} (I_h)_{i_1 i_2} h_1 h_2. \quad (11)$$

Аппроксимация $[u, v]$ может быть выполнена неоднозначно. Среди возможных аппроксимаций отберем только те, которые удовлетворяют следующим естественным требованиям:

1) локальная аппроксимация билинейной формы $I(u, v)$ разностным аналогом $I_h(u, v)$ на гладких функциях имеет второй порядок:

$$I(u, v) - I_h(u, v) = O(h^2), \quad h = \max_{\alpha=1,2} (h_1, h_2); \quad (12)$$

2) квадратичная форма $[u, u]_h$ положительна:

$$[u, u]_h > 0, \quad u \neq 0. \quad (13)$$

Билинейный разностный функционал (11) посредством тождества

$$[u, v]_h = (v, Au)_h = \sum_{i_1=0, i_2=0}^{N_1-1, N_2} \kappa_{i_2} v A u h_1 h_2, \quad (14)$$

$$\kappa_{i_2} = \begin{cases} 1, & i_2 \neq 0, N_2, \\ 0.5, & i_2 = 0, N_2, \end{cases}$$

которое является разностным аналогом формулы Грина (10), определяет оператор A . Аналогичным образом определяется сопряженный оператор A^*

$$[u, v]_h = (u, A^* v)_h = \sum_{i_1=0, i_2=0}^{N_1-1, N_2} \kappa_{i_2} u A^* v h_1 h_2.$$

Построенные таким образом разностные операторы A и A^* определены на произвольных сеточных функциях y , удовлетворяющих краевому условию $y = 0$ в узлах сетки, принадлежащих γ_1 и γ_2 , и являются дивергентными. Возможность построения разностных схем на основе интегрального тождества (7) рассматривалась в [5, 6].

Используем следующую аппроксимацию $I(u, v)$, удовлетворяющую (12), (13):

$$I_h(u, v) = \frac{1}{2} \kappa_{i_1 i_2} \sum_{\alpha=0}^1 [(u_{x_1} v_{x_1})_{i_1, i_2+\alpha} + (u_{x_2} v_{x_2})_{i_1+\alpha, i_2}] + \\ + r_{i_1 i_2} \sum_{\alpha, \beta=0}^1 [(u_{x_2})_{i_1+\alpha, i_2} (v_{x_1})_{i_1, i_2+\beta} - (u_{x_1})_{i_1, i_2+\beta} (v_{x_2})_{i_1+\alpha, i_2}].$$

Для A согласно (14) получаем выражение

$$Ay = - \sum_{\alpha=1}^2 (k y_{x_\alpha})_{x_\alpha} + \frac{1}{2} (p_- y_{x_1}^- + p_+ y_{x_1}) - \frac{1}{2} (q^- y_{x_2}^- + q^+ y_{x_2}) \quad (15)$$

во внутренних точках,

$$Ay = - (k y_{x_1}^-)_{x_1} + \frac{2}{h_2} k^- y_{x_2}^- - q^- y_{x_2}^- - \frac{1}{h_2} (r_- y_{x_1}^- + r_+ y_{x_1}) \quad (16)$$

на участке границы Γ_1 и

$$Ay = - (k y_{x_1}^-)_{x_1} - \frac{2}{h_2} k^+ y_{x_2}^+ - q^+ y_{x_2}^+ + \frac{1}{h_2} (r_- y_{x_1}^- + r_+ y_{x_1}) \quad (17)$$

на участке границы Γ_2 ; здесь $p = \partial r / \partial y$, $q = \partial r / \partial x$. Смысл обозначений ξ_- , ξ_+ , ξ^- , ξ^+ для функций $\xi(x)$ ($\xi(x)$ — один из коэффициентов k , p , q , r) показан на фиг. 2.

Разностный аналог тождества (7)

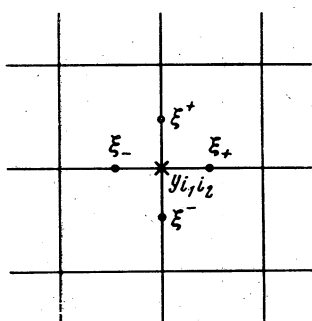
$$\Phi_h(y, w) = [y, w]_h - (f, w)_h \equiv 0, \quad (18)$$

где

$$(f, w) = \frac{1}{4} \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \sum_{\alpha=0}^1 f_{i_1+\alpha, i_2+\alpha} W_{i_1+\alpha, i_2+\alpha} h_1 h_2$$

определяет разностное решение y . Нахождение такого решения эквивалентно решению разностной краевой задачи

$$Ay = f, \quad (19)$$



Фиг. 2

где оператор A определяется формулами (15) — (17). Остановимся на свойствах оператора A .

Отметим, что для разностного оператора A , так же как и для дифференциального оператора \mathcal{A} , справедливо неравенство положительной определенности

$$(y, Ay)_h \geq \delta \|y\|^2, \quad \delta > 0, \quad (20)$$

где $\delta = \text{const}$ и не зависит от h .

Введем в рассмотрение самосопряженный оператор $A_0 = (A + A^*) / 2$ и кососимметричный оператор $A_1 = (A - A^*) / 2$, так что $A = A_0 + A_1$.

Области определения операторов A_0 и A_1 совпадают с областью определения A . Оператор A_0 положительно определен:

$$(y, A_0 y)_h = (y, Ay)_h \geq \delta \|y\|^2,$$

что позволяет ввести норму

$$\|y\|_{A_0} = \sqrt{(y, A_0 y)}.$$

Согласно (15) — (17),

$$\|y\|_{A_0}^{(2)} = h_1 h_2 \left\{ \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} k_-(y_{i_1})^2 + \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} k^-(y_{i_2})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{N_1} [k_-(y_{x_1})^2_{i_2=0} + k_-(y_{x_1})^2_{i_2=N_2}] \right\}. \quad (21)$$

Для оценки скорости сходимости решения y разностной задачи к решению задачи (1) — (4) введем погрешность

$$z = y - u. \quad (22)$$

Подставляя $y = u + z$ в (19), для погрешности z получим уравнение

$$Az = \psi, \quad (23)$$

где

$$\psi = f - Au = (\mathcal{A}u)_h - Au$$

есть погрешность аппроксимации дифференциального оператора \mathcal{A} разностным оператором A на решении u . Для достаточно гладкого решения u исходной задачи локальная погрешность аппроксимации ψ (в равномерной метрике) есть величина порядка $O(h^2)$, что следует из аппроксимации билинейной формы $[u, v]$ с порядком $O(h^2)$ разностным аналогом $[u, v]_h$.

Таким образом,

$$\|z\|_{A_0}^2 = (A_0 z, z)_h = (Az, z)_h = (\psi, z)_h. \quad (24)$$

Пользуясь оценкой [7], имеем

$$(\psi, z)_h \leq \|\psi\|_{A_0^{-1}} \|z\|_{A_0} \quad (25)$$

и, принимая во внимание (24), получим

$$\|z\|_{A_0} \leq \|\psi\|_{A_0^{-1}}. \quad (26)$$

Из положительной определенности $A_0 \geq \delta E$ (E — единичный оператор) следует неравенство

$$A_0^{-1} \leq \delta^{-1} E,$$

пользуясь которым получаем оценку

$$\|\psi\|_{A_0^{-1}}^2 = (A_0^{-1} \psi, \psi) \leq \delta^{-1} (\psi, \psi) = \delta^{-1} \|\psi\|^2. \quad (27)$$

Отсюда и из (26) следует априорная оценка для задачи (23)

$$\|z\|_{A_0} \leq \delta^{-1/2} \|\psi\|. \quad (28)$$

Так как $\|\psi\| = O(h^2)$ и $\delta > 0$, то скорость сходимости разностной схемы в сеточной норме W_{z^1} будет $O(h^2)$.

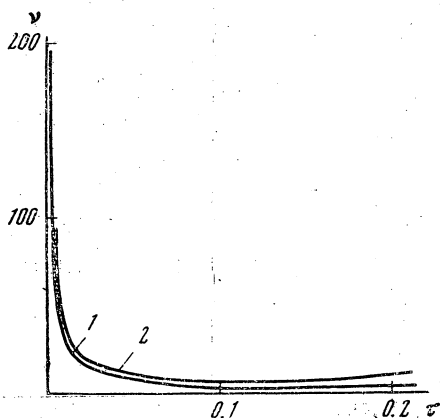
4. При численном решении (19) использовались итерационные схемы, основанные на методе переменных направлений. Для этого A представлялся в виде суммы двух одномерных операторов A_1 и A_2 , так что

$$A = A_1 + A_2.$$

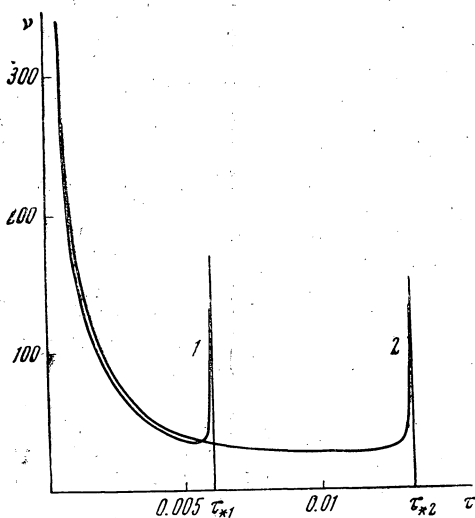
Проведено сравнение двух итерационных схем — продольно-поперечной схемы (ППС) [8] и схемы Дугласа — Рекфорда (СДР) [9] — по числу итераций, которое необходимо затратить для достижения заданной точности. Расчеты проводились с постоянным итерационным параметром τ . Из фиг. 3, которая относится к решению (19) при $k = r = 1$, видно, что при любом τ ППС (кривая 1) сходится за меньшее число итераций, чем СДР (кривая 2). На фиг. 4 представлены результаты решения (19) с сильно переменными по пространству коэффициентами $k = 1$, $r = a \sin \gamma x \sin \gamma y + b$, a, b, γ — постоянные. Отсюда видно, что в этом случае для каждой из схем имеется свое критическое значение τ_* , при превышении которого итерации расходятся, причем для СДР (кривая 2) значение τ_* больше, чем для ППС (кривая 1). Такое ограничение параметра τ при сильно переменных коэффициентах появляется в результате потери знакоопределенности операторов A_1 и A_2 , несмотря на положительную определенность их суммы. Для СДР кривая зависимости числа итераций от τ имеет «плато». Это обстоятельство облегчает выбор оптимального итерационного параметра и позволяет при использовании СДР ограничиться меньшим числом итераций, чем при ППС.

5. Приведем результаты численного решения некоторых характерных задач. Описание результатов не претендует на полноту и носит иллюстративный характер.

Большой интерес представляет изучение различного рода двумерных эффектов в краевых зонах магнитного поля или вблизи электродов [1].



Фиг. 3



Фиг. 4

представленное на фиг. 4, а также найти такие энергетические интегральные характеристики, как мощность работы плазмы, электрический к.п.д. и др. В [10] приведены результаты серии аналогичных расчетов, имеющих целью выяснение влияния распределения по пространству магнитного поля и электродов, параметра Холла и др. на картину распределения тока и интегральные энергетические характеристики магнитогидродинамических каналов.

Значительный интерес с общефизической и прикладной точек зрения представляет явление ионизационной неустойчивости в низкотемператур-

В этой области имеется ряд точных решений для простейших случаев. Однако возможности аналитического аппарата ограничены даже при весьма упрощенном подходе к рассмотрению задач с постоянными заданными параметрами проводящей жидкости. В общем случае переменных коэффициентов численное решение задачи практически единственно доступно.

Рассмотрим течение электропроводной среды с постоянной скоростью v ($v_1 = 1, v_2 = 0$) и постоянной электропроводностью $\sigma = 1$.

Течение происходит в плоском канале $-\infty \leq x_1 \leq \infty, 0 \leq x_2 \leq f$ с параллельными стенками (см. фиг. 5), которые являются идеальным диэлектриком всюду, за исключением участков, занятых сплошными идеальными электродами $-0.5 \leq x \leq 0.5$. Между электродами поддерживается заданная разность потенциалов $U = 0.7$. Магнитное поле постоянно в электродной зоне и равно $H = 1$, а вне зоны спадает по экспоненте с показателем 2. Параметр Холла $\Omega = 3H$.

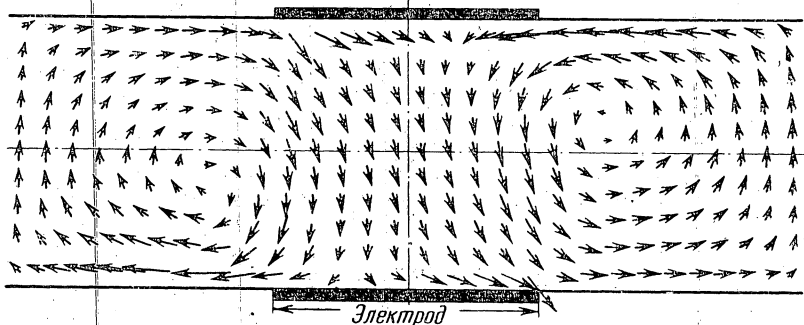
Результаты численного решения этой задачи позволяют построить распределение электрических токов,

ной замагниченной плазме. При определенных предположениях принципиальное математическое описание этого явления сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H}{\sigma \nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H}{\sigma \nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] - n T \nu,$$

где n — концентрация электронов в единице объема, $\sigma = n / \nu$ — электропроводность. В математическом отношении характерной особенностью является сильная зависимость ν от n , что приводит к сильноменяющимся по пространству коэффициентам в уравнении (29). Численное решение зада-

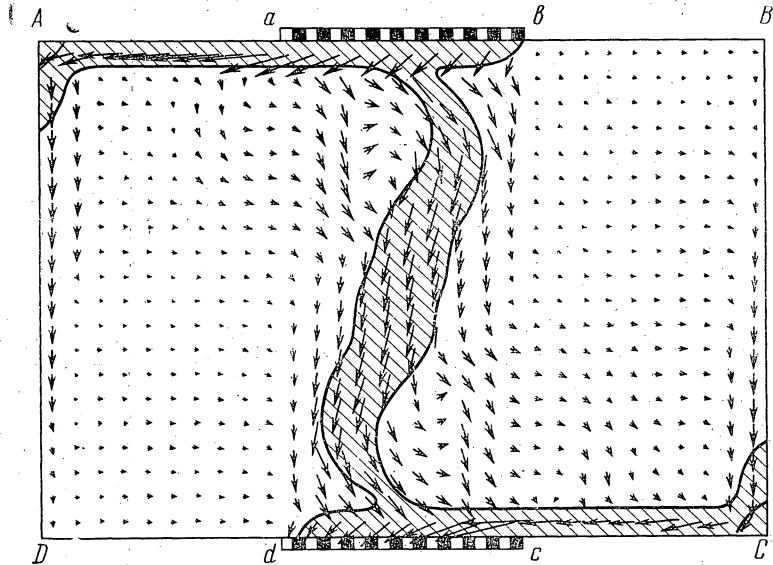


Фиг. 5

чи позволило получить качественную картину и количественные характеристики процесса зарождения и развития страт, наблюдаемых в эксперименте. На фиг. 6 представлены линии уровня $n = 1$ электронной концентрации в момент времени $t = 1.8$ интенсивного развития страт при значении параметра Холла $\Omega = 10H$. Область $n > 1$ (страта) заштрихована. Векторное поле плотности электрических токов показано стрелками. Отчетливо видна тенденция изгибания электрического тока вдоль сильно ионизованной страты. Геометрия задачи ясна из графика. Граница области $ABCD$ — идеальный диэлектрик, за исключением идеально секционированных электродов ab и cd , на которых задана постоянная плотность нормальной компоненты электрического тока $j_x = -\psi_x = -1$. В начальный момент времени $t = 0$ концентрация электронов была постоянна, $n = 1$. Связь температуры T и концентрации n электронов задавалась по формуле Саха. Учитывались столкновения электронов с ионами и нейтральными атомами. При дальнейшем развитии процесса распределение концентрации n и электрических токов перестает носить регулярный характер и напоминает турбулентную картину, наблюдаемую в эксперименте.

Более подробный анализ результатов численного решения аналогичных задач содержится в [11].

Приведем в качестве третьего примера результат численного решения двумерной задачи о входе сверхзвукового потока проводящего газа в магнитное поле. Явление описывается системой уравнений магнитной газодинамики. Требуется найти стационарное решение задачи, которое достига-



Фиг. 6

ется интегрированием нестационарной системы уравнений методом установления. Остановимся на следующей постановке задачи. Имеется канал постоянного сечения $d = 1$. Магнитное поле распределено по пространству следующим образом:

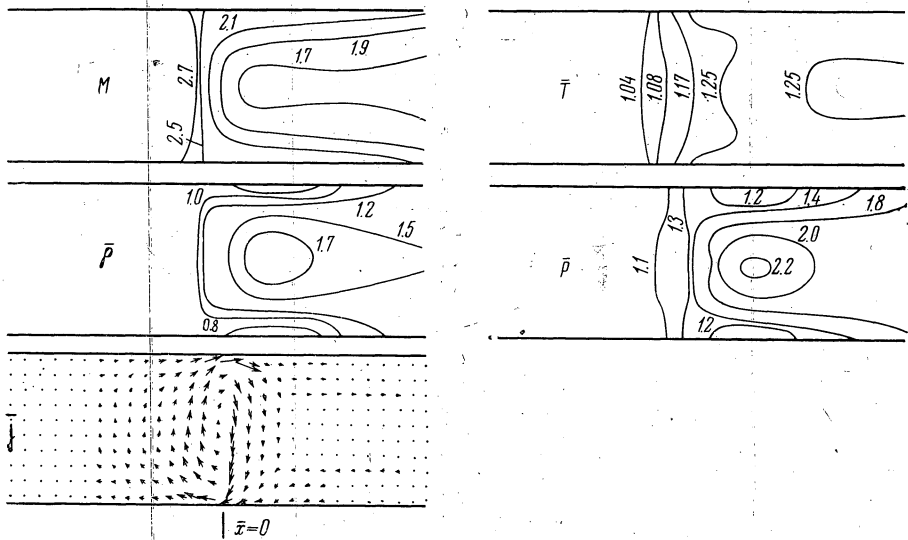
$$H = \begin{cases} 1, & x_1 > 0, \\ e^{15x_1}, & x_1 < 0. \end{cases}$$

Область решения задачи ограничим сечениями $x_1 = \pm 1.5$ (см. фиг. 7). На входе в канал (сечение $x_1 = -1.5$) задан сверхзвуковой поток газа с параметрами: плотность $\rho = \rho_0$, температура $T = T_0$, скорость $u = u_0$, давление $p = p_0$, постоянная адиабаты $\gamma = 1.12$. Проводимость определяется концентрацией электронов цезиевой присадки, посчитанной по формуле Саха:

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/4} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-1/2} \exp \left[-\frac{I}{2} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right].$$

Основными безразмерными параметрами, характеризующими течение, являются число Маха M и параметр гидромагнитного взаимодействия R_m . В сечении $x_1 = -1.5$ они имеют значения $M = 2.92$, $R_m = 0.5$. Стационарные значения распределенных по пространству параметров приведены на

фиг. 7. Указано отношение значения параметра на линии уровня к значению соответствующего параметра во входном сечении. Более подробно см [12]. На фиг. 7 показан токовый вихрь, возникающий при входе проводящей среды в магнитное поле. Существование такого вихря известно [1] из решения этой задачи при заданном движении среды, т. е. в приближении $R_M \ll 1$.



Фиг. 7

Ход линий уровней на фиг. 7 показывает, что вход сверхзвукового потока проводящего газа в магнитное поле при $R_M = 0.5$ сопровождается его значительным торможением и сжатием к оси. В свою очередь, изменение параметров потока приводит к резкому затуханию электрического тока в зоне постоянного магнитного поля при $x_1 > 0$.

В заключение авторы приносят благодарность И. В. Фрязинову за плодотворные обсуждения, а также Т. А. Горбушиной, Е. Е. Мышецкой, В. А. Равинской за создание программ и проведение расчетов.

Поступила в редакцию 21.05.1970

Цитированная литература

1. Дж. Саттон, А. Шерман. Основы технической магнитной гидродинамики. М., «Мир», 1968.
2. M. Shefter. Mixed boundary problems for general elliptic equations. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1960, 13, № 2, 183—202.
3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. М., Изд-во ин. лит., 1958.
4. R. Courant. Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1949, 49, 1—43.
5. Ю. К. Демьянович. Метод сеток для некоторых задач математической физики. Докл. АН СССР, 1964, 159, № 2, 250—254.

6. Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. О вариационно-разностных схемах для линейных эллиптических уравнений второго порядка в двумерной области с кусочно-гладкой границей. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1968, 8, № 1, 97—115.
 7. А. А. Самарский. Лекции по теории разностных схем. М., ВЦ АН СССР, 1969.
 8. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic equation. *J. Soc. Industr. and Appl. Math.*, 1953, 1, № 3, 28—46.
 9. J. Douglas, H. H. Rachford. On numerical solution on heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1956, 82, № 2, 421—439.
 10. А. В. Губарев, Л. М. Дегтярев, А. П. Фаворский. К вопросу о продольном краевом эффекте в магнитогидродинамических каналах. *Магн. гидродинамика*, 1970, 6, 77—83.
 11. Е. П. Велихов, Л. М. Дегтярев, А. А. Самарский, А. П. Фаворский. Расчет ионизационной неустойчивости в низкотемпературной замагниченной плазме. *Докл. АН СССР*, 1969, 184, № 3, 578—581.
 12. А. В. Губарев, Л. М. Дегтярев, А. А. Самарский, А. П. Фаворский. Течение сверхзвукового потока электропроводного газа в неоднородном магнитном поле. *Докл. АН СССР*, 1970, 192, № 3, 720—724.
-