Доклады Академии наук СССР
1969. Том 185, № 3

УДК 518:517.944./947

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ

ДВУХСЛОЙНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

В этой заметке рассматриваются двухслойные (одношаговые, двухчленные, схемы первого порядка [1]) интерационные схемы для решения уравнения $Au = f$, где A — линейный самосопряженный оператор, заданный в гильбертовом пространстве (г. п.). Для исследования неявных схем применяется метод [2] изучения устойчивости по начальным данным двухслойных разностных схем. Неявная схема общего вида сводится к явной схеме (схеме простой итерации). Основная задача теории итерационных схем трактуется как задача оценки нормы разрешающего оператора эквивалентной явной схемы и выбора итерационных параметров из условия минимума этой нормы. В случае «стационарных» схем решается задача о минимуме нормы оператора перехода явной схемы. Изучение вычислительной устойчивости итерационных схем сводится к задаче об устойчивости схем относительно возмущения всех входных данных — операторов схемы, правой части и начального приближения. При построении схем используются методы [3]. Рассматривается класс схем с факторизованным оператором $B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2)$, где R_1 и R_2 — сопряженные («треугольные») операторы.

1. Пусть H — вещественное г. п.; $(\ ,\ )$ — скалярное произведение в H; $(H \to H)$ — множество линейных операторов, действующих из H в H. Все рассматриваемые ниже операторы принадлежат $(H \to H)$. Пользуемся обозначениями [2]: $A > 0$, если $(Ax, x) > 0$ для всех $x \in H$, $\|x\| \neq 0$; $A \geqslant B$, если $(Ax, x) \geqslant (Bx, x)$ для всех $x \in H$ и т. д. Наряду с H рассматриваем энергетические пространства H_D, где $D = D^* > 0$, с нормой $\|x\|_D = \sqrt{(Dx, x)}$, $D \in (H \to H)$, $D = A$ или B.

Пусть дано операторное уравнение
$$Au = f, \tag{1}$$
где u — искомый, f — задавный векторы из H. Для приближенного решения уравнения (1) рассмотрим одношаговые итерационные схемы, которые записываем в каноническом виде
$$B_k(y_{k+1} - y_k) / \tau_{k+1} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \ldots, y_0 \in H \text{ — любой вектор.} \tag{2}$$
Здесь k — номер итерации, y_k — k-я итерация, $\tau_{k+1} > 0$ — параметр, B_k — произвольный оператор, имеющий обратный B_k^{-1}. В дальнейшем всюду предполагается, что начальное приближение y_0 — произвольный вектор из H. Так как решение u уравнения (1) удовлетворяет (2), то для погрешности $z_k = y_k - u$ имеем:
$$B_k(z_{k+1} - z_k) / \tau_{k+1} + Az_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, z_0 = y_0 - u. \tag{3}$$

Итерационная схема (2) по форме совпадает с двухслойной схемой [2], соответствующей абстрактной задаче Коши $B\, du / dt + Au = f$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $u(0) = u_0$. Поэтому естественно вместо «одношаговая итерационная схема» (метод) говорить «двухслойная итерационная схема». Если $B_k = E$ — единичный оператор, то (2) называется явной схемой, если $B_k \neq E$, то (2) — неявная схема. Семейство схем (2) определим условиями
$$A = A^* > 0, \quad B_k = B_k^* > 0. \tag{4}$$

Согласно [2], неявная схема (3) эквивалентна явной схеме $x_{k+1} = S_k x_k$, $k = 0, 1, \ldots$, где $x_k = A^{1/2} z_k$, $S_{k+1} = E - \tau_{k+1} C_k$, $C_k = A^{1/2} B_k^{-1} A^{1/2}$, S_{k+1} —

оператор перехода (от k-й итерации к $(k+1)$-й итерации) для явной схемы. Отсюда следует, что

$$x_n = T_n x_0,\ T_n = S_n S_{n-1} \dots S_1,\ \|x_n\| \leqslant \|T_n\| \|x_0\|,\ \|x_k\| = \|z_k\|_A, \qquad (5)$$

где T_n — разрешающий оператор явной схемы, эквивалентной схеме (3). В силу (4) $T_n = T_n^*$ и $\|T_n\| = \sup\limits_{\|x=\|1} |(T_n x, x)|$ при $\|x\| = 1$.

Лемма 1. *Пусть* $\|T_n\| \leqslant q_n$. *Тогда для* (2) *верна оценка*

$$\|y_n - u\|_A \leqslant q_n \|y_0 - u\|_A, \qquad n = 1, 2, \dots, \qquad (6)$$

а если A и B перестановочны, то

$$\|Ay_n - f\| \leqslant q_n \|Ay_0 - f\|. \qquad (7)$$

Итерации по схеме (2) сходятся в H_A, если $q_n \to 0$ при $n \to \infty$. Обычно требуется найти приближенное решение задачи (1) с относительной погрешностью $\varepsilon > 0$, либо с абсолютной погрешностью ε_0: $(\|y_n - u\|_A / \|y_0 - u\|_A) < \varepsilon$, либо $\|y_n - u\|_A < \varepsilon_0$ при условии $\|u\|_A \approx 1$. Первое требование выполнено при $\|T_n\| < \varepsilon$ или $q_n \leqslant \varepsilon$. Число итераций $n = n_0(\varepsilon)$, при котором $\|T_n\| < \varepsilon$, зависит от выбора B_k и τ_k, который подчиняют требованию $\inf \|T_n\|$ (или $\min q_n$).

2. В дальнейшем всюду рассматриваются схемы (2) с постоянными операторами $B_k = B$ в предположении, что

$$A = A^* > 0, \qquad B = B^* > 0, \qquad \gamma_1 B \leqslant A \leqslant \gamma_2 B, \qquad \gamma_2 > \gamma_1 > 0, \qquad (8)$$

где γ_1 и γ_2 — заданные постоянные (A и B — энергетически эквивалентные ([3]), сходные ([4]), эквивалентные по спектру ([5]) операторы с постоянными эквивалентностями γ_1 и γ_2). (3) при $B_k = B$ эквивалентна явной схеме

$$\begin{gathered} x_{k+1} = S_{k+1} x_k, \qquad S_{k+1} = E - \tau_{k+1} C, \qquad k = 0, 1, \dots, \\ C = C^{(1)} = A^{1/2} B^{-1} A^{1/2} \text{ при } x_k = A^{1/2} z_k \\ \text{или } C = C^{(2)} = B^{-1/2} A B^{-1/2} \text{ при } x_k = B^{1/2} z_k. \end{gathered} \qquad (9)$$

Отсюда и из (8) следует, что

$$C = C^* > 0, \qquad \gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E. \qquad (10)$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} \tau_0 = 2 / (\gamma_1 + \gamma_2), \qquad \rho_0 = (\gamma_2 - \gamma_1) / (\gamma_2 + \gamma_1) = (1 - \xi) / (1 + \xi), \\ \rho_1 = (1 - \sqrt{\xi}) / (1 + \sqrt{\xi}), \qquad \xi = \gamma_1 / \gamma_2. \end{gathered} \qquad (11)$$

Для схемы (9) разрешающий оператор $T_n = T_n(C)$ есть операторный полином степени n, норма которого $\|T_n(C)\| \leqslant \max\limits_{t \in [\gamma_1, \gamma_2]} |T_n(t)|$ (см. ([6])). Параметры $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ находятся из условия $\inf \|T_n(C)\|$, что сводится к задаче об отыскании $\min\limits_{(\tau_k)} \max\limits_{t \in [\gamma_1, \gamma_2]} |T_n(t)|$; ее решение имеет вид ([1])

$$\tau_k = \tau_0 / (1 + \rho_0 \lambda_k), \qquad \lambda_k = \cos[(2k - 1)\pi / 2n], \qquad k = 1, 2, \dots n, \qquad (12)$$

при этом $\qquad \|T_n\| \leqslant q_n, \quad q_n = 2\rho_1^n / (1 + \rho_1^{2n})$.

Отсюда и из леммы 1 при $B_k = B$ следует для (2)

$$\|y_k - u\|_D \leqslant q_n \|y_0 - u\|_D, \qquad \text{где } D = A \text{ или } D = B. \qquad (13)$$

3. Обратимся к «стационарным» схемам с постоянными $B_k = B$ и $\tau_k = \tau$:

$$B(y_{k+1} - y_k) / \tau + Ay_k = f, \qquad k = 0, 1, \dots, \qquad \text{задан } y_0 \in H. \qquad (14)$$

Для $z_k = y_k - u$ получим однородное уравнение (3_0) с $B_k = B$ и $\tau_{k+1} = \tau$. Ему эквивалентна явная схема с постоянным оператором перехода $x_{k+1} = Sx_k$, $S = E - \tau C$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $C = C^{(1)}$ при $x_k = A^{1/2} z_k$ или $C = C^{(2)}$ при $x_k = B^{1/2} z_k$. В этом случае $T_n = S^n$, $\|T_n\| = \|S\|^n$, так как $S = S^*$, и задача об $\inf\limits_\tau \|T_n\|$ сводится к задаче об отыскании $\inf\limits_\tau \|S\|$. Воспользуемся известным результатом ([1]) для явной схемы:

Теорема 1. *Пусть $S = E - \tau C$ и выполнены условия* (10). *Тогда* $\|S\| < 1$ *при* $0 < \tau < 2 / \gamma_2$, *а* $\inf\limits_\tau \|S\|$ *достигается при* $\tau = \tau_0$: $\inf\limits_\tau \|S\| = \|E - \tau_0 C\| = \rho_0$.

С л е д с т в и е. *Для схемы* (14), (8) *при* $\tau = \tau_0$ *верны оценки*

$$\|y_n - u\|_D \leqslant \rho_0{}^n \|y_0 - u\|_D, \quad D = A \text{ или } D = B. \tag{15}$$

З а м е ч а н и е 1. В ([2]) показано, что необходимое и достаточное условие оценки $\|z_n\|_D \leqslant \rho^n \|z_0\|_D$, $\rho < 1$ ($D = A$ или $D = B$) для схемы (14) имеет вид $\frac{1}{\tau}(1-\rho)B \leqslant A \leqslant \frac{1}{\tau}(1+\rho)B$. Сравнивая его с (8), получаем $\tau = \tau_0$, $\rho = \rho_0$.

З а м е ч а н и е 2. Для конечномерного H оценки (15) были получены в ([4, 7]) методом разделения переменных. Оценки (15) неудобны для проверки, так как они содержат неизвестное точное решение u уравнения (1).

Т е о р е м а 2. *Для задачи* (14) *при* (8) *и при* $\tau = \tau_0$ *верны оценки*

$$\|y_{n+1} - y_n\|_D \leqslant \rho_0^n \|y_1 - y_0\|_D, \quad D = A \text{ или } B,$$
$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \leqslant \rho_0^n \|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}. \tag{16}$$

Если $AB = BA$, *то верна оценка* (7) *с* $q_n = \rho_0{}^n$.

Условием окончания итераций может служить неравенство $\|y_{n+1} - y_n\|_D \leqslant \varepsilon \|y_1 - y_0\|_D$. Число итераций при этом $n > n_0(\varepsilon)$, где $n_0(\varepsilon) = [\ln(1/\varepsilon)/\ln(1/\rho_0)$ ($[\alpha]$ — целая часть числа a). Без ограничения общности можно считать $\| u \|_A = 1$. В этом случае критерием окончания итераций может служить неравенство $\| y_n - u \|_D \leqslant \varepsilon_0$.

Л е м м а 2. *Для схемы* (14) *при* (8) *имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\tau\gamma_2}\|y_{n+1} - y_n\|_D \leqslant \|y_n - u\|_D \leqslant \frac{1}{\tau\gamma_1}\|y_{n+1} - y_n\|_D (D = A, B).$$

Отсюда следует, что условие $\|y_n - u\|_D \leqslant \varepsilon_0$ будет выполнено, если $\|y_{n+1} - y_n\|_D \leqslant \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \tau\gamma_1\varepsilon_0$.

4. Остановимся на вопросе о вычислительной устойчивости схемы (14). Если вычисления ведутся с конечным числом знаков, то из-за ошибок округления, решая задачу (14), мы находим ее приближенное решение $\tilde{y}_n$, которое можно рассматривать как точное решение задачи с возмущенными входными данными

$$\tilde{B}(\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_k)/\tau_0 + \tilde{A}\tilde{y}_k = \tilde{f}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \tilde{y}_0 \in H. \tag{17}$$

Будем предполагать, что $\tilde{A} = \tilde{A}^* > 0$, $\tilde{B} = \tilde{B}^* > 0$, т. е. (17) принадлежит исходному семейству схем (14). Мерой возмущения операторов A и B естественно считать относительное изменение энергии этих операторов

$$|((\tilde{A} - A)x, x)| \leqslant \alpha(\tilde{A}x, x), \quad |((\tilde{B} - B)x, x)| \leqslant \alpha(\tilde{B}x, x) \quad (0 \leqslant \alpha < 1) \tag{18}$$

для всех $x \in H$, что эквивалентно условиям $\|\tilde{A}^{-1/2}(\tilde{A} - A)\tilde{A}^{-1/2}\| \leqslant \alpha$, $\|\tilde{B}^{1/2}(\tilde{B} - B)\tilde{B}^{-1/2}\| \leqslant \alpha$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\tilde{y}_n$ — *решение задачи* (17) *и выполнены условия* (8), (18). *Тогда при* $\alpha \leqslant \xi/(4 + \xi)$, $\xi = \gamma_1/\gamma_2$ *справедливы оценки*

$$\|\tilde{y}_n - u\|_D \leqslant \tilde{\rho}^n \|y_0 - u\|_D + \alpha\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}(1 + \tilde{\rho}^n)\|f\|_{D^{-1}} +$$
$$+ \frac{2(1-\tilde{\rho}^n)}{\gamma_1} \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \|\tilde{f}_k - f\|_{D^{-1}},$$

где $\tilde{\rho} = \rho_0 + \frac{2\alpha}{1-\alpha}(1 + \rho_0) \leqslant \frac{1+\rho_0}{2} < 1$ *при* $\alpha < \frac{\xi}{4+\xi}$, $D = A$ *или* B.

5. От выбора оператора B в схеме (14) зависит не только число действий Q для вычисления одной итерации, но и число итераций $n_0(\varepsilon)$. Поэтому естественно выбирать B в некотором допустимом семействе операторов так, чтобы: 1) отношение $\xi = \gamma_1/\gamma_2$ было максимальным (ρ_0 минимальным), 2) B был экономичным оператором (Q минимально в некотором смысле, например, по порядку относительно ξ при $\xi \to 0$). При построении B обычно исходят из некоторого оператора $R = R^* > 0$ (см. ([1-7])), энерге-

тически эквивалентного с A и B:

$$c_1 R \leqslant \overset{\circ}{A} \leqslant c_2 R, \quad c_2 \geqslant c_1 > 0; \tag{19}$$

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 B \leqslant R \leqslant \overset{\circ}{\gamma}_2 B. \tag{20}$$

Тогда справедливы неравенства (8) с постоянными $\gamma_1 = c_1\overset{\circ}{\gamma}_1$, $\gamma_2 = c_2\overset{\circ}{\gamma}_2$.

Исследуем случай факторизованного оператора (ф.о.)

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad R = R_1 + R_2, \tag{21}$$

где R_1 и R_2 — сопряженные операторы, $R_2 = R_1^*$, так что $B = B^* > 0$, а $\omega > 0$ — параметр. Числа $\overset{\circ}{\gamma}_1$ и $\overset{\circ}{\gamma}_2$ в этом случае зависят от параметра ω, который следует выбрать так, чтобы отношение $\overset{\circ}{\gamma}_1 / \overset{\circ}{\gamma}_2 = f(\omega)$ было максимальным ([8])

Теорема 4. *Пусть* $R_2 = R_1^*$, $R = R_1 + R_2$ *и* $R \geqslant \delta E$, $\|R_2 x\|^2 \leqslant$ $\leqslant {}^1/_4\Delta(Rx, x)$, $\Delta \geqslant \delta > 0$. *Тогда постоянные* $\overset{\circ}{\gamma}_1$ *и* $\overset{\circ}{\gamma}_2$ *в* (20) *находятся по формулам*

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 = \delta/2(1 + \sqrt{\eta}), \quad \overset{\circ}{\gamma}_2 = \delta/4\sqrt{\eta}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_1/\overset{\circ}{\gamma}_2 = 2\sqrt{\eta}/(1+\sqrt{\eta}),$$

$$\eta = \delta/\Delta \text{ при } \omega = 2/\sqrt{\delta\Delta}\ *.$$

Замечание 1. Зная $\overset{\circ}{\gamma}_1$, $\overset{\circ}{\gamma}_2$, находим $\gamma_1 = c_1\overset{\circ}{\gamma}_1$, $\gamma_2 = c_2\overset{\circ}{\gamma}_2$ и $\tau_0 =$ $= 2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$. Для числа итераций $n_0(\varepsilon)$ при $\eta \to 0$ верна оценка $n_0(\varepsilon) =$ $= O\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Замечание 2. Если воспользоваться схемой (2) при $B_k = B$, где B есть ф.о. (21), а τ_{k+1} определяются согласно (12), то $n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\eta}} \ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Вопрос о вычислительной устойчивости такой схемы остается открытым.

Рассмотрим еще один ф.о.

$$B = (E + \omega_1 R_1)(E + \omega_2 R_2), \quad \text{где } R_1R_2 = R_2R_1,\ R_\alpha = R_\alpha^* > 0,$$
$$\alpha = 1, 2,\ R_1 + R_2 = R \tag{22}$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* $\delta_\alpha E \leqslant R_\alpha \leqslant \Delta_\alpha E$; $\Delta_\alpha > 0$; $\alpha = 1, 2$; $\delta_2 > 0$; $\delta_1[1 + \delta_2(1/\Delta_1 + 1/\Delta_2)] + \delta_2 > 0$. *Тогда при значениях параметров* ω_1 *и* ω_2, *равных* $\omega_1 =$ $= \omega_0 / (1 - \omega_0 c_0) > 0$, $\omega_2 = \omega_0 / (1 + \omega_0 c_0) > 0$, $\omega_0 = 1 / \sqrt{\delta_1'\Delta_1'} =$ $= 1 / \sqrt{\delta_2'\Delta_2'}$, $\delta_1' = \delta_1 + c_0$, $\delta_2' = \delta_2 - c_0$, $\Delta_1' = \Delta_1 + c_0$, $\Delta_2' = \Delta_2 - c_0$, $c_0 = (\delta_2\Delta_2 - \delta_1\Delta_1) / (\delta_1 + \delta_2 + \Delta_1 + \Delta_2)$, *постоянные эквивалентности* $R = R_1 + R_2$ *и ф.о.* (22) *равны*

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 = \frac{1-\bar\rho}{\omega_1+\omega_2}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_2 = \frac{1+\bar\rho}{\omega_1+\omega_2}, \quad \frac{\overset{\circ}{\gamma}_1}{\overset{\circ}{\gamma}_2} = \frac{1-\bar\rho}{1+\bar\rho}, \quad \bar\rho = \frac{1-\sqrt{\eta_1'}}{1+\sqrt{\eta_1'}}\,\frac{1-\sqrt{\eta_2'}}{1+\sqrt{\eta_2'}},$$

$$\eta_\alpha' = \frac{\delta_\alpha'}{\Delta_\alpha'}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Схемы с ф.о. вида (22) встречаются при решении разностных эллиптических уравнений методом переменных направлений (см., например, ([8–10])).

Поступило
2 X 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960. [2] А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4, 808 (1968). [3] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 7, № 1, 62 (1967); 7, № 5, 1093 (1967). [4] Е. Г. Дьяконов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 1, 12 (1966); ДАН, 163, № 6, 1314 (1965). [5] С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, «Наука», М., 1966. [6] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. [7] J. E. Gunn, J. Soc. Industr. and Appl. Math., Numer. Anal., Sec. B, 2, № 1, 24 (1965). [8] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 4, 665 (1966). [9] E. L. Wachspress, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 11, № 3, 994 (1963). [10] R. S. Varga, Information Processing, Paris, 1960, p. 85—90.

* При доказательстве теоремы 4 использовано указанное Е. Николаевым неравенство $B \geqslant 2\omega R$.