НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ *

А.А. САМАРСКИЙ

В работах [1]-[3] были найдены достаточные условия устойчивости и получены априорные оценки двухслойных и трехслойных схем с переменными (по t) операторами, заданными на абстрактном вещественном гильбертовом пространстве.

В данной работе рассматриваются двухслойные схемы (2). Показано, что для схем с постоянными операторами A и B необходимые и достаточные условия совпадают. Эти же условия являются достаточными для устойчивости в классе схем с переменными операторами $A(t)$ и $B(t)$. О близости достаточных и необходимых условий для схем с переменными операторами позволяет судить теорема о достаточном условии неустойчивости.

Метод исследования устойчивости, в отличие от [1], [2], основан на сведении схемы общего вида к явной схеме и последующей оценке оператора перехода для явной схемы. Мы ограничиваемся здесь изучением устойчивости по начальным данным. Ссылки на работы по устойчивости разностных схем см. в [3].

1. Пусть $\{H_h\}$ – семейство вещественных гильбертовых пространств, зависящее от параметра h, являющегося вектором некоторого нормированного пространства (например, эвклидова пространства R_N размерности N, ср. [1]-[3], $|h|$ – норма вектора h. Рассмотрим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ сетку $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots, n_0,\ \tau = t_0/n_0\}$.

Пусть далее $y(t) = y_{n\tau}(t)$, $\varphi(t) = \varphi_{n\tau}(t)$ и т.д. – абстрактные функции аргумента $t \in \omega_\tau$ со значениями в H_h; $A(t) = A_{h\tau}(t)$, $B(t) = B_{h\tau}(t)$, $C(t) = C_{h\tau}(t)$ и т.д. – линейные операторы, отображающие H_h на H_h при каждом $t \in \omega_\tau$. Разностное уравнение

*ДАН СССР, 1968, т. 181, №4, с. 808-812.

первого порядка с операторным коэффициентами

$$B_{h\tau}(t)y_{h\tau}(t+\tau) = C_{h\tau}(t)y_{h\tau}(t) + \tau\varphi_{h\tau}(t), \qquad 0 \leqslant t = n\tau < t_0,$$
$$y_{h\tau}(0) = y_{0h\tau} \in H_h, \tag{1}$$

где $\varphi_{h\tau}(t)$ – заданная функция, назовем двухслойной схемой [2]. Для упрощения записи индексы h, τ в дальнейшем будем опускать.

Любая двухслойная схема может быть записана в канонической форме

$$B(t)\frac{y(t+\tau)-y(t)}{\tau} + A(t)y(t) = \varphi(t), \qquad 0 \leqslant t = n\tau < t_0,$$
$$y(0) = y_0 \in H. \tag{2}$$

Пусть (,) и $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ – скалярное произведение и норма в H. Будем писать $A = A^* > 0$, если A – самосопряженный и положительный ($(Ax, x) > 0$ для всех $x \in H$ с $\|x\| \neq 0$) оператор; $A \geqslant B$, если $(Ax, x) \geqslant (Bx, x)$ для всех $x \in H$. Наряду с H будем рассматривать энергетические пространства H_A и H_B, состоящие из тех же элементов, что и H, с нормами $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$ в $H_A (A = A^* > 0)$; $\|y\|_B = \sqrt{(By, y)}$ в $H_B (B = B^* > 0)$.

Мы рассматриваем вещественное гильбертово пространство, чтобы учесть случай несамосопряженных положительных операторов.

2. В этой статье мы изучаем лишь устойчивость по начальным данным (у. по н. д.). Поэтому рассмотрим однородное уравнение (2) при $\varphi = 0$:

$$B(t)\,\frac{y(t+\tau)-y(t)}{\tau} + A(t)y(t) = \varphi(t), \qquad 0 \leqslant t = n\tau < t_0,$$
$$\text{задан } y(0) = y_0 \in H. \tag{3}$$

Будем говорить, что схема (2) у. по н. д., если можно указать такую вещественную постоянную c_0, не зависящую от h и τ, что при достаточно малых $|h| \leqslant h_0$ и $\tau \leqslant \tau_0$ для решения задачи (3) с любыми $y(0) = y_0 \in H$ верна оценка

$$\|y(t)\|_{(1)} \leqslant e^{c_0 h}\|y(0)\|_{(1_0)}, \qquad \text{при всех } t \in \omega_\tau, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_{(1)}\|$ и $\|\cdot\|_{(1_0)}$ – некоторые нормы на множестве H (ср. [1]–[4]).

Схема (3) абсолютно устойчива, если она устойчива при любых $\tau > 0$ и $|h| > 0$. Во всех сформулированных ниже теоремах схема (3) абсолютно устойчива, если достаточные условия выполняются при всех $\tau > 0$ и $|h| > 0$. Будем говорить, что: 1) схема (3) устойчива в H_A, если выполнено (4) и $\|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_{(1_0)} = \|\cdot\|_A$, где A не зависит от t; 2) схема (3) устойчива в $H_{A(t)}$, если $\|y(t+\tau)\|_{A(t)} \leqslant e^{c_0(t+\tau)}\|y(0)\|_{A(0)}$. Аналогично понимается устойчивость в H_B и $H_{B(t)}$.

3. Рассмотрим явную схему

$$x(t+\tau) = Sx(t),\ S = E - \tau C,\ 0 \leqslant t = n\tau < t_0,\ x_0 = x_0 \in H \qquad (5)$$

с оператором перехода S; здесь E – единичный оператор, x_0 – любой вектор. Если один из операторов A или B самосопряжен, положителен и постоянен, то (3) сводится к явной схеме с операторами

$$C_1 = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \qquad \text{или} \qquad C_2 = B^{1/2}AB^{-1/2}.$$

Л е м м а 1. *Пусть $A = A^* > 0$ не зависит от t и существует $B^{-1}(t)$. Тогда (3) и (5) эквивалентны при $C = C_1$, $x = A^{1/2}y$. Если $B = B^* > 0$ – постоянный оператор, то (3) и (5) эквивалентны при $C = C_2$, $x(t) = B^{1/2}y(t)$ или при $C = C_2$, $x(t) = B^{-1/2}Ay(t)$ (если и A постоянен).*

В самом деле, пусть $A = A^* > 0$. Тогда существует $A^{1/2} = (A^{1/2})^* > 0$ (см. [5]). Применяя к (3) оператор $A^{1/2}B^{-1}$, получим при $x(t) = A^{1/2}y(t)$, если A постоянен, схему (5) с $C = C_1$, так что $\|x(t)\| = \|y(t)\|_A$ и т.д.

Лемма 1 позволяет свести исследование устойчивости схемы (3) в H_A или H_B к исследованию устойчивости явной схемы (5) в H

$$\|x(t)\| \leqslant e^{c_0 t}\|x(0)\|. \qquad (6)$$

4. Нам понадобятся определение нормы оператора S в H. $\|S\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Sx\|$ и эквивалентное при $S = S^*$ определение [5]

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} |(Sx, x)|, \qquad (7)$$

а также ряд лемм, справедливых и для операторов, зависящих от t (в предположении, что все условия выполнены для каждого $t = n\tau \in [0, t_0)$).

Л е м м а 2. *Если $C = C^*$, то условие*

$$\frac{1-\rho}{\tau} E \leqslant C \leqslant \frac{1+\rho}{\tau} E \text{ или } \frac{1-\rho}{\tau} \|x\|^2 \leqslant (Cx, x) \leqslant \frac{1+\rho}{\tau} \|x\|^2, \quad (8)$$

где $\rho > 0$, необходимо и достаточно для оценки

$$\|S\| \leqslant \rho, \qquad S = E - \tau C \quad (9)$$

(условия (8) и (9) эквивалентны).

Пусть выполнено (8), т.е. $-\rho E \leqslant \tau C - E \leqslant \rho E$. Отсюда и из (7) следует $\|S\| = \|-S\| \leqslant \rho$. Обратный ход рассуждений очевиден.

Л е м м а 3. *Если $C = C^* > 0$, то эквивалентны неравенства*

$$\gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E \quad \text{ и } \quad \frac{1}{\gamma_2} E \leqslant C^{-1} \leqslant \frac{1}{\gamma_1} E.$$

Л е м м а 4. *Если $C = C^* > 0$, то условия (9) и*

$$C^{-1} \geqslant \frac{\tau}{1+\rho} E, \qquad \rho > 0 \quad (10)$$

эквивалентны при $\rho \geqslant 1$. Пусть $C > 0$ – несамосопряженный оператор. Тогда (10) достаточно при $\rho \geqslant 1$, необходимо при $\rho \leqslant 1$, необходимо и достаточно при $\rho = 1$ для оценки (9).

Лемма 4 при $C = C^*$ следует из лемм 3 и 2. Пусть $C = C^*$ и выполнено (10). Так как

$$(1+\rho)(C^{-1}x, x) - \tau\|x\|^2 = (1+\rho)(Cy, y) - \tau\|Cy\|^2,$$

где $y = C^{-1}x$, то из (10) следует

$$\tau\|Cy\|^2 \leqslant (1+\rho)(Cy, y), \qquad \tau(Cy, y) \leqslant (1+\rho)\|y\|^2.$$

Поэтому

$$\|Sy\|^2 = \|(E - \tau C)y\|^2 = \|y\|^2 - 2\tau(Cy, y) + \tau^2\|Cy\|^2 \leqslant \|y\|^2 +$$

$$+ \tau(\rho - 1)(Cy, y) \leqslant \rho^2\|y\|^2$$

при $\rho \geqslant 1$, т.е. $\|S\| \leqslant \rho$. Если $\rho = 1$, то из $\|Sy\|^2 \leqslant \|y\|^2$ сразу следует, что $0,5\tau\|Cy\|^2 \leqslant (Cy, y)$ или $C^{-1} \geqslant 0,5\tau E$.

Л е м м а 5. *Неравенство*

$$C^{-1} \geqslant \gamma E, \qquad \gamma > 0,$$

эквивалентно одному из неравенств:

1) $B \geqslant \gamma A$ *при* $A = A^* > 0,\ B > 0,\ C = C_1 = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ *или при* $B = B^* > 0,\ A = A^* > 0,\ C = C_2 = B^{-1/2}AB^{-1/2}$;

2) $A^{-1} \geqslant \gamma B^{-1}$ *при* $B = B^* > 0,\ A > 0,\ C = C_2$.

Л е м м а 6. *Если*

$$C = C_1, \quad B = B^* > 0, \quad A = A^* > 0$$

или

$$C = C_2, \quad B = B^* > 0, \quad A > 0,$$

то неравенства

$$\gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E \quad и \quad \gamma_1 B \leqslant A \leqslant \gamma_2 B$$

при $\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0$ *эквивалентны.*

5. Для случая постоянных A и B найдем совпадающие необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (3) в H_A и H_B. Перепишем (5) в виде

$$x_{n+1} = Sx_n, \text{ где } S = E - \tau C,\ x_n = x(n\tau),\ 0 \leqslant n < n_0, \quad x_0 \in H \text{ задано.} \tag{11}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* S *– постоянный оператор. Тогда условие*

$$\|S\| \leqslant \rho, \qquad \rho = e^{c_0\tau}, \tag{12}$$

где c_0 *– любая постоянная, не зависящая от* τ *и* $|h|$, *необходимо и достаточно для устойчивости схемы* (11) *в* H.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть схема (11) устойчива, т.е. выполнено (6) при всех $t = n\tau,\ n = 1, 2, \dots, n_0$. Полагая в (6) $n = 1$, имеем

$$\|x_1\| = \|Sx_0\| \leqslant \|\rho\|x_0\|, \quad \text{т.е.} \quad \|S\| \leqslant \rho.$$

Достаточность. Пусть выполнено (12). Тогда

$$\|x_n\| = \|S^n x_0\| \leqslant \|S\|^n \|x_0\| \leqslant \rho^n \|x_0\| = e^{c_0 t_n} \|x_0\|,$$

т.е. справедлива оценка (6).

Из теоремы 1 и лемм 1-6 следуют теоремы 2-5 для постоянных A, B.

Теорема 2. *Пусть $B = B^* > 0$ и $A = A^*$ не зависят от t. Тогда условия*

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leqslant A \leqslant \frac{1+\rho}{\tau} B, \qquad \rho = e^{c_0 \tau} \tag{13}$$

с любой постоянной c_0 необходимы и достаточны для устойчивости схемы (3) в H_B.

Теорема 3. *Пусть $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$ не зависят от t. Тогда условия*

$$A \leqslant \frac{1+\rho}{\tau} B \quad \text{или} \quad B \geqslant \frac{\tau}{1+\rho} A, \qquad \rho = e^{c_0 \tau}, \tag{14}$$

необходимо и достаточно для устойчивости в H_A и H_B с $c_0 \geqslant 0$ $(\rho \geqslant 1)$, а условия (13) необходимы и достаточны для устойчивости (3) в H_A(и H_B) с $c_0 < 0$ $(\rho < 1)$.

Теорема 4. *Пусть $A = A^* > 0$, $B > 0$, A и B не зависят от t. Тогда условие*

$$A \leqslant \frac{2}{\tau} B \quad \text{или} \quad B \geqslant \frac{\tau}{2} A \tag{15}$$

необходимо и достаточно для устойчивости схемы (3) в H_A с постоянной $c_0 = 0$ $(\rho = 1)$.

Теорема 5. *Пусть $B = B^* > 0$ и $A > 0$ не зависят от t. Тогда условие*

$$A^{-1} \geqslant 0,5\tau B^{-1} \tag{16}$$

необходимо и достаточно для устойчивости схемы (3) в H_B с $c_0 = 0$.

Заметим, что: 1) теоремы 4 и 5 доказаны в предположении несамосопряженности операторов B и A соответственно; 2) условие (16), в отличие от условий (13)-(15), неудобно для проверки.

6. Условия (13)-(15) достаточны для устойчивости схем (3) с операторами A и B, зависящими от t, если оператор $A(t) > 0$ (или $B(t) > 0$) удовлетворяет условию Липшица по t с постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от h и τ:

$$\|((A(t) - A(t-\tau))y, y)| \leqslant \tau c_1 (A(t-\tau)y, y) \qquad (17)$$
$$\text{для любых} \quad 0 < t = n\tau < t_0, \qquad y \in H.$$

При постоянных A и B схема (3) сводится к явной схеме (5). Если $A = A(t)$ и $B = B(t)$, то, вводя

$$C = C_1(t), \quad x(t+\tau) = A^{1/2}(t)y(t+\tau), \quad \overline{x}(\tau) = A^{1/2}(t)y(t) \quad \text{при} \quad A = A^* > 0$$

или

$$C = C_2(t), \quad x(t+\tau) = B^{1/2}(t)y(t+\tau), \quad \overline{x}(\tau) = B^{1/2}(t)y(t) \quad \text{при} \quad B = B^* > 0,$$

преобразуем (3) к виду

$$x(t+\tau) = S(t)\overline{x}(t), \quad S(t) = E - \tau C(t). \qquad (18)$$

Л е м м а 7. *Пусть* $A(t) = A^*(t) > 0$, *или* ($B(t) = B^*(t) > 0$) *и выполнено* (17) (*или аналогичное условие для* $B(t)$). *Тогда*

$$\|\overline{x}(t)\| \leqslant (1 + 0,5c_1\tau)\|x(t)\| \qquad \text{при любых } \tau > 0, \quad t > 0,$$
$$\|x(t)\| \geqslant (1 - c_1\tau)\|x(t)\| \qquad \text{при } \tau_1 c_1 < 1, \quad t > 0,$$

где $x(t) = A^{1/2}(t-\tau)y(t)$(*или* $x(t) = B^{1/2}(t-\tau)y(t)$).

Т е о р е м а 6. *Пусть* $A(t) = A^*(t) > 0$ *и* $A(t)$ *удовлетворяет* (17), *а* $B(t) > 0$ *– несамосопряженный оператор. Тогда условие* (14) *с* $c_0 \geqslant 0$ *достаточно для устойчивости схемы* (3) *в* $H_{A(t)}$ *с постоянной* $\bar{c}_0 = c_0 + 0,5c_1$. *Если* $B(t) = B^*(t) > 0$ *и выполнено* (17) *для* $B(t)$, *а* $A(t) = A^*(t)$, *то условие* (13) *с любым* c_0 *достаточно для устойчивости* (3) *в* $H_{B(t)}$.

7. Т е о р е м а 7. *Если* $A(t) = A^*(t) > 0$, $B(t) = B^*(t) > 0$, *то условие*

$$A \geqslant \frac{1+\rho}{\tau} B \quad \text{для всех} \quad t = n\tau \in [0, t_0)$$
$$\text{при} \quad \rho = e^{c_0 \tau^\gamma}, \ c_0 > 0, \ 0 \leqslant \gamma < M \tag{19}$$

где γ *– любая неотрицательная постоянная, меньшая единицы и не зависящая от* h *и* τ, *достаточно для неустойчивости схемы* (3) *в* $H_{A(t)}$, *если* $A(t)$ *удовлетворяет* (17), *и для неустойчивости в* $H_{B(t)}$, *если* $B(t)$ *удовлетворяет условию* (17).

8. В [1]-[3] мы пользовались другим определением у. по н. д.:

$$\|y(t)\|_t \leqslant M_1 \|y(0)\|_{1_0} \quad \text{при всех} \quad 0 < t = n\tau \leqslant t_0. \tag{20}$$

Нетрудно заметить, что из (4) следует (20), так как при $c_0 > 0$ можно положить $M_1 = e^{c_0 t_0}$, а при $c_0 \leqslant 0$ полагаем $M_1 = 1$.

Т е о р е м а 8. *Пусть* $S = S^*$ *– постоянный оператор. Тогда условие* (12) *с* $c_0 \geqslant 0$ *необходимо и достаточно для устойчивости схемы* (5) *с* $M_1 \geqslant 1$ *в смысле определения* (20). *Если* S *– несамосопряженный оператор, то условие* $\|S\| \leqslant 1$ *необходимо и достаточно для оценки* $\|x(t)\| \leqslant \|x(0)\|$.

Изложенный выше метод позволяет исследовать устойчивость схемы (2) по правой части, а также устойчивость относительно возмущения операторов схемы (вычислительную устойчивость схемы).

Цитированная литература

1. А.А. Самарский. ДАН, **165**, № 5, 1007 (1965).

2. А.А. Самарский. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **7**, № 1, 62 (1967).

3. А.А. Самарский, там же, 7, № 5, 1093 (1967).

4. В.С. Рябенький, А.Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956.

5. Л.В. Канторович, Г.А. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.