1

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР



А. А. САМАРСКИЙ.

# Об устойчивости операторно-разностных схем.

Препринт № 1 за 1967 год.

Москва

# Об устойчивости операторно-разностных схем

А.А.Самарский

(Москва)

I. Изучаются операторно-разностные схемы с операторами, действующими в вещественном унитарном пространстве (любого числа измерений). Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости для двухслойных схем и достаточные условия для трехслойных схем. Эти условия, имеющие вид линейных операторных неравенств, выделяют классы устойчивых схем, которым, в частности, принадлежат схемы для эволюционных уравнений математической физики. Запись схем в канонической форме позволяет указать операторы $R$ , ответственные за устойчивость. Достаточные условия устойчивости накладывают слабые ограничения на произвол в выборе операторов $R$ (регуляризаторов). Меняя $R$ и оставаясь при этом в классе устойчивых схем, можно получать схемы, обладающие заданными свойствами (по точности и объему вычислительной работы). Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решения операторно-разностной задачи Коши. При этом мы стремились оценить решение задачи в возможно более сильной норме через правую часть в возможно более слабой норме.

2. Пусть $\{H_N\}$ ( $N$ =I,2,...; $N \to \infty$ ) последовательность линейных нормированных пространств

(являющихся аналогом пространств сеточных функций, определенных на сетках $\omega_h$ в эвклидовом пространстве $x = (x_1, \dots, x_p)$ ). Пусть $y_{N,\tau}(t)$ – абстрактная функция дискретного аргумента $t \in \bar{\omega}_\tau$ со значениями в $H_N$ , где $\bar{\omega}_\tau = \{ t = j\tau, \; j = 0, 1, \dots, j_0 \}$ – сетка с шагом $\tau$ на отрезке $0 \le t \le t_0$ , $A(t) = A_{N,\tau}(t)$, $B(t) = B_{N,\tau}(t)$, $R = R_{N,\tau}(t)$ и т.д. – линейные (аддитивные и однородные) операторы, отображающие при каждом $t \in \bar{\omega}_h$ пространство $H_N$ на $H_N$ . Под двухслойной (трехслойной) операторно-разностной схемой понимается операторное уравнение, связывающее для каждого $t \in \bar{\omega}_h$ две точки $y_{N,\tau}(t+\tau)$ и $y_{N,\tau}(t)$ (три точки $y_{N,\tau}(t+\tau)$ , $y_{N,\tau}(t)$ и $y_{N,\tau}(t-\tau)$ ) пространства $H_N$ .

Отправным пунктом исследования является каноническая форма записи схем. Любую двухслойную схему можно записать в канонической форме (индексы $N, \tau$ опускаем)

$$B(t)\frac{y(t+\tau)-y(t)}{\tau} + A(t)y(t) = \varphi(t), \qquad 0 \le t = j\tau \le t_0, \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

а трехслойную схему – в канонической форме

$$B(t)\frac{y(t+\tau)-y(t-\tau)}{2\tau} + R(t)[y(t+\tau) - 2y(t) + y(t-\tau)] + A(t)y(t) = \varphi(t), \quad 0 \le t = j\tau \le t_0, \quad y(0) = y_0, \; y(\tau) = y_1 ; \tag{2}$$

здесь $y(t)$ – искомая функция, $\varphi(t) = \varphi_{N,\tau}(t)$ – заданная абстрактная функция со значениями в $H_N$ , $y_0 = y_{0,N,\tau}$

и $y_1 = y_{1N,\tau}$ – заданные точки (векторы) в $H_N$.

3. Устойчивость схем (I) и (2) определяется как свойство равностепенной по $N,\tau$ непрерывности $\{y_{N,\tau}\}$ последовательности решений задач (I) и (2) относительно исходных данных $\{\varphi_{N,\tau}(t)\}$, $\{y_{N,\tau}(0)\}$, $\{y_{N,\tau}(\tau)\}$. Вводя на линейном множестве $H_N$ различные нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и т.д., получим различные нормированные пространства, состоящие из элементов $H_N$. Покиота $H_N$ не предполагается. Будем говорить, что схема (I) (схема (2)) устойчива, если можно указать такие числа $\tau_0 > 0$ и $N_0 > 0$, что при любых $\varphi(t) \in H_N$ и $y(0) \in H_N$ ($y(\tau) \in H_N$) и при $\tau \le \tau_0$, $N \ge N_0$ для решения задачи (I) (или (2)) имеет место одна из оценок:

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \le M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \le t' \le t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \tag{3}$$

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \le M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \le t' \le t} \left[\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_{\bar t}(t')\|_{(2)}\right], \tag{4}$$

где $M_1$ и $M_2$ – положительные числа, не зависящие от $\tau$ и $N$, $\varphi_{\bar t} = \frac{\varphi(t') - \varphi(t'-\tau)}{\tau}$. Для трехслойной схемы (2) оценки (3) и (4) принимают вид:

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \le M_1 \|y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \le t' \le t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \tag{5}$$

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \le M_1 \|y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \le t' \le t} \left[\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_{\bar t}(t')\|_{(2)}\right], \tag{6}$$

причем $\|y(t+\tau)\|^2_{(1)} = \|y(t+\tau) + y(t)\|^2_{(1_1)} + \|y(t+\tau) - y(t)\|^2_{(1_2)}$,

где $\|\cdot\|_{(1_1)}$ и $\|\cdot\|_{(1_2)}$ - некоторые нормы на $H_N$.
Если схема устойчива при любых $\tau>0, N>0$, то она называется абсолютно устойчивой.

4. В дальнейшем будем предполагать, что $H_N$ вещественное унитарное пространство со скалярным произведением $(\ ,\ )_N$ и нормой $\|y\|_N=\sqrt{(y,y)_N}$ (индекс $N$ всюду опускаем). Ставится задача: выявить запас информации относительно операторов $B$, $R$ и $A$, достаточный для устойчивости схем (I) и (2) и найти априорные оценки вида (3)-(6). Выделим исходные семейства схем. Схема (I) принадлежит исходному семейству двуслойных схем ИС-2, если:

$\alpha$) $A(t)$ самосопряжен и положителен ($A^*=A$, $A>0$, т.е. ($A(x,x)>0$ для всех $x\in H_N$, $x\neq 0$)

$\beta$) $B(t)>0$

$\gamma$) $A(t)$ липшиц-непрерывен по $t$, то есть

$$\left|(A(t+\tau)x,x)-(A(t)x,x)\right|\leq C_0\,(A(t)x,x),$$

где $C_0=const>0$ не зависит от $\tau$ и $N$.
Схема (2) принадлежит исходному семейству ИС-3, если $A(t)$ и $R(t)$ удовлетворяют условиям $\alpha$) и $\gamma$).
Устойчивые схемы будем искать в ИС-2 и ИС-3. Нормы $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$, вообще говоря, зависят от $t$, например

$$\|y\|_{(1)}=\|y\|_{(1,t)}=\sqrt{(A(t)y,\,y)}\quad \text{и т.д.}$$

Для упрощения изложения формулируем результаты в предположении, что операторы $A, B, R$ – постоянные, т.е. не зависят от $t$. Условимся писать $B \geq A$, если $(Bx, x) \geq (Ax, x)$ для всех $x \in H_N$.

5. Формулируем теоремы об устойчивости для двуслойных схем.

Теорема I. Схема (I) из ИС-2 устойчива при

$$B \geq 0.5\tau(1 - c_1\tau)A, \quad c_1 > 0.$$

Для решения задачи (I) при $\tau \leq \tau_0$, $\tau_0 < \frac{1}{4c_1}$ верна оценка (4), где

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_a = \sqrt{(Ay, y)}, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{a^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}.$$

Если $B^* = B$, то имеет место оценка (3) с

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_b, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{b^{-1}}.$$

Если $B \geq 0.5\tau A$, то схема (I) абсолютно устойчива.

Теорема 2. Условие

$$B > 0.5\tau(1 - c_1\tau^{\gamma})A > 0, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

где $\gamma$ не зависит от $\tau$ и $N$, необходимо для устойчивости исходного семейства ИС-2 схем (I).

Теорема 3. Если выполнено условие

$$B \geq \varepsilon E + 0.5\tau A, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

то для (I) верна оценка (I) с $\|y\|_{(1)} = \|y\|_a$, $\|\varphi\|_2 = \|\varphi\|$ при любых $\tau > 0$. (здесь $E$ – единичный оператор).

Схему (I) удобно записать в другом виде, положив $B = E + \tau R$

Тогда достаточное условие $B \geq 0.5\tau A$ устойчивости для (I) примет вид

$$R \geq \sigma_0 A \quad , \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|} \tag{7}$$

Общие теоремы I и 3 позволяют получить априорные оценки для схемы с весами

$$y_t + A(t)\left[\sigma\hat{y} + (1-\sigma)y\right] = \varphi , \qquad y(0) = y_0 , \tag{8}$$

где $\hat{y} = y(t+\tau)$, $y = y(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $y_t = \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y)$ , $\sigma$ – вещественный параметр. Приводя (8) к каноническому виду (I), находим $B = E + \sigma\tau A$, $R = \sigma A$ . Достаточное условие (7) имеет вид $\sigma \geq \sigma_0$ . Укажем два результата для схемы (8): I) если $A(t) > 0$ несамосопряженный оператор и $\|Ax\|^2 < \Delta (Ax, x)$ , $\Delta > 0$ , то (8) абсолютно устойчива при $\sigma \geq 0.5 - \frac{1}{\tau\Delta}$ и для (8) верна оценка (4), где $\|y\|_{(1)} = \|y\|$, $\|\varphi\|_{(2)} = \|A^{-1}\varphi\|$, $\|\varphi_{\bar{t}}\|_{(2)} = \|(A^{-1}\varphi)_{\bar{t}}\|$ ; 2) если $A^*(t) = A(t) > 0$ и $\sigma > \sigma_\varepsilon$ , $\sigma_\varepsilon = 0.5 - (1/\tau\|A\|)$ , то для (8) при любых $\tau > 0$ верна оценка (3) с $\|y\|_{(1)} = \|y\|$, $\|\varphi\|_{(2)} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}$ .

6. Достаточные условия устойчивости трехслойных схем.

<u>Теорема 4.</u> Если выполнены условия

$$B \geq 0 , \qquad R > \frac{1}{4} A ,$$

то схема (2) из ИС-3 абсолютно устойчива и для решения задачи (2) верна оценка (6), где

$$\begin{aligned} &\|y(t+\tau)\|_{(1)}^2 = \|\hat{y}\|_{(1)}^2 = \|\hat{y} + y\|_a^2 + \tau^2\left(\left(R - \frac{A}{4}\right)y_t , y_t\right) , \\ &\|y\|_a^2 = (Ay, y) , \quad \|\varphi\|_{(2)}^2 = (A^{-1}\varphi, \varphi) . \end{aligned} \tag{9}$$

<u>Теорема 5</u>. Если выполнены условия

$$B \geq \varepsilon E \quad (\varepsilon > 0 \text{ -любое}) \text{ и } \quad R \geq \frac{1}{4}A,$$

то для (2) верна оценка (5), где $\|y(t+\tau)\|^2_{(1)}$ имеет вид (9), а $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$.

Рассмотрим в качестве примера схему с весами

$$\frac{\hat{y}-\check{y}}{2\tau} + A\left[\sigma_1 \hat{y} + (1-\sigma_1-\sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}\right] = \varphi, \quad \left(\check{y} = y(t-\tau)\right).$$

Записывая ее в виде (2), находим $B = E + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A$, $R = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)A$. Для устойчивости (10) достаточно, чтобы $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 0.5$. Теоремы 4 и 5 позволяют получить ряд априорных оценок для (10). Так, например, если $A(t) > 0$ несамосопряженный оператор, то для (10) верна оценка (3) (при любых $\tau > 0$) с $\|\hat{y}\|^2_{(1)} = \frac{1}{4}\|\hat{y}+y\|^2 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})\|\hat{y}-y\|^2$, $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$, если выполнены условия $\sigma_1 > \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 0.5$.

При изучении устойчивости для конкретных разностных схем, аппроксимирующих уравнения математической физики, необходимо привести рассматриваемую схему к каноническому виду (1) или (2), ввести пространство сеточных функций $H_N$ со скалярным произведением, проверить принадлежность схемы к ИС-2 или ИС-8, а также выполнение достаточных условия устойчивости (например, в виде $R \geq \sigma_0 A$ для (1), $R \geq \frac{1}{4}A$ для (2) ) и, наконец, воспользоваться одной из теорем 1, 2, 4 или 5.

7. В заключение остановимся на вопросе об устойчивости аддитивных схем. Под аддитивной схемой понимается система операторных уравнений

$$\sum_{\beta=1}^{m} C_{\alpha\beta}(t) y_\beta(t) = \mathcal{D}_\alpha(t) y(t) + \tau \varphi_\alpha(t), \quad (\alpha=1,2,\dots,m), \tag{11}$$
$$0 \leq t = j\tau < t_0, \quad y(0) = y_0 \in H_N,$$

осуществляющих переход со "слоя" $t=j\tau$ на слой $t=(j+1)\tau$, так что $y_m(t) = y(t+\tau)$, а $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ – промежуточные значения. Здесь $C_{\alpha\beta}$, $\mathcal{D}_\alpha$ – линейные операторы из $H_N$ в $H_N$. Погрешность аппроксимации $\psi$ аддитивной схемы определяется как сумма погрешностей аппроксимации $\psi_\alpha$ для промежуточных уравнений (II) номера $\alpha = 1,2,\dots,m$ $(\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_m)$, В связи с таким определением аппроксимации аддитивной схемы необходимы априорные оценки, ориентированные на использование свойства суммарной аппроксимации. Приведем одну теорему для регулярной аддитивной схемы вида

$$B \frac{y_\alpha(t) - y_{\alpha-1}(t)}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}(t) y_\beta(t) = \varphi_\alpha(t),$$
$$\alpha = 1,2,\dots,m, \quad y(0) = y_0 .$$

Будем предполагать, что $H_N$ вещественное унитарное пространство, $B$ – постоянный оператор.

Теорема 6. Пусть выполнены условия: I) $B^* = B > 0$, 2) матрица – оператор $A = (A_{\alpha\beta})$ неотрицательна, то есть $\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} (A_{\alpha\beta}\xi_\beta, \xi_\alpha) \geq 0$ для любых $\xi_\alpha \in H_N$. Тогда схема (II) абсолютно устойчива и для нее верна априорная оценка

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \Big[\|\varphi(t')\|_{(2)} + \sqrt{\tau} \sum_{\alpha=1}^{m} \|\psi_\alpha\|_{(2)}\Big]. \tag{12}$$

где $\|y\|_{(1)}=\sqrt{(By,y)}$ , $\|\psi\|_{(2)}=\sqrt{(B^{-1}\psi,\psi)}$ , $\psi=\sum_{\alpha=1}^{m}\psi_\alpha$ .

Из (I2) и суммарной аппроксимации (например, вида $\psi = \psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_m = O(\tau^k+h_N^k)$ ) следует сходимость аддитивной схемы.

Дополнительные сведения и ссылки, относящиеся к рассматриваемому кругу вопрооов, можно найти в [2] - [4].

## ЛИТЕРАТУРА


I В.С.Рябенький, А.Ф.Филиппов. Об устойчивости разностных уравнения, М.Гостехиздат, 1956.

2 А.А.Самарский. К теории разностных схем. Докл.АН СССР, 1965, 165, № 5, 1007-1011.

3 А.А.Самарский. Некоторые вопросы теории разностных схем. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1966, 6, № 4, 665-686.

4 А.А.Самарский. О регуляризации разностных схем. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1967, 7, № I, 62-93.



Подписано в печать I0.7.I967.
Заказ 353 , тираж I50 экз
Отпечатано на ротапринте ИПМ АН СССР.