ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 3 Январь 1963 Февраль № 1

ОБ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

1. В [1], [2] для задачи

$$L^{(p,q,f)}u = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u_1, \quad u'(1) = u_2,$$

$$0 < c_1' \leqslant p(x) \leqslant c_1. \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant c_2, \quad |f(x)| \leqslant c_3, \tag{1}$$

была построена однородная трехточечная разностная схема, дающая точное решение задачи (1) на произвольной неравномерной сетке $\omega_N = \{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N = 1\}$ в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ $(p, q, f \in Q^{(0)})$. Там же рассматривались усеченные схемы m-го ранга, которые обеспечивают точность $O(\|h\|_0^{2m+2})$, где $\|h\|_0 = \max\limits_{\omega_N} h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$ при дополнительных условиях

$$0 < M_1 \leqslant h_{i+1}/h_i \leqslant M_2, \quad \|h\|_0 \leqslant h_0, \tag{2}$$

где M_1, M_2, h_0 — положительные постоянные, не зависящие от выбора сетки.

Данная заметка является развитием статьи [1]. Показано, что основные оценки работы [1] сохраняют силу без дополнительных условий (2). В случае схемы нулевого ранга характеристикой точности схемы является средний квадратичный шаг сетки

$$\|h\|_2 = (1, h^2]^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i^2 h_i\right)^{1/2}.$$

Показано, что схема нулевого ранга всегда имеет точность $O(\|h\|_2^2)$ в классе $p, q, f \in Q^{(0)}$. В [3] был исследован вопрос о точности стандартных схем на неравномерных сетках. Выбирая усеченную схему нулевого ранга в качестве эталонной схемы и пользуясь теоремой 3 о сравнении решений разностных краевых задач, удается усилить результаты работы [3]. При этом мы не пользуемся проведенным в [3] детальным изучением структуры погрешности аппроксимации.

2. Итак, пусть $\omega_N = \{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N = 1\}$—произвольное разбиение отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ на N частей, $h_i = x_i - x_{i-1}$ — шаг сетки,

y_i — сеточная функция, заданная на ω_N. Введем обозначения (см. [3])

$$y = y(x) = y_i, \quad y^{(\pm 1)} = y_{i\pm 1}, \quad h = h_i, \quad h_{+1} = h_{i+1}, \quad \hbar = 0.5\,(h + h_{+1}).$$

$$y_{\bar{x}} = (y - y^{(-1)})/h, \quad y_x = (y^{(+1)} - y)/h_{+1}, \quad y_{\hat{x}} = (y^{(+1)} - y)/\hbar,$$

$$(y, v)^* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i \hbar_i, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h_i, \quad \|y\|_0 = \max_{0\leqslant i\leqslant N} |y_i|,$$

$$\|y\|_1 = (1, |y|], \quad \|y\|_1^* = (1, |y|)^*, \quad \|y\|_2 = \sqrt{(1, y^2]}.$$

Отметим, что шаг h_i разностной сетки является произвольной сеточной функцией, удовлетворяющей лишь естественному условию нормировки

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 1.$$

3. Точная схема является консервативной схемой вида:

$$\overset{T}{L}{}_h^{(p,\,q,\,f)} y = (a_T y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - d_T y + \varphi_T = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2. \tag{3}$$

Ее коэффициенты a_T, d_T, φ_T суть функционалы коэффициентов дифференциального уравнения (1). При построении схемы (3) в [1] проводится преобразование сдвига $x = x_i + (s - \Delta_i)\hbar_i = \bar{x}_i + s\hbar_i$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$, где

$$\Delta_i = -(h_{i+1} - h_i)/2\hbar_i, \quad \bar{x}_i = x_i - \Delta_i \hbar_i,$$

так что $s = -1$ при $x = x_{i-1}$, $s = \Delta$ при $x = x_i$, $s = 1$ при $x = x_{i+1}$.

Функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ рассматриваются в местной системе координат с началом в точке x_i как функции s:

$$\bar{p}(s) = p(\bar{x} + s\hbar), \quad \bar{q}(s) = q(\bar{x} + s\hbar), \quad \bar{f}(s) = f(\bar{x} + s\hbar), \quad x \in \omega_N.$$

Коэффициены a_T, d_T, φ_T определяются по формулам (19)—(21) работы [1]:

$$a_T = \frac{\hbar}{h} v_1(\Delta, \hbar), \quad a_T^{(+1)} = \frac{\hbar}{h_{+1}} v_2(\Delta, \hbar), \tag{4}$$

$$d_T = \frac{\hbar}{h a_T} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s)\, v_1(s, \hbar)\, ds + \frac{\hbar}{h_{+1} a_T^{(+1)}} \int_{\Delta}^{1} \bar{q}(s)\, v_2(s, \hbar)\, ds, \tag{5}$$

$$\varphi_T = \left(\hbar d + \frac{1}{h a_T} + \frac{1}{h_{+1} a_T^{(+1)}}\right) \hbar v_3(\Delta, \hbar). \tag{6}$$

4. Здесь $v_j(s, \hbar)$ $j = 1, 2, 3)$ — так называемые шаблонные функции, для отыскания которых надо решить задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{dv_j}{ds}\right) - \hbar^2 \bar{q}(s)\, v_j = 0, \quad -1 < s < 1, \quad j = 1, 2, \\ &v_1(-1, \hbar) = 0, \quad \frac{1}{\bar{p}(-1)} \frac{dv_1}{ds}(-1, \hbar) = 1; \\ &v_2(1, \hbar) = 0, \quad \frac{1}{\bar{p}(1)} \frac{dv_2}{ds}(1, \hbar) = -1; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{dv_3}{ds}\right) - \hbar^2 \bar{q}(s)\, v_3 = -\bar{f}(s), \quad -1 < s < 1, \quad v_3(\pm 1, h) = 0. \tag{8}$$

Для функций $v_1(s, \hbar)$ и $v_2(s, \hbar)$ в [1] были установлены тождества $v_1(1, \hbar) = v_2(-1, \hbar)$,

$$v_1(1, \hbar) - v_1(\Delta, \hbar) - v_2(\Delta, \hbar) = \hbar^2 \Big\{ v_2(\Delta, \hbar) \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1(s, \hbar)\, ds + \tag{9}$$

$$+ v_1(\Delta, \hbar) \int_{\Delta}^{1} \bar{q}(s) v_2(s, \hbar)\, ds \Big\}.$$

Учитывая (4), перепишем формулу (5) в виде

$$d = \frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1(s, \hbar)\, ds + \frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)} \int_{\Delta}^{1} \bar{q}(s) v_2(s, \hbar)\, ds. \tag{10}$$

Отсюда видно, что тождество (9) можно записать следующим образом:

$$v_1(1, \hbar) = v_1(\Delta, \hbar) + v_2(\Delta, \hbar) + \hbar^2 d v_1(\Delta, \hbar) v_2(\Delta, \hbar). \tag{11}$$

5. Покажем теперь, что φ_T вычисляется по формуле

$$\varphi_T = \frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} \int_{-1} \bar{f}(s) v_1(s; \hbar)\, ds + \frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)} \int_{\Delta}^{1} \bar{f}(s) v_2(s; \hbar)\, ds, \tag{12}$$

или

$$\varphi_T = F[p(\bar{x} + s\hbar), q(\bar{x} + s\hbar); f(\bar{x} + s\hbar)].$$

Отсюда и из (11) будет следовать

$$d_T = F[p(\bar{x} + s\hbar), q(\bar{x} + s\hbar); q(\bar{x} + s\hbar)].$$

Вводя функцию Грина задачи (8)

$$G(s, t) = \begin{cases} v_1(s; \hbar) v_2(t; \hbar) / v_1(1; \hbar), & s \leqslant t, \\ v_2(s; \hbar) v_1(t; \hbar) / v_1(1; \hbar), & s \geqslant t, \end{cases} \tag{13}$$

найдем

$$v_3(\Delta, \hbar) = \frac{v_2(\Delta, \hbar)}{v_1(1, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} v_1(s; \hbar) \bar{f}(s)\, ds + \frac{v_1(\Delta; \hbar)}{v_1(1; \hbar)} \int_{\Delta}^{1} v_2(s; \hbar) \bar{f}(s)\, ds. \tag{14}$$

(Обратимся теперь к формуле (6). Из (14) и (11) видно, что

$$\hbar d_T + \frac{1}{h a_T} + \frac{1}{h_{+1} a_T^{(+1)}}\Big) \hbar = \hbar^2 d_T + \frac{1}{v_1(\Delta; \hbar)} + \frac{1}{v_2(\Delta; \hbar)} = \frac{v_1(1; \hbar)}{v_1(\Delta; \hbar) v_2(\Delta; \hbar)}. \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в (6), приходим к формуле (12).

6. Преобразуем формулы для a_T, d_T, φ_T к более удобному для исследования виду. Введем новую переменную s', полагая

$$\bar{x} + s\hbar = x + s'h \quad \text{при } s \leqslant \Delta,$$
$$\bar{x} + s\hbar = x + s'h_{+1} \quad \text{при } s \geqslant \Delta$$

и требуя, чтобы $s' = -1$ при $s = -1$, $s' = 1$ при $s = 1$. Тогда получим

$$s = \Delta + \frac{h}{\hbar} s' \text{ при } s \leqslant \Delta \quad (s' \leqslant 0); \qquad s = \Delta + \frac{h_{+1}}{\hbar} s' \text{ при } s \geqslant \Delta \quad (s' \geqslant 0).$$

Введем новые шаблонные функции

$$\alpha(s') = \frac{\hbar}{h} v_1(s; \hbar), \qquad \beta(s') = \frac{\hbar}{h_{+1}} v_2(s; \hbar).$$

Они определяются условиями (вместо s' снова пишем s):

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{p^*(s)}\frac{d\alpha}{ds}\right)-h^2q^*(s)\,\alpha(s)=0,\quad -1<s<0,\quad \alpha(-1)=0,$$
$$\frac{1}{p^*(-1)}\frac{d\alpha}{ds}(-1)=1, \tag{16}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{p^*(s)}\frac{d\beta}{ds}\right)-h_{+1}^2q^*(s)\,\beta(s)=0,\quad 0<s<1,\quad \beta(1)=0,$$
$$\frac{1}{p^*(1)}\frac{dp}{ds}(1)=-1, \tag{17}$$

где

$$p^*(s)=\begin{cases}p(x+sh), & s<0;\\ p(x+sh_{+1}), & s>0;\end{cases}\qquad q^*(s)=\begin{cases}q(x+sh), & s<0;\\ q(x+sh_{+1}), & s>0.\end{cases}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в формуле (12):

$$\frac{1}{v_1(\Delta,\hbar)}\int_{-1}^{\Delta}v_1(s,\hbar)\,\bar f(s)\,ds=\frac{1}{\alpha(0)}\int_{-1}^{0}\alpha(s)\,f^*(s)\,ds\,\frac{h}{\hbar},$$
$$\frac{1}{v_2(\Delta,\hbar)}\int_{\Delta}^{1}v_2(s,\hbar)\,\bar f(s)\,ds=\frac{1}{\beta(0)}\int_{0}^{1}\beta(s)\,f^*(s)\,ds\,\frac{h_{+1}}{\hbar}.$$

В результате мы приходим к следующим формулам для коэффициентов точной схемы:

$$a_T=\alpha(0),\qquad a_T^{(+1)}=\beta(0); \tag{18}$$

$$\hbar d_T=\frac{h}{\alpha(0)}\int_{-1}^{0}\alpha(s)\,q^*(s)\,ds+\frac{h_{+1}}{\beta(0)}\int_{0}^{1}\beta(s)\,q^*(s)\,ds, \tag{19}$$

$$\hbar\varphi_T=\frac{h}{\alpha(0)}\int_{-1}^{0}\alpha(s)\,f^*(s)\,ds+\frac{h_{+1}}{\beta(0)}\int_{0}^{1}\beta(s)\,f^*(s)\,ds. \tag{20}$$

7. В [2] были изучены функции типа $\alpha(s)$ и $\beta(s)$. Для них справедливы оценки

$$c_1'(1+s)\leqslant\alpha(s)\leqslant\alpha(0),\quad \alpha(s)\leqslant c_1\frac{\operatorname{sh}\varkappa h(1+s)}{\varkappa h},\quad \varkappa=\sqrt{c_1c_2},\quad -1<s<0.$$
$$c_1'(1-s)\leqslant\beta(s)\leqslant\beta(0),\quad \beta(s)\leqslant c_1\frac{\operatorname{sh}\varkappa h(1-s)}{\varkappa h},\quad 0<s<1. \tag{21}$$

Отсюда и из формул (18)—(20) следует, что

$$0<c_1'\leqslant a_T\leqslant c_4,\quad 0\leqslant d_T\leqslant 2c_2,\quad |\varphi_T|\leqslant 2c_3,\quad \text{если } |f|\leqslant c_3, \tag{22}$$

где c_4 — положительная постоянная, зависящая только от c_1 и c_2.

По аналогии с [1] будем искать $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ в виде рядов:

$$\alpha(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(s)\,h^{2k},\qquad \beta(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(s)\,h_{+1}^{2k}.$$

Функции $\alpha_k(s)$ и $\beta_k(s)$, не зависящие от h и h_{+1}, определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k(s)=\int_{-1}^{s}p^*(t)\left[\int_{-1}^{t}q^*(\lambda)\,\alpha_{k-1}(\lambda)\,d\lambda\right]dt,\quad k>0,\quad \alpha_0(s)=\int_{-1}^{s}p^*(t)\,dt. \tag{23}$$

$$\beta_k(s) = \int\limits_s^1 p^*(t)\left[\int\limits_t^1 q^*(\lambda)\,\beta_{k-1}(\lambda)\,d\lambda\right]dt, \quad k>0, \quad \beta_0(s) = \int\limits_s^1 p^*(t)\,dt. \tag{24}$$

8. Представим $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ в виде:

$$\alpha(s) = \Pi_1^{(m)}(s, h) + h^{2m+2}\omega_1^{(m+1)}(s; h);$$
$$\beta(s) = \Pi_2^{(m)}(s, h_{+1}) + h_{+1}^{2m+2}\omega_2^{(m+1)}(s; h_{+1}), \tag{25}$$

где

$$\Pi_1^{(m)}(s; h) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(s)\,h^{2k}, \qquad \Pi_2^{(m)}(s, h_{+1}) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(s)\,h_{+1}^{2k}. \tag{26}$$

Заменяя $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ полиномами $\Pi_1^{(m)}$ и $\Pi_2^{(m)}$, получим усеченную схему m-го ранга:

$$\overset{m}{L}{}_h^{(p,\,q,\,f)}\,y = (\overset{m}{a}y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - \overset{m}{d}y + \overset{m}{\varphi} = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \tag{27}$$

коэффициенты которой $\overset{m}{a}$, $\overset{m}{d}$, $\overset{m}{\varphi}$ вычисляются по тем же формулам (18)—(20) с заменой $\alpha(s)$ на $\Pi_1^{(m)}$, а $\beta(s)$ — на $\Pi_2^{(m)}$.

Пусть $\overset{m}{y}$ — решение задачи (27). Для погрешности $z = \overset{m}{y} - u$ получаем задачу

$$\Lambda z = (\overset{m}{a}z_{\bar{x}})_{\hat{x}} - \overset{m}{d}z = -\overset{m}{\psi}, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \tag{28}$$

где

$$\overset{m}{\psi} = ((\overset{m}{a} - a_T)\,u_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (\overset{m}{d} - d_T)\,u + \overset{m}{\varphi} - \varphi_T. \tag{28$'$}$$

Вводя, как обычно, разностную функцию Грина $G(x, \xi)$ и пользуясь формулой Грина, а также ограниченностью G, G_ξ, $G_{\bar{x}}$, u, $u_{\bar{x}}$, получаем

$$\|\overset{m}{y} - u\|_0 \leqslant M\{\|a_T - \overset{m}{a}\|_1 + \|d_T - \overset{m}{d}\|_1^* + \|\varphi_T - \overset{m}{\varphi}\|_1^*\}, \tag{29}$$

где M — положительная постоянная, зависящая только от c_1, c_2, c_3.

9. Перейдем теперь к оценке разностей $a_T - \overset{m}{a}$, $d_T - \overset{m}{d}$, $\varphi_T - \overset{m}{\varphi}$. Из (25) и (18)—(20) следует:

$$a_T - \overset{m}{a} = h^{2m+2}\omega_1{}^{(m+1)}(0), \qquad \hbar\,(d_T - \overset{m}{d}) =$$
$$= h^{2m+3}\left\{\frac{1}{\alpha(0)}\int\limits_{-1}^{0}\omega_1^{(m+1)}(s)\,q^*(s)\,ds - \frac{\omega_1^{(m+1)}(0)}{\alpha(0)}\int\limits_{-1}^{0}\frac{\alpha_m(s)}{\alpha_m(0)}\,q^*(s)\,ds\right\} +$$
$$+ h_{+1}^{2m+3}\left\{\frac{1}{\beta(0)}\int\limits_0^1\omega_2^{(m+1)}(s)\,q^*(s)\,ds - \frac{\omega_2^{(m+1)}(0)}{\beta(0)}\int\limits_0^1\frac{\beta_m(s)}{\beta_m(0)}\,q^*(s)\,ds\right\}$$

и аналогичная формула для $\hbar\,(\varphi_T - \overset{m}{\varphi})$.

Для $\omega_j^{(m+1)}(s)$ имеют место рекуррентные формулы

$$\omega_1^{(m+1)}(s) = \int\limits_{-1}^{s} p^*(t)\left[\int\limits_{-1}^{t} q^*(\lambda)\,\omega_1^{(m)}(\lambda)\,d\lambda\right]dt,$$
$$\omega_2^{(m+1)}(s) = \int\limits_s^1 p^*(t)\left[\int\limits_t^1 q^*(\lambda)\,\omega_2^{(m)}(\lambda)\,d\lambda\right]dt.$$

По аналогии с [1] получаем оценки

$$0 \leqslant \omega_1^{(m)}(s) \leqslant M \frac{[\varkappa(1+s)]^{2m+1}}{(2m+1)!} \leqslant M', \quad 0 \leqslant \omega_2^{(m)}(s) \leqslant M \frac{[\varkappa(1-s)]^{2m+1}}{(2m+1)!} \leqslant M',$$
$$\omega_1^{(m)}(s)/\alpha(0) \leqslant M'', \qquad \omega_2^{(m)}(s)/\beta(0) \leqslant M'',$$
$$\alpha_m(s)/\alpha_m(0) \leqslant 1 \quad (-1 < s \leqslant 0), \quad \beta_m(s)/\beta_m(0) \leqslant 1 \quad (s \geqslant 0),$$

где $\varkappa = \sqrt{c_1 c_2}$, M, M', M'' — положительные постоянные, зависящие только от c_1 и c_2. Учитывая эти неравенства, найдем

$$\| a_T - \overset{m}{a} \|_1 = O(\| h^{2m+2} \|_1), \quad \| d_T - \overset{m}{d} \|_1^* = O(\| h^{2m+2} \|_1),$$
$$\| \varphi_T - \overset{m}{\varphi} \|_1 = O(\| h^{2m+2} \|_1).$$

Обращаясь теперь к (29), убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 1. *Усеченная разностная схема m-го ранга ($m \geqslant 0$) имеет $(2m+2)$-й порядок точности в классе кусочно-непрерывных функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in Q^{(0)}$ на любой последовательности неравномерных сеток, так что всегда выполняется неравенство:*

$$\| \overset{m}{y} - u \|_0 \leqslant M \| h^{2m+2} \|_1 \leqslant M \| h \|_0^{2m+2}, \tag{30}$$

где $M = M(c_1, c_2, c_3)$ — положительная постоянная, зависящая только от c_1, c_2, c_3.

Сравнение этой теоремы с соответствующей теоремой, доказанной в п. 4 § 2 работы [1] показывает, что требование

$$0 < M_1 \leqslant \frac{h_{i+1}}{h_i} \leqslant M_2,$$

фигурирующее в [1], является лишним и что оценка (30) справедлива при любых $\| h \|_0$.

10. Простейшей усеченной схемой является схема нулевого ранга $\overset{\circ}{L}{}_h^{(p,q,f)}$ $(m = 0)$. Ее коэффициенты имеют вид:

$$\overset{\circ}{a} = \alpha_0(0), \ \overset{\circ}{d} = \frac{h}{\hbar \overset{\circ}{a}} \int_{-1}^{0} \alpha_0(s) q^*(s)\, ds + \frac{h_{+1}}{\hbar \overset{\circ}{a}{}^{(+1)}} \int_0^1 \beta_0(s) q^*(s) ds, \tag{31}$$
$$\overset{\circ}{\varphi} = \frac{h}{\hbar \overset{\circ}{a}} \int_{-1}^{0} \alpha_0(s) f^*(s)\, ds + \frac{h_{+1}}{\hbar \overset{\circ}{a}{}^{(+1)}} \int_0^1 \beta_0(s) f^*(s)\, ds.$$

Для усеченной схемы нулевого ранга теорема 1 может быть усилена.

Теорема 2. *Усеченная схема нулевого ранга в классе кусочно-непрерывных функций $p, q, f \in Q^{(0)}$ и на любой последовательности сеток ω_N имеет второй порядок точности относительно среднего квадратичного шага сетки $\| h \|_2$, так что при любых значениях $\| h \|_0$ справедлива оценка*

$$\| \overset{\circ}{y} - u \|_0 \leqslant M \| h \|_2^2, \tag{32}$$

где $\overset{\circ}{y}$ — решение задачи

$$\overset{\circ}{L}{}_h^{(p,q,f)} y = (\overset{\circ}{a} y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - \overset{\circ}{d} y + \overset{\circ}{\varphi} = 0, \quad \overset{\circ}{y}(0) = u_1, \quad \overset{\circ}{y}(1) = u_2, \tag{33}$$

а M — положительная постоянная, зависящая только от c_1, c_2, c_3.

Для доказательства теоремы используется представление разности $z = \overset{\circ}{y} - u$ в виде

$$\overset{\bullet}{y} - u = (G, \overset{\bullet}{\psi}), \tag{34}$$

где $\overset{\circ}{\psi}$ определяется по формуле (28') при $m = 0$, а $G = G(x, \xi)$ функция Грина задачи (33). Пользуясь первой формулой Грина и ограниченностью G, G_ξ, $G_{\bar{x}}$, u, $u_{\bar{x}}$, а также оценкой (29) при $m = 0$, получаем оценку (32).

11. Схему нулевого ранга можно использовать в качестве эталона при изучении порядка точности любых других схем $L_h^{(p,\,q,\,f)}$, например консервативных стандартных схем, рассматриваемых в [3]. Пусть y — решение задачи

$$\begin{gathered} L_h^{(p,\,q,\,f)} y = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \\ 0 < c_1' \leqslant a \leqslant c_1, \quad 0 \leqslant d \leqslant c_2, \quad |\varphi| \leqslant c_3 . \end{gathered} \tag{35}$$

Из неравенства $\|y - u\|_0 \leqslant \|y - \overset{\circ}{y}\|_0 + \|\overset{\circ}{y} - u\|_0$ и теоремы 2 следует, что для оценки $\|y - u\|_0$ достаточно найти оценку для $\|y - \overset{\circ}{y}\|_0$.

Для этой цели нам в дальнейшем понадобится

Лемма 1. *Коэффициенты усеченной схемы всегда можно представить в виде*

$$\overset{\circ}{a} = a^* = \int_{-1}^{0} p(x + sh)\, ds . \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{d} = d^* + (hd_*)_{\hat{x}}, \quad d^* = \frac{1}{\hbar} \int_{x-0.5h}^{x+0.5h_{+1}} q(x')\, dx' = \int_{-0.5}^{0.5} q(x + (s + \delta)\hbar)\, ds, \\ &\delta = (h_{+1} - h)/4\hbar, \quad d_* = \int_{-1}^{0} p(x + sh) \Big[\int_{-0.5}^{s} q(x + th)\, dt \Big] ds , \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\varphi} = \varphi^* + (h\varphi_*)_{\hat{x}}, \quad \varphi^* = \int_{-0.5}^{0.5} f(x + (s + \delta)\hbar)\, ds , \\ &\qquad \varphi_* = \int_{-1}^{0} p(x + sh) \Big[\int_{-0.5}^{s} f(x + th)\, dt \Big] ds . \end{aligned} \tag{38}$$

В самом деле, меняя порядок интегрирования, находим

$$\int_{-1}^{0} q^*(s)\, \alpha_0(s)\, ds = \int_{-1}^{0} p^*(s) \Big[\int_{s}^{0} q^*(t)\, dt \Big] ds = a^* \int_{-0.5}^{0} q^*(t)\, dt - \\ - \int_{-1}^{0} p^*(s) \Big[\int_{-0.5}^{s} q^*(t)\, dt \Big] ds,$$

$$\int_{0}^{1} q^*(s)\, \beta_0(s)\, ds = \int_{0}^{1} p^*(s) \Big[\int_{0}^{s} q^*(t)\, dt \Big] ds = a^{*(+1)} \int_{0}^{0.5} q^*(t)\, dt + \\ + \int_{0}^{1} p^*(s) \Big[\int_{0.5}^{s} q^*(t)\, dt \Big] ds.$$

Подставим эти выражения в (31) и учтем, что $p^*(s) = p(x+sh)$, $q^*(s) = q(x+sh)$ при $-1 < s < 0$ и $p^*(s) = p(x+sh_{+1})$, $q^*(s) = q(x+sh_{+1})$ при $0 < s < 1$. В результате получим формулу $\overset{\circ}{d} = d^* + (hd_*)_{\hat{x}}$. Аналогично устанавливается формула $\overset{\circ}{\varphi} = \varphi^* + (h\varphi_*)_{\hat{x}}$.

12. Пусть y — решение задачи (35), а $\widetilde{y}$ — решение той же задачи с коэффициентами $\widetilde{a}$, $\widetilde{d}$, $\widetilde{\varphi}$. В [1] было показано, что

$$\|\widetilde{y} - y\|_0 \leqslant M\{\|\widetilde{a} - a\|_1 + \|\widetilde{d} - d\|_1^* + \|\widetilde{\varphi} - \varphi\|_1^*\}. \tag{39}$$

Рассмотрим разность $z = y - \overset{\circ}{y}$. Для нее получим задачу (28) с правой частью $\overset{\circ}{\psi} = ((a - \overset{\circ}{a})\overset{\circ}{y}_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (d - \overset{\circ}{d})\overset{\circ}{y} + \varphi - \overset{\circ}{\varphi}$. Представляя z в виде $z = (G, \overset{\circ}{\psi})$, пользуясь леммой 1 и учитывая, что

$$(G, (hd_*)_{\hat{\xi}})^* = -(G_{\bar{\xi}}(x, \xi), h(\xi)\, d_*(\xi)], \qquad (G, (h\varphi_*)_{\hat{\xi}})^* = -(G_{\bar{\xi}}, h\varphi_*],$$

видим, что справедлива

Теорема 3. *Пусть y — решение задачи (35) при $p, q, f \in Q^{(0)}$; тогда выполняется неравенство*

$$\|y - \overset{\circ}{y}\|_0 \leqslant M(\|a - a^*\|_1 + \|d - d^*\|^*_1 + \|\varphi - \varphi^*\|_1 + \|hd_*\|_1 + \|h\varphi_*\|_1) \tag{40}$$

на любой сетке ω_N.

Следствие. Если y^* — решение задачи (35) с коэффициентами

$$a^* = \int_{-1}^{0} p(x+sh)\,ds,\ d^* = \int_{-0.5}^{0.5} q(x + (s+\delta)\hbar)\,ds,$$

$$\varphi^* = \int_{-0.5}^{0.5} f(x + (s+\delta)\hbar)\,ds,\ \ \delta = (h_{+1} - h)/4\hbar \tag{41}$$

то справедлива оценка

$$\|y^* - \overset{\circ}{y}\|_0 \leqslant M(\|hd_*\|_1 + \|h\varphi_*\|_1). \tag{42}$$

Пусть $\overset{\circ}{\widetilde{y}}$ обозначает решение задачи (33) с коэффициентами $\overset{\circ}{\widetilde{a}}$, $\overset{\circ}{\widetilde{d}}$, $\overset{\circ}{\widetilde{\varphi}}$, соответствующими коэффициентам $\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{f} \in Q^{(0)}$ дифференциального уравнения (1). Тогда имеет место неравенство

$$\|\overset{\circ}{\widetilde{y}} - \overset{\circ}{y}\|_0 \leqslant M(\|\widetilde{a}^* - a^*\|_1 + \|\widetilde{d}^* - d^*\|_1^* + \|\widetilde{\varphi}^* - \varphi^*\|_1^* + \tag{43}$$
$$+ \|h(\widetilde{d}_* - d_*)\|_1 + \|h(\widetilde{\varphi}_* - \varphi_*)\|_1).$$

Это утверждение доказывается так же, как и теорема 3.

13. Полученные выше оценки для разности $y - \overset{\circ}{y}$ можно использовать для уточнения теорем 1 и 2 работы [3]. Пусть $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi$ однородная трехточечная каноническая консервативная схема стандартного типа, принадлежащая исходному семейству схем, определенному в [3], а $y = y(x)$ — решение соответствующей задачи (35) для этой схемы.

Предположим, что коэффициенты $p, q, f \in C^{(1,1)}$ и удовлетворяют условиям

$$0 < c_1' \leqslant p(x) \leqslant c_1,\ 0 \leqslant q(x) \leqslant c_2,\ |f(x)| \leqslant c_3,$$

где c_1', c_1, c_2, c_3 — постоянные.

Оценим слагаемые, входящие в правую часть неравенства (43). Так как схема Λy удовлетворяет необходимым условиям второго порядка аппроксимации $(A[1] = D[1] = F[1] = 1, \quad A_1[s] = -0.5, \quad D[s] = F[s] = 0)$, то $a = p(x) - 0.5hp'(x) + O(h^2)$, $a - a^* = O(h^2)$, $d - d^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2)$, $\varphi - \varphi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2)$. Отсюда следует, что

$$\| a - a^* \|_1 = O(\| h \|_2^2), \ \| d - d^* \|_1^* = O(\| h \|_2^2), \ \| \varphi - \varphi^* \|_1^* = O(\| h \|_2^2)$$

Учитывая неравенство $\| y - u \|_0 \leqslant \| y - \mathring{y} \|_0 + \| \mathring{y} - u \|_0$ и теорему 3, а также оценки $d_* = O(h)$, $\varphi_* = O(h)$, убеждаемся в справедливости теоремы 1 работы [3]:

$$\| y - u \|_0 \leqslant M \| h \|_2^2, \tag{44}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Для схемы $\Lambda^* y = (a^* y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - d^* y + \varphi^*$ эта теорема может быть усилена.

Теорема 4. *Разностная схема $\Lambda^* y$, определяемая шаблонными функционалами* (41), *для любых $p, q, f \in C^{(0,1)}$ на произвольной последовательности неравномерных сеток имеет второй порядок точности*:

$$\| y^* - u \|_0 \leqslant M \| h \|_2^2. \tag{45}$$

В самом деле, если $p, q, f \in C^{(0,1)}$, то $d_* = O(h)$, $\varphi_* = O(h)$ и $\| h d_* \|_1 = O(\| h \|_2^2)$, $\| h_{\varphi_*} \|_1 = O(\| h \|_2^2)$. Отсюда и из оценки $\| y^* - \mathring{y} \|_0 \leqslant M (\| h d_* \|_1 + \| h \varphi_* \|_1)$ следует неравенство (45).

Замечание. Оценка (45) является равномерной в классе $C^{(0,1)}$ функций p, q, f, имеющих одну и ту же постоянную Липшица c_4, причем M в (45) зависит только от c'_1, c_1, c_2, c_3 и c_4.

14. Пусть $p, q, f \in Q^{(0,1)}$, $\xi = x_n + \theta h_{n+1}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ — точка разрыва p, q, f. Нетрудно заметить, что $d_*(x) = O(h)$ при $x \neq x_n$, $d_*(x_n) = O(1)$ при $\theta < 0.5$, $d_*(x) = O(h)$ при $x \neq x_{n+1}$, $d_*(x_{n+1}) = O(1)$ при $\theta > 0.5$. Поэтому справедливо неравенство

$$\| h d_* \|_1 \leqslant M (\| h \|_2^2 + h_n^2 + h_{n+1}^2).$$

Аналогично оценивается $\| h \varphi_* \|_1$.

Теорема 5. *Разностная схема $\Lambda^* y$ в классе $Q^{(0,1)}$ коэффициентов p, q, f уравнения* (1) *имеет второй порядок точности, так что*

$$\| y^* - u \|_0 \leqslant M \left[\| h \|_2^2 + \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j}^2 + h_{n_j+1}^2) \right], \tag{46}$$

если $\xi_{n_j} = x_{n_j} + \theta_j h_{n_j+1}$ $(0 \leqslant \theta_j \leqslant 1)$, $j = 1, 2, \ldots, j_0$ — точки разрыва функций p, q, f.

Рассмотрим теперь произвольную стандартную схему, принадлежащую исходному семейству схем. Если $p, q, f \in Q^{(0,1)}$, то

$$\| a - a^* \|_1 = O(\| h \|_2) + O(h_{n+1}), \quad \| d - d_* \|_1^* = O(\| h \|_2) + O(\hbar_n) + O(\hbar_{n+1}),$$
$$\| \varphi - \varphi^* \|_1^* = O(\| h \|_2) + O(\hbar_n) + O(\hbar_{n+1}),$$
$$\| h d_* \|_1 = O(\| h_2 \|) + O(h_{n+1}), \quad \| h \varphi_* \|_1 = O(\| h \|_2) + O(h_{n+1}).$$

Отсюда и из теоремы 3 следует

Теорема 6. *Для произвольной исходной схемы $\Lambda y = L^{(p, q, f)} y$ стан-*

дартного типа справедливы оценки:

$$\|y-u\|_0 \leqslant M\left[\|h\|_2+\sum_{j=1}^{j_0}(h_{n_j}+h_{n_j+1}+h_{n_j+2})\right] \quad \text{при } p,\, q,\, f\in Q^{(0,1)}, \tag{47}$$

$$\|y-u\|_0 \leqslant M\left[\|h\|_2^2+\sum_{j=1}^{j_0}(h_{n_j}+h_{n_j+1}+h_{n_j+2})\right] \quad \text{при } p,\, q,\, f\in Q^{(1,1)}, \tag{48}$$

если $\xi_j = x_{n_j}+\theta_j h_{n_j+1}$ $(j=1, 2, \ldots, j_0)$ — *точки разрыва* p, q, f.

Подчеркнем еще раз, что полученные выше оценки справедливы на любой последовательности разностных сеток для любых N. При этом M — положительные постоянные, не зависящие от выбора сеток ω_N.

Поступила в редакцию
29.09. 1962

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 425—440.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 5—64.
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5, 812—832.