ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 1 Май 1961 Июнь № 3

ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

Среди однородных разностных схем, соответствующих краевым задачам для дифференциального уравнения

$$L^{(p,q,f)}\, u = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right] - q\,(x)\,u + f\,(x) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$M_2 \geqslant p\,(x) \geqslant M_1 > 0, \qquad 0 \leqslant q\,(x) \leqslant M_3,$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами ($p,\ q,\ f \in Q^{(0)}$), содержится точная схема [1], [2]. Эта схема позволяет определить сеточную функцию, совпадающую с точным решением краевой задачи на произвольной неравномерной сетке

$$S_N\,(x_0 = 0,\ x_1,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_N = 1,\ h_i = x_i - x_{i-1}).$$

В настоящей работе строятся схемы любого (наперед заданного) порядка точности на неравномерных сетках.

Все названные схемы имеют вид

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = \frac{1}{\hbar_i}\,\Delta\left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h}\right) - D_i^h y_i + \Phi_i^h,$$

$$\hbar_i = 0{,}5\,(h_i + h_{i+1}), \qquad \Delta y_i = \nabla y_{i+1} = y_{i+1} - y_i. \tag{2}$$

Индекс h, стоящий наверху, является условным обозначением зависимости коэффициентов от сетки.

Разностные схемы (2) в случае равномерной сетки ($h_i = h = 1/N$, $i = 1, 2, \ldots, N$) принадлежат семейству однородных трехточечных консервативных схем [2], [3]. Это же утверждение остается в силе при соответствующем обобщении понятий однородности и консервативности схем на неравномерные сетки.

Схемы повышенного порядка точности оказываются особенно полезными в ряде практически важных случаев, например при решении уравнения (1) с кусочно-постоянными коэффициентами, имеющими большое число точек разрыва, при решении систем аналогичных уравнений и при решении уравнений теплопроводности и диффузии в виде $\frac{\partial u}{\partial t} = L^{(p,q,f)} u$.

§ 1. Точная схема на неравномерной сетке

1. Построение точной схемы

Рассмотрим первую краевую задачу для дифференциального уравнения

$$L^{(p,q,f)} u = 0,\ 0 < x < 1,\ u\,(0) = \mu_1,\ u\,(1) = \mu_2. \tag{3}$$

Пусть $S_N = \{x_i\}$ — некоторая разностная сетка, получающаяся в результате разбиения отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ на N частей точками

$$x_0 = 0, \quad x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N = 1.$$

В каждой точке x_i имеется два шага (левый и правый) разностной сетки, $h_i = x_i - x_{i-1}$ и $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, вообще говоря, не равные друг другу. Обозначим $\hbar_i = 0{,}5\,(h_i + h_{i+1})$ средний шаг сетки в точке x_i. Характеристикой локальной неравномерности сетки может служить отношение

$$\Delta_i = -\frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1} + h_i} = -\frac{0{,}5\,(h_{i+1} - h_i)}{\hbar_i}.$$

Если разностная сетка равномерна, то $\Delta_i = 0$.

Мы будем всюду в дальнейшем предполагать, что на любой последовательности сеток S_N выполнено условие

$$0 < C_1 \leqslant \frac{h_{i+1}}{h_i} \leqslant C_2, \tag{H}$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные, не зависящие от сетки.

В дальнейшем мы пользуемся обозначением

$$h^* = \max_{0<i\leqslant N} h_i.$$

Покажем, что решение уравнения (3) на любой сетке S_N удовлетворяет соотношению

$$u(x_i) = P_i^h u(x_{i-1}) + Q_i^h u(x_{i+1}) + R_i^h, \tag{4}$$

где P_i^h, Q_i^h, R_i^h — коэффициенты, выражающиеся с помощью некоторых функционалов, зависящих от сетки S_N (или S_h), точнее, от двух параметров $h_л$ и $h_п$.

Возможность соотношения (4) очевидна, так как решение дифференциального уравнения второго порядка в интервале (x_{i-1}, x_{i+1}) полностью определяется заданием значений искомой функции на концах этого интервала.

В статье [1] точная схема (4) была построена на равномерной сетке.

Рассмотрим уравнение (3) на интервале (x_{i-1}, x_{i+1}), и введем местную систему координат, связанную с точкой $x = x_i$, положив

$$x = x_i + \hbar_i\,(s - \Delta_i), \quad -1 \leqslant s \leqslant 1,$$

или

$$x = \overline{x_i} + \hbar_i s, \quad \text{где} \quad \overline{x_i} = x_i - \hbar_i \Delta_i.$$

Отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ отображается на отрезок $-1 \leqslant s \leqslant 1$, причем точке $x = x_i$ соответствует точка $s = \Delta_i$. Уравнение (3) принимает вид

$$\mathcal{L}^* \bar{u} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\bar{p}(s)}\frac{d\bar{u}}{ds}\right] - \hbar^2 \bar{q}(s) = -\hbar^2 \bar{f}(s), \tag{5}$$

где

$$\bar{u}(s) = u(x_i + \hbar_i(s - \Delta_i)) \text{ и т. д.} \tag{6}$$

Индекс i, которым следовало бы снабдить все функции в (5) и шаг $\hbar$, мы опускаем.

Общее решение уравнения (5) на отрезке $[-1,1]$ имеет вид

$$\bar{u}(s) = Cv_1(s, \hbar) + Dv_2(s, \hbar) + \hbar^2 v_3(s, \hbar),$$

где C и D — произвольные постоянные, $v_1(s, \hbar)$ и $v_2(s, \hbar)$ — линейно-независимые решения однородного уравнения $\mathscr{L}^*\bar{u} = 0$, $v_3(s, \hbar)$ — некоторое решение неоднородного уравнения (5).

Определим функции v_1, v_2 и v_3 с помощью условий

$$\left.\begin{aligned} v_1(-1, \hbar) = 0, \quad & \frac{1}{\bar{p}(-1)}\frac{dv_1}{ds}(-1, \hbar) = 1, \\ v_2(1, \hbar) = 0, \quad & \frac{1}{\bar{p}(1)}\frac{dv_2}{ds}(1, \hbar) = -1, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$v_3(-1, \hbar) = 0, \quad v_3(1, \hbar) = 0. \tag{8}$$

Функции v_1, v_2, v_3 в дальнейшем будем называть шаблонными функциями. Они являются функционалами коэффициентов $\bar{p}(s)$, $\bar{q}(s)$ и $\bar{f}(s)$ и параметрически зависят от $\hbar$.

Полагая в (6) $s = -1$ и $s = 1$ и учитывая условия (7) и (8), находим

$$C = \frac{\bar{u}(1)}{v_1(1, \hbar)}, \quad D = \frac{\bar{u}(-1)}{v_2(-1, \hbar)}$$

и, следовательно,

$$\bar{u}(s) = \frac{v_2(s, \hbar)}{v_2(-1, \hbar)}\bar{u}(-1) + \frac{v_1(s, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}\bar{u}(1) + \hbar^2 v_3(s, \hbar). \tag{9}$$

Отсюда видно, что нормировка функций v_1 и v_2 произвольна. Положив в (9) $s = \Delta$, получаем соотношение

$$\bar{u}(\Delta) = P^h\bar{u}(-1) + Q^h\bar{u}(1) + R^h, \tag{10}$$

коэффициенты которого

$$P^h = \frac{v_2(\Delta, \hbar)}{v_2(-1, \hbar)} = P^\hbar[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \Delta], \quad Q^h = \frac{v_1(\Delta, \hbar)}{v_1(1, \hbar)} = Q^\hbar[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \Delta],$$

$$R^h = \hbar^2 v_3(\Delta, \hbar) = R^\hbar[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s), \Delta]$$

являются функционалами от $\bar{p}(s)$, $\bar{q}(s)$, $\bar{f}(s)$ на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$, зависящими от двух параметров, $\hbar$ и Δ или от $h_л$ и $h_п$ ($\hbar = 0{,}5(h_л + h_п)$, $\Delta = -0{,}5(h_п - h_л)/\hbar$).

Чтобы получить разностную схему, вернемся к исходному переменному x, положив $s = \Delta_i + (x - x_i)/\hbar_i$ и учитывая (6). Полученные при этом значения шаблонных функций будем обозначать через $\overset{(i)}{v_k}(s, \hbar)$, $k = 1, 2, 3$. Соотношение (10) примет вид (4), где

$$P_i^h = P^\hbar[p(\bar{x}_i + s\hbar_i), q(\bar{x}_i + s\hbar_i), \Delta_i], \tag{11}$$

$$Q_i^h = Q^\hbar[p(\bar{x}_i + s\hbar_i), q(\bar{x}_i + s\hbar_i), \Delta_i], \tag{12}$$

$$R_i^h = R^\hbar[p(\bar{x}_i + s\hbar_i), q(\bar{x}_i + s\hbar_i), f(\bar{x}_i + s\hbar_i), \Delta_i]. \tag{13}$$

Из построения схемы (4) ясно, что решение разностной краевой задачи

$$y_i = P_i^h y_{i-1} + Q_i^h y_{i+1} + R_i^h, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \tag{14}$$

совпадает с решением исходной задачи:

$$y_i = u(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$

в узловых точках произвольной сетки S_N.

2. Некоторые свойства шаблонных функций

Для дальнейших исследований нам понадобится ряд свойств шаблонных функций $v_1(s, \hbar)$ и $v_2(s, \hbar)$.

Лемма 1. *Если $\bar{q}(s) \geqslant 0$, то шаблонная функция $v_1(s, \hbar)$ положительна в интервале $-1 < s \leqslant 1$, а $v_2(s, \hbar) > 0$ — в интервале $-1 \leqslant s < 1$.*

Это очевидное утверждение следует из того, что при $\bar{q}(s) \geqslant 0$ все собственные значения первой краевой задачи для оператора $\mathscr{L}^*$ положительны. По этой же причине v_1 и v_2 линейно-независимы.

Лемма 2. *Шаблонные функции $v_1(s, \hbar)$ и $v_2(s, \hbar)$ удовлетворяют соотношениям:*

1) $v_1(1, \hbar) = v_2(-1, \hbar)$, (15)

2) $v_1(1, \hbar) - v_1(\Delta, \hbar) - v_2(\Delta, \hbar) =$

$$= \hbar^2 \left\{ v_2(\Delta, \hbar) \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s)\, v_1(s, \hbar)\, ds + v_1(\Delta, \hbar) \int_{\Delta}^{1} \bar{q}(s)\, v_2(s, \hbar)\, ds \right\}, \quad (16)$$

если $\bar{q}(s) \geqslant 0$.

Заметим, что условие (15) выражает принцип взаимности для обыкновенного дифференциального уравнения. Это условие следует из второй формулы Грина:

$$\int_{-1}^{1} (v_1 \mathscr{L}^* v_2 - v_2 \mathscr{L}^* v_1)\, ds = \frac{1}{\bar{p}(s)} \left(v_1 \frac{dv_2}{ds} - v_2 \frac{dv_1}{ds} \right) \Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Чтобы получить формулу (16), проинтегрируем уравнение $\mathscr{L}^* v_1 = 0$ по s от -1 до Δ, а уравнение $\mathscr{L}^* v_2 = 0$ по s от Δ до 1 и воспользуемся условиями (7):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_1}{ds} \right)_{s=\Delta} &= 1 + \hbar^2 \int_{-1}^{\Delta} \bar{q} v_1\, ds, \\ \left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_2}{ds} \right)_{s=\Delta} &= -1 - \hbar^2 \int_{\Delta}^{1} \bar{q} v_2\, ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Формула Грина для v_1 и v_2 на отрезках $1 \leqslant s \leqslant \Delta$ и $\Delta \leqslant s \leqslant 1$ дает

$$\frac{1}{\bar{p}} (v_2 v_1' - v_1 v_2') \big|_{s=\Delta} = \frac{1}{\bar{p}} (v_2 v_1' - v_1 v_2') \big|_{s=-1} = v_2(-1, \hbar),$$

$$\frac{1}{\bar{p}} (v_2 v_1' - v_1 v_2') \big|_{s=\Delta} = \frac{1}{\bar{p}} (v_2 v_1' - v_1 v_2') \big| = v_1(1, \hbar).$$

Сравнивая эти выражения, получим

$$v_2(\Delta, \hbar) \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_1}{ds} \right)_{s=\Delta} - v_1(\Delta, \hbar) \left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_2}{ds} \right)_{s=\Delta} = v_1(1, \hbar).$$

После подстановки сюда выражений (17) мы приходим к формуле (16).

Все эти рассуждения сохраняют силу для кусочно-непрерывной функции $\bar{p}(s)$, так как в точках ее разрыва выполняются условия сопряжения

$$\left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_k}{ds} \right)_{\text{л}} = \left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{dv_k}{ds} \right)_{\text{п}}, \quad (v_k)_{\text{л}} = (v_k)_{\text{п}}, \quad k = 1, 2,$$

где индексы л и п соответствуют левому и правому предельным значениям.

Нетрудно показать, что функция Грина $G^{\hbar}(s, t)$ оператора $\mathcal{L}^*$ для первой краевой задачи выражается просто через шаблонные функции v_1 и v_2:

$$G^{\hbar}(s, t) = \begin{cases} \dfrac{v_1(s, \hbar)\, v_2(t, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s < t, \\ \dfrac{v_1(t, \hbar)\, v_2(s, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s > t, \end{cases}$$

если учесть, что

$$\frac{1}{p}(v_2 v_1 - v_1 v_2') = v_1(1, \hbar) = v_2(-1, \hbar).$$

3. Консервативность точной схемы

Опираясь на свойства табличных функций, установленные в п. 2, преобразуем точную разностную схему к виду (2).

Преобразование удобнее сначала проводить с уравнением (11), которое в силу (15) можно записать в виде

$$\frac{\bar{u}(1) - \bar{u}(\Delta)}{v_2(\Delta, \hbar)} - \frac{\bar{u}(\Delta) - \bar{u}(-1)}{v_1(\Delta, \hbar)} - \frac{v_1(1, \hbar) - v_1(\Delta, \hbar) - v_2(\Delta, \hbar)}{v_1(\Delta, \hbar)\, v_2(\Delta, \hbar)}\, \bar{u}(\Delta) =$$
$$= -\hbar^2 \frac{v_1(1, \hbar)\, v_3(\Delta, \hbar)}{v_1(\Delta, \hbar)\, v_3(\Delta, \hbar)}.$$

С помощью (16) отсюда исключается $v_1(1, \hbar)$. Чтобы записать соответствующее разностное уравнение в точке $x = x_i$ сетки, мы должны положить $\bar{u}(s) = u(\bar{x}_i + s\hbar_i)$, $\bar{p}(s) = p(\bar{x}_i + s\hbar_i)$ и т. д., где $\bar{x}_i = x_i - \hbar_i \Delta_i$. Заменяя u_i на y_i, записываем точную схему в виде

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = \frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{\Delta y_i}{h_{i+1} B_i^h} - \frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h}\right) - D_i^h \cdot y_i + \Phi_i^h = 0, \tag{18}$$

где

$$A_i^h = \frac{\hbar_i}{h_i} \overset{i}{v_1}(\Delta_i, \hbar_i), \quad B_i^h = \frac{\hbar_i}{h_{i+1}} \overset{i}{v_2}(\Delta_i, \hbar_i), \tag{19}$$

$$D_i^h = \frac{\hbar_i}{\hbar_i A_i^h} \int_{-1}^{\Delta_i} q(\bar{x}_i + s\hbar_i) \overset{i}{v_1}(s, \hbar_i)\, ds + \frac{\hbar_i}{h_{i+1} B_i^h} \int_{\Delta_i}^{1} q(\bar{x}_i + s\hbar_i) \overset{i}{v_2}(s, \hbar_i)\, ds, \tag{20}$$

$$\Phi_i^h = \left(\hbar_i D_i^h + \frac{1}{h_i A_i^h} + \frac{1}{h_{i+1} B_i^h}\right) \cdot \hbar_i \overset{i}{v_3}(\Delta_i, \hbar_i). \tag{21}$$

Лемма 3. *Точная разностная схема* $L_h^{(p,q,f)}$, *определяемая формулами* (18) — (21), *консервативна, т. е.*

$$B_i^h = A_{i+1}^h \quad \text{или} \quad \hbar_i \overset{i}{v_2}(\Delta, \hbar) = \overset{i+1}{v_1}(\Delta, \hbar) \cdot \hbar_{i+1} \tag{22}$$

В самом деле, обозначим

$$\overset{i}{V_k}(x, \hbar) = \overset{i}{v_k}(s, \hbar), \quad x = \bar{x}_i + s\hbar_i, \quad \bar{x}_i = x_i - \hbar_i \Delta_i.$$

По определению, функции $\overset{i+1}{V_1}(x, \hbar)$ и $\overset{i}{V_2}(x, \hbar)$ удовлетворяют условиям

$$\overset{i+1}{V_1}(x_i, \hbar_{i+1}) = 0, \qquad \overset{i}{V_2}(x_{i+1}, \hbar) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{p}\frac{d\overset{i+1}{V_1}}{dx}\right)_{x=x_i} = \frac{1}{\hbar_{i+1}}, \qquad \left(\frac{1}{p}\frac{d\overset{i}{V_2}}{dx}\right)_{x=x_{i+1}} = -\frac{1}{\hbar_i}.$$

Применяя вторую формулу Грина к функциям $\overset{i+1}{V}_1(x, \hbar)$ и $\overset{i}{V}_2(x, \hbar)$ на отрезке $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, получим

$$0 = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \{\overset{i+1}{V}_1 L^{(p,q)} \overset{i}{V}_2 - \overset{i}{V}_2 L^{(p,q)} \overset{i+1}{V}\} dx = \overset{i+1}{V}_1 \frac{1}{p} \frac{d\overset{i}{V}_2}{dx} - \overset{i}{V}_2 \frac{1}{p} \frac{d\overset{i+1}{V}_1}{dx}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= \frac{1}{\hbar_{i+1}} \overset{i}{V}_2(x_i, \hbar) - \frac{1}{\hbar_i} \overset{i+1}{V}_1(x_{i+1}, \hbar_{i+1}),$$

т. е.

$$\hbar_i \overset{i}{V}_2(x_i, \hbar_i) = \hbar_{i+1} \overset{i+1}{V}_1(x_{i+1}, h_{i+1}) \quad \text{или} \quad h_{i+1} B_i^h = h_{i+1} A_{i+1}^h,$$

откуда и следует, что

$$B_i^h = A_{i+1}^h.$$

Консервативность схемы $L_h^{(p,q,f)}$ означает, что ее можно записать в виде

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h} \right) - D_i^h \cdot y_i + \Phi_i^h.$$

Нетрудно при этом заметить, что коэффициент A_i^h зависит только от шага $h_i = x_i - x_{i-1}$ и не зависит от $\hbar_i$, т. е. от h_{i+1}.

В самом деле,

$$A_i^h = \frac{\hbar_i}{h_i} \overset{i}{V}_1(x_i, \hbar_i) = \frac{1}{h_i} \overset{i}{\overline{V}}_1(x_i),$$

где $\overset{i}{\overline{V}}(x)$ — решение уравнения

$$L^{(p,q)} \overline{V}_1 = 0$$

с начальными данными

$$\overset{i}{\overline{V}}_1(x_{i-1}) = 0, \quad \frac{1}{p} \frac{d\overset{i}{\overline{V}}_1}{dx}\Bigg|_{x=x_{i-1}} = 1.$$

4. Точные краевые условия третьего рода

Рассмотрим теперь краевую задачу третьего рода. Для простоты будем считать, что условие третьего рода задано только при $x = 0$, а на правом конце $x = 1$ по-прежнему задано условие первого рода:

$$L^{(p,q,f)} u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1/p(0))\, u'(0) - \sigma u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \tag{23}$$

Найдем точное разностное краевое условие при $x = 0$, которому удовлетворяет любое решение задачи (23).

Введем местную систему координат $s = x/h_1$ в точке $x = 0$. По аналогии с п. 1 введем на интервале $0 < s < 1$ шаблонные функции $v_1^*(s, h_1)$, $v_2(s, h_1)$, $v_3^*(s, h_1)$ с помощью условий

$$\mathcal{L}^* v_1^* = \mathcal{L}^* v_2 = 0, \quad \mathcal{L}^* v_3^* = -\bar{f}(s), \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} &v_1^*(0, h_1) = 0, && \frac{1}{\bar{p}(0)} \frac{dv_1^*}{ds}(0, h_1) = 1, \\ &v_2(1, h_1) = 0, && \frac{1}{\bar{p}(1)} \frac{dv_2}{ds}(1, h_1) = -1, \\ &v_3^*(0, h_1) = 0, && v_3^*(1, h_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Общее решение уравнения $\mathcal{L}^*\bar{u}(s) = -h_1^2\bar{f}(s)$ представляем в виде

$$\bar{u}(s) = \frac{v_2(s, h_1)}{v_2(0, h_1)}\bar{u}(0) + \frac{v_1^*(s, h_1)}{v_1(1, h_1)}\bar{u}(1) + h_1^2 v_3^*(s, h_1). \tag{26}$$

Потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла условию

$$\frac{1}{h_1\bar{p}(0)}\frac{d\bar{u}}{ds}(0) - \sigma\bar{u}(0) = \mu_1. \tag{27}$$

Подставляя (26) в (27) и учитывая условия (25), видим, что

$$\bar{u}(0) = a_1\bar{u}(1) + b_1,$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \left\{1 + h_1\left[\sigma v_2(0, h_1) + h_1\int_0^1 \bar{q}(s)\, v_2(s, h_1)\, ds\right]\right\}^{-1}, \\ b_1 &= h_1\left[\mu_1 - \frac{h_1}{\bar{p}(0)}\frac{dv_3^*}{ds}(0, h_1)\right]a_1 v_2(0, h_1). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Возвращаясь к исходной переменной $x = sh$, получаем точное краевое условие в виде

$$u_0 = a_1 u_1 + b_1, \tag{29}$$

где $u_0 = u(0)$, $u_1 = u(x_1)$, $x_1 = h_1$, a_1 и b_1 определяются по формулам (28), в которые подставлены

$$\bar{q}(s) = q(sh_1), \quad \bar{p}(s) = p(sh_1), \quad \bar{f}(s) = f(sh_1).$$

Таким образом, решение краевой задачи

$$L_h^{(p,q,f)}y_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = a_1 y_1 + b_1, \quad y_N = \mu_2, \tag{30}$$

где $L_h^{(p,q,f)}$ — точная схема из п. 3, совпадает в узловых точках разностной сетки с решением задачи (23):

$$y_i = u(x_i).$$

Краевому условию

$$\frac{u'(1)}{p(1)} + \sigma u(1) = \mu_2 \tag{31}$$

соответствует точное краевое условие

$$u_N = a_2 u_{N-1} + b_2, \tag{32}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \left\{1 + h_N\left[\sigma \overset{N}{v_1}(s, h_N) + h_N\int_{-1}^{0} q(1 + sh_N)\overset{N}{v_1}(s, h_N)\, ds\right]\right\}^{-1}, \\ b_2 &= h_N\left[\mu_2 - \frac{h_N}{p(1)}\frac{d}{ds}\overset{(N)}{v_3}(0, h_N)\right]a_2\overset{(N)}{v_1}(0, h_N), \end{aligned}\right. \tag{33}$$

$v_1(s, h_N)$ — шаблонная функция, определяемая на интервале $-1 < s < 0$ условиями при $s = -1$, а $v_3(s, h_N)$ — условиями $v_3 = 0$ при $s = -1$ и $s = 0$. Индекс N означает, что начало местной системы координат взято в точке $x_N = 1$.

5. Точная схема $L_h^{(p,f)}$

Если $q(x) \equiv 0$, то все шаблонные функции и, следовательно, функционалы A^h и Φ^h вычисляются с помощью квадратур.

Точная схема $L_h^{(p,f)}$ имеет вид

$$L_h^{(p,f)} y_i = \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h} \right) + \Phi_i^h, \tag{34}$$

где

$$A_i^h = \frac{\hbar_i}{h_i} \overset{i}{v}_1 (0, h) = \int_{-1}^{0} p(x_i + sh_i)\, ds = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\, dx, \tag{35}$$

$$\Phi_i^h = F_i^h + \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\frac{h_i}{A_i^h} \int_{-1}^{0} p(x_i + th_i) \left[\int_{-0,5}^{t} f(x_i + sh_i)\, ds \right] dt \right), \tag{36}$$

$$F_i^h = \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\, dx \qquad (x_{i-0,5} = x_i - 0{,}5h_i). \tag{37}$$

В самом деле,

$$v_1(s, h) = v_1(s) = \int_{-1}^{s} \bar{p}(s)\, ds, \qquad v_2(s, h) = v_2(s) = \int_{s}^{1} \bar{p}(s)\, ds,$$

$$v_3(s, h) = v_3(s) = \left\{ \int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^{t} \bar{f}(\lambda)\, d\lambda \right] dt\, v_1(s) - \right.$$

$$\left. - v_1(1) \int_{-1}^{s} \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^{t} \bar{f}(\lambda)\, d\lambda \right] dt \right\} \frac{1}{v_1(1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_i^h = \frac{1}{\hbar_i} \left\{ \frac{1}{h_{i+1} A_{i+1}^h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^{x} f(\xi)\, d\xi \right] dx - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h_i A_i^h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^{x} f(\xi)\, d\xi \right] dx \right\}. \tag{38}$$

Представим Φ_i^h в виде суммы главной части F_i^h и консервативного («дивергентного») добавка:

$$\Phi_i^h = F_i^h + \frac{1}{\hbar_i} \Delta \widetilde{F}_i^h.$$

Для этого слагаемые в фигурных скобках в формуле (38) запишем так:

$$\frac{1}{A_{i+1}^h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^{x} f(\xi)\, d\xi \right] dx = \frac{1}{A_{i+1}^h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+0,5}} f(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{x_{i+0,5}}^{x_i} f d\xi \right] dx = h_{i+1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+0,5}} f dx + \frac{1}{A_{i+1}^h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \left[\int_{x_{i+0,5}}^{x} f d\xi \right] dx;$$

$$\frac{1}{A_i^h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \left[\int_{x_{i-1}}^{x} f d\xi \right] dx = h_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i-0,5}} f dx + \frac{1}{A_i^h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \left[\int_{x_{i-0,5}}^{x} f d\xi \right] dx.$$

В результате получаем выражение (36) для Φ^h. Второе слагаемое в (36) в классе достаточно гладких функций $p(x)$ и $f(x)$ имеет второй порядок малости при $h^* \to 0$:

$$\Phi_i^h - F_i^h = 0\,(h^{*2}) \qquad (h^* = \| h_i \|_0 = \max_{1<i\leqslant N} h_i).$$

Если положить $f = 0$, то мы получаем наилучшую каноническую схему

$$L_h^{(p)} y_i = L_h^{(p,0)} y_i = \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h} \right), \quad A_i^h = \int_{-1}^{0} p(x_i + s h_i)\, ds, \tag{39}$$

которая является точной схемой для уравнения $L^{(p)} u = 0$.

6. Определение шаблонных функций

В общем случае при $q(x) \not\equiv 0$ шаблонные функции нельзя непосредственно выразить с помощью квадратур. Однако, в силу аналитичности $v_1(s, \hbar)$, $v_2(s, \hbar)$, $v_3(s, \hbar)$ относительно $\hbar^2$, естественно эти функции искать в виде разложения по степеням $\hbar^2$:

$$v_j(s, \hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} v_j^{(k)}(s)\, \hbar^{2k}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{40}$$

Для коэффициентов разложения $v_j^{(k)}(s)$ получаем уравнения

$$\begin{gathered} \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\bar p(s)} \frac{dv_j^{(0)}}{ds} \right] = 0, \; j = 1, 2; \quad \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\bar p(s)} \frac{dv_3^{(0)}}{ds} \right] = -\bar f(s), \\ \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\bar p(s)} \frac{dv_j^{(k)}(s)}{ds} \right] = \bar q(s)\, v_j^{(k-1)}(s), \; j = 1, 2, 3, \; k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{41}$$

со следующими дополнительными условиями:

$$\begin{gathered} v_1^{(k)}(-1) = v_2^{(k)}(1) = v_3^{(k)}(\pm 1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \frac{1}{\bar p(-1)} \frac{dv_1^{(0)}}{ds}(-1) = 1, \quad \frac{1}{\bar p(1)} \frac{dv_2^{(0)}}{ds}(1) = -1, \\ \frac{dv_1^{(k)}}{ds}(-1) = \frac{dv_2^{(k)}}{ds}(1) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{42}$$

Отсюда находим

$$v_1^{(0)}(s) = \int_{-1}^{s} \bar p(t)\, dt, \quad v_2^{(0)}(s) = \int_{s}^{1} \bar p(t)\, dt,$$

$$v_1^{(k)}(s) = \int_{-1}^{s} \bar p(t) \left[\int_{-1}^{t} \bar q(\lambda)\, v_1^{(k-1)}(\lambda)\, d\lambda \right] dt, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$v_2^{(k)}(s) = \int_{s}^{1} \bar p(t) \left[\int_{t}^{1} \bar q(\lambda)\, v_2^{(k-1)}(\lambda)\, d\lambda \right] dt, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$v_3^{(k)}(s) = \frac{1}{v_1^{(0)}(1)} \left\{ v_1^{(0)}(s) \int_{-1}^{1} \bar p(t) \left[\int_{-1}^{t} \omega^{(k)}(\zeta)\, d\zeta \right] dt - \right.$$

$$\left. - v_1^{(0)}(1) \int_{-1}^{s} \bar p(t) \left[\int_{-1}^{t} \omega^{(k)}(\zeta)\, d\zeta \right] dt \right\},$$

где

$$\omega^{(0)}(s) = -\bar{f}(s), \quad \omega^{(k)}(s) = \bar{q}(s)\, v_3^{(k-1)}(s) \text{ при } k = 1, 2, \ldots .$$

§ 2. Разностные схемы высокого порядка точности

1. Усеченные разностные схемы

В § 1, п. 6, было получено разложение в ряд по степеням $\hbar^2$ шаблонных функций $v_j(s, \hbar)$, $j = 1, 2, 3$, с помощью которых вычисляются коэффициенты точной схемы.

Если в разложении

$$v_j(s, \hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} v_j^{(k)}(s)\, \hbar^{2k}, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

ограничиться конечным числом слагаемых и взять в качестве шаблонных функций полиномы

$$\Pi_j^{(m)}(s, \hbar) = \sum_{k=0}^{m} v_j^{(k)}(s) \cdot \hbar^{2k}, \tag{2}$$

то мы получим разностную схему

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h} \right) - D_i^h \cdot y_i + \Phi_i^h, \tag{3}$$

коэффициенты которой A_i^h, D_i^h, Φ_i^h вычисляются по тем же формулам, что и коэффициенты A_i^h, D_i^h, Φ_i^h точной схемы с заменой функций $v_j(s, \hbar)$ полиномами $\Pi_j^{(m)}(s, \hbar)$.

Построенную таким образом разностную схему будем называть усеченной разностной схемой m-го ранга.

Последующее изложение посвящено выяснению порядка точности усеченной схемы.

2. Сравнение решений разностных задач

Сравним решения двух разностных краевых задач:

$$L_h y_i = \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{h_i A_i^h} \right) - D_i^h y_i = -\Phi_i^h, \; 0 < i < N, \; y_0 = \mu_1, \; y_N = \mu_2, \tag{4}$$

$$\tilde{L}_h \tilde{y}_i = \frac{1}{\hbar_i} \Delta \left(\frac{\nabla \tilde{y}_i}{h_i \tilde{A}_i^h} \right) - \tilde{D}_i^h \tilde{y}_i = -\tilde{\Phi}_i^h, \; 0 < i < N, \; \tilde{y}_0 = \mu_1, \; \tilde{y}_N = \mu_2, \tag{5}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} 0 < M_1 \leqslant A_i^h \leqslant M_2, \; 0 < M_1 \leqslant \tilde{A}_i^h \leqslant M_2, \\ 0 \leqslant D_i^h \leqslant M_3, \; 0 \leqslant \tilde{D}_i^h \leqslant M_3, \end{gathered} \tag{6}$$

где M_1, M_2, M_3 — положительные постоянные, не зависящие от сетки. Нетрудно по аналогии с [3], где рассматривалась равномерная сетка, показать, что разностная функция Грина оператора L_h (или $\tilde{L}_h$) ограничена:

$$0 \leqslant G_{ik} \leqslant M \tag{7}$$

и имеет ограниченные первые разностные отношения

$$\frac{1}{h_{i+1}}|G_{i+1,k}-G_{i,k}|\leqslant M,\qquad \frac{1}{h_{k+1}}|G_{i,k+1}-G_{i,k}|\leqslant M,$$
$$i,k=0,1,2,\ldots,N-1, \tag{8}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Воспользуемся обозначениями

$$\|\psi\|_0=\max_{0\leqslant i\leqslant N}|\psi_i|,\quad \|\psi\|_1=\sum_{i=1}^{N-1}|\psi_i|h_i,\qquad \|\psi\|_1^*=\sum_{i=1}^{N}|\psi_i|h_i, \tag{9}$$

где ψ_i — любая сеточная функция.

Лемма 4. *Если выполнены условия* (6) *и, кроме того,* Φ_i^h, μ_1 *и* μ_2 *ограничены, то*

$$\left|\frac{\Delta y_i}{h_{i+1}}\right|\leqslant M,\qquad i=0,1,2,\ldots,N-1. \tag{10}$$

где M — *положительная постоянная, не зависящая от сетки.*

В самом деле, решение задачи (4) определяется с помощью разностной функции Грина:

$$y_i=\sum_{k=1}^{N-1}G_{ik}\Phi_k^h\cdot h_k-A_1\frac{G_{i,1}}{h_1}\mu_1-A_N\frac{G_{i,N-1}}{h_N}\mu_2, \tag{11}$$

$$\frac{\Delta y_i}{h_{i+1}}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{G_{i+1,k}-G_{i,k}}{h_{i+1}}\Phi_k^h\cdot h-$$
$$-A_1\frac{G_{i+1,1}-G_{i,1}}{h_1h_{i+1}}\mu_1-A_N\frac{G_{i+1,N-1}-G_{i,N-1}}{h_Nh_{i+1}}\mu_2. \tag{11'}$$

Разностная функция Грина

$$G_{ik}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_i\beta_k}{\alpha_N}, & i<k,\\[2mm] \dfrac{\alpha_k\beta_i}{\alpha_N}, & i>k,\end{cases} \tag{12}$$

где α_i и β_i — решения уравнения $L_hv_i=0$ с условиями

$$\alpha_0=0,\ \frac{1}{A_1^h}\frac{\Delta\alpha_0}{h_1}=1,\quad \beta_N=0,\ \frac{1}{A_N}\frac{\Delta\beta_{N-1}}{h_N}=-1. \tag{13}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{h_1h_{i+1}}(G_{i+1,1}-G_{i,1})=\frac{1}{h_1}\frac{\Delta\alpha_0}{\alpha_N}\frac{\Delta\beta_i}{h_{i+1}}=\frac{A_1^h}{\alpha_N}\frac{\Delta\beta_i}{h_{i+1}}=O(1)$$

и, аналогично,

$$\frac{1}{h_{i+1}h_N}(G_{i+1,N-1}-G_{i,N-1})=O(1).$$

Поэтому из формулы (11′) следует ограниченность $\Delta y_i/h_{i+1}$.

Лемма 5. *Если выполнены условия леммы* 4, *то*

$$\|y-\tilde{y}\|_0\leqslant M\{\|A^h-\tilde{A}^h\|_1^*+\|D^h-\tilde{D}^h\|_1+\|\Phi^h-\tilde{\Phi}^h\|_1\}, \tag{14}$$

где y — решение задачи (4), $\tilde{y}$ — решение задачи (5), M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Для доказательства леммы составим уравнение для разности $z = y_i - \tilde{y}_i$:

$$\tilde{L}_h z_i = -\left\{(\Phi_i^h - \tilde{\Phi}_i^h) + \frac{1}{h_i}\Delta\left(\left(\frac{1}{A_i^h} - \frac{1}{\tilde{A}_i^h}\right)\frac{\nabla y_i}{h_i}\right) - \right.$$
$$\left. - (D_i^h - \tilde{D}_i^h)\, y_i\right\} = -\Psi_i, \quad z_0 = z_N = 0.$$

Отсюда находим

$$z_i = \sum_{k=1}^{N-1} h_k \tilde{G}_{ik}\{-(D_k^h - \tilde{D}_k^h)\, y_k + (\Phi_k^h - \tilde{\Phi}_k^h)\} -$$
$$- \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{G}_{i,\,k+1} - \tilde{G}_{i,k}}{h_{k+1}}\left(\frac{1}{A_{k+1}^h} - \frac{1}{\tilde{A}_{k+1}^h}\right)\frac{\Delta y_k}{h_{k+1}} \cdot h_{k+1},$$

так как

$$\sum_{i=1}^{N-1} \tilde{G}_{ik}\Delta v_k = -\sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{G}_{i,\,k+1} - \tilde{G}_{i,k}) \cdot v_{k+1} \qquad (\tilde{G}_{ik} = 0 \text{ при } k = 0, N).$$

Чтобы получить неравенство (14), надо воспользоваться ограниченностью функций y_i, $\tilde{G}_{ik}$ и их первых разностных отношений.

Обращаясь теперь к точной и усеченной разностным схемам, в силу леммы 5 будем иметь

$$\|\overset{(m)}{y^h} - u\|_0 \leqslant M\{\|A^h - \overset{(m)}{A^h}\|_1^* + \|D^h - \overset{(m)}{D^h}\|_1 + \|\Phi^h - \overset{(m)}{\Phi^h}\|_1\}, \tag{15}$$

где $u = u(x)$ — решение исходной задачи, а $\overset{(m)}{y^h}$ — решение разностной краевой задачи

$$\begin{gathered} \overset{m}{L}{}_h^{(p,q,f)}\, \overset{(m)}{y_i^h} = 0, \quad 0 < i < N, \\ \overset{(m)}{y_0^h} = \mu_1, \quad \overset{(m)}{y_N^h} = \mu_2, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\overset{m}{L}{}_h^{(p,q,f)}$ — усеченная схема (3) m-го ранга.

Чтобы оценить погрешности в коэффициентах схемы, стоящих в правой части формулы (15), необходимо оценить разность

$$\begin{aligned} v_j(s, \hbar) - \Pi_j^{(m)}(s, \hbar) &= \hbar^{2m+2}(v_j^{(m+1)}(s) + \hbar^2 v_j^{(m+2)}(s) + \ldots) = \\ &= \hbar^{2m+2}\Omega_j^{(m+1)}(s, \hbar). \end{aligned} \tag{17}$$

3. Оценка остаточного члена в разложении шаблонных функций

Обратимся теперь к доказательству ограниченности при любом $m \geqslant 0$ функций

$$\begin{gathered} \Omega_j^{(m+1)}(s, \hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} v_j^{(m+1+k)}(s)\, \hbar^{2k}, \\ j = 1, 2, 3, \ m \geqslant 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Сначала покажем, что для $\Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar)$ и $\Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar) &\leqslant M \frac{[\varkappa(1+s)]^{2m+1}}{(2m+1)!}, \\ 0 \leqslant \Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar) &\leqslant M \frac{[\varkappa(1-s)]^{2m+1}}{(2m+1)!}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\varkappa = \sqrt{M_2 M_3}$, M — некоторая положительная постоянная, зависящая только от M_1, M_2 и M_3.

В самом деле, учитывая условия (41)—(42), § 1, для $v_j^{(k)}(s)$, получаем

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{d\Omega_j^{(m+1)}}{ds}\right] = \bar{q}(s)\, \Omega_j^{(m)}(s, \hbar),$$

$$\Omega_1^{(m+1)}(-1, \hbar) = \frac{d\Omega_1^{(m+1)}}{ds}(-1, \hbar) = 0, \quad \Omega_2^{(m+1)}(1, \hbar) = \frac{d\Omega_2^{(m+1)}}{ds}(1, \hbar) = 0.$$

Отсюда находим

$$\Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar) = \int_{-1}^{s} \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^{t} \bar{q}(\lambda)\, \Omega_1^{(m)}(\lambda, \hbar)\, d\lambda\right] dt,$$

$$\Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar) = \int_{s}^{1} \bar{p}(t) \left[\int_{t}^{1} \bar{q}(\lambda)\, \Omega_2^{(m)}(\lambda, \hbar)\, d\lambda\right] dt.$$

Учитывая затем условия $M_1 \leqslant \bar{p} \leqslant M_2$, $\bar{q} \leqslant M_3$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar) &\leqslant \varkappa^2 \int_{-1}^{s}\int_{-1}^{t} \Omega_1^{(m)}(\lambda, \hbar)\, d\lambda\, dt, \\ \Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar) &\leqslant \varkappa^2 \int_{s}^{1}\int_{t}^{1} \Omega_2^{(m)}(\lambda, \hbar)\, d\lambda\, dt. \end{aligned} \tag{20}$$

Нетрудно показать, что для $\Omega_j^{(0)}(s, \hbar) = v_j(s, \hbar)$ справедливы оценки вида

$$\Omega_1^{(0)}(s, \hbar) \leqslant M\varkappa(1+s), \qquad \Omega_2^{(0)}(s, \hbar) \leqslant M\varkappa(1-s). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует (19).

Обратимся теперь к функции

$$v_3(s, \hbar) = \Pi_3^{(m)}(s, \hbar) + \hbar^{2m+2}\Omega_3^{(m+1)}(s, \hbar), \tag{22}$$

где $\Pi_3^{(m)}(s, \hbar) = \sum_{k=0}^{m} v_3^{(k)}(s)\, \hbar^{2k}$ — полином степени m относительно $\zeta = \hbar^2$.

Вводя функцию Грина

$$G^{\hbar}(s, t) = \begin{cases} \dfrac{v_1(s, \hbar)\, v_2(t, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s < t, \\[2ex] \dfrac{v_1(t, \hbar)\, v_2(s, \hbar)}{v_1(1, \hbar)}, & s > t, \end{cases} \tag{23}$$

представим решение краевой задачи

$$\mathcal{L}^* v_3 = -\bar{f}(s), \quad v_3(\pm 1, \hbar) = 0$$

в виде

$$v_3(s, \hbar) = \int_{-1}^{s} G^{\hbar}(s, t)\, \bar{f}(t)\, dt. \tag{24}$$

Учитывая затем, что функция $1/v_1(1, \hbar)$ аналитична в некоторой области $|\zeta| \leqslant \zeta_0$ комплексного переменного $\zeta = \hbar^2$, нетрудно убедиться в аналитичности функции $\Omega_3^{(m+1)}(s, h)$ для достаточно малых $\hbar \leqslant \bar{h}_0$. Отсюда следует ее ограниченность:

$$|\Omega_3^{(m+1)}(s, \hbar)| \leqslant M, \quad \hbar \leqslant \bar{h}_0, \tag{25}$$

где M—положительная постоянная, не зависящая ни от $\hbar$, ни от номера m.

Таким образом, оценка вида (25) имеет место для всех шаблонных функций.

4. Точность усеченной схемы

Для того чтобы определить точность усеченной схемы, т. е. оценить норму $\|\overset{(m)}{y^h} - u\|_1$, найдем сначала величину погрешности, допускаемой при замене шаблонных функционалов

$$A^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \Delta], \quad \Phi^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s), \Delta], \quad D^h[\bar{q}(s), \bar{p}(s), \Delta]$$

точной схемы функционалами $\overset{(m)}{A^h}$, $\overset{(m)}{D^h}$, $\overset{(m)}{\Phi^h}$ усеченной схемы.

Рассмотрим сначала разность

$$A^h - \overset{(m)}{A^h} = \frac{\hbar}{h}\left[v_1(\Delta, \hbar) - \Pi_1^{(m)}(\Delta, h)\right] = \hbar^{2m+2}\Omega_1^{(m+1)}(\Delta, h). \tag{26}$$

Из оценки предыдущего пункта, а также из условия (Н) (§ 1, п.1) следует, что

$$|A^h - \overset{(m)}{A^h}| \leqslant M(h^*)^{2m+2}, \tag{27}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая ни от сетки, ни от m.

Разность $D^h - \overset{(m)}{D^h}$ представим в виде

$$D^h - \overset{(m)}{D^h} =$$

$$= \frac{\hbar^{2m+2}}{v_1(\Delta, \hbar)}\left[\int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s)\,\Omega_1^{(m+1)}(s, \hbar)\, ds - \frac{\Omega_1^{(m+1)}(\Delta, \hbar)}{\Pi_1^{(m)}(\Delta, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s)\,\Pi_1^{(m)}(s, h)\, ds\right] +$$

$$+ \frac{\hbar^{2m+2}}{v_2(\Delta, \hbar)}\left[\int_{\Delta}^{1} \bar{q}(s)\,\Omega_2^{(m+1)}(s, \hbar)\, ds - \frac{\Omega_2^{(m+1)}(\Delta, h)}{\Pi_2^{(m)}(\Delta, h)} \int_{\Delta}^{1} \bar{q}(s)\,\Pi_2^{(m)}(s, h)\, ds\right]. \tag{28}$$

В силу ограниченности снизу $p(x) \geqslant M_1 > 0$ имеем $v_j(\Delta, h) \geqslant M_1 \geqslant 0$, $\Pi_j^{(m)}(\Delta, h) \geqslant M_1 > 0$, $j = 1, 2$.

Учитывая затем, что $\Omega_j^{(m+1)}(s, \hbar) \leqslant M_0$ $(j = 1, 2)$, $\bar{q} \leqslant M_3$, получаем

$$|D^h - \overset{(m)}{D^h}| \leqslant \frac{4M_0M_3}{M_1}(h^*)^{2m+2} = M\cdot(h^*)^{2m+2}. \tag{29}$$

Аналогично поступаем и при оценке погрешности $\Phi^h - \overset{(m)}{\Phi}{}^h$, где

$$\Phi^h = \left(\hbar^2 D^h + \frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} + \frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)}\right) v_3(\Delta, h),$$

$$\overset{(m)}{\Phi}{}^h = \left(\hbar^2 \overset{(m)}{D}{}^h + \frac{1}{\Pi_1^{(m)}(\Delta, \hbar)} + \frac{1}{\Pi_2^{(m)}(\Delta, h)}\right) \Pi_3^{(m)}(\Delta, h).$$

В результате приходим к оценке типа (27) или (29):

$$|\Phi^h - \overset{(m)}{\Phi}{}^h| \leqslant M \cdot (h^*)^{2m+2}, \quad h^* \leqslant \bar{h}_0. \tag{30}$$

При этом коэффициенты $\bar{p}(s)$, $\bar{q}(s)$ и $\bar{f}(s)$ являются произвольными кусочно-непрерывными функциями.

Из (27), (22), (30) и леммы 4 следует

Теорема. *Усеченная разностная схема m-го ранга ($m \geqslant 0$) имеет $(2m+2)$-й порядок точности при $\|h\|_1 = h^* \to 0$ в классе $Q^{(0)}$ кусочно-непрерывных функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ на любой последовательности разностных сеток, удовлетворяющих условию*

$$0 < C_1 \leqslant \frac{h_{i+1}}{h_i} \leqslant C_2, \tag{H}$$

причем слоями,

$$\|\overset{(m)}{y}{}^h - u\|_0 \leqslant M \|h\|_0^{2m+2}, \quad \|h\|_0 \leqslant h_0, \tag{31}$$

где C_1, C_2, M и h_0 — положительные постоянные, не зависящие ни от номера m, ни от выбора сетки.

Замечания. 1. Теорема сформулирована для первой краевой задачи, однако может быть распространена и на случай третьей краевой задачи (п. 5). 2. Простейшей усеченной схемой является схема нулевого ранга, обеспечивающая второй порядок точности в классе $Q^{(0)}$ для любых сеток, удовлетворяющих (H).

Ее шаблонные функционалы определяются формулами

$$\overset{(0)}{A}[p(s)] = \frac{h}{h} \int_{-1}^{\Delta} p(s)\, ds = v_1^{(0)}(\Delta) \frac{h}{h}, \quad v_1^{(0)}(s) = \int_{-1}^{s} \bar{p}(s)\, ds, \tag{32}$$

$$\overset{(0)}{D}[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \Delta] = \frac{1}{v_1^{(0)}(\Delta)} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s)\, v_1^{(0)}(s)\, ds + \frac{1}{v_2^{(0)}(\Delta)} \int_{\Delta}^{1} \bar{q}(s)\, v_2^{(0)}(s)\, ds, \tag{33}$$

$$\overset{(0)}{\Phi}{}^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s), \Delta] = \left(\hbar^2 \overset{0}{D} + \frac{1}{v_1^{(0)}(\Delta)} + \frac{1}{v_2^{(0)}(\Delta)}\right) v_3^{(0)}(\Delta), \tag{34}$$

где

$$v_2^{(0)}(\Delta) = \int_{\Delta}^{1} \bar{p}(s)\, ds,$$

$$v_3^{(0)}(\Delta) = \frac{1}{v_1^{(0)}(1)} \left\{ v_1^{(0)}(\Delta) \int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^{t} \bar{f}(\lambda)\, d\lambda \right] dt - v_1^{(0)}(1) \int_{-1}^{\Delta} \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^{t} \bar{f}(\lambda)\, d\lambda \right] dt \right\}.$$

При этом функционалы $\overset{(0)}{A}$ и $\overset{(0)}{D}$ не зависят от h, т. е. являются каноническими (см. [1], [2], [3]).

5. Усеченные разностные краевые условия

Рассмотрим теперь краевое условие 3-го рода

$$lu = \frac{u'(0)}{p(0)} - \sigma u(0) = \mu_1 \tag{35}$$

и соответствующую краевую задачу

$$L^{(p,\,q,\,f)} u = 0,\ lu = \mu_1,\ u(1) = \mu_2. \tag{36}$$

В п. 4, § 1, было показано, что точное краевое условие при $x = 0$ имеет вид

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h_1 A_1^h} - y_0 \left[\sigma + \frac{h_1}{A_1^h} \int_0^1 q(sh_1) \overset{(0)}{v_2}(s, h_1)\, ds\right] = \bar{\mu}_1, \tag{37}$$

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1 - \frac{h_1}{p(0)} \frac{dv_3^*}{ds}(0, h_1),\ A_1^h = \overset{(0)}{v_2}(0, h_1). \tag{38}$$

Заменяя в (37) шаблонные функции $v_2(s, h_1)$ и $v_3^*(s, h_1)$ полиномами $\Pi_2^{(m)}(s, h_1)$ и $\Pi_3^{*(m)}(s, h_1)$ степени $2m$ относительно $\hbar$, получим усеченное разностное краевое условие m-го ранга

$$\overset{m}{l_h} y = \overset{m}{\bar{\mu}}_1.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\overset{m}{\bar{\mu}}_1 - \bar{\mu}_1 = O(h_1^{2m+3}), \qquad \overset{m}{l_h} u - l_h u = O(h_1^{2m+2}).$$

Отсюда следует, что решение разностной краевой задачи

$$\overset{m}{L_h}{}^{(p,\,q,\,f)} y_i = 0,\quad 0 < i < N,\quad \overset{m}{l_h} y = \overset{m}{\bar{\mu}}_1,\quad y_N = \mu_2,$$

с усеченной схемой $\overset{m}{L_h}{}^{(p,\,q,\,f)}$ и усеченным краевым условием m-го ранга имеет точность $(2m + 2)$-го порядка относительно решения краевой задачи (36).

Усеченное условие нулевого ранга имеет вид

$$y_0 = \nu_1 y_1 + \eta_1,$$

где

$$\nu_1 = \left\{1 + h_1 A_1 \left[\sigma + \frac{1}{h_1 A_1} \int_0^{h_1} q(x) \left(\int_0^x p(\xi)\, d\xi\right) dx\right]\right\}^{-1}, \quad A_1 = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} p(x)\, dx,$$

$$\eta_1 = \left[\mu_1 - \frac{1}{h_1 A_1} \int_0^{h_1} p(x) \left(\int_0^x f(\xi)\, d\xi\right) dx\right] h A_1 \nu_1.$$

Это условие можно заменить эквивалентным ему по точности, но более простым условием

$$\nu_1 = \{1 + h_1 p_0 (\sigma + 0{,}5\, h q_0)\}^{-1},\quad \eta_1 = h p_0 \nu_1 (\mu_1 - 0{,}5 h q_0).$$

Поступила в редакцию
3. 03. 1961

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности. Докл. АН СССР, 1960, **131**, № 3, 514—517.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. О канонических однородных разностных схемах. Докл. АН СССР, 1960, **131**, № 4, 761—764.
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 5—63.