Доклады Академии наук СССР
1960. Том 131, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

О КАНОНИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

п. 1. В статьях ([1-3]) рассматривались однородные трехточечные разностные схемы для решения класса краевых задач

$$L^{(k,q,f)}u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \tag{1}$$
$$0 < K_1 \leqslant k(x) \leqslant K_2, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant K_2, \quad |f(x)| \leqslant K_2,$$

зависящего от выбора коэффициентов $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ из некоторого функционального семейства.

Пусть $S_N = \{x_0 = 0,\ x_1 = h, \ldots, x_i = ih, \ldots, x_N = Nh = 1\}$ — равномерная разностная сетка. Мы будем рассматривать однородные трехточечные разностные схемы вида

$$L_h^{(k,q,f)}y_i = L_h^{(k)}y_i - D_i^{(h,q)}y_i + F_i^{(h,f)},$$
$$L_h^{(k)}y_i = \frac{1}{h^2}\left[B_i^{(h,k)}(y_{i+1} - y_i) - A_i^{(h,k)}(y_i - y_{i-1})\right]. \tag{2}$$

Однородность схемы означает, что ее коэффициенты имеют вид

$$A_i^{(h,k)} = A^h[\bar{k}_i(s)], \quad B_i^{(h,k)} = B^h[\bar{k}_i(s)], \quad \bar{k}_i(s) = k(x_i + sh), \quad -1 < s < 1$$
$$D_i^{(h,q)} = D^h[q(x_i + sh)], \quad F_i^{(h,f)} = F^h[f(x_i + sh)], \quad -0{,}5 < s < 0{,}5,$$

где A^h, B^h, D^h и F^h — некоторые, вообще говоря, нелинейные, функционалы, определенные на множестве кусочно-непрерывных функций Q_0 и параметрически зависящие от шага сетки h.

Исходное семейство разностных схем определяется заданием класса функционалов, при помощи которых вычисляются коэффициенты схемы.

п. 2. Класс функционалов $A^h[\psi(s)]$ мы зададим при помощи условий

(A_1). Функционал $A^h[\psi]$ имеет дифференциал 3-го порядка по h, так что

$$A^h[\psi] = A^{(0)}[\psi] + hA^{(1)}[\psi] + h^2A^{(2)}[\psi] + h^3A^{(3)}[\psi] + h^3\rho(h),$$

где $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, а функционал $A^{(m)}[\psi]$ имеет дифференциал порядка $3 - m$ $(m = 0, 1, 2, 3)$, так что можно, например, для $m = 1$ написать

$$A^{(1)}[f + \delta\varphi] = A^{(1)}[f] + \delta A_1^{(1)}[f, \varphi] + \delta^2 A_2^{(1)}[f, \varphi] + \delta^2\rho(\delta),$$

где $\rho(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

(A_2) $A^h[\varphi]$ и все функционалы $A^{(m)}[\psi]$ $(m = 0, 1, 2, 3)$ являются однородными функционалами 1-й степени:

$A^h[c\psi] = cA^h[\psi]$, где $c > 0$ — постоянная; $A^{(m)}[c\psi] = cA^{(m)}[\psi]$, причем $A^h[1] = 1$.

(A_3) $A^h[\psi]$ и все функционалы $A^{(m)}[\psi]$ $(m = 0, 1, 2, 3)$ являются монотонно неубывающими, т. е.

$$A^h[\psi_2] \geqslant A^h[\psi_1], \quad \text{если } \psi_2 \geqslant \psi_1.$$

Мы будем предполагать, что функционалы A^h, B^h, D^h и F^h удовлетворяют условиям (A_1), (A_2), (A_3), причем D^h и F^h линейны.

Из условий (A_1) и (A_2) следует, что

$$A^h[k(x+sh)] = k(x) + hk'(x)A_1^{(0)}[s] + \\ + h^2\left\{k'(x)A_1^{(1)}[s] + \frac{(k'(x))^2}{k(x)}A_2^{(0)}[s] + \frac{k''(x)}{2}A_1^{(0)}[s^2]\right\} + O(h^3), \qquad (3)$$

где $A^{(m)}[\psi(s)] = A^{(m)}[1, \psi(s)]$.

Отметим, что в работах [2,3] изучался более узкий класс функционалов и, следовательно, более узкое исходное семейство разностных схем.

п. 3. Если функционал $A^h[\psi]$ не зависит от параметра h, то он называется канонически м и обозначается $A[\psi]$. Разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$, коэффициенты которой определяются через канонические функционалы, называется канонической схемой.

Если выполнено условие

$$B_i^{(h,k)} = A_{i+1}^{(h,k)}, \quad \text{т. е.} \quad B^h[\psi(s)] = A^h[\psi(s+1)] \qquad (4)$$

для любой функции из Q_0, то разностная схема $L_h^{(k)}$ (и $L_h^{(k,q,f)}$) называется консервативной; ее можно записать так:

$$L_h^{(k)}y_i = \frac{1}{h^2}\Delta(A_i^{(h,k)}\nabla y_i), \quad \text{где } \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1}. \qquad (5)$$

Из условия (4) следует, что функционал $A^h[\psi(s)]$ не зависит от значений $\psi(s)$ при $0 < s < 1$, а $B^h[\psi(s)]$ не зависит от значений $\psi(s)$ при $-1 < s < 0$.

п. 4. Одной из характеристик разностной схемы является ее интегральный порядок точности по h, т. е. порядок точности разности $z_i = y_i - u(x_i)$ при $h \to 0$, где $u(x)$ — решение задачи (1), а y_i — решение разностной краевой задачи

$$L_h^{(k,q,f)}y_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \qquad (6)$$

Функция z_i определяется условиями

$$L_h^{(k,q)}z_i = -\varphi_i, \quad z_0 = 0, \quad z_N = 0, \qquad (7)$$

где $\varphi_i = \varphi(x_i, h; u(x_i))$.

Напомним, что разность $\varphi(x, h; v) = L_h^{(k,q,f)}v - L^{(k,q,f)}v$, где $v = v(x)$ — любая достаточно гладкая функция, называется погрешностью аппроксимации схемы.

Если $v = u(x)$ есть решение дифференциального уравнения (1), то мы будем говорить о погрешности аппроксимации $\varphi(x, h; u)$ на решении дифференциального уравнения. Может оказаться, вообще говоря, что порядок погрешности аппроксимации схемы на решении выше порядка аппроксимации на классе гладких функций $v(x)$.

В настоящей работе мы изучаем порядок точности разностных схем исходного семейства в классе C_m функций, имеющих непрерывную производную m-го порядка [1].

Порядок аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ определяется значениями моментов функционалов A^h, B^h, D^h и F^h.

Необходимое и достаточно условие 1-го порядка аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ имеет вид

$$B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] = 1. \qquad (8)$$

Чтобы схема имела 2-й порядок аппроксимации ($\varphi(x, h; v) = O(h^2)$), необходимо и достаточно выполнение условий

$$B_1^{(0)}[s] = -A_1^{(0)}[s] = 0{,}5, \quad B_1^{(1)}[s] = A_1^{(1)}[s]; \qquad (9)$$

$$B_2^{(0)}[s] = A_2^{(0)}[s], \quad B_1^{(0)}[s^2] = A_1^{(0)}[s^2], \quad D^{(0)}[s] = F^{(0)}[s] = 0. \qquad (10)$$

Условия (10) для симметричной схемы выполняются автоматически. При этом существенную роль играют условия нормировки, например $A^h[1] = 1$, из которого следует, что $A^{(0)}[1] = 1$, $A^{(m)}[1] = 0$ при $m > 0$.

п. 5. Теорема 1. *Для того чтобы исходная схема* $L_h^{(k,q,f)}$ *имела* n*-й* ($n = 1, 2$) *интегральный порядок точности в* $C_{m_k, m_q, m_f} = \{C_{m_k}, C_{m_q}, C_{m_f}\}$, $m_k \geqslant n+1$, $m_q \geqslant n$, $m_f \geqslant n$, *необходимо и достаточно, чтобы она имела* n*-й порядок аппроксимации**.

Теорема 2. *Любая консервативная схема из исходного класса имеет 1-й интегральный порядок точности в* C_{m_k, m_q, m_f} *для* $m_k \geqslant 2$, $m_q \geqslant 1$, $m_f \geqslant 1$.

Теорема 3. *Любая каноническая симметричная консервативная схема имеет 2-й порядок точности в* C_{m_k, m_q, m_f} *для* $m_k \geqslant 3$, $m_q \geqslant 2$, $m_f \geqslant 2$.

п. 6. Наряду с изучением точности разностных схем для решения некоторого класса задач, надо уметь оценивать погрешность, допускаемую при решении по данной схеме каждой индивидуальной задачи из рассматриваемого класса. Такая оценка точности может быть достигнута путем изучения асимптотики решения разностной краевой задачи при $h \to 0$. Прежде всего надо найти разложения по h (асимптотику) погрешности аппроксимации $\varphi(x, h; v) = L_h v - Lv$.

Ограничимся здесь вычислением коэффициента при наименьшей степени h для канонической консервативной схемы. Вводя $p(x) = 1/k(x)$, будем вместо $L_h^{(k)}$ писать

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta\left(\frac{\nabla y_i}{A_i}\right), \quad A_i = A[p(x_i + sh)],$$

где $A[\psi]$ — канонический функционал. Если $L_h^{(p,q,f)}$, кроме того, симметричная схема, то

$$\varphi(x, h; v) = h^2 \Phi(x, v) + O(h^4), \quad \Phi(x, v) = \frac{1}{12}\left\{\left[\frac{(pL^{(p)}v)'}{p}\right]' - \right.$$
$$\left. - 12A_2[s]\left[\frac{(p')^2 v'}{p^3}\right]' - 6\left[\frac{p'' v'}{p^2}\right]'\left(A_1[s^2] - \frac{1}{3}\right) + 6\left(F[s^2] f'' - D[s^2] q'' v\right)\right\},$$
$$L^{(p)} v = \left(\frac{v'}{p}\right)'.$$

В случае наилучшей канонической схемы (см. [3]) $A[\psi] = \int_{-1}^{0} \psi(s)\, ds$, $D[\psi] = F[\psi] = \int_{-0,5}^{0,5} \psi(s)\, ds$ имеем $A_1[s^2] = \frac{1}{3}$, $A_2[s] = 0$, $D[s^2] = F[s^2] = \frac{1}{12}$, и выражение для Φ сильно упрощается.

Будем говорить, что разностные схемы $L_h^{(p,q,f)}$ и $\overline{L}_h^{(p,q,f)}$ асимптотически эквивалентны в смысле аппроксимации, если $\Phi(x, v) = \overline{\Phi}(x, v)$ и, следовательно, $\varphi(x, h; v) - \overline{\varphi}(x, h; v) = O(h^4)$.

В нашем случае это значит, что

$$A_2[s] = \overline{A}_2[s], \quad A_1[s^2] = \overline{A}_1[s^2], \quad D[s^2] = \overline{D}[s^2], \quad F[s^2] = \overline{F}[s^2].$$

В частности, схема $\overline{L}_h^{(p)}$, у которой $\overline{A}_i = \frac{1}{3}(p_{i-1} + p_{i-0,5} + p_i)$ асимптотически эквивалентна наилучшей канонической схеме $L_h^{(p)}$, для которой $A_i = \int_{-1}^{0} p(x_i + sh)\, ds$.

* Условия дифференцируемости коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ могут быть существенно ослаблены. Этот вопрос будет рассмотрен в других статьях.

п. 7. Пользуясь асимптотикой для $\varphi(x, h; v)$, нетрудно получить асимптотическое разложение по h решения разностной краевой задачи (6) в виде $y_i = u(x_i) + h^2\tilde{z}(x_i) + O(h^4)$, где $\tilde{z}(x)$ — функция, определяемая из условий $L^{(p,q)}\tilde{z} = -\Phi(x, u)$, $\tilde{z}(0) = \tilde{z}(1) = 0$.

п. 8. Изучение асимптотики погрешности аппроксимации позволяет указать метод построения разностных схем повышенной точности. Рассматривая для схемы L_h, соответствующей линейному дифференциальному оператору L, асимптотику

$$\varphi(x, h; u) = h^n \Phi u + \ldots$$

и заменяя дифференциальный оператор Φu разностным оператором $\Phi_h u$, мы получим разностную схему

$$\tilde{L}_h u = L_h u - h^n \Phi_h u,$$

которая имеет более высокий порядок аппроксимации (выше n) на решении $u = u(x)$ уравнения $Lu = 0$ по сравнению со схемой L_h. Оператор Φu целесообразно предварительно преобразовать к оператору более низкого порядка, используя для этого уравнения $Lu = 0$. При этом можно добиться того, что оператор $\tilde{L}_h$ будет иметь ту же область определения, что и оператор L_h.

В нашем случае применение этого метода позволяет строить различные трехточечные разностные схемы $\tilde{L}_h^{(p,q,f)}$ повышенного порядка точности. Так, например, если $L_h^{(p,q,f)}$ — наилучшая каноническая схема или схема, ей асимптотически эквивалентная, то трехточечная однородная схема

$$\tilde{L}_h^{(p,q,f)} y_i = L_h^{(p)}\left(1 - \frac{h^2}{12} p_i q_i\right) y_i - \tilde{D}_i y_i + \tilde{F}_i =$$

$$= L_h^{(p,q,f)} y_i - \frac{h^2}{12}\left[L_h^{(p)}(p_i q_i y_i - p_i f_i) + \frac{1}{2}\left(L_h^{(1)} f_i - y_i L_h^{(1)} q_i\right)\right]$$

имеет 4-й интегральный порядок точности в классе гладких коэффициентов.

п. 9. Пусть при $x = 0$ задано краевое условие 3-го рода

$$lu = \frac{u'(0)}{p(0)} - \sigma u(0) = \mu_1.$$

Для соответствующего разностного краевого оператора l можно рассматривать погрешность аппроксимации как на любой достаточно гладкой функции $v = v(x)$, так и на решении дифференциального уравнения $L^{(p,q,f)} u = 0$. По аналогии с п. 8 можно построить двухточечный разностный краевой оператор $\tilde{l}_h$ любого порядка аппроксимации на решении $u = u(x)$. Например, оператор

$$l_h y = \frac{1}{hA_1}(y_1 - y_0) - y_0(\sigma + 0{,}5hq_0) + 0{,}5\,hf_0, \qquad A_1 = A\,[p(x_1 + sh)]$$

имеет 2-й порядок аппроксимации на решении ($\tilde{l}_h u - lu = O(h^2)$) (ср. с [4]).

Можно показать, что решение разностной краевой задачи

$$\tilde{L}_h^{(p,q,f)} y_i = 0, \quad \tilde{l}_h y_i = \mu_1, \quad y_N = \mu_2$$

имеет n-й порядок точности, т. е. $y_i - u(x_i) = O(h^n)$, если операторы $\tilde{l}_h$ и $\tilde{L}_h^{(p,q,f)}$ имеют n-й порядок аппроксимации на решении $u = u(x)$ уравнения $L^{(p,q,f)} u = 0$.

Поступило
31 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 122, № 4 (1958). [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 124, № 3 (1959). [3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 124, № 4 (1959). [4] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 131, № 3 (1960).