Раздел 1

Математическая физика

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА. 1*

А.А. САМАРСКИЙ

Решена задача об установлении температуры в ограниченной среде (стержень конечной длины) при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоемкость, и в предположении наиболее общей формы краевых условий. Исследованы свойства разрывных собственных функций соответствующей задачи Штурма - Лиувилля. Предложен метод определения тепловых констант (коэффициентов теплопроводности и температуропроводности) из наблюдений над нестационарным процессом нагревания исследуемого тела.

Очень часто возникают задачи о распространении тепла в среде, однородные свойства которой нарушаются наличием отдельных областей, например, G_1, G_2, ..., G_n, с повышенной теплопроводностью. Если размеры этих областей достаточно малы, а теплопроводящие свойства достаточно высоки, то можно пренебречь распределением температуры по их объему, считая, что все тепловые свойства каждого такого объема G_i характеризуются его теплоемкостью. Размеры G_i в этом случае не будут уже играть существенной роли, и данную задачу можно рассматривать, как задачу о распространении тепла в однородной среде, в которой имеются отдельные точечные массы с конечной теплоемкостью или, как мы будем говорить в дальнейшем, сосредоточенные теплоемкости.

В существующих динамических методах определения тепловых величин Ангстрема [1] и Кондратьева [2] для эксперимента создаются условия, направленные к исключению влияния нагревателя.

Между тем несомненно, что учет влияния нагревателя дает более полную характеристику теплового процесса. Такой учет может быть произведен соответствующей модификацией краевых условий,

*Вестник МГУ, №3, 1947 г., с. 85-102.

Настоящая статья представляет собой первую часть работы автора, выполненной под руководством чл.-корр. АН СССР А.Н. Тихонова. Автор учел также ряд ценных замечаний, сделанных Ю.Л. Рабиновичем.

если рассматривать нагреватель, как сосредоточенную теплоемкость. На это обстоятельство впервые указал в 1939 г. А.Н. Тихонов (в неопубликованной работе), который дал теорию метода определения тепловых констант, основанного на изучении нагревания неограниченной среды с учетом нагревателя.

В настоящей работе изучается нагревание ограниченной среды и дается соответствующий метод определения констант. В математическом отношении наша задача близка к кругу задач о колебаниях систем с сосредоточенными нагрузками. Такого рода задачи неоднократно ставились и решались, но исключительно для механических и электромагнитных систем. Еще Пуассон в 1820 г. исследовал вопрос о движении тела, подвешенного к концу упругой нити. Академик А.Н. Крылов [3] показал, что к этой задаче сводится теория индикатора паровой машины, крутильные колебания вала с маховиком на конце, изучение разного рода "дрожащих клапанов" и др. А.А. Витт [4], изучая колебания антенны, в заземленный конец которой включена катушка самоиндукции или конденсатор, пришел к задаче того же типа, что и рассмотренные выше. Особое практическое значение этот круг вопросов получил в связи с исследованиями вибраций крыла самолета, теория расчета которых с учетом сосредоточенных масс изложена в работе А.Н. Комая [5].

Перейдем к изложению предлагаемой работы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы ставим своей целью определение тепловых констант (т.е. коэффициентов теплопроводности k' и температуропроводности a^2) из процесса нагревания тонкого стержня (длины l), один конец которого граничит с печью, а второй изолирован.

Предположим, что:

1. Стержень сделан из однородного материала, который характеризуется константами k', a^2 и C_1 (теплоемкость единицы длины).

2. Радиальными потоками внутри стержня пренебрегаем и считаем, что температура во всех точках поперечного сечения одна и та же и описывается функцией $u(x,t)$, где x – расстояние от конца стержня, граничащего с печью, а t – время.

3. Печь сделана из материала с высокой теплопроводностью, а поэтому будем считать, что выравнивание температуры в печи

происходит достаточно быстро, так что температура печи описывается функцией $U(t)$.

4. Явления на границах печь – стержень, печь – воздух, стержень – воздух подчиняются закону Ньютона, так что:

a) тепловой поток из печи в стержень равен

$$h[U(t)-u(0,t)],$$

где $h = h'S_1$, h' – коэффициент теплоотдачи печи в стержень, S_1 – площадь поперечного сечения стержня, $[U(t)-u(0,t)]$ – температурный скачок па границе.

Тепловой поток из печи в воздух равен

$$\alpha_2[U(t)-u_0],$$

где $\alpha_2 = \alpha_2' S_2$, α_2' – коэффициент теплоотдачи печи воздуху, S_2 – поверхность печи, u_0 – температура окружающего воздуха.

b) Тепловой поток с единицы длины стержня в воздух равен

$$\alpha_1[u(x,t)-u_0],$$

где $\alpha_1 = \alpha_1' S_3$, α_1' – коэффициент теплоотдачи, S_3 – поверхность единицы длины стержня.

5.Температура окружающего воздуха u_0 постоянна, и принята за начало отсчета температуры, т. е. $u_0 = 0$.

Перейдем теперь к выводу условий, которым должны удовлетворять температура стержня $u(x,t)$ и температура печи $U(t)$.

Рассматривая, как обычно, бесконечно малый элемент длины dx и составляя для него уравнение теплового баланса, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = C_1\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 u(x,t). \tag{1}$$

Здесь $k = k'S_1$ – коэффициент теплопроводности, отнесенный ко всему поперечному сечению.

Разделив обе части (1) на k, получаем[1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u(x,t), \tag{1'}$$

где $a^2 = k/C_1$, $\beta^2 = \alpha_1/k$.

[1] k, в соответствии с пунктом 1, считаем постоянным.

Для печи, очевидно, уравнение теплового баланса будет иметь вид:

$$Q_0\alpha_2 U(t) - C_2\frac{dU(t)}{dt} = -\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}, \tag{2}$$

где Q_0 – количество тепла, выделяющееся в печи в единицу времени, $\alpha_2 U(t)$ – потеря на теплоотдачу в воздух, $C_2 dU/dt$ – потеря на нагревание самой печи, C_2 – теплоемкость печи, $\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$ – количество тепла, отдаваемое стержню.

Без ограничения общности можно считать, что в начальный момент (при $t = 0$) печь и стержень находились в ненагретом состоянии, т. е. имели температуру окружающего воздуха:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ U(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

На границе печь – стержень ($x = 0$), в соответствии со сделанным предположением (5), имеет место условие:

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h[U(t) - u(0,t)]. \tag{4}$$

Справа – количество тепла, вытекающее из печи, слева – количество тепла, втекающее в стержень.

На втором конце стержня (при $x = l$) – условие термоизоляции:

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0. \tag{5}$$

Прежде чем дать окончательную математическую формулировку поставленной задачи, заметим, что так как пространственная протяженность печи никак не входит ни в одно из написанных выше соотношений, то будем считать печь точечной и характеризовать ее точкой $x = 0$. Это позволит характеризовать температуру системы печь – стержень одной функцией $U(x,t)$, которая является разрывной функцией, имеющей конечный разрыв при $x = 0$, и аналитически выражается следующим образом:

$$U(x,t) = \begin{cases} U(t) & x = 0 \quad \text{(температура печи)}, \\ u(x,t) & 0 < x \le l \quad \text{(температура стержня)}. \end{cases} \tag{6}$$

Итак, задача сводится к определению функции $U(x,t)$ на отрезке $0 \le x \le l$, удовлетворяющей следующим условиям[2]:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t} + \beta^2 U(x,t) \quad & (0 < x < l)\\
U(x,0) = 0 \quad & (0 \le x \le l)\\
k\frac{\partial U}{\partial x}(l,t) = 0 \quad &\\
k\frac{\partial U}{\partial x}(0+0,t) = h[U(0+0,t) - U(0,t)] \quad &\\
Q_0 - \alpha_2 U(0,t) - C_2\frac{dU(0,t)}{dt} = -k\frac{\partial U}{\partial x}(0+0,t) \quad &
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

При этом ищутся решения, для которых функция $u(x,t) = U(x,t)$, определенная в интервале $0 < x \le l$, может быть непрерывно продолжена на $x = 0$, так что $U(0+0,t)$ – температура, а $-k\,\partial U/\partial x(0+0,t)$ – поток на конце стержня, граничащем с печью[3].

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решение задачи (I) будем искать в виде:

$$U(x,t) = \overline{U}(x) + V(x,t),$$

где $\overline{U}(x)$ – температура стационарного режима, $V(x,t)$ – отклонение от стационарного режима.

Стационарная температура должна определяться из условий:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\overline{U}(x)}{dx^2} &= \beta^2\overline{U}(x)\\
k\frac{d\overline{U}(x)}{dx}(l) &= 0\\
k\frac{d\overline{U}}{dx}(0+0) &= h[\overline{U}(0+0) - \overline{U}(0)]\\
Q_0 - \alpha_2\overline{U}(0) &= -k\frac{d\overline{U}}{dx}(0+0)
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II})$$

Решение этой задачи (II) берем в виде:

$$\overline{U}(x) = \overline{A}\,\mathrm{ch}\,\beta(x-l) \qquad (0 < x \le l). \tag{7}$$

Из условий (II_3), (II_4) находим:

$$\overline{A} = \frac{Q_0}{\alpha_2\,\mathrm{sh}\,\beta l\left[\coth\beta l + k\beta\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha_2}\right)\right]}. \tag{8}$$

[2]Условия задачи (I) будем обозначать (I_1), (I_2), (I_3) и т.д.
[3]Обозначим это условие через (I_6).

Стационарная температура стержня

$$\overline{U}(x) = \frac{Q_0 \operatorname{ch} \beta(x-l)}{\alpha_2 \operatorname{sh} \beta l \left[\coth \beta l + k\beta \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha_2}\right)\right]}. \tag{9}$$

Из (II_4) находим стационарную температуру печи:

$$\overline{U}(0) = \frac{Q_0}{\alpha_2} \left\{ 1 - \frac{k\beta}{\alpha_2 \left[\coth \beta l + k\beta \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha_2}\right)\right]} \right\}. \tag{10}$$

Впрочем, явное выражение этих функций нам не понадобится.

Отклонение от стационарной температуры

$$V(x,t) = U(x,t) - \overline{U}(x)$$

будет, очевидно, удовлетворять следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial V}{\partial t} + \beta^2 V(x,t) \quad (0 < x < l) \\ V(x,0) = -\overline{U}(x) \quad (0 \le x \le l) \\ k\frac{\partial V}{\partial x}(l,t) = 0 \\ k\frac{\partial V}{\partial x}(0+0,t) = h[V(0+0,t) - V(0,t)] \\ \alpha_2 V(0,t) + C_2 \frac{dV(0,t)}{dt} = k\frac{\partial V}{\partial x}(0+0,t) \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

Решение ищется обычным методом разделения переменных:

$$V(x,t) = X(x)T(t). \tag{11}$$

Из (III) получаем для (x) краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} X''(x) + \frac{\lambda}{a^2}X(x) - \beta^2 X(x) = 0 \quad (0 < x < l) \\ kX'(l) = 0 \\ kX'(0+0) = h[X(0+0) - X(0)] \\ C_2\lambda X(0) - \alpha_2 X(0) = -kX'(0+0) \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

При этом для функции $T(t)$ имеем:

$$T(t) = e^{-\lambda t}. \tag{12}$$

Как будет показано в дальнейшем[4], эта краевая задача имеет бесчисленное множество собственных значений

[4]В части II нашей работы.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, которым соответствуют собственные функции $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_n(x), \ldots$ $(0 \le x \le l)$, причем каждому собственному значению λ_n соответствует только одна собственная функция $X_n(x)$. Эти собственные функции $\{X_n(x)\}$ непрерывны в области $(0 < x \le l)$, но терпят разрыв при $= 0$, так что можно записать:

$$X_n(x) = \begin{cases} Y_n(x) & (0 < x < l) \\ Z_n & (x = 0), \end{cases}$$

где $Y_n(x)$ соответствует точкам стержня, а Z_n – печке. Это обстоятельство является следствием наличия перепада температур между печкой и стержнем. Функции $\{X_n(x)\}$ удовлетворяют условиям ортогональности с нагрузкой на отрезке $0 \le x \le l$ (см. след. §).

Решение (IV) будем искать в виде:

$$X_n(x) = a_n \cos\sqrt{\lambda_n/a^2 - \beta^2}\,(x - l).$$

Из (IV_3) и (IV_4) получаем трансцендентное уравнение:

$$-\frac{\cot l\sqrt{\lambda/a^2 - \beta^2}}{\sqrt{\lambda/a^2 - \beta^2}} + \frac{k}{\alpha_2 - C_2\lambda} = -\frac{k}{h}. \tag{13}$$

Нетрудно показать, что все значения λ действительны.

Поэтому могут быть лишь две возможности:

1. $\sqrt{\lambda/a^2 - \beta^2} = i\rho$, где ρ – действительное число. Отсюда $\lambda = a^2(\beta^2 - \rho^2)$, то есть $\lambda < a^2\beta^2$.

В этом случае уравнение (13) переходит в следующее (если учесть, что $\operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{cth} x$):

$$\frac{\operatorname{cth}\rho l}{\rho} + \frac{k}{\alpha_2 + C_2a^2(\rho^2 - \beta^2)} = -\frac{k}{h}. \tag{14}$$

Сравнение знаков правой и левой частей показывает, что для $\lambda < 0$, то есть для $\beta^2 < \rho^2$, это уравнение не имеет корней. Если $\alpha_2 < C_2a^2\beta^2$, то при $0 < \rho < \sqrt{\beta^2 - \alpha_2/(C_2a^2)}$ левая часть уравнения монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно, существует один действительный корень ρ_0, которому соответствует собственная функция $X_0(x) = A_0 \operatorname{ch} \rho_0(x - l)$. При $\alpha_2 > C_2a^2\beta^2$ уравнение (14) не имеет корней.

2. $\sqrt{\lambda/a^2 - \beta^2} = \nu$, где ν вещественно и $\lambda = a^2(\beta^2 + \nu^2)$, то есть $\lambda > a^2\beta^2$. В этом случае уравнение для собственных значений:

$$-\frac{\operatorname{cth}\nu l}{\nu} + \frac{k}{\alpha_2 - C_2a^2(\beta^2 + \nu^2)} = -\frac{k}{h}, \tag{15}$$

как показывает рассмотрение графиков правой и левой частей, имеет бесчисленное множество вещественных корней $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$, которым соответствуют собственные функции $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_n(x) = A_n \cos \nu_n(x - l), \ldots$ Соответствующие значения для

$$\lambda_n = a^2(\nu^2 + \beta^2) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из (13) легко находится асимптотическое выражение для собственных значений:

$$\nu_n \sim \pi n/l$$

и, следовательно,

$$\lambda_n \sim a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Итак, собственные функция пашей задачи Штурма-Лиувилля имеют вид:

при $\alpha_2 < C_2 a^2 \beta^2$:

$$\left.\begin{aligned} X_1(x) &= \begin{cases} a_1 \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - \mu_1^2}\,(x - l) & (0 < x \le l) \\ a_1 \dfrac{k\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2}\ \operatorname{sh} l\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2}}{C_2 a^2 \mu_1^2 - \alpha_2} & (x = 0) \end{cases} \\ \underset{(n=2,3,\ldots)}{X_n(x)} &= \begin{cases} a_n \cos \sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}\,(x - l) & (0 < x \le l) \\ a_n \dfrac{k\sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}\ \sin l\sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}}{C_2 a^2 \mu_n^2 - \alpha_2} & (x = 0) \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

при $\alpha_2 > C_2 a^2 \beta^2$:

$$\underset{(n=1,2,3,\ldots)}{X_n(x)} = \left\{\begin{array}{ll} a_n \cos \sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}\,(x - l) & (0 < x \le l) \\ a_n \dfrac{k\sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}\ \sin l\sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}}{C_2 a^2 \mu_n^2 - \alpha_2} & (x = 0) \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Здесь $\mu_n^2 = \lambda_n / a^2$.

3. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Хотя условие ортогональности собственных функций нашей задачи легко следует из общей теории (как это будет показано в дальнейшем), мы получим это условие, исходя из простых физических соображений. Прежде всего уравнение (IV_1) может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX}{dx}\right) - \alpha_1 X(x) + \lambda C_1 X(x) = 0. \tag{18}$$

Предположим, что печь характеризуется не точкой $x = 0$, а отрезком $(-L, 0)$, где L – некоторая произвольная величина, причем теплоемкость единицы длины печи равна C_2' так что $C_2'L = C_2$. Тогда для собственных функций, определенных на отрезке $(-L, l)$ из уравнения (18) и однородных краевых условий, получим обычные условия ортогональности в виде:

$$\int\limits_{-L}^{l} X_m(x)X_n(x)C(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n) \tag{19}$$

(здесь $C(x)$ – теплоемкость единицы длины), или:

$$\int\limits_{-L}^{0} X_m(x)X_n(x)C_2'\,dx + \int\limits_{0}^{l} X_m(x)X_n(x)C_1\,dx = 0.$$

Если считать, как мы и делали в § 1, что по всей печке температура одна и та же и равна ее значению при $x = 0$, то

$$\int\limits_{-L}^{0} X_m(x)X_n(x)C_2'\,dx = X_m(0)X_n(0)\int\limits_{-L}^{0} C_2'\,dx = C_2X_m(0)X_n(0)$$

и (19) запишется в виде:

$$\int\limits_{0}^{l} X_m(x)X_n(x)C_1\,dx + C_2X_m(0)X_n(0) = 0 \qquad (m \neq n). \tag{20}$$

Такой же результат, несомненно, должен был бы получиться и при стремлении L к 0 в интеграле $\int\limits_{-L}^{l}$. Таким образом, функции $X_m(x)$ и $X_n(x)$, определенные на отрезке $0 \le x \le l$, неортогональны в прежнем смысле. Условие (20), которому они удовлетворяют, называют, следуя А. Кнезеру, условием ортогональности с нагрузкой; оно соответствует наличию в точке $x = 0$ сосредоточенной теплоемкости C_2.

К нему приводит также ряд задач на колебания струны с сосредоточенными массами и задач на установившиеся колебания в кабеле с сосредоточенными емкостями или самоиндукциями (наличие сосредоточенных масс и емкостей приводит к тому, что в краевые условия соответствующих задач Штурма - Лиувилля входит собственное значение λ).

Впервые задачи такого типа были исследованы А.Кнезером [6], в частности, он рассматривал колебания струны с распределенной плотностью $\rho(x)$, в некоторых точках которой $x_1, x_2, \ldots, x_p$ сосредоточены массы $M_1, M_2, \ldots, M_p$. В этом случае собственные функции соответствующей задачи Штурма - Лиувилля $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$ удовлетворяют требованию:

$$\int_0^l \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx + \sum_{k=1}^{p} M_k\varphi_i(x_k)\varphi_j(x_k) = 0 \qquad (i \neq j). \qquad (21)$$

А.Кнезер показал, что такая задача Штурма - Лиувилля эквивалентна так называемому нагруженному интегральному уравнению (belastete Integralgleichung), для которого справедлива вся теория Гильберта - Шмидта обычных интегральных уравнений с симметрическим ядром. Нетрудно видеть, что такого рода интегральное уравнение естественнее трактовать как уравнение, в котором интеграл взят в смысле Стильтьеса. А.Комай [5], исследуя вопрос о совместных крутильно-изгибных колебаниях крыла с сосредоточенными грузами, также пришел к условиям типа (21). Заметим, что условия (20) могут быть выведены п чисто формальным путем из уравнения и краевых условий (IV). Вывод мы здесь не приводим.

Нормируем собственные функции так, чтобы коэффициенты

$$a_n = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда норма

$$N\{X_n(x)\} = \int_{0+0}^{l} X_n^2(x) C_1\,dx + C_2 X_n^2(0)$$

или[5]

$$N\{X_n(x)\} = C_1 \left\{ \frac{1}{2} l - \frac{\sin 2l\sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}}{4\sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}} \right\} + \frac{C_2 k^2 (\mu_n^2 - \beta^2) \sin^2 l\sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}}{(C_2 a^2 \mu_n^2 - \alpha_2)^2}. \tag{22}$$

Асимптотическое выражение этой нормы имеет вид:

$$N\{X_n(x)\} \sim \frac{1}{2} C_1 l + O(1/n).$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Как будет показано в дальнейшем (ч. II), всякая функция $f(x)$, заданная на отрезке $0 \le x \le l$, удовлетворяющая краевым условиям (IV) и обладающая достаточной гладкостью, т.е. непрерывная и дважды непрерывно-дифференцируемая, на отрезке $0 \le x \le l$ (допускающая разрыв при $x = 0$), может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям краевой задачи (IV), т.е.,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m X_m(x) \qquad (0 \le x \le l), \tag{23}$$

что в силу разрывности в точке $x = 0$ как функции $f(x)$, так и собственных функций, эквивалентно двум равенствам:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m X_m(x) \qquad (0 < x \le l), \\ f(0) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m X_m(0) \qquad (x = 0). \end{aligned} \tag{23'}$$

Используя условия ортогональности (20), получаем из (23′):

$$a_n = \frac{\int\limits_{0+0}^{l} f(x)\, X_n(x)\, C_1\, dx + C_2 f(0)\, X_n(0)}{N\{X_n(x)\}} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{24}$$

где норма $N\{X_n\}$ определяется формулой (22).

Вернемся теперь к задаче (III).

Ее решение:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \qquad 0 \le x \le l, \;\; t \ge 0, \tag{25}$$

[5] Выражение для $N\{X_1\}$ в случае $\alpha_2 < C_2 a^2 \beta^2$ отдельно не выписываем.

где A_n – неизвестные пока коэффициенты, к вычислению которых мы и переходим. Написанный ряд (25) абсолютно и равномерно сходится для всех $0 \le x \le l$ и $t \ge 0$. В силу этого выполняется начальное условие

$$\lim_{t\to 0} V(x,t) = -\overline{U}(x),$$

т.е.

$$-\overline{U}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{25'}$$

причем ряд, стоящий справа, сходится равномерно и абсолютно.

Вычислим коэффициенты A_n, воспользовавшись формулой (24). В данном случае $f(x) = -\overline{U}(x)$ и

$$A_n = -\frac{\int\limits_{0+0}^{l} \overline{U}(x)\, X_n(x)\, C_1\, dx + C_2\overline{U}(0)\, X_n(0)}{N\{X_n(x)\}}.$$

Найдем, чему равен интеграл

$$\int\limits_{0+0}^{l} \overline{U}(x)\, X_n(x)\, C_1\, dx.$$

Из (II_1) имеем $\overline{U}(x) = \frac{1}{\beta^2}\overline{U}''(x)$, а из ($\mathrm{IV}_1$):

$$X_n''(x) = -(\mu_n^2 - \beta^2)\, X_n(x).$$

$$\int\limits_{0+0}^{l} \overline{U}(x)\, X_n(x)\, C_1\, dx = \frac{1}{\beta^2}\int\limits_{0+0}^{l} C_1\overline{U}''(x)\, X_n(x)\, dx =$$

$$= \frac{C_1}{\beta^2}\left[\overline{U}'(x)\, X_n(x)\right]_{0+0}^{l} - \frac{C_1}{\beta^2}\int\limits_{0+0}^{l} \overline{U}'(x)\, X_n'(x)\, dx =$$

$$= \frac{C_1}{\beta^2}\left[\overline{U}'(x)\, X_n(x)\right]_{0+0}^{l} - \frac{C_1}{\beta^2}\left[\overline{U}(x)\, X_n'(x)\right]_{0+0}^{l} + \frac{C_1}{\beta^2}\int\limits_{0+0}^{l} \overline{U}(x)\, X_n''(x)\, dx = \tag{25a}$$

$$= \frac{C_1}{\beta^2}\left\{\overline{U}(0+0)\, X_n'(0+0) - \overline{U}'(0+0)\, X_n(0+0)\right\} +$$

$$+\,C_1\int\limits_{0+0}^{l}\overline{U}(x)\,X_n(x)\,dx-\frac{\mu_n^2C_1}{\beta^2}\int\limits_{0+0}^{l}\overline{U}(x)\,X_n(x)\,dx.$$

Из условий (II_{3-4}) и (IV_{3-4}) находим:

$$\begin{aligned}
&k\overline{U}'(0+0)=\alpha_2\overline{U}(0)-Q_0\,,\\
&h\overline{U}(0+0)=\alpha_2\overline{U}(0)+h\overline{U}(0)-Q_0\,,\\
&kX_n'(0+0)=(\alpha_2-C_2a^2\mu_n^2)\,X_n(0),\\
&hX_n(0+0)=(\alpha_2-C_2a^2\mu_n^2)\,X_n(0)+hX_n(0).
\end{aligned}\tag{25b}$$

После подстановки (25b) в (25a) и приведения подобных членов получаем:

$$\int\limits_{0+0}^{l}\overline{U}(x)\,X_n(x)\,C_1\,dx=-C_2\overline{U}(0)\,X_n(0)+\frac{X_n(0)\,Q_0}{a^2\mu_n^2}$$

и

$$A_n=-\frac{Q_0X_n(0)}{\lambda_n\,N\{X_n(x)\}}\,.\tag{26}$$

Так как

$$\begin{gathered}
\nu_n=O(n),\quad \mu_n^2=O(n^2),\quad \lambda_n=O(n^2),\\
N\{X_n\}=O(1),\quad X_n(0)=O(1/n),
\end{gathered}$$

то

$$A_n=O\left(1/n^3\right).$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x)$ равномерно и абсолютно сходится. Отсюда вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда (25) для всех

$$t\geq 0\ \text{ и }\ 0\leq x\leq l.$$

Для $t>0$ ряд (25) можно почленно дифференцировать дважды по x и один раз по t, так как получающиеся в результате этого дифференцирования ряды будут тоже равномерно сходящимися (это следует из того, что все члены полученных рядов содержат множитель $\exp\{-a^2\mu_n^2t\}\ \sim\ \exp\{-a^2n^2t\}$, который для $t>0$ и обеспечивает сходимость).

Таким образом, мы нашли решение задачи (I), удовлетворяющее уравнению и краевым условиям, в следующем виде:

при $\alpha_2 < C_2 a^2 \beta^2$:

$$U(x,t) = \begin{cases} \overline{u}(x) + A_1 \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2-\mu_1^2}(x-l)\, e^{-a^2\mu_1^2 t} + \\ \quad + \sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n \cos \sqrt{\mu_n^2-\beta^2}(x-l)\, e^{-a^2\mu_n^2 t}, \quad 0 < x \le l,\ t \ge 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(температура стержня)}, \\ \overline{U} + A_1 \dfrac{k\sqrt{\beta^2-\mu_1^2}\, \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2-\mu_1^2}\, l}{C_2 a^2 \mu_1^2 - \alpha_2}\, e^{-a^2\mu_1^2 t} + \\ \quad + \sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n \dfrac{k\sqrt{\mu_n^2-\beta^2}\, \sin \sqrt{\mu_n^2-\beta^2}\, l}{C_2 a^2 \mu_n^2 - \alpha_2}\, e^{-a^2\mu_n^2 t}, \quad x = 0,\ t \ge 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(температура печи)}; \end{cases} \tag{27'}$$

при $\alpha_2 > C_2 a^2 \beta^2$:

$$U(x,t) = \begin{cases} \overline{u}(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cos \sqrt{\mu_n^2-\beta^2}(x-l)\, e^{-a^2\mu_n^2 t}, \quad 0 < x \le l,\ t \ge 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(температура стержня)}, \\ \overline{U} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{k\sqrt{\mu_n^2-\beta^2}\, \sin \sqrt{\mu_n^2-\beta^2}\, l}{C_2 a^2 \mu_n^2 - \alpha_2}\, e^{-a^2\mu_n^2 t}, \quad x = 0,\ t \ge 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(температура печи)}, \end{cases} \tag{27''}$$

где все коэффициенты A_n определяются по формуле (26).

Очевидно, что найденное решение удовлетворяет условию (I_6).

5. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ КОНСТАНТ

Константы, с которыми мы имеем дело в рассматриваемой задаче, делятся на две группы:

I. Константы печи; таковы α_2 – коэффициент теплоотдачи печи в воздух, C_2 – теплоемкость печи.

II. Константы материала, связанные с наличием исследуемого образца, таковы:

k – коэффициент теплопроводности, отнесенный ко всему поперечному сечению стержня;

h – коэффициент теплообмена печи со стержнем, отнесенный ко всему поперечному сечению стержня;

α_1 – коэффициент теплоотдачи стержня в воздух, отнесенный к единице длины;

a^2 – коэффициент температуропроводности;

C_1 – теплоемкость единицы длины (при этом $a^2 = k/C_1$).

Характеристики печи α_2 и C_2 должны быть известны заранее, перед началом измерений. Но они могут быть определены и из опыта, для чего следует поступить таким образом.

1. Для определения коэффициента теплоотдачи α_2 стержень отключается от печи и отверстие теплоизолируется (что может быть сделано с достаточной степенью точности в силу малости отверстия), затем печь нагревается до стационарной температуры. В этом случае уравнение (2) примет вид:

$$Q_0' - \alpha_2 U' = 0,$$

откуда

$$\alpha_2 = Q_0'/U'.$$

Величина Q_0' находится по формуле $Q_0 = 0{,}24\,JV$, где J – сила тока, а V – подводимое к печке напряжение. Стационарная температура печи $\overline{U}$ измеряется непосредственно с помощью термопары.

2. Для определения теплоемкости печи C_2 стержень отключается от печи, отверстие теплоизолируется и снимается кривая $U = U(t)$ при нагревании.

Уравнение (2) дает

$$\begin{gathered} Q_0 - \alpha_2 U - C_2 \frac{dU}{dt} = 0, \\ U(0) = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Решение (28)

$$U(t) = \frac{Q_0}{\alpha_2}\left(1 - \exp\{-\tfrac{\alpha_2}{C_2}t\}\right)$$

или, после введения $\theta = \alpha_2 t/C_2$ имеем

$$U(\theta) = \frac{Q_0}{\alpha_2}\left(1 - e^{-\theta}\right).$$

Далее, кривая $U = U(\theta)$ сравнивается с экспериментальной кривой $U = U(t)$ и таким образом определяется величина α_2/C_2, а так как коэффициент α_2 уже известен из п. 1, то отсюда находится теплоемкость C_2.

Мы рассмотрим отдельно два случая: стационарный режим известен (например, быстро достигается и поэтому может быть измерен) и стационарный режим трудно достижим, и все измерения ведутся при нестационарном процессе нагревания, именно при "регулярном" или "правильном" режиме. Поясним, что это значит.

Как было доказано выше, решение нашей задачи выражается функцией

$$U(x,t) = \overline{U}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \exp\{-a^2\mu_n^2 t\}, \tag{29}$$

где $\mu_n^2 = \lambda_n/a^2 - \beta^2$, а λ_n – собственные значения, определяемые из уравнения (13). Так как $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots$, то и $\mu_1^2 < \mu_2^2 < \ldots < \mu_{n-1}^2 < \mu_n^2 < \mu_{n+1}^2 < \ldots$

В первой стадии нагревания системы, т.е. при малых значениях времени t, несколько членов ряда (29), следующих за его старшим членом, будут величинами того же порядка, как и старший член. Однако ряд (29) – быстро сходящийся, и быстрота его сходимости тем больше, чем больше время t. С возрастанием t каждый член ряда в силу вышенаписанных неравенств делается исчезающе малым по сравнению с предыдущим, и сумма всего ряда будет отличаться на сколь угодно малую величину от старшего его члена; следовательно, температура $U(x,t)$ задолго до того, как стать физически стационарной, с достаточной точностью выражается формулой

$$U(x,t) = \overline{U}(x) + A_1 X_1(x) \exp\{-a^2\mu_1^2 t\} \qquad (0 \le x \le l). \tag{30}$$

Эта стадия процесса и называется "регулярным режимом". Мы будем производить измерения на регулярном режиме, т.е. пользоваться формулой (30), которая эквивалентна следующим двум равенствам:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \overline{u}(x) + A_1 X_1(x) \exp\{-a^2\mu_1^2 t\} \qquad (0 < x \le l), \\ U(t) &= \overline{U} + A_1 X_1(0) \exp\{-a^2\mu_1^2 t\} \qquad (x = 0). \end{aligned} \tag{30'}$$

Здесь $X_1(x)$ и $X_1(0)$ – собственные функции, определяемые формулами (16) и (17).

А. Стационарный режим известен

1. Определение коэффициента температуропроводности a^2. Прежде всего находится коэффициент β, для чего графически решается уравнение

$$\frac{\overline{u}(x_1)}{\overline{u}(x_2)} = \frac{\operatorname{ch}\beta\,(x_1 - l)}{\operatorname{ch}\beta\,(x_2 - l)}. \tag{31}$$

Измерение температуры производится при регулярном режиме. В первую очередь рассмотрим случай $\alpha_2 < C_2 a^2 \beta^2$.

Так как

$$u(x_1, t) - \overline{u}(x_1) = A_1 \operatorname{ch} \nu\,(x_1 - l) \exp(-\tau^2 t),$$
$$u(x_2, t) - \overline{u}(x_2) = A_1 \operatorname{ch} \nu\,(x_2 - l) \exp(-\tau^2 t),$$

где

$$\nu = \sqrt{\mu_1^2 - \beta^2}; \quad \tau^2 = a^2 \mu_1^2,$$

то

$$\frac{u(x_1, t) - \overline{u}(x_1)}{u(x_2, t) - \overline{u}(x_2)} = \frac{\operatorname{ch} \nu\,(x_1 - l)}{\operatorname{ch} \nu\,(x_2 - l)}, \tag{32}$$

откуда (графически) находится ν, а значит и $\mu_1^2 = \nu^2 + \beta^2$. Чтобы найти τ^2, поступаем так: строим экспериментальную кривую[6] $y_1 = \ln |U(t) - \overline{U}|$. Угловой коэффициент прямолинейной части этой кривой, соответствующей регулярному режиму, равен τ^2, как это видно из нижеописанного:

$$\ln |U(t) - \overline{U}| = \ln \left| \frac{k\nu \operatorname{sh} \nu l}{C_2 \tau^2 - \alpha_2} A_1 \right| - \tau^2 t.$$

Найдя τ^2, вычислим коэффициент $a^2 = \tau^2 / \mu_1^2$.

2. Определение коэффициента теплопроводности k.

В этом случае пользуемся формулой, соответствующей стационарному режиму,

$$k = \frac{(Q_0 - \alpha_2 \overline{U}) \operatorname{ch} \beta\,(l - x_1)}{\beta \operatorname{sh} \beta l\, \overline{u}(x_1)}, \tag{33}$$

где β определяется из уравнения

$$\frac{\overline{u}(x_1)}{\overline{u}(x_2)} = \frac{\operatorname{ch} \beta\,(l - x_1)}{\operatorname{ch} \beta\,(l - x_2)}$$

(здесь x_1 и x_2 – точки на стержне), а остальные величины имеют прежний смысл.

3. Коэффициент теплообмена h печи со стержнем можно найти из уравнения собственных значений

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{C_2 \tau^2 - \alpha_2} - \frac{\coth \nu l}{k \nu}. \tag{34}$$

[6] Тот же результат можно получить, исходя из кривой $y = \ln[u(x,t) - \overline{u}(x)]$, но температура печи может быть измерена с большей степенью точности.

Заметим, что для проверки, в качестве контрольной формулы, можно воспользоваться формулой

$$u(x_1) = \frac{Q_0 \operatorname{ch} \beta\,(x_1 - l)}{\alpha_2\,[\,\operatorname{ch} \beta l + k\beta(1/h + 1/\alpha_2)]}\,, \tag{35}$$

где $\overline{u}(x_1)$ измеряется непосредственно, Q_0 вычисляется по данным силе тока и напряжению в цепи печи, остальные величины нами уже найдены согласно (31), (33), (34).

4. Коэффициент теплоотдачи стержня в воздух

$$\alpha_1 = \beta^2 k. \tag{36}$$

Во втором случае, когда $\alpha_2 \geq C_2 a^2 \beta^2$, можно воспользоваться той же схемой, только нужно взять другое выражение для собственных функций, именно

$$X_1(x) = \cos\sqrt{\mu_1^2 - \beta^2}(x - l)\,, \quad X_1(0) = \frac{k\sqrt{\mu_1^2 - \beta^2} \sin\sqrt{\mu_1^2 - \beta^2}\,l}{C_2 a^2 \mu_1^2 - \alpha_2}\,.$$

Вместо формул (31)-(36) мы получаем аналогичные формулы, в которых гиперболические функции заменены тригонометрическими.

В. Стационарный режим неизвестен

Все измерения ведутся на регулярном режиме, поэтому мы пользуемся формулой (30′).

Прежде всего рассмотрим случай $\alpha_2 < C_2 a^2 \beta^2$ или $\alpha_2 < (C_2/C_1)\alpha_1$, который может быть легко реализован, если достаточно хорошо изолировать печь. Тогда

$$X_1(x) = \operatorname{ch}\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2}(x - l)\,, \quad X_1(0) = \frac{k\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2} \operatorname{sh}\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2}\,l}{C_2 a^2 \mu_1^2 - \alpha_2}\,.$$

Вводя обозначения $\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2} = \nu_1$ и $a^2\mu_1^2 = \tau^2$, получаем:

$$u(x,t) = \overline{u}(x) + A_1 \operatorname{ch}\nu\,(x - l)\exp(-\tau^2 t) \quad (0 < x \leq l),$$
$$U(t) = \overline{U} + A_1 \frac{k\nu \operatorname{sh}\nu l}{C_2\tau^2 - \alpha_2} \exp(-\tau^2 t) \qquad (x = 0).$$

Прежде всего снимаются кривые $u = u(x,t)$ в нескольких точках стержня (вообще говоря, достаточно измерений в двух точках, а измерения в других точках важны для контроля) и кривая $U = U(t)$.

После этого вычисление интересующих нас констант производится по схеме:

1. Определение коэффициента теплопроводности k.

Прежде всего находятся величины ν и τ^2.

а) Возьмем температуру в двух точках x_1 и x_2 в моменты времени t и σt:

$$u(x_1,\sigma t) - u(x_1,t) = A_1 \operatorname{ch} \nu\,(x_1-l) \exp\{-\tau^2 t\}[\exp\{-(\sigma-1)\,\tau^2 t\} - 1],$$
$$u(x_2,\sigma t) - u(x_2,t) = A_1 \operatorname{ch} \nu\,(x_2-l) \exp\{-\tau^2 t\}[\exp\{-(\sigma-1)\,\tau^2 t\} - 1],$$

отсюда

$$\frac{u(x_1,\sigma t) - u(x_1,t)}{u(x_2,\sigma t) - u(x_2,t)} = \frac{\operatorname{ch} \nu\,(x_1-l)}{\operatorname{ch} \nu\,(x_2-l)} \qquad (\sigma = 2,3,4,\ldots). \qquad (37)$$

Это уравнение решается графически относительно ν.

б) Далее, возьмем температуру печи в моменты t и $t+t_0$, где t_0 имеет некоторое постоянное значение, а t меняется; тогда

$$U(t+t_0) - U(t) = A_1 X_1(0) \exp\{-\tau^2 t\}[\exp\{-\tau^2 t_0\} - 1].$$

Так как t_0 фиксировано, то $[\exp\{-\tau^2 t_0\}-1] = \text{const}$; введем обозначение

$$A_1 X_1(0)\,[\exp\{-\tau^2 t_0\} - 1] = K \ (= \text{const}),$$

после чего

$$U(t+t_0) - U(t) = K \exp\{-\tau^2 t\},$$

откуда

$$\ln|U(t+t_0) - U(t)| = \ln K - \tau^2 t.$$

Отсюда видно, что для определения τ^2 следует построить график $\ln|U(t+t_0) - U(t)|$ (пользуясь экспериментальными данными); угловой коэффициент построенной таким образом прямой и даст нам значение τ^2, а отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат, даст нам величину $\ln K$; зная же $\ln K$ и τ^2, легко находим:

$$A_1 X_1(0) = A_1 \frac{k\nu \operatorname{sh} \nu l}{C_2\tau^2 - \alpha_2}.$$

Для контроля можно найти τ^2, пользуясь одной из кривых

$$u = u(x_i,t) \qquad (i = 2,3,\ldots).$$

Теперь, когда мы вычислим ν и τ^2, нахождение коэффициента теплопроводности не представляет никаких трудностей. Действительно,

$$\frac{U(\sigma t)-U(t)}{u(x_1,\sigma t)-u(x_1,t)}=\frac{k\nu\,\mathrm{sh}\,\nu l}{(C_2\tau^2-\alpha_2)\,\mathrm{ch}\,\nu\,(x_1-l)}\qquad(\sigma=2,3,4,\ldots),$$

откуда

$$k=\frac{U(\sigma t)-U(t)}{u(x_1,\sigma t)-u(x_1,t)}\,\frac{(C_2\tau^2-\alpha_2)\,\mathrm{ch}\,\nu\,(x_1-l)}{\nu\,\mathrm{sh}\,\nu l}. \tag{38}$$

Очевидно, $\nu\,\mathrm{sh}\,\nu l\neq 0$, так как

$$X_1(0)=\frac{k\nu\,\mathrm{sh}\,\nu l}{C_2\tau^2-\alpha_2}\neq 0.$$

2. Определение коэффициента температуропроводности a^2.

Пользуясь нашими обозначениями, перепишем выражение для коэффициента Фурье

$$A_1=-\frac{Q_0X_1(0)}{a^2\mu_1^2\,N\{X_1\}}$$

в развернутом виде

$$A_1=-Q_0\,\frac{k\nu\,\mathrm{sh}\,\nu l}{C_2\tau^2-\alpha_2}\left\{a^2\mu_1^2\left[C_1\,\frac{2\nu l+\,\mathrm{sh}\,2\nu l}{4\nu}+C_2\,\frac{k^2\nu^2\,\mathrm{sh}\,^2\nu l}{(C_2\tau^2-\alpha_2)^2}\right]\right\}^{-1}. \tag{39}$$

Коэффициент A_1 можно вычислить из формулы

$$u(x_1,\sigma t)-u(x_1,t)=A_1\,\mathrm{ch}\,\nu\,(x_1-l)\,[1-\exp\{-(\sigma-1)\,\tau^2t\}]\exp\{-\tau^2t\},$$

т.е.

$$A_1=\frac{u(x_1,\sigma t)-u(x_1,t)}{\mathrm{ch}\,\nu\,(x_1-l)\,[1-\exp\{-(\sigma-1)\,\tau^2t\}]\exp\{-\tau^2t\}}.$$

Аналогично найдем

$$B_1=A_1X_1(0)=\frac{U(\sigma t)-U(t)}{\exp\{-\tau^2t\}[1-\exp\{-(\sigma-1)\,\tau^2t\}]}.$$

Кроме того, B_1 можно найти так, как указано в 1. A_1 можно найти иначе:

$$\ln|u(x_1,t+t_0)-u(x_1,t)|=-\tau^2t+\ln|A_1\,\mathrm{ch}\,\nu\,(x_1-l)\,[\exp\{-\tau^2t_0\}-1]\,|.$$

Далее,

$$\frac{B_1}{A_1}=X_1(0)=\frac{k\nu\,\mathrm{sh}\,\nu l}{C_2\tau^2-\alpha_2},$$

$$A_1 = \frac{-Q_0 B_1/A_1}{a^2\mu_1^2 C_1 \left\{\dfrac{l}{2} + \dfrac{\operatorname{sh} 2\nu l}{4\nu}\right\} + C_2\tau^2 B_1^2/A_1^2}.$$

Так как $a^2 C_1 = k$, то в этом уравнении в качестве неизвестной остается только μ_1^2:

$$A_1^2 k\mu_1^2 (2\nu l + \operatorname{sh} 2\nu l) + 4C_2\tau^2 B_1^2\nu = -4\nu Q_0 B_1,$$

$$\mu_1^2 = \frac{4B_1\nu}{A_1^2 k}\,\frac{Q_0 - C_2\tau^2 B_1}{2\nu l + \operatorname{sh} 2\nu l}.$$

Коэффициент температуропроводности $a^2 = \tau^2/\mu_1^2$ или

$$a^2 = \tau^2 \frac{A_1^2 k}{4B_1\nu}\,\frac{2\nu l + \operatorname{sh} 2\nu l}{Q_0 - C_2\tau^2 B_1}. \tag{40}$$

3. Коэффициент теплообмена печи со стержнем h найдем из уравнения собственных значений (14):

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{C_2\tau^2 - \alpha_2} - \frac{\coth\nu l}{k\nu}. \tag{41}$$

4. Коэффициент теплоотдачи стержня в воздух

$$\alpha_1 = \beta_1^2 k, \tag{42}$$

где k известно из 2.

В случае $\alpha_2 \geq C_2 a^2\beta^2$ следует воспользоваться соответствующим образом модифицированными формулами (37)-(42), которые мы здесь не приводим.

Таким образом, мы показали возможность определения всех констант материала, основываясь только на измерениях при регулярном режиме.

В заключение укажем, что не ставя своей задачей проведение экспериментальных работ, мы, однако, в качестве иллюстрации применимости развитого выше метода определения тепловых констант произвели один опыт на известной установке Барата и Винтера, которой обычно пользуются для опытов при стационарном режиме.

Образцом служил металлический стержень длиной 22 *см* и диаметром 0,8 *см*. Все измерения велись при регулярном режиме, который достигался через 15-20 минут после включения печи, тогда как стационарная температура устанавливалась через 3 часа. Кроме данных нестационарного опыта мы пользовались измерениями на стационарном режиме. При этом вычисление коэффициента теплопроводности велось по формуле (33). Вычисления показали хорошее совпадение для значений коэффициента теплопроводности, вычисленных для регулярного режима ($k = 0{,}20$) и для стационарного режима ($k = 0{,}19$)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Angström.* Ann. d. Phys., 114, 513, 1861; 123, 628, 1864; *Е.Г. Швидковский.* Изучение температуропроводности металлов по методу Ангстрема, ЖТФ, т. VIII, вып.10, 1938.

2. *Г.М. Кондратьев.* Изв. Всесоюзн. теплотехнич. ин-та, 7(66), 1931; ЖТФ, т.1, вып. IV, 1931; Испытание на теплопроводность по методу регулярного режима, 1936; Исследования в области тепловых измерений и др.

3. *А.Н. Крылов.* Вибрация судов. 1935.

4. *А.А. Витт.* Неоднородная нагруженная антенна, ЖТФ, т.5, вып.1, 1928.

5. *А.И. Комай.* Труды ЦАГИ им. Жуковского, вып.472, 1940.

6. *A. Kneser.* Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik. 1922, SS.191 - 197; *A. Kneser.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t.38, 1914.

7. *Günter.* Studia Mathematica, t. IV, 1932.

8. *Lichtenstein.* Studia Mathematica, t. III, 1931.

9. *Гливенко.* Интеграл Стильтьеса, ОНТИ, 1936.