РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт математического моделирования

А. А. Самарский
П. Н. Вабищевич

АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ для задач МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Москва
«НАУКА»
2001

УДК 22.19
ББК 519.6
С 17

Рецензенты:
член-корреспондент РАН *Ю.П. Попов*
доктор физико-математических наук *А.В. Гулин*

А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич

Аддитивные схемы для задач математической физики. – М.: Наука, 2001. – 319 с.
ISBN 5-02-006505-6

В монографии рассмотрены аддитивные разностные схемы приближенного решения многомерных нестационарных задач для уравнений с частными производными. Выделены классы схем с расщеплением по пространственным переменным (схемы переменных направлений), схемы расщепления по физическим процессам. При использовании компьютеров параллельной архитектуры строятся схемы декомпозиции области – регионально-аддитивные схемы. Рассмотрены безусловно устойчивые аддитивные схемы многокомпонентного расщепления для эволюционных уравнений первого и второго порядков. Материал книги базируется на общей теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем.

Для специалистов по вычислительной математике, прикладному математическому моделированию, студентов старших курсов.

A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich

Additive schemes for problems of mathematical physics. – M.: Nauka, 2001. – 319 p.
ISBN 5-02-006505-6

In the monograph there are considered additive difference schemes to solve approximately multidimensional unsteady problems for PDEs. There are highlighted classes of schemes with splitting with respect to spatial variables (alternating direction schemes), schemes with splitting with respect to physical processes: Domain decomposition schemes – regionally-additive schemes – are constructed for parallel computers. Unconditionally stable additive schemes of multicomponent splitting are designed for evolutionary equations of the first and second order. The general theory of stability (wellposedness) for operator-difference schemes provides the basis of the book material.

For specialists in computational mathematics, mathematical modeling and graduated students.

ISBN 5-02-006505-6 © Издательство "Наука", 2001

Предисловие

Для численного решения задач математической физики широко используются разностные методы. В настоящее время глубоко проработаны вопросы аппроксимации дифференциальной задачи (построение дискретных аналогов) при использовании регулярных и нерегулярных расчетных сеток. Исследование разностных схем для нестационарных задач математической физики базируется на использовании общей теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем. Для решения сеточной задачи широкое распространение получили итерационные методы.

При приближенном решении краевых задач для многомерных уравнений с частными производными большое внимание уделяется построению аддитивных схем. Основная их особенность связана с переходом от сложной задачи к цепочке более простых. Примерами таких схем являются классические схемы переменных направлений, локально-одномерные схемы. По этой теме накоплен значительный теоретический материал, имеется большая вычислительная практика. Необходимо отметить решающее влияние на прогресс в данной области исследований именно российской школы вычислительной математики.

Классическими примерами аддитивных разностных схем являются схемы переменных направлений, локально-одномерные схемы. Они широко используются в вычислительной практике уже более 40 лет. Их исследование базируется на фундаментальном понятии суммарной аппроксимации. В настоящее время построены новые классы аддитивных разностных схем, существенно расширена область их применения. Это и стало основным побудительным мотивом к написанию предлагаемой книги.

В книге дается описание основных классов аддитивных операторно-разностных схем. Используется минимальный математический аппарат, связанный с базовыми свойствами операторов в конечномерных пространствах. Приведены также содержательные примеры по-

строения аддитивных разностных схем при решении типовых задач для уравнений с частными производными.

Излагаемый материал существенно дополняет круг вопросов, рассматриваемых в книгах по разностным методам приближенного решения краевых задач математической физики. Разностные методы хорошо представлены в учебных пособиях по общему курсу численных методов: А.А. Самарский "Введение в численные методы"(1997), А.А.Самарский и А.В. Гулин "Численные методы"(1989). Систематическому обсуждению всего комплекса проблем теории разностных схем посвящены книги: А.А. Самарский "Теория разностных схем"(1989), А.А.Самарский и А.В. Гулин "Устойчивость разностных схем"(1973).

Проблемы теории и практики аддитивных разностных схем обсуждались в Институте математического моделирования РАН, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. Внимательное и заинтересованное участие многих наших коллег способствовало успешной работе над этой книгой.

Основные обозначения

A, B, C, D, S — разностные операторы

E — единичный (тождественный) оператор

A^* — сопряженный оператор

A^{-1} — оператор, обратный оператору A

$A > 0$ — положительный оператор ($(Ay, y) > 0$, если $y \neq 0$)

$A \geq 0$ — неотрицательный оператор ($(Ay, y) \geq 0$)

$A \geq \delta E,\ \delta > 0$ — положительно определенный оператор

$A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ — самосопряженная часть оператора A

$A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*)$ — кососимметричная часть оператора A

$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}$ — p-компонентное расщепление оператора A

H — гильбертово пространство сеточных функций

$(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H

$\|\cdot\|$ — норма в H

$(y, v)_A = (Ay, v)$ — скалярное произведение в H_A (оператор $A = A^* > 0$)

$\|\cdot\|_A$ — норма в H_A

$L_m(\omega)$ — банахово пространство сеточных функций, $m = 1, 2, \infty$

$\|\cdot\|_m$ — норма в L_m

$\|A\|, \|A\|_m$ — норма разностного оператора A

$\mu[A], \mu_m[A]$ — логарифмическая норма разностного оператора A

M, M_α — положительные постоянные

Ω — расчетная область

$\partial\Omega$ — граница Ω

∇, grad — градиент

div, $\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ — дивергенция

ω — множество внутренних узлов

$\partial\omega$ — множество граничных узлов

h, h_α — шаги сетки по пространству

τ — шаг сетки по времени

σ, σ_α — весовые параметры разностной схемы

$y_x = \dfrac{y(x+h) - y(x)}{h}$ — правая разностная производная в точке x

$y_{\bar{x}} = \dfrac{y(x) - y(x-h)}{h}$ — левая разностная производная в точке x

$y_{\overset{\circ}{x}} = \frac{1}{2}(y_x + y_{\bar{x}})$ — центральная разностная производная в точке x

$y_{\bar{x}x} = \dfrac{y_x - y_{\bar{x}}}{h}$ — вторая разностная производная в точке x

$y = y_n = y(x, t_n)$ — значение сеточной функции в точке x на момент времени $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$

Введение

Аддитивные разностные схемы связываются с представлением оператора нестационарной задачи на сумму операторов более простой структуры. Переход на новый временной слой связывается с решением ряда цепочки более простых задач. Такие схемы в различных вариантах применяются для приближенного решения сложных нестационарных задач для уравнений с частными производными. В данной части работы отмечены основные публикации по построению и исследованию аддитивных разностных схем, кратко излагается содержание книги.

Теория разностных схем

Эффективное решение большинства прикладных задач предполагает широкое использование компьютеров и. следовательно, разработку ориентированных на компьютеры численных методов [26, 47, 87, 91, 93, 95. 99, 100, 108, 113, 115]. Вопросы построения и обоснования алгоритмов численного решения задач математической физики изучает теория разностных схем [47]. Теоретические исследования в области вычислительной математики, проведенные с конца 40-х годов по настоящее время, позволили разработать новое направление в теории разностных схем, включающее формулировку основных принципов построения разностных схем, математически строгое обоснование их устойчивости и сходимости, а также соответствующую алгоритмическую реализацию. На основе этих работ было создано и использовано для практических вычислений большое число алгоритмов решения различных задач математической физики, включая задачи теплофизики, газовой динамики, магнитной газовой динамики, физики плазмы, экологии и других важнейших проблем естествознания.

Теория разностных методов решения задач математической физики развивается в следующих основных направлениях:

1) построение дискретных аналогов, наследующих основные свойства дифференциальной задачи;

2) исследование устойчивости (корректности) разностной задачи;

3) эффективная вычислительная реализация на современной вычислительной технике.

Для построения разностных схем [47, 48, 62] сформулирован общий принцип консервативности разностных схем, как схем для которых выполнен соответствующий закон сохранения на дискретном уровне. Получены однородные разностные схемы для задач с разрывными коэффициентами, задач с обобщенными решениями. Для написания разностных схем на произвольных сетках предложен метод опорных операторов, который связан с согласованной аппроксимацией дифференциальных операторов векторного анализа (градиента, дивергенции, ротора). Предложен и применен общий методологический принцип получения разностных схем заданного качества на основе малых возмущений операторов (коэффициентов) разностной схемы — принцип регуляризации разностных схем.

При исследовании разностных схем для нестационарных задач математической физики широко используется общая теория устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [44, 47, 60, 61]. В настоящее время получены точные (совпадающие необходимые и достаточные) условия широкого класса двух- и трехслойных разностных схем в конечномерных гильбертовых пространствах. Необходимо особо подчеркнуть конструктивность общей теории устойчивости операторно-разностных схем, в которой критерии устойчивости формулируются в виде легко проверяемых неравенств для операторов. Среди наиболее важных обобщений отметим использование общей теории устойчивости для некорректных эволюционных задач [49, 54, 102] и для исследования проекционно-разностных схем (схем конечных элементов) [12, 52]. Получены также новые априорные оценки устойчивости в интегральных по времени нормах, на основе которых исследуется, в частности, сходимость разностных схем для задач с обобщенными решениями. Особого внимания заслуживают полученные априорные оценки сильной (коэффициентной) устойчивости при различных предположениях о возмущении операторов (коэффициентов) дифференциальной и разностной задач.

Для нахождения приближенного решения приходится решать большие системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Широкое распространение получили итерационные методы сеточных уравнений [47, 63]. Решена проблема упорядочивания итерационных параметров в чебышевских итерационных методах. На

общем операторном уровне проведена оптимизация выбора итерационных параметров для приближенного решения несамосопряженных задач. Предложены новые варианты итерационного метода переменных направлений. Особого внимания заслуживает попеременно-треугольный итерационный метод, который относится к классу наиболее быстрых и применяется для общих эллиптических сеточных уравнений.

Конструктивность общих результатов теории разностных методов проявляется в их широком применении при решении крупных научно-технических проблем, среди которых отметим задачи расчета ядерных и термоядерных изделий, проблему управляемого термоядерного синтеза. Разработанные разностные методы используются при численном исследовании процессов тепло- и массопереноса, при решении задач механики сплошной среды [64, 103].

При приближенном решении начально-краевых задач для многомерных уравнений с частными производными большое внимание уделяется построению аддитивных схем. Переход к цепочке более простых задач позволяет построить экономичные разностные схемы — расщепление по пространственным переменным. В ряде случаев полезно отделить подзадачи различной природы — расщепление по физическим процессам. В последнее время активно обсуждаются регионально-аддитивные схемы (схемы декомпозиции области), которые ориентированы на построение вычислительных алгоритмов для параллельных компьютеров. При многокомпонентном расщеплении (на три и более операторов) безусловно устойчивые аддитивные схемы строятся с привлечением нового понятия суммарной аппроксимации - на основе перехода к цепочке отдельных начальных задач для каждого операторного слагаемого. В ряде случаев аддитивные схемы многокомпонентного расщепления строятся без привлечения понятия суммарной аппроксимации. Эти вопросы нашли свое отражение в нашей книге.

Аддитивные разностные схемы

В работе излагаются некоторые подходы к построению приближенных методов решения задачи Коши для эволюционных уравнений первого и второго порядка, рассматриваемых в конечномерном гильбертовом пространстве H. Примером служит задача

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u^0, \tag{2}$$

где $f(t)$, u^0 — заданные, а $u(t)$ — искомая функции со значениями в конечномерном гильбертовом пространстве H. Будем считать, что оператор A является постоянным (не зависящим от t) и неотрицательным в H ($A \geq 0$).

В виде (1), (2) записывается задача Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du_i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\, u_j(t) = f_i(t), \quad t > 0,$$

$$u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

В этом случае $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — вектор неизвестных, $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ — заданный вектор правых частей, $A = \{a_{ij}\}$ — матрица с элементами a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

К (1), (2) мы приходим после дискретизации по пространственным переменным при численном решении начально-краевых задач для уравнений математической физики. При использовании конечно-разностных аппроксимаций [47] y есть сеточная функция, определенная в узлах расчетной сетки. При конечноэлементной аппроксимации [28, 112] в качестве неизвестных y выступают коэффициенты разложения приближенного решения по конечноэлементному базису.

При приближенном решении задачи (1), (2) будем использовать равномерную, для простоты, сетку с шагом $\tau > 0$ и пусть $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$, $y_n = y(t_n)$. Наиболее проста для вычислительной реализации явная схема, когда

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Но явные схемы относятся к классу условно устойчивых, когда устойчивость имеет место при ограничениях на шаг по времени. В случае рассматриваемой явной схемы эти ограничения имеют вид

$$\tau \leq \frac{2}{\|A\|}.$$

Необходимо ориентироваться на безусловно устойчивые разностные схемы. Примером служит чисто неявная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_{n+1} = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Вычислительная реализация неявных схем существенно сложнее, чем явных. Для нахождения приближенного решения на новом временном слое в случае (3) решается задача

$$(E + \tau A)\, y_{n+1} = y_n + \tau f_n.$$

Обращение оператора $E + \tau A$ — часто большая проблема. Поэтому естественно желание строить разностные схемы для решения нестационарных задач, которые были бы безусловно устойчивыми, а их реализация была бы существенно более простой, чем для неявных схем. Наиболее интересные результаты получены при учете специальной структуры оператора задачи A.

Определим класс задач (1), (2), когда для оператора A справедливо следующее p-компонентное аддитивное представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}. \tag{4}$$

Считаем, что операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ являются более простыми, чем A. Будем так организовать вычисления, чтобы переход на новый временной слой при приближенном решении задачи (1), (2) был бы в вычислительном плане не сложнее решения p задач для отдельных операторных слагаемых: $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, т.е. для уравнений типа

$$\frac{du^{(\alpha)}}{dt} + A^{(\alpha)} u^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t), \quad t > 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Такие разностные схемы мы будем называть **аддитивными разностными схемами**.

Простейшим примером аддитивной схемы при двухкомпонентном расщеплении

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} \tag{5}$$

будет явно-неявная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A^{(1)} y_{n+1} + A^{(2)} y_n = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

когда только часть оператора задачи A выносится на верхний временной слой.

Аддитивная разностная схема определяется, с одной стороны, выбором расщепления (4), заданием отдельных операторных слагаемых

$A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ и, с другой стороны, построением вспомогательных задач, организацией вычислений на основе решения более простых задач. Отметим некоторые общие возможности выделения операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Более подробно на содержательных примерах этот вопрос обсуждается в последних трех главах предлагаемой книги.

Классическими примерами аддитивных разностных схем являются экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики. Примерами простейших экономичных разностных схем могут служить хорошо известные схемы переменных направлений [84, 97], когда оператор двухмерной задачи представляется в виде суммы двух одномерных. В этом случае мы имеем аддитивные разностные **схемы расщепления по отдельным направлениям**.

Часто операторные слагаемые связываются с описанием процессов различной природы. Например, в задачах механики сплошной среды при описании процессов переноса субстанции можно выделить конвективный перенос за счет движения среды (оператор $A^{(1)}$) и за счет диффузии (оператор $A^{(2)}$). Чтобы подчеркнуть эту особенность задачи, говорят о **расщеплении по физическим процессам**.

При построении вычислительных алгоритмов решения нестационарных задач для уравнений с частными производными для современных параллельных компьютеров можно ориентироваться на использование методов декомпозиции (разделения) области [78, 83, 96]. Отдельный вычислительный узел (процессор) решает краевую задачу в отдельной подобласти. В этом случае мы имеем **расщепление по подобластям**. Соответствующие аддитивные разностные схемы названы **регионально-аддитивными**.

Необходимо заметить следующее. Исследование аддитивных схем для задач типа (1), (2), (4) проводится на основе общей теории устойчивости операторно-разностных схем [47, 61] при некоторых слабых ограничениях на операторные слагаемые $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Например, основные результаты удается получить для неотрицательных, в общем случае попарно неперестановочных $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Конкретная природа операторов учитывается при конкретизации оценок сходимости аддитивных разностных схем. В нашей работе мы формулируем общие условия устойчивости и сходимости различных классов аддитивных схем, а иллюстративные примеры построения конкретных аддитивных схем, которые легко умножить, приведены отдельно.

Основные результаты теории аддитивных разностных схем

История аддитивных разностных схем начинается с работ [84, 97], в которых для приближенного решения двухмерных параболических задач построены схемы переменных направлений. Эти схемы относятся к классу **экономичных разностных схем**. В них переход на новый временной слой осуществляется с числом арифметических действий на один узел расчетной сетки, которое не зависит от общего числа узлов, подобно простейшим явным разностным схемам.

В схеме переменных направлений в представлении (5) операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ суть одномерные разностные операторы. В схеме Дугласа–Рекфорда решение на новом временном слое находится из уравнений

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} + A^{(1)} y_{n+1/2} + A^{(2)} y_n = \varphi_n, \tag{6}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A^{(1)} y_{n+1/2} + A^{(2)} y_{n+1} = \varphi_n, \tag{7}$$

где $\varphi_n = f(t_{n+1/2})$. Эта схема безусловно устойчива (при всех $\tau > 0$) при неотрицательных операторах $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, и для разностного решения верна послойная априорная оценка

$$\left\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) y_{n+1} \right\| \le \left\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) y_n \right\| + \tau \|\varphi_n\|.$$

Схемы переменных направлений хорошо зарекомендовали себя в вычислительной практике и на их использование необходимо ориентироваться при двухкомпонентном расщеплении (5). Много работ посвящено исследованию новых вариантов схем переменных направлений и близких к ним. Мы не будем останавливаться на сколько-нибудь содержательном анализе имеющихся работ, отсылая читателя к книгам [19, 27, 44, 46]) и приведенным в них первоисточникам.

Принципиальной является проблема построения схем переменных направлений для общего многокомпонентного расщепления (4). Например, при построении экономичных разностных схем для приближенного решения трехмерных задач приходится ориетироваться на трехкомпонентное расщепление

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)}.$$

Легко написать схему расщепления, которая является прямым обобщением схемы (6), (7)

$$\frac{y_{n+1/3}-y_n}{\tau}+A^{(1)}y_{n+1/3}+A^{(2)}y_n+A^{(3)}y_n=\varphi_n,$$

$$\frac{y_{n+2/3}-y_n}{\tau}+A^{(1)}y_{n+1/3}+A^{(2)}y_{n+2/3}+A^{(3)}y_n=\varphi_n,$$

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+A^{(1)}y_{n+2/3}+A^{(2)}y_{n+2/3}+A^{(3)}y_{n+1}=\varphi_n.$$

Однако безусловную устойчивость удается доказать только при дополнительных и очень жестких условиях перестановочности операторных слагаемых $A^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,3$.

Для построения экономичных разностных схем для задачи (1) — — (3) Н.Н. Яненко предложен метод дробных шагов [71, 74]. В чисто неявной схеме покомпонентного расщепления приближенное решение находится из решения одномерных задач

$$\frac{y_{n+\alpha/p}-y_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau}+A^{(\alpha)}y_{n+\alpha/p}=\varphi_n^{(\alpha)},\quad \alpha=1,2,...,p \tag{8}$$

при использовании расщепления правой части

$$\varphi_n=\sum_{\alpha=1}^{p}\varphi_n^{(\alpha)},\quad n=0,1,\ldots \tag{9}$$

Устойчивость схемы (8), (9) легко устанавливается, однако остается проблема сходимости разностного решения к точному в силу того, что разностные уравнения (8) не аппроксимируют исходное уравнение (1).

Принципиальный шаг сделан А.А. Самарским в работе [31], в которой для исследования аддитивных разностных схем введено новое понятие суммарной аппроксимации. Цепочка уравнений (8) аппроксимирует уравнение (1) в суммарном смысле. А именно пусть $\psi_n^{(\alpha)}=O(1)$ — погрешность аппроксимации соответствующего разностного уравнения. Разностная схема (8), (9) аппроксимирует уравнение (1), если $\psi_n=\sum_{\alpha=1}^{2}\psi_n^{(\alpha)}\longrightarrow 0$ при измельчении расчетной сетки. На основе понятия суммарной аппроксимации удается доказать сходимость схем покомпонентного расщепления в сеточных гильбертовых и банаховых пространствах, базируясь на оценках устойчивости по начальным данным и правой части для отдельных уравнений схемы (8), (9).

Для построения схем второго порядка точности по τ (см. [68, 69]) используется идея симметризации. Повышение точности достигается за счет перехода от последовательности решения задач

$$A^{(1)} \longmapsto A^{(2)} \longmapsto \cdots \longmapsto A^{(p)}$$

к цепочке

$$A^{(1)} \longmapsto A^{(2)} \longmapsto \cdots \longmapsto A^{(p)} \longmapsto A^{(p-1)} \longmapsto \cdots \longmapsto A^{(1)}$$

при переходе на новый временной слой.

На основе идеи суммарной аппроксимации построены (см. [33, 35, 36, 39] локально-одномерные разностные схемы для приближенного решения краевых задач для параболических уравнений и систем. Отдельно внимания заслуживают работы по построению аддитивных разностных схем для уравнений гиперболического типа [21, 22, 34, 40].

Среди многих исследований по построению различных вариантов схем покомпонентного расщепления выделим работу [17], в которой приближенное решение задачи (1), (2), (4) определяется из

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n}{p\tau} + A^{(\alpha)} y_{n+1}^{(\alpha)} = \varphi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} y_{n+1}^{(\alpha)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Основное возможное преимущество этой аддитивно-усредненной разностной схемы связано с тем, что вспомогательные величины $y_{n+1}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ могут рассчитываться независимо. Это обстоятельство особенно важно при построении вычислительных алгоритмов для современных параллельных компьютеров.

Следующий важный шаг в теории аддитивных разностных схем сделан в работах [1, 3]. Вместо нахождения скалярной функции u из (1), (2), (4) ищется вектор $U = \{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}\}$. Каждая отдельная компонента определяется как решение однотипных задач

$$\frac{du^{(\alpha)}}{dt} + \sum_{\beta=1}^{p} A^{(\beta)} u^{(\beta)} = f(t), \quad t > 0,$$

$$u^{(\alpha)}(0) = u^0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Для решения этой системы уравнений используется, например, следующая векторная аддитивная разностная схема:

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A^{(\beta)} y_{n+1}^{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A^{(\beta)} y_n^{(\beta)} = \varphi_n,$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

В этом случае мы имеем схему полной аппроксимации — каждое разностное уравнение аппроксимирует уравнение (1). К достоинствам векторных аддитивных схем следует отнести простоту построения схем повышенной точности. Кроме того, без принципиальных осложнений удается рассмотреть аддитивные схемы для эволюционных уравнений второго порядка, когда решается задача Коши для уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = f(t), \quad t > 0$$

при расщеплении (4).

Общим методологическим принципом получения разностных схем заданного качества является принцип регуляризации разностных схем [41]. Он основан на использовании общих результатов теории устойчивости операторно-разностных схем и возмущении коэффициентов разностной схемы. На его основе получены устойчивые разностные схемы для многих задач математической физики, классы монотонных разностных схем, строятся итерационные методы. Такой общий подход используется и для конструирования аддитивных разностных схем.

На основе принципа регуляризации выделен [57] новый класс аддитивных разностных схем, которые относятся к классу схем полной аппроксимации. Запишем для (1), (2) схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (E + \tau A)^{-1} A y_{n+1} = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

которая немного отличается от чисто неявной схемы (3) правой частью. В этом случае безусловная устойчивость обеспечивается мультипликативным возмущением оператора A.

Для задачи (1), (2), (4) аналогичным образом строится регуляризованная аддитивная разностная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{2} \left(E + \sigma\tau A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} y_{n+1} = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

которая устойчива при $\sigma \geq 0,5p$. Эта схема строится на основе мультипликативного возмущения каждого отдельного операторного слагаемого в расщеплении (4). На таком пути строятся регуляризованные аддитивные разностные схемы второго порядка точности по τ, рассматриваются аддитивные схемы для эволюционных уравнений второго порядка.

Вопросы построения, исследования и применения аддитивных разностных схем находят отражение во многих публикациях. Мы остановились лишь на тех, которые, с одной стороны, носят, на наш взгляд, принципиальный характер, а с другой — наиболее полно отвечают содержанию нашей книги.

О содержании книги

Теория аддитивных разностных схем базируется на общей теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем, основные результаты которой суммированы в главе 1. Рассматриваются задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядка в гильбертовом конечномерном пространстве. Приводятся основные сведения из теории операторов в таких пространствах, которая является основным математическим аппаратом теории устойчивости операторно-разностных схем. Для их приближенного решения нестационарных задач строятся двух- и трехслойные разностные схемы, для которых формулируются условия устойчивости в виде легко проверяемых операторных неравенств. Особого внимания заслуживают критерии устойчивости схем с весами. Кратко обсуждаются вопросы исследования разностных схем в банаховых пространствах сеточных функций.

Главы 2–6 являются центральными в книге. В них рассматриваются основные классы аддитивных операторно-разностных схем для эволюционных уравнений первого и второго порядка. Исследование проводится в достаточно общих условиях с привлечением слабых ограничений на операторы задачи. Формулируются лишь наиболее важные результаты с привлечением минимального математического аппарата. Отмечаются особенности и связи различных классов аддитивных операторно-разностных схем.

Глава 2 посвящена рассмотрению наиболее хорошо изученного класса двухкомпонентных аддитивных схем, когда оператор задачи расщепляется на сумму двух операторов. К такому классу аддитивных схем принадлежат классические схемы переменных направлений.

К этим схемам тесно примыкают факторизованные аддитивные разностные схемы. Подробно исследуется специальный класс аддитивных схем двухкомпонентного расщепления для задач с самосопряженным оператором — аддитивные схемы попеременно-треугольного метода. Их рассмотрение проводится на основе прямого использования общих результатов теории устойчивости операторно-разностных схем. Строятся аддитивные разностные схемы для эволюционных уравнений второго порядка, факторизованные разностные схемы многокомпонентного расщепления.

Безусловно устойчивые аддитивные схемы многокомпонентного расщепления для произвольных некоммутируемых операторов строятся на основе понятия суммарной аппроксимации. В главе 3 рассматриваются различные подходы приближенного решения задачи Коши для эволюционного уравнения на основе решения промежуточных задач для отдельных операторных слагаемых. Проведено исследование стандартных схем покомпонентного расщепления и аддитивно-усредненных схем покомпонентного расщепления. Оценки устойчивости в гильбертовых и банаховых конечномерных пространствах получены на основе соответствующих априорных оценок для промежуточных задач. Кратко обсуждаются вопросы построения и исследования аддитивных схем покомпонентного расщепления второго порядка точности.

В главе 4 рассматриваются векторные аддитивные разностные схемы многокомпонентного расщепления. Исходная задача формулируется как векторная, при этом вместо одного приближенного решения находится вектор приближенных решений. Соответствующие аддитивные схемы относятся к схемам полной аппроксимации — на каждом шаге находится приближенное решение задачи. Построение векторных аддитивных разностных схем проведено на единой методической основе с привлечением результатов общей теории устойчивости операторно-разностных схем и принципа регуляризации. Рассматриваются двух- и трехслойные векторные аддитивные схемы для эволюционных уравнений первого и второго порядка.

В главе 5 отражены некоторые новые результаты по построению устойчивых разностных схем на основе принципа регуляризации разностных схем — возмущения операторов разностной схемы. Для эволюционного уравнения первого порядка построены аддитивные и мультипликативные регуляризованные разностные схемы. Конструктивные возможности принципа регуляризации разностных схем демонстрируются при построении безусловно устойчивых аддитивных разностных схем при многокомпонентном расщеплении. Проводится

построение регуляризованных аддитивных схем второго порядка точности, рассматриваются регуляризованные аддитивные разностные схемы для уравнений второго порядка.

Итерационные методы решения стационарных задач математической физики часто интерпретируются как методы установления при решении нестационарных задач. Многие итерационные методы можно связать с использованием тех или иных аддитивных схем. В главе 6 приведены основные факты теории итерационных методов и обсуждаются возможности построения итерационных методов на основе расщепления оператора задачи на сумму более простых операторов. Кратко описываются факторизованные методы, примером которых является итерационный метод переменных направлений. В настоящее время большого внимания заслуживает класс итерационных попеременно-треугольных методов. На основе аддитивных разностных схем строятся новые классы общих итерационных методов, связанных с группированием уравнений или неизвестных. Примерами таких методов служат блочные итерационные методы, альтернирующий метод Шварца в различных вариантах.

Главы 7–9 посвящены рассмотрению некоторых примеров аддитивных разностных схем. Основное внимание уделяется выбору расщепления оператора задачи A на отдельные операторные слагаемые $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Приведены примеры аддитивных разностных схем при расщеплении по пространственным переменным, по физическим процессам, а также схемы декомпозиции области. Подчеркнем, что сам набор модельных задач подчинен демонстрации возможностей аддитивных разностных схем при решении самых разнообразных задач. Поэтому все другие аспекты исследования рассматриваемых задач остаются вне нашего рассмотрения.

В главе 7 аддитивные разностные схемы применяются при численном решении многомерных нестационарных задач математической физики, когда в качестве наиболее простых выступают одномерные задачи. На основе расщепления по пространственным переменным строятся локально-одномерные схемы для параболического уравнения, для уравнения переноса и гиперболического уравнения второго порядка. Рассмотрена также некорректная задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка — начально-краевая задача для параболического уравнения второго порядка с обратным временем.

В главе 8 рассмотрены примеры аддитивных разностных схем, в которых отдельные операторные слагаемые несут разную смысловую нагрузку — расщепление по физическим процессам. Строятся разностные схемы на основе разделения процессов диффузии и конвек-

ции при решении нестационарной задачи конвекции–диффузии. Приведен пример построения аддитивных разностных схем для систем параболических уравнений. В этом случае расщепление позволяет перейти к решению последовательности задач для отдельных, слабо связанных друг с другом, параболических уравнений. Рассмотрены проблемы численного решения нестационарных задач динамики несжимаемой жидкости при использовании переменных *функция тока, вихрь скорости* и естественных переменных *скорость, давление*. На основе использования аддитивных схем строятся удобные для реализации вычислительные алгоритмы расчета вихря скорости и давления.

В главе 9 строятся вычислительные алгоритмы декомпозиции области, ориентированные на современные параллельные компьютеры. Исходная задача разбивается на ряд подзадач, каждая из которых решается в своей подобласти на своем процессоре. Рассмотрены регионально-аддитивные разностные схемы для приближенного решения нестационарных задач математической физики. Исследуются разностные схемы декомпозиции области при решении краевых задач для параболических и гиперболических уравнений второго порядка на основе тех или иных аддитивных разностных схем. Рассмотрены схемы двухкомпонентного расщепления, суммарной аппроксимации при многокомпонентном расщеплении, векторные аддитивные схемы.

Все это позволяет нам сделать вывод о том, что аддитивные разностные схемы есть удобный и незаменимый математический аппарат для построения эффективных вычислительных алгоритмов для приближенного решения самых разных задач для уравнений с частными производными и их систем.

Глава 1

Устойчивость операторно-разностных схем

Рассматриваются задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядка. Для их приближенного решения строятся двух- и трехслойные разностные схемы. Исследование проводится на основе общей теории устойчивости операторно-разностных схем в сеточных гильбертовых пространствах. Основное внимание уделяется получению критериев устойчивости схем с весами. Отмечены особенности исследования разностных схем в банаховых пространствах сеточных функций.

1.1. Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения

Исследование разностных схем для задач математической физики обычно проводится в гильбертовом пространстве сеточных функций [47]. Поэтому мы даем минимальный справочный материал о математическом аппарате теории разностных схем, основанном на рассмотрении операторов в конечномерных гильбертовых пространствах. Ставится задача Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка, приводятся простейшие априорные оценки для решения, которые являются ориентиром при рассмотрении операторно-разностных схем.

1.1.1. Гильбертовы пространства

Мы рассматриваем вещественное **линейное пространство** [25] H, для элементов которого введены операции сложения и умножения на вещественное число, т.е. каждой паре $y \in H$, $v \in H$ ставится в соответствие элемент $y+v \in H$ и для каждого $y \in H$ и вещественного числа λ поставлен в соответствие элемент $\lambda y \in H$. При этом для эле-

ментов y, v, z из H и вещественных чисел λ и μ выполнены следующие аксиомы:

1) $y + v = v + y,\ y + (v + z) = (y + v) + z$;

2) $\lambda(\mu y) = (\lambda\mu)y$;

3) $\lambda(y + v) = \lambda y + \lambda v,\ (\lambda + \mu)y = \lambda y + \mu y$;

4) существует однозначно определенный элемент 0 такой, что для любого $y \in H$ имеет место $y + 0 = y$;

5) для каждого $y \in H$ существует однозначно определенный элемент $(-y) \in H$ такой, что $y + (-y) = 0$;

6) $1 \cdot y = y$.

Элементы $y_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ линейного пространства H называются **линейно независимыми**, если из равенства

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i = 0$$

следует, что $\lambda_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$. В противном случае элементы $y_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ называются линейно зависимыми.

Непустое замкнутое множество H_1 элементов линейного пространства H называется **подпространством**, если вместе с элементами $y_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ множество H_1 содержит любую линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i y_i$ этих элементов.

Пространство H называется **k-мерным**, если в H существует k линейно независимых элементов, а всякий $(k + 1)$-й элемент линейно зависим.

Линейное пространство H называется **нормированным**, если для каждого элемента $y \in H$ определено вещественное число $||y||$, называемое **нормой**, удовлетворяющее условиям:

1) $||y|| \geq 0$ и $||y|| = 0$, если только $y = 0$;

2) $||\lambda y|| = |\lambda|\,||y||$;

3) $||y + v|| < ||y|| + ||v||$ (неравенство треугольника).

В одном и том же линейном пространстве норму можно вводить различными способами. Пусть $||y||_1$ и $||y||_2$ — некоторые две нормы в H. Если существуют постоянные $0 < M_1 \leq M_2$ такие, что для любого $y \in H$ верны неравенства

$$M_1||y||_1 \leq ||y||_2 \leq M_2||y||_1,$$

то эти нормы называются **эквивалентными**. В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.

Последовательность y_i элементов линейного нормированного пространства H называется сходящейся к элементу $y \in H$, если $||y_i - y|| \longrightarrow 0$ при $i \longrightarrow \infty$. Если $||y_i - y_j|| \longrightarrow 0$ при $i, j \longrightarrow \infty$, то последовательность y_i называется фундаментальной.

Линейное нормированное пространство H называется **полным**, если всякая фундаментальная последовательность y_i из этого пространства сходится к элементу y из этого же пространства H. Полное линейное нормированное пространство H называется **банаховым**. Всякое конечномерное линейное нормированное пространство — банахово.

Для каждой пары элементов y, v вещественного линейного пространства H определим скалярное произведение (y, v) такое, что

1) $(y, v) = (v, y)$;
2) $(y + v, z) = (y, z) + (v, z)$;
3) $(\lambda y, v) = \lambda(y, v)$;
4) $(y, y) \geq 0$ и $(y, y) = 0$ только для $y = 0$.

Линейное вещественное нормированное пространство H с нормой $||y|| = \sqrt{(y, y)}$ называется унитарным. Полное унитарное пространство H называется **гильбертовым**. Конечномерное унитарное пространство является полным.

Элементы y и v унитарного пространства называются ортогональными, если $(y, v) = 0$. Система y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ элементов из H называется **ортогональной системой**, если $(y_i, y_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

— **символ Кронекера**.

Для элементов y, v унитарного пространства H справедливо **неравенство Коши–Буняковского (Шварца)**

$$|(y, v)| < ||y||\,||v||,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда y и v линейно зависимы.

Для элементов y и v из унитарного пространства H справедливо равенство параллелограмма

$$||y + v||^2 + ||y - v||^2 = 2\left(||y||^2 + ||v||^2\right).$$

Имеет место также тождество

$$(y, v) = \frac{1}{4}\left(||y + v||^2 - ||y - v||^2\right)$$

для любых элементов y и v унитарного пространства.

1.1.2. Линейные операторы в конечномерном линейном пространстве

Всюду ниже предполагается, что H — конечномерное линейное нормированное пространство.

Оператор A представляет собой правило, по которому каждому элементу y из некоторого множества $\mathcal{D} \subset H$ ставится в соответствие элемент v из множества $\mathcal{R} \subset H$. Множество $\mathcal{D}$ называется **областью определения оператора** A (обозначается $\mathcal{D}(A)$), а множество элементов $v = Ay \in \mathcal{R}$ называется **множеством значений оператора** A ($\mathcal{R}(A)$). Через 0 обозначается нулевой оператор, а через E — единичный. Будем говорить, что оператор A действует в пространстве H, если $\mathcal{D}(A) = H$ и $\mathcal{R}(A) \subset H$.

Пусть оператор A отображает $\mathcal{D}(A)$ на $\mathcal{R}(A)$ взаимно однозначно. Тогда можно определить оператор A^{-1}, действующий из $\mathcal{R}(A)$ в $\mathcal{D}(A)$, такой, что $A^{-1}v = y$, если $Ay = v$. В этих условиях оператор A называется **невырожденным**, а A^{-1} — **обратным** оператору A.

Оператор A называется **линейным**, если для любых $y, v \in \mathcal{D}(A)$ и вещественных чисел λ, μ

$$A(\lambda y + \mu v) = \lambda Ay + \mu Av.$$

Линейный оператор A в конечномерном линейном пространстве H имеет обратный оператор с областью определения $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$ тогда и только тогда, когда уравнение $Ay = 0$ имеет единственное решение $y = 0$.

Оператор A, действующий в H, называется **ограниченным**, если существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$||Ay|| < M||y||$$

для любых $y \in H$. В конечномерном пространстве любой линейный оператор ограничен.

Наименьшая из таких постоянных M называется **нормой оператора** A и обозначается $||A||$. Из определения нормы оператора следует

$$||A|| = \sup_{y \neq 0} \frac{||Ay||}{||y||} = \sup_{||y||=1} ||Ay||.$$

Норма оператора обладает следующими свойствами:

1) $||\lambda A|| = |\lambda|\,||A||$;

2) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
3) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Если $(AB)y = (BA)y$ для всех $y \in H$, то операторы A и B называются **перестановочными** ($AB = BA$).

Ограниченный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда найдется постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\|Ay\| \geq \delta\|y\|$$

для всех $y \in H$, причем $\|A^{-1}\| \leq \delta^{-1}$.

1.1.3. Операторы в конечномерном гильбертовом пространстве

Оператор A^* называется **сопряженным** оператору A в гильбертовом пространстве H, если для всех $y, v \in H$ выполнено тождество

$$(Ay, v) = (y, A^*v)\,.$$

Для линейного ограниченного оператора A с областью определения $\mathcal{D}(A) = H$ существует единственный оператор A^* с областью определения $\mathcal{D}(A^*) = H$.

Имеют место равенства

$$(A^*)^* = A, \quad (A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

Оператор A^* линеен и ограничен, причем $\|A^*\| = \|A\|$, кроме того

$$\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}.$$

Оператор A, действующий в H, называется **самосопряженным**, если $A^* = A$. Если A и B — самосопряженные операторы, то AB является самосопряженным тогда и только тогда, когда операторы A и B перестановочны.

Оператор A называется **кососимметричным**, если $A^* = -A$. Любой оператор A можно представить в виде суммы самосопряженного и кососимметричного операторов

$$A = A_0 + A_1,$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2}\,(A + A^*)\,, \quad A_1 = \frac{1}{2}\,(A - A^*)\,.$$

Оператор A в конечномерном вещественном гильбертовом пространстве H называется:

неотрицательным ($A \geq 0$), если $(Ay, y) \geq 0$ для всех $y \in H$;

положительным ($A > 0$), если $(Ay, y) > 0$ для всех $y \in H$, кроме $y = 0$;

положительно определенным ($A \geq \delta E$), если для $\delta > 0$ и всех $y \in H$ имеет место неравенство $(Ay, y) \geq \delta ||y||^2$.

В силу определения неравенство $A \geq B$ означает, что $A - B \geq 0$. Если оператор A, действующий в конечномерном гильбертовом пространстве H, положителен, то существует оператор A^{-1}. Для положительно определенного оператора $||A^{-1}|| \geq \delta^{-1}$.

Произведение двух перестановочных неотрицательных самосопряженных операторов A и B есть также неотрицательный самосопряженный оператор. Для любого линейного оператора A операторы A^*A и AA^* неотрицательны и положительны, если A — положительный оператор.

Оператор B называется **квадратным корнем из оператора** A, если $B^2 = A$ $(B = A^{1/2})$. Существует единственный неотрицательный самосопряженный корень из любого неотрицательного самосопряженного оператора A, перестановочный со всяким оператором, перестановочным с A.

Для самосопряженного неотрицательного оператора A имеет место **обобщенное неравенство Коши–Буняковского (неравенство Шварца)**:

$$(Ay, v)^2 \leq (Ay, y)\,(Av, v)\,.$$

Пусть D — самосопряженный положительный (неотрицательный) оператор, действующий в H. Тогда можно ввести **энергетическое пространство** H_D, состоящее из элементов H, со скалярным произведением

$$(y, v)_D = (Dy, v)$$

и нормой (полунормой)

$$||y||_D = \sqrt{(Dy, y)}.$$

Имеет место неравенство

$$|\,(y, v)\,| < ||y||_A ||v||_{A^{-1}}$$

для $A = A^* > 0$. Для неотрицательного оператора A число (Ay, y) называется энергией оператора.

Если существуют постоянные $\gamma_2 \geq \gamma_1 > 0$ такие, что для линейных операторов A и B верны неравенства

$$\gamma_1 B < A < \gamma_2 B,$$

то такие операторы называются **энергетически эквивалентными**. Если

$$\delta E \leq A \leq \Delta E,$$

то числа δ и Δ называются **границами оператора** A.

1.1.4. Задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для **дифференциально-операторного уравнения первого порядка**

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(0) = u^0, \tag{1.2}$$

где $f(t)$, u^0 — заданные, $u(t)$ — искомая функции со значениями в конечномерном гильбертовом пространстве H.

Приведем простейшую априорную для решения задачи (1.1), (1.2), выражающую устойчивость по начальным данным и правой части.

Теорема 1.1. Пусть $A \geq 0$, тогда для решения задачи (1.1), (1.2) верна априорная оценка

$$\|u(t)\| \leq \|u^0\| + \int_0^t \|f(\theta)\| d\theta. \tag{1.3}$$

Доказательство. Домножая уравнение (1.1) скалярно на $u(t)$, получим равенство

$$\left(\frac{du}{dt}, u\right) + (Au, u) = (f, u).$$

Имеем

$$\left(\frac{du}{dt}, u\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 = \|u\|\frac{d}{dt}\|u\|,$$

$$(f, u) \leq \|f\| \, \|u\|,$$

что с учетом неотрицательности оператора A приводит к неравенству

$$\frac{d}{dt}\|u\| \leq \|f\|.$$

Отсюда непосредственно вытекает доказываемая оценка (1.3). ■

Замечание 1. В условиях теоремы 1.1 часто более удобно ориентироваться на априорную оценку для квадрата нормы решения. Принимая во внимание

$$(f, u) \leq \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2,$$

придем к неравенству

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \|f\|^2$$

и поэтому

$$\|u(t)\|^2 \leq \exp(t) \left(\|u^0\|^2 + \int_0^t \exp(-\theta) \, \|f(\theta)\|^2 d\theta \right). \tag{1.4}$$

Доказательство оценки (1.4) основывается на следующем простейшем варианте **леммы Гронуолла**:

Лемма 1.1. Для функции $g(t)$, удовлетворяющей неравенству

$$\frac{dg}{dt} \leq ag(t) + b(t), \quad t > 0$$

с $a = \text{const}$, $b(t) \geq 0$, верна оценка

$$g(t) \leq \exp(at) \left(g(0) + \int_0^t \exp(-a\theta) \, b(\theta) \, d\theta \right).$$

Замечание 2. В более общих условиях $A \geq \delta E$, $\delta = \text{const}$ для решения задачи (1.1), (1.2) на основе леммы Гронуолла устанавливается априорная оценка

$$\|u(t)\| \leq \exp(-\delta t) \left(\|u^0\| + \int_0^t \exp(\delta\theta) \, \|f(\theta)\| d\theta \right).$$

На приведенные оценки устойчивости решения задачи (1.1), (1.2) по начальным данным мы будем ориентироваться при построении и исследовании операторно-разностных схем (после дискретизации по времени).

1.1.5. Система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

В качестве характерного примера задачи (1.1), (1.2) рассмотрим задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — вектор неизвестных, а $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ — заданный вектор правых частей и

$$\frac{du_i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\, u_j(t) = f_i(t), \quad t > 0, \tag{1.5}$$

$$u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.6}$$

С использованием векторных обозначений задачу (1.5), (1.6) можем записать как задачу Коши для одного уравнения

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1.7}$$

$$u(0) = u^0, \tag{1.8}$$

где $A = \{a_{ij}\}$ — матрица с элементами a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Матрица A может рассматриваться как линейный оператор, действующий в конечномерном гильбертовом (евклидовом) пространстве $H = l_2$, в котором скалярное произведение есть $(y, v) = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i$, а норма $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

1.1.6. Краевая задача для одномерного параболического уравнения

К дифференциально-операторным уравнениям мы приходим при дискретизации (конечноразностной или конечноэлементной) по пространственным переменным в нестационарных задачах математической физики. Здесь мы ограничимся иллюстративным примером кра-

евой задачи для одномерного параболического уравнения. Более содержательные многомерные задачи являются основным объектом нашего исследования и будут рассматриваться позднее.

Пусть $u(x,t)$ определяется из решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1.9}$$

дополненного простейшими граничными и начальным условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.10}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad 0 < x < l. \tag{1.11}$$

Обозначим через $\bar{\omega}$ **равномерную сетку** с шагом h на интервале $\bar{\Omega} = [0,l]$

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0,1,\ldots,N, \quad Nh = l\},$$

причем ω — множество внутренних узлов, а $\partial\omega$ — множество граничных узлов.

Разложение по формуле Тейлора в окрестности произвольного внутреннего узла $x = x_i$ дает

$$u_{i\pm1} = u_i \pm h\frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \pm \frac{h^3}{6}\frac{d^3u}{dx^3}(x_i) + O\left(h^4\right)$$

для достаточно гладкой функции $u(x)$. Здесь использованы обозначения $u_i = u(x_i)$. Поэтому для **левой разностной производной** (опуская индекс i) имеем

$$u_{\bar{x}} \equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = \frac{du}{dx}(x_i) - \frac{h}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + O\left(h^2\right).$$

Тем самым левая разностная производная $u_{\bar{x}}$ аппроксимирует первую производную du/dx с первым порядком (погрешность аппроксимации $O(h)$ в каждом внутреннем узле) при $u(x) \in C^{(2)}(\Omega)$. Аналогично для **правой разностной производной** получим

$$u_x \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + O\left(h^2\right).$$

При использовании трехточечного шаблона (узлы x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) можно использовать **центральную разностную производную**

$$u_{\overset{\circ}{x}} \equiv \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{3}\frac{d^3u}{dx^3}(x_i) + O\left(h^3\right),$$

которая аппроксимирует производную du/dx со вторым порядком при $u(x) \in C^{(3)}(\Omega)$.

Для второй производной d^2u/dx^2 подобные выкладки дают

$$u_{\bar{x}x} = \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

Этот разностный оператор аппроксимирует в узле $x = x_i$ вторую производную со вторым порядком при $u(x) \in C^{(4)}(\Omega)$.

На множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на множестве граничных узлов (см. (1.10)), определим разностный оператор

$$Ay = -\left(ay_{\bar{x}}\right)_x, \quad x \in \omega. \tag{1.12}$$

Для достаточно гладких коэффициентов $k(x)$ можно использовать

$$a_i = k_{i-1/2} = k\left(x_i - 0,5h\right),$$

$$a_i = \frac{k_{i-1} + k_i}{2},$$

$$a_i = 2\left(\frac{1}{k_{i-1}} + \frac{1}{k_i}\right)^{-1}.$$

Задаче (1.9) — (1.11) ставится в соответствие задача Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} + Ay = f, \quad x \in \omega, \quad t > 0, \tag{1.13}$$

$$y\left(x, 0\right) = u^0\left(x\right), \quad x \in \omega. \tag{1.14}$$

Определим гильбертово пространство сеточных функций $H = L_2(\omega)$ на множестве сеточных функций $y(x) = 0$, $x \notin \omega$ со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y\left(x\right) v\left(x\right) h.$$

Разностный оператор A является самосопряженным в H ($A = A^*$). Справедливость равенства $(Ay, v) = (y, Av)$ проверяется непосредственно. Кроме того (более подробно см. [47]), для оператора A при обычных ограничениях $k(x) \geq \kappa$ верна оценка снизу

$$A \geq \kappa\lambda_0 E,$$

где λ_0 — минимальное собственное значение разностного оператора второй производной

$$\lambda_0 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2l} \geq \frac{8}{l^2}.$$

В силу этого для решения задачи (1.13), (1.14) имеет место оценка

$$\|y(x,t)\| \leq \exp(-\kappa\lambda_0 t)\left(\|u^0(x)\| + \int\limits_0^t \exp(\kappa\lambda_0\theta)\|f(x,\theta)\|d\theta\right).$$

Подобным образом рассматриваются аппроксимации по пространственной переменной в задаче (1.9) — (1.11) на основе метода конечных элементов и других проекционных методов.

1.1.7. Уравнения второго порядка

Помимо дифференциально-операторного уравнения первого порядка, отдельного рассмотрения заслуживают **уравнения второго порядка**. Ставится задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1.15}$$

$$u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v^0. \tag{1.16}$$

К задаче (1.15), (1.16) мы приходим после дискретизации по пространственной переменной в краевой задаче для одномерного уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v^0(x), \quad 0 < x < l.$$

Приведем простейшую априорную оценку для решения рассматриваемой задачи (1.15), (1.16), ограничившись случаем постоянного (не зависящего от t) самосопряженного оператора A в H. Домножим уравнение (1.15) скалярно на du/dt, что дает

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \|u\|_A^2\right) = \left(f, \frac{du}{dt}\right).$$

Для правой части используется оценка

$$\left(f, \frac{du}{dt}\right) \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2.$$

Приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}\|u\|_*^2 \leq \|u\|_*^2 + \|f\|^2,$$

где

$$\|u\|_*^2 = \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \|u\|_A^2.$$

Искомая априорная оценка

$$\|u(t)\|_*^2 \leq \exp(t)\left(\|u^0\|_A^2 + \|v^0\|^2 + \int_0^t \exp(-\theta)\|f(\theta)\|^2 d\theta\right)$$

выражает устойчивость по начальным данным и правой части для дифференциально-операторного уравнения (1.15).

1.2. Двухслойные операторно-разностные схемы

Для приближенного решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка используются двухслойные операторно-разностные схемы. Исследование базируется на использовании результатов общей теории устойчивости операторно-разностных схем. Вводятся основные понятия теории устойчивости операторно-разностных схем, рассматриваемых в конечномерных гильбертовых пространствах, формулируются критерии устойчивости двухслойных разностных схем по начальным данным, приводятся типичные оценки устойчивости по начальным данным и правой части.

1.2.1. Основные понятия

Определим равномерную для простоты сетку по времени

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, ..., N_0, \quad \tau N_0 = T\}.$$

Обозначим через $A, B : H \to H$ линейные операторы в H, зависящие, вообще говоря, от τ, t_n. Рассмотрим задачу Коши для операторно-разностного уравнения

$$B(t_n)\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + A(t_n)\,y_n = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{1.17}$$

$$y_0 = u^0, \tag{1.18}$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ — искомая функция, а $\varphi_n, u^0 \in H$ заданы. Будем пользоваться безындексными обозначениями теории разностных схем

$$y = y_n, \quad \hat{y} = y_{n+1}, \quad \check{y} = y_{n-1},$$

$$y_{\bar{t}} = \frac{y-\check{y}}{\tau}, \quad y_t = \frac{\hat{y}-y}{\tau}.$$

Тогда уравнение (1.17) можно записать так:

$$By_t + Ay = \varphi, \quad t \in \omega_\tau. \tag{1.19}$$

Определим **двухслойную разностную схему** как множество задач Коши (1.17), (1.18), зависящих от параметра τ; запись (1.17) (1.18) (а также (1.18), (1.19)) будем называть **канонической формой двухслойных схем**.

Для разрешимости задачи Коши на новом временном слое предполагается, что B^{-1} существует. Тогда уравнение (1.19) можно записать в виде

$$\hat{y} = Sy + \tau\tilde{\varphi}, \quad S = E - \tau B^{-1}A, \quad \tilde{\varphi} = B^{-1}\varphi, \tag{1.20}$$

где, как обычно, E — тождественный оператор. Оператор S называется **оператором перехода** двухслойной разностной схемы (со слоя на слой).

Двухслойная схема называется **устойчивой**, если существуют такие положительные постоянные m_1 и m_2, не зависящие от τ и выбора u_0, φ, что при любых $u_0 \in H$, $\varphi \in H$, $t \in \bar{\omega}_\tau$ для решения задачи (1.17), (1.18) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\| \le m_1\|u^0\| + m_2 \max_{0\le\theta\le t_n} \|\varphi(\theta)\|_*, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{1.21}$$

где $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ — некоторые нормы в пространстве H. Неравенство (1.21) отражает свойство непрерывной зависимости решения задачи (1.17), (1.18) от входных данных.

Разностная схема

$$B(t_n)\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+A(t_n)y_n=0,\quad t_n\in\omega_\tau, \tag{1.22}$$

$$y_0=u^0 \tag{1.23}$$

называется **устойчивой по начальным данным**, если для решения задачи (1.22), (1.23) выполняется оценка

$$\|y_{n+1}\|\le m_1\|u^0\|,\quad t_n\in\omega_\tau. \tag{1.24}$$

Двухслойная разностная схема

$$B(t_n)\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+A(t_n)y_n=\varphi_n,\quad t_n\in\omega_\tau, \tag{1.25}$$

$$y_0=0 \tag{1.26}$$

устойчива по правой части, если для решения выполняется неравенство

$$\|y_{n+1}\|\le m_2\max_{0\le\theta\le t_n}\|\varphi(\theta)\|_*,\quad t_n\in\omega_\tau. \tag{1.27}$$

Разностная схема (1.22), (1.23) называется **ρ-устойчивой** (равномерно устойчивой) по начальным данным в H_R, если существуют постоянная $\rho>0$ и постоянная m_1, не зависящие от τ, n, такие, что при любых n и при всех $y_n\in H$ для решения y_{n+1} разностного уравнения (1.22) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_R\le\rho\|y_n\|_R,\quad t_n\in\omega_\tau, \tag{1.28}$$

причем $\rho^n\le m_1$.

В теории разностных схем в качестве константы ρ выбирается обычно одна из величин

$$\rho=1,$$

$$\rho=1+c\tau,\quad c>0,$$

$$\rho=\exp(c\tau),$$

где постоянная c не зависит от τ, n.

Перепишем уравнение (1.22) с учетом (1.20) в виде

$$y_{n+1}=Sy_n. \tag{1.29}$$

Требование ρ-устойчивости эквивалентно выполнению двустороннего операторного неравенства

$$-\rho R \le RS \le \rho R, \tag{1.30}$$

если RS — самосопряженный оператор ($RS = S^* R$). Для любого оператора перехода в (1.29) условие ρ-устойчивости имеет вид

$$S^* RS \le \rho^2 R. \tag{1.31}$$

Сформулируем **разностный аналог леммы Гронуолла.**

Лемма 1.2. Из оценки разностного решения на слое

$$\|y_{n+1}\| \le \rho\|y_n\| + \tau\|\varphi_n\|_* \tag{1.32}$$

следует априорная оценка

$$\|y_{n+1}\| \le \rho^{n+1}\|y_0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau\rho^{n-k}\|\varphi_k\|_*. \tag{1.33}$$

Тем самым из послойной оценки решения мы получаем априорную оценку разностного решения на любой момент времени.

1.2.2. Устойчивость по начальным данным

Сформулируем основные критерии устойчивости двухслойных операторно-разностных схем по начальным данным [94]. Наиболее важной является следующая [41, 42, 43, 47] теорема о точных (совпадающих необходимых и достаточных) условиях устойчивости в H_A.

Теорема 1.2. Пусть в уравнении (1.22) оператор A является самосопряженным положительным оператором и постоянным (не зависит от n). Условие

$$B \ge \frac{\tau}{2}A, \quad t \in \omega_\tau \tag{1.34}$$

необходимо и достаточно для устойчивости в H_A, т.е. для выполнения оценки

$$\|y_{n+1}\|_A \le \|u^0\|_A, \quad t \in \omega_\tau. \tag{1.35}$$

Доказательство. Умножая уравнение (1.22) скалярно на y_t, получим тождество

$$(By_t, y_t) + (Ay, y_t) = 0. \tag{1.36}$$

Пользуясь представлением

$$y = \frac{1}{2}(y + \hat{y}) - \frac{1}{2}\tau y_t,$$

перепишем (1.36) в виде

$$\left(\left(B - \frac{\tau}{2}A\right) y_t, y_t\right) + \frac{1}{2\tau}\left(A(\hat{y} + y), \hat{y} - y\right) = 0. \tag{1.37}$$

Для самосопряженного оператора A имеем $(Ay, \hat{y}) = (y, A\hat{y})$ и

$$(A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y).$$

Подставляя в (1.37) и используя условие (1.34), приходим к неравенству

$$\|y_{n+1}\|_A \le \|y_n\|_A, \tag{1.38}$$

из которого следует доказываемая оценка (1.35).

Для доказательства необходимости неравенства (1.35) предположим, что схема устойчива в H_A, т.е. выполнено неравенство (1.35). Докажем, что отсюда следует операторное неравенство (1.34). Будем исходить из тождества (1.37) на первом слое $n = 0$

$$2\tau\left(\left(B - \frac{\tau}{2}A\right) w, w\right) + (Ay_1, y_1) = (Ay_0, y_0), \quad w = \frac{y_1 - y_0}{\tau}.$$

В силу (1.35) это тождество может быть выполнено только при

$$\left(\left(B - \frac{\tau}{2}A\right) w, w\right) \ge 0.$$

Так как $y_0 = u_0 \in H$ — произвольный элемент, то и элемент $w = -B^{-1}Au_0 \in H$ произволен. В самом деле, задавая любой элемент $w \in H$, находим $u_0 = -A^{-1}Bw \in H$, так как A^{-1} существует. Таким образом, неравенство выполнено при любых $w \in H$, т.е. имеет место операторное неравенство (1.34). ■

Условие (1.34) является необходимым и достаточным для устойчивости не только в H_A, но и в других нормах. Не обсуждая всех возможностей в этом направлении (более подробно эти вопросы изложены в [47, 59, 61]), сформулируем без доказательства только результат об устойчивости в H_B.

Теорема 1.3. Пусть в (1.22), (1.23) операторы A и B постоянны и

$$B = B^* > 0, \quad A = A^* > 0. \tag{1.39}$$

Тогда условие (1.34) необходимо и достаточно для устойчивости схемы (1.22), (1.23) по начальным данным в H_B с $\rho = 1$.

При рассмотрении общих нестационарных задач необходимо ориентироваться на условия ρ-устойчивости [18, 42, 45].

Теорема 1.4. Пусть A и B — постоянные операторы и

$$A = A^*, \quad B = B^* > 0.$$

Тогда условия

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau} B \tag{1.40}$$

необходимы и достаточны для ρ-устойчивости в H_B схемы (1.22), (1.23), т.е. для выполнения

$$\|y_{n+1}\|_B \le \rho \|y_n\|_B.$$

Доказательство. Записывая схему (1.22) в виде (1.29), из (1.30) получим условия устойчивости в H_B

$$-\rho B \le B - \tau A \le \rho B.$$

Это двухстороннее операторное неравенство формулируется в более приемлемой форме в виде неравенств (1.40) на операторы разностной схемы. ■

Специально подчеркнем, что в условиях теоремы не предполагается положительность (или хотя бы неотрицательность) оператора A. При дополнительном предположении о положительности оператора A устанавливается необходимость и достаточность условий (1.40) для ρ-устойчивости схемы (1.22), (1.23) в H_A.

При $\rho \ge 1$ устойчивость, как и в теореме 1.2, устанавливается для двухслойных разностных схем с несамосопряженным оператором B.

Теорема 1.5. Пусть оператор A является самосопряженным положительным и постоянным. Тогда при

$$B \ge \frac{\tau}{1+\rho} A \tag{1.41}$$

разностная схема (1.22), (1.23) ρ-устойчива в H_A.

Доказательство. Добавим и вычтем из основного энергéтического тождества (см. (1.37))

$$2\tau \left(\left(B - \frac{\tau}{2} A \right) y_t, y_t \right) + (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y) = 0 \tag{1.42}$$

выражение

$$2\tau^2 \frac{1}{1+\rho} (Ay_t, y_t)$$

и получим

$$2\tau \left(\left(B - \frac{\tau}{1+\rho} A \right) y_t, y_t \right) + (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y) -$$

$$- \frac{1-\rho}{1+\rho} \tau^2 (Ay_t, y_t) = 0.$$

С учетом условия (1.41) и самосопряженности оператора A после простейших выкладок получим

$$(A\hat{y}, \hat{y}) - \rho (Ay, y) + (\rho - 1) (A\hat{y}, y) \leq 0.$$

Применяя неравенство

$$| (A\hat{y}, y) | \leq ||\hat{y}||_A ||y||_A$$

и вводя обозначения

$$\eta = \frac{||\hat{y}||_A}{||y||_A},$$

придем к неравенству

$$\eta^2 - (\rho - 1) \eta + \rho \leq 0.$$

Оно верно при всех $1 \leq \eta \leq \rho$ и тем самым выполнена искомая оценка

$$||\hat{y}||_A \leq ||y||_A,$$

обеспечивающая устойчивость в H_A. ■

Перейдем к получению априорных оценок, выражающих устойчивость по правой части. На такого типа результатах базируется исследование сходимости разностных схем для нестационарных задач.

1.2.3. Устойчивость по правой части

Прежде всего покажем, что из устойчивости по начальным данным в H_R, $R = R^* > 0$ следует и устойчивость схемы по правой части при использовании нормы $||\varphi||_* = ||B^{-1}\varphi||_R$.

Теорема 1.6. Пусть разностная схема (1.17), (1.18) ρ-устойчива в H_R по начальным данным, т.е. имеет место оценка (1.28) при $\varphi_n = 0$.

Тогда разностная схема (1.17), (1.18) устойчива по правой части и для решения справедлива априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_R \le \rho^{n+1}\|u^0\|_R + \sum_{k=0}^{n} \tau\rho^{n-k}\|B^{-1}\varphi_k\|_R. \tag{1.43}$$

Доказательство. Так как B^{-1} существует, то уравнение (1.17) можно записать в виде

$$y_{n+1} = Sy_n + \tau\tilde{\varphi}_n, \quad S = E - \tau B^{-1}A, \quad \tilde{\varphi}_n = B^{-1}\varphi_n. \tag{1.44}$$

Из (1.44) находим

$$\|y_{n+1}\|_R \le \|Sy_n\|_R + \tau\|B^{-1}\varphi_n\|_R. \tag{1.45}$$

Требование ρ-устойчивости схемы по начальным данным эквивалентно ограниченности нормы оператора перехода S

$$\|Sy_n\|_R \le \rho\|y_n\|_R, \quad t \in \omega_\tau.$$

В силу этого из (1.45) получим

$$\|y_{n+1}\|_R \le \rho\|y_n\|_R + \tau\|B^{-1}\varphi_n\|_R.$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла, получаем требуемую оценку (1.43), выражающую устойчивость схемы по начальным данным и правой части. ■

В частности, если $D = A$ или $D = B$ (при $A = A^* > 0$ или $B = B^* > 0$), то из (1.43) следуют простейшие оценки устойчивости в энергетическом пространстве H_A или H_B.

Некоторые новые оценки для двухслойной разностной схемы (1.17), (1.18) можно получить при загрублении критерия устойчивости (1.34).

Теорема 1.7. Пусть A — постоянный самосопряженный и положительный оператор, а B удовлетворяет условию

$$B \ge \frac{1+\varepsilon}{2}\tau A \tag{1.46}$$

с некоторой постоянной $\varepsilon > 0$, не зависящей от τ. Тогда для разностной схемы (1.17), (1.18) справедлива априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \le \|u^0\|_A^2 + \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{n} \tau\|\varphi\|_{B^{-1}}^2. \tag{1.47}$$

Доказательство. Умножая уравнение (1.17) скалярно на $2\tau y_t$, аналогично (1.42) получим энергетическое тождество

$$2\tau\left(\left(B-\frac{\tau}{2}A\right)y_t, y_t\right)+(A\hat{y},\hat{y})=(Ay,y)+2\tau(\varphi,y_t). \tag{1.48}$$

Оценим правую часть последнего выражения следующим образом:

$$2\tau(\varphi,y_t)\le 2\tau\|\varphi\|_{B^{-1}}\|y_t\|_B\le$$

$$\le 2\tau\varepsilon_1\|y_t\|_B^2+\frac{\tau}{2\varepsilon_1}\|\varphi\|_{B^{-1}}^2$$

с пока неопределенной положительной постоянной ε_1. Подставляя эту оценку в (1.48), получим

$$2\tau\left(\left((1-\varepsilon_1)B-\frac{\tau}{2}A\right)y_t, y_t\right)+(A\hat{y},\hat{y})\le(Ay,y)+\frac{\tau}{2\varepsilon_1}\|\varphi\|_{B^{-1}}^2.$$

Если выполнено условие (1.46), то можно выбрать ε_1 так, чтобы

$$\frac{1}{1-\varepsilon_1}=1+\varepsilon,$$

и поэтому

$$(1-\varepsilon_1)B-\frac{\tau}{2}A=(1-\varepsilon_1)\left(B-\frac{1+\varepsilon}{2}\tau A\right)\ge 0,$$

$$(A\hat{y},\hat{y})\le(Ay,y)+\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\tau\|\varphi\|_{B^{-1}}^2.$$

Последнее неравенство дает оценку (1.47). ■

Теорема 1.8. Пусть A — постоянный самосопряженный и положительный оператор, а B удовлетворяет условию

$$B\ge G+\frac{\tau}{2}A,\quad G=G^*>0. \tag{1.49}$$

Тогда для (1.17), (1.18) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A^2\le\|u^0\|_A^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\tau\|\varphi\|_{G^{-1}}^2. \tag{1.50}$$

Доказательство. В тождестве (1.48) используем оценку

$$2\tau(\varphi,y_t)\le 2\tau(Gy_t,y_t)+\frac{\tau}{2}\left(G^{-1}\varphi,\varphi\right).$$

Подставим эту оценку в (1.48) и с учетом (1.49) получим

$$(A\hat{y}, \hat{y}) \leq (Ay, y) + \frac{1}{2}\tau \|\varphi\|^2_{G^{-1}}$$

что но основании разностного леммы Гронуолла дает (1.50). ■

Исследование сходимости разностных схем проводится в различных классах гладкости решения исходной дифференциальной задачи, и поэтому мы должны иметь достаточно широкий спектр оценок, в которых, в частности, правая часть оценивается в различных и просто вычисляемых нормах. Мы ограничились только некоторыми типичными априорными оценками решений операторно-разностных схем.

1.2.4. Схемы с весами

Применим теперь полученные результаты к исследованию простейших схем с весами для дифференциально-операторного уравнения первого порядка. Задаче Коши

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1.51}$$

$$u(0) = u^0, \tag{1.52}$$

в которой оператор $A \geq 0$, поставим в соответствие двухслойную **схему с весами**

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma) y_n) = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{1.53}$$

$$y_0 = u^0. \tag{1.54}$$

Исследуемая схема (1.53), (1.54) записывается в каноническом виде двухслойной разностной схемы (1.19) с операторами

$$B = E + \sigma\tau A, \quad A > 0. \tag{1.55}$$

Теорема 1.9. Для устойчивости по начальным данным разностной схемы с весами (1.53), (1.54) в H необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства

$$A^* + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau A^* A \geq 0. \tag{1.56}$$

Доказательство. В силу $A > 0$ существует A^{-1}. Домножая (1.53) на A^{-1}. придем от (1.19), (1.55) к разностной схеме

$$\tilde{B}\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \tilde{A}y_n = \tilde{\varphi}_n, \quad t_n \in \omega_\tau$$

в которой

$$\tilde{B} = A^{-1} + \sigma\tau E, \quad \tilde{A} = E.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости этой схемы по начальным данным в $H = H_{\tilde{A}}$ (теорема 1.2) имеют вид неравенства

$$A^{-1} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau E \geq 0.$$

Домножая его слева на A^*, справа — на A (неравенство при этом остается в силе), получим (1.56). ■

Для весов $\sigma \geq 0,5$ операторно-разностная схема (1.53), (1.54) безусловно устойчива (устойчива при любых $\tau > 0$).

1.3. Трехслойные операторно-разностные схемы

Проведено исследование трехслойных операторно-разностных схем. Основой рассмотрения является переход к эквивалентной двухслойной операторно-разностной схеме. Получены оценки устойчивости по начальным данным и правой части в различных нормах. Изучаются трехслойные схемы с весами для дифференциально-операторного уравнения первого порядка и простейшего уравнения второго порядка.

1.3.1. Устойчивость по начальным данным

При исследовании устойчивости **трехслойных разностных схем** используется [45, 47, 61] **каноническая форма трехслойных разностных схем:**

$$B(t_n)\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R(t_n)(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) +$$

$$+ A(t_n)y_n = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (1.57)$$

при заданных

$$y_0 = u^0, \quad y_1 = v^0. \tag{1.58}$$

Получим условия устойчивости по начальным данным при постоянных, не зависящих от n, самосопряженных операторах A, B, R, т.е. вместо общей схемы (1.57) будем рассматривать

$$B\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right) + Ay_n = 0. \tag{1.59}$$

Приведем простейшую априорную оценку для схемы (1.58), (1.59), которая выражает устойчивость по начальным данным. Положим

$$u_n = \frac{1}{2}\left(y_n + y_{n-1}\right), \quad w_n = y_n - y_{n-1} \tag{1.60}$$

и с учетом тождества

$$y_n = \frac{1}{4}\left(y_{n+1} + 2y_n + y_{n-1}\right) - \frac{1}{4}\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right)$$

перепишем схему (1.59) в виде

$$B\frac{w_{n+1} + w_n}{2\tau} + R\left(w_{n+1} - w_n\right) -$$

$$- A\left(w_{n+1} - w_n\right) + A\frac{u_{n+1} + u_n}{2} = 0. \tag{1.61}$$

Домножим скалярно уравнение (1.61) на

$$2\left(u_{n+1} - u_n\right) = w_{n+1} + w_n,$$

что дает равенство

$$\frac{1}{2\tau}\left(B\left(w_{n+1} + w_n\right), w_{n+1} + w_n\right) + \left(R\left(w_{n+1} - w_n\right), w_{n+1} + w_n\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\left(A\left(w_{n+1} - w_n\right), w_{n+1} + w_n\right) +$$

$$+\left(A\left(u_{n+1} + u_n\right), u_{n+1} - u_n\right) = 0. \tag{1.62}$$

Для самосопряженных операторов R и A и неотрицательного оператора B $(B \geq 0)$ из (1.62) следует неравенство

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq \mathcal{E}_n, \tag{1.63}$$

где с учетом обозначений (1.60) имеем

$$\mathcal{E}_{n+1} = \frac{1}{4}\left(A\left(y_{n+1}+y_n\right), y_{n+1}+y_n\right) + \\ + \left(R\left(y_{n+1}-y_n\right), y_{n+1}-y_n\right) - \\ - \frac{1}{4}\left(A\left(y_{n+1}-y_n\right), y_{n+1}-y_n\right). \tag{1.64}$$

При некоторых ограничениях величина $\mathcal{E}_n$, определяемая согласно (1.64), задает норму и поэтому неравенство (1.63) обеспечивает устойчивость операторно-разностной схемы по начальным данным. Более точно имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.10. Пусть в операторно-разностной схеме (1.59) операторы R и A являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$B \geq 0, \quad A > 0, \quad R > \frac{1}{4}A \tag{1.65}$$

имеет место априорная оценка

$$\frac{1}{4}\|y_{n+1}+y_n\|_A^2 + \|y_{n+1}-y_n\|_R^2 - \frac{1}{4}\|y_{n+1}-y_n\|_A^2 \leq \\ \leq \frac{1}{4}\|y_n+y_{n-1}\|_A^2 + \|y_n-y_{n-1}\|_R^2 - \frac{1}{4}\|y_n-y_{n-1}\|_A^2, \tag{1.66}$$

т.е. операторно-разностная схема (1.59) устойчива по начальным данным.

Особенностью рассматриваемых трехслойных схем является именно сложная конструкция нормы (см. (1.64)). В некоторых важных случаях при сужении класса разностных схем, загрублении условий устойчивости удается использовать более простые нормы [47, 59, 61].

1.3.2. Переход к двухслойной схеме

Исследование многослойных разностных схем удобно проводить на основе перехода к эквивалентной двухслойной схеме. Для двухслойных схем получены наиболее глубокие (в частности, совпадающие необходимые и достаточные условия устойчивости) результаты.

Обозначим через H^2 **прямую сумму пространств** H : $H^2 = H \oplus H$. Для векторов $U = \{u^1, u^2\}$ сложение и умножение в H^2 определяется покоординатно, а скалярное произведение

$$(U, V) = \left(u^1, v^1\right) + \left(u^2, v^2\right).$$

На H^2 определим операторы (операторные матрицы)

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

элементы которых $G_{\alpha\beta}$ являются операторами на H. С самосопряженным положительно определенным оператором $\mathbf{G}$ свяжем гильбертово пространство $H^2_{\mathbf{G}}$, в котором скалярное произведение и норма есть

$$(U, V)_{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}U, V), \quad \|U\|_{\mathbf{G}} = \sqrt{(\mathbf{G}U, U)}.$$

Трехслойную операторно-разностную схему (1.59) запишем в виде двухслойной векторной схемы

$$\mathbf{B}\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\tau} + \mathbf{A}Y^n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.67}$$

при соответствующем определении векторов Y^n, $n = 1, 2, \ldots$.

Исходя из вышеизложенного, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ определим вектор

$$Y^n = \left\{ \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}), y_n - y_{n-1} \right\}. \tag{1.68}$$

В условиях теоремы 1.10 полученной выше оценке устойчивости по начальным данным (1.66) в этих обозначениях можно придать вид

$$\|Y^{n+1}\|_{\mathbf{G}} \le \|Y^n\|_{\mathbf{G}}, \tag{1.69}$$

где

$$G_{11} = A, \quad G_{12} = G_{21} = 0, \quad G_{22} = R - \frac{1}{4}A. \tag{1.70}$$

С учетом (1.60) двухслойная векторная схема (1.67), (1.68) расписывается следующим образом:

$$B_{11}\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + B_{12}\frac{w_{n+1} - w_n}{\tau} + A_{11}u_n + A_{12}w_n = 0, \tag{1.71}$$

$$B_{21}\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + B_{22}\frac{w_{n+1} - w_n}{\tau} + A_{21}u_n + A_{22}w_n = 0. \tag{1.72}$$

Равенство (1.71) сопоставляется с трехслойной операторно-разностной схемой в форме (1.59). Принимая во внимание тождества

$$\frac{u_{n+1} + u_n}{2} = u_n + \frac{u_{n+1} - u_n}{2},$$

$$2\left(u_{n+1}-u_n\right)=w_{n+1}+w_n,$$

перепишем (1.59) в более удобном виде

$$B\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}+R\frac{w_{n+1}-w_n}{\tau}-\frac{1}{4}A\left(w_{n+1}-w_n\right)+$$
$$+\frac{\tau}{2}A\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}+Au_n=0. \qquad (1.73)$$

Для того чтобы от (1.71) перейти к (1.73), положим

$$B_{11}=B+\frac{\tau}{2}A,\quad B_{12}=\tau R-\frac{\tau}{4}A,\quad A_{11}=A,\quad A_{12}=0. \qquad (1.74)$$

Уравнение (1.72) не влияет на трехслойную схему (1.59). Ориентируясь на двухслойные операторно-разностные схемы (1.67) с самосопряженным оператором $\mathbf{A}$, определим

$$B_{21}=-\tau Q,\quad B_{22}=\frac{\tau}{2}Q,\quad A_{21}=0,\quad A_{22}=Q, \qquad (1.75)$$

где Q — некоторый самосопряженный положительный оператор.

При выборе (1.74), (1.75) для операторов двухслойной разностной схемы (1.67) имеем представление

$$\mathbf{B}=\frac{\tau}{2}\mathbf{A}+\mathbf{Q}, \qquad (1.76)$$

где

$$Q_{11}=B,\quad Q_{12}=\tau R-\frac{\tau}{4}A,\quad Q_{21}=-\tau Q,\quad Q_{22}=0. \qquad (1.77)$$

На основе такой записи в условиях теоремы 1.10 устанавливается устойчивость операторно-разностной схемы (1.59), т.е. оценка (1.69), (1.70). Двухслойная векторная операторно-разностная схема (1.67) при самосопряженном и положительном операторе $\mathbf{A}$ устойчива по начальным данным в $H^2_{\mathbf{A}}$, если

$$\mathbf{B}\geq\frac{\tau}{2}\mathbf{A}. \qquad (1.78)$$

Принимая во внимание (1.76), условие (1.78) будет справедливо при

$$\mathbf{Q}\geq 0.$$

Оно будет всегда выполнено для оператора $\mathbf{Q}$, определяемого (1.77), при $B\geq 0$ и выборе

$$Q=R-\frac{1}{4}A. \qquad (1.79)$$

При (1.79) устойчивость в $H^2_{\mathbf{A}}$ соответствует выполнению (1.69), (1.70).

1.3.3. ρ-устойчивость трехслойных схем

Допуская уменьшение или рост нормы разностного решения задачи, будем ориентироваться на ρ-устойчивые схемы [18], когда условие устойчивости по начальным данным имеет вид

$$\|Y^{n+1}\|_{\mathbf{G}} \le \rho \|Y^n\|_{\mathbf{G}}, \tag{1.80}$$

где $\rho > 0$.

Теорема 1.11. Пусть в разностной схеме (1.59) операторы R и A являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$B + \frac{\tau}{2}\frac{\rho - 1}{\rho + 1}A \ge 0, \quad A > 0, \quad R - \frac{1}{4}A > 0 \tag{1.81}$$

с $\rho > 1$ имеет место априорная оценка (1.80), (1.70), т.е. операторно-разностная схема (1.59) ρ-устойчива по начальным данным.

Доказательство. Двухслойная векторная разностная схема (1.67) ρ-устойчива с $\rho > 1$ при (см. теорему 1.5) выполнении неравенства

$$\mathbf{B} \ge \frac{\tau}{\rho + 1}\mathbf{A}. \tag{1.82}$$

Принимая во внимание (1.76), неравенство (1.82) переписывается в виде

$$\mathbf{Q} + \frac{\tau}{2}\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\mathbf{A} \ge 0. \tag{1.83}$$

В условиях теоремы выполнение неравенства (1.83) проверяется непосредственно. ■

В несколько более общих условиях устанавливаются оценки ρ-устойчивости (1.80) с произвольным $\rho > 0$ при использовании норм, зависящих от ρ. В операторно-разностной схеме (1.59) введем новые неизвестные $y_n = \rho^n z_n$, что дает

$$B\frac{\rho z_{n+1} - \rho^{-1} z_{n-1}}{2\tau} + R\left(\rho z_{n+1} - 2z_n + \rho^{-1} z_{n-1}\right) + Az_n = 0. \tag{1.84}$$

Схему (1.84) запишем в канонической форме

$$\tilde{B}\frac{z_{n+1} - z_{n-1}}{2\tau} + \tilde{R}\left(z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}\right) + \tilde{A}z_n = 0. \tag{1.85}$$

Непосредственные выкладки дают

$$\tilde{B} = \frac{\rho^2 + 1}{2}B + \tau\left(\rho^2 - 1\right)R,$$

$$\tilde{R} = \frac{\rho^2 - 1}{4\tau} B + \frac{\rho^2 + 1}{2} R, \tag{1.86}$$

$$\tilde{A} = \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A.$$

На основании теоремы 1.10 при

$$\tilde{B} \geq 0, \quad \tilde{A} > 0, \quad \tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A} > 0 \tag{1.87}$$

имеет место устойчивость схемы (1.85) по начальным данным и верна оценка

$$\|Z^{n+1}\|_{\tilde{\mathbf{G}}} \leq \|Z^n\|_{\tilde{\mathbf{G}}}, \tag{1.88}$$

где (см. (1.68))

$$Z^n = \left\{ \frac{1}{2}\left(z_n + z_{n-1}\right), z_n - z_{n-1} \right\}.$$

С учетом этого определим теперь вектор

$$Y^n = \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} y_n + z_{n-1}\right), \frac{1}{\rho} z_n - z_{n-1} \right\}. \tag{1.89}$$

Тогда оценка (1.88) примет вид

$$\|Y^{n+1}\|_{\tilde{\mathbf{G}}} \leq \rho \|Y^n\|_{\tilde{\mathbf{G}}}, \tag{1.90}$$

т.е. исходная разностная схема (1.59) ρ-устойчива по начальным данным.

Норма в (1.90) определяется оператором $\tilde{\mathbf{G}}$, для которого

$$\tilde{G}_{11} = \tilde{A}, \quad \tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{21} = 0, \quad \tilde{G}_{22} = \tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A}. \tag{1.91}$$

Условия устойчивости формулируются на основе (1.86), (1.87).

Теорема 1.12. Пусть в разностной схеме (1.59) операторы B, R и A являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$\begin{aligned} &\frac{\rho^2 + 1}{2} B + \tau\left(\rho^2 - 1\right) R \geq 0, \\ &\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A > 0, \\ &\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho + 1)^2 R - \rho A > 0 \end{aligned} \tag{1.92}$$

с $\rho > 0$ имеет место априорная оценка (1.89)—(1.91), т.е. разностная схема (1.59) ρ-устойчива по начальным данным в $H^2_{\tilde{\mathbf{G}}}$.

1.3.4. Оценки в более простых нормах

Устойчивость рассматриваемых операторно-разностных схем установлена в гильбертовых пространствах со сложной составной нормой (см. (1.63), (1.64)). При исследовании устойчивости трехслойных разностных схем получены [47, 61] оценки устойчивости в более простых, чем (1.64), нормах. Достигается это за счет несколько более жестких условий устойчивости. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 1.13. Пусть в операторно-разностной схеме (1.59) операторы R и A являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$B \geq 0, \quad A > 0, \quad R > \frac{1+\varepsilon}{4} A \tag{1.93}$$

с $\varepsilon > 0$ имеют место априорные оценки

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq 2\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\left(\|y_0\|_A^2 + \|y_1 - y_0\|_R^2\right), \tag{1.94}$$

$$\|y_{n+1}\|_A^2 + \|y_n - y_{n-1}\|_R^2 \leq \frac{4+3\varepsilon}{\varepsilon}\left(\|y_0\|_A^2 + \|y_1 - y_0\|_R^2\right). \tag{1.95}$$

Доказательство. В используемых безындексных обозначениях $y_n = y$, $y_{n+1} = \hat{y}$, $\hat{y} - y = \tau y_t$ для $\mathcal{E}_{n+1}$, определяемого согласно (1.64), имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(A\left(\hat{y}+y\right), \hat{y}+y\right) + \tau^2\left(Ry_t, y_t\right) - \frac{\tau^2}{4}\left(Ay_t, y_t\right) = \\ &= \left(A\hat{y}, y\right) + \tau^2\left(Ry_t, y_t\right).\end{aligned} \tag{1.96}$$

Подстановка $\hat{y} = y + \tau y_t$ в (1.96) дает

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{n+1} &= \left(Ay, y\right) + \tau\left(Ay, y_t\right) + \tau^2\left(Ry_t, y_t\right) \leq \\ &\leq \|y\|_A^2 + \tau\|y\|_A\|y_t\|_A + \tau^2\|y_t\|_R^2.\end{aligned}$$

Принимая во внимание третье неравенство (1.93), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{n+1} &\leq \|y\|_A^2 + \frac{2\tau}{(1+\varepsilon)^{1/2}}\|y\|_A\|y_t\|_R + \tau^2\|y_t\|_R^2 \leq \\ &\leq 2\left(\|y\|_A^2 + \tau^2\|y_t\|_R^2\right).\end{aligned}$$

Тем самым установлена оценка снизу для составной нормы

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq 2\left(\|y_n\|_A^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_R^2\right). \tag{1.97}$$

Оценка сверху устанавливается аналогично. Положим в (1.96) $y = \hat{y} - \tau y_t$ и с учетом (1.93) имеем

$$\mathcal{E}_{n+1} = (A\hat{y}, \hat{y}) - \tau\,(A\hat{y}, y_t) + \tau^2\,(Ry_t, y_t) \geq$$

$$\geq \|\hat{y}\|_A^2 - \tau\|\hat{y}\|_A\|y_t\|_A + \tau^2\|y_t\|_R^2 \geq$$

$$\geq \|\hat{y}\|_A^2 - \frac{2\tau}{(1+\varepsilon)^{1/2}}\|\hat{y}\|_A\|y_t\|_R + \tau^2\|y_t\|_R^2.$$

Для произвольного $\beta > 0$ получим

$$\mathcal{E}_{n+1} \geq (1-\beta)\,\|\hat{y}\|_A^2 + \left(1 - \frac{1}{\beta\,(1+\varepsilon)}\right)\tau^2\|y_t\|_R^2. \tag{1.98}$$

Полагая $\beta = 1/(1+\varepsilon)$, из (1.98) имеем

$$\mathcal{E}_{n+1} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|y_{n+1}\|_A^2. \tag{1.99}$$

Принимая во внимание (1.97) и (1.99), из оценки устойчивости (1.63) получим доказываемую оценку (см. (1.94)) устойчивости трехслойной разностной схемы (1.59) в H_A.

Для доказательства оценки (1.95) положим $\beta = (1+\varepsilon)^{-1/2}$, так что

$$1 - \beta = \frac{(1+\varepsilon)^{1/2} - 1}{(1+\varepsilon)^{1/2}} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+(1+\varepsilon)^{1/2}}.$$

С учетом неравенства $(1+\varepsilon)^{1/2} < 1 + 0,5\varepsilon$ от (1.98) приходим ко второй оценке составной нормы снизу

$$\mathcal{E}_{n+1} > \frac{2\varepsilon}{4+3\varepsilon}\left(\|y_{n+1}\|_A^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_R^2\right). \tag{1.100}$$

Из (1.63), (1.97) и (1.100) вытекает оценка (1.95). ■

Оценки типа (1.94) естественны при рассмотрении трехслойных схем для эволюционных уравнений первого порядка (параболическое уравнение второго порядка), а оценки типа (1.95) — для уравнений второго порядка (гиперболическое уравнение второго порядка).

1.3.5. Устойчивость по правой части

Приведем некоторые простейшие оценки устойчивости трехслойных операторно-разностных схем по начальным данным и правой части. Вместо (1.59) рассматривается схема

$$B\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2\tau}+R\left(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}\right)+Ay_n=\varphi_n. \tag{1.101}$$

Теорема 1.14. Пусть в разностной схеме (1.101) операторы R и A являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$B\geq\varepsilon E,\quad A>0,\quad R>\frac{1}{4}A \tag{1.102}$$

с постоянной $\varepsilon>0$ для разностного решения справедливы априорные оценки

$$\mathcal{E}_{n+1}\leq\mathcal{E}_1+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\tau\|\varphi_k\|^2, \tag{1.103}$$

$$\mathcal{E}_{n+1}\leq\mathcal{E}_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\tau\|\varphi_k\|^2_{B^{-1}}. \tag{1.104}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1.10 (см. (1.62)) получим равенство

$$\frac{1}{2\tau}\left(B\left(w_{n+1}+w_n\right),w_{n+1}+w_n\right)+\mathcal{E}_{n+1}=\left(\varphi_n,w_{n+1}+w_n\right)+\mathcal{E}_n.$$

Для получения оценки (1.103) при $\varepsilon>0$ в условиях (1.102) привлекается неравенство

$$\left(\varphi_n,w_{n+1}+w_n\right)\leq\frac{1}{2\tau}\varepsilon\|w_{n+1}+w_n\|^2+\frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_n\|^2.$$

Неравенство

$$\left(\varphi_n,w_{n+1}+w_n\right)\leq\frac{1}{2\tau}\|w_{n+1}+w_n\|^2_B+\frac{\tau}{2}\|\varphi_n\|^2_{B^{-1}}.$$

используется при доказательстве оценки (1.104). ■

Некоторые другие оценки устойчивости трехслойных разностных схем (1.101) по правой части можно получить (см. [47, 61]), ориентируясь на оценки (1.94), (1.95), при несколько более сильных ограничениях на оператор R.

1.3.6. Схемы с весами для уравнений первого порядка

Для приближенного решения задачи

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0,$$

$$u(0) = u^0$$

наряду с двухслойными разностными схемами с одним весовым параметром часто используется **трехслойная схема с весами**

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} +$$

$$+A\left(\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y_n + \sigma_2 y_{n-1}\right) = \varphi_n, \tag{1.105}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

$$y_0 = u^0, \quad y_1 = u^1. \tag{1.106}$$

Для задания второго начального условия (u_1 в (1.106)) со вторым порядком в простейшем случае привлекается двухслойная схема, так что

$$\frac{y_1 - y_0}{\tau} + A\frac{y_1 + y_0}{2} = \varphi_0.$$

Схема (1.105), (1.106) записывается в каноническом виде (1.57) при

$$B = E + \tau(\sigma_1 - \sigma_2) A, \quad R = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} A. \tag{1.107}$$

Будем рассматривать случай непостоянного положительного оператора A.

Теорема 1.15. Если $A > 0$ и выполнены условия

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}, \tag{1.108}$$

тогда схема (1.105), (1.106) устойчива по начальным данным и для разностного решения (при $\varphi = 0$) верна оценка

$$\|Y^{n+1}\|_* \leq \|Y_1\|_*, \tag{1.109}$$

где

$$\|Y^{n+1}\|_*^2 = \frac{1}{4}\|y_{n+1} + y_n\|^2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\right)\|y_{n+1} - y_n\|^2.$$

Доказательство. Действуя на (1.57), (1.107) оператором A^{-1}, получим

$$\tilde{B}\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tilde{R}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \\ + \tilde{A}y_n = \tilde{\varphi}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.110}$$

где

$$\begin{aligned} &\widetilde{B} = A^{-1} + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)E, \quad \widetilde{R} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}E, \\ &\widetilde{A} = E, \quad \widetilde{\varphi} = A^{-1}\varphi. \end{aligned} \tag{1.111}$$

Применим к схеме (1.110), (1.111) теорему 1.10. При предположениях (1.108) справедливы неравенства

$$\widetilde{R} - \frac{1}{4}\widetilde{A} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4}\right)\tau^2 E > 0,$$

$$\widetilde{B} = A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau E \geq 0,$$

которые обеспечивают устойчивость по начальным данным. Причем для решения задачи с однородной правой частью (при $\varphi = 0$) верна оценка (1.109). ■

Большой спектр априорных оценок устойчивости трехслойной схемы с весами (1.57), (1.58) по правой части можно найти в [47, 59, 61].

1.3.7. Схемы с весами для уравнений второго порядка

Рассмотрим условия устойчивости схем с весами для задачи Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1.112}$$

$$u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v^0 \tag{1.113}$$

при постоянном, самосопряженном и положительном операторе A.

Для приближенного решения задачи (1.112), (1.113) естественно использовать схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} +$$

$$+A\left(\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)\, y_n + \sigma_2 y_{n-1}\right) = \varphi_n, \tag{1.114}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

$$y_0 = u^0, \quad y_1 = u^1. \tag{1.115}$$

Схема (1.115), (1.115) записывается в канонической форме (1.57), (1.58) при определении операторов

$$B = \tau\,(\sigma_1 - \sigma_2)\, A, \quad R = \frac{1}{\tau^2} E + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} A. \tag{1.116}$$

Теорема 1.16. Если постоянный оператор $A = A^* > 0$ и выполнены условия

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geq \frac{1}{2}, \tag{1.117}$$

тогда схема (1.114), (1.115) устойчива по начальным данным и для разностного решения (при $\varphi = 0$) верна оценка

$$\|Y^{n+1}\|_* \leq \|Y_1\|_*,$$

где теперь

$$\|Y^{n+1}\|_*^2 = \frac{1}{4}\|y_{n+1} + y_n\|_A^2 + \|y_n - y_{n-1}\|_{R - \frac{1}{4}A}^2.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 1.10. ■

Условия устойчивости (1.117) можно несколько ослабить, привлекая информацию о норме оператора A. Принимая во внимание, что $A \leq \|A\| E$, условия устойчивости (1.65) для схемы (1.57), (1.116) будут выполнены при

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geq \frac{1}{2} - \frac{2}{\tau^2 \|A\|}.$$

Отсюда, в частности, следуют условия устойчивости явной схемы (в (1.114) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$).

1.4. Устойчивость в конечномерных банаховых пространствах

Исследование методов решения нестационарных задач часто проводится в банаховых пространствах. Особенное внимание уделяется формулированию достаточных условий устойчивости в пространствах $L_1(\omega)$ и $L_\infty(\omega)$. В теории разностных схем рассмотрение базируется на применении принципа максимума для сеточных уравнений. В своем исследовании мы используем понятие логарифмической нормы соответствующих операторов в конечномерных банаховых пространствах. В качестве примера анализируются двухслойные схемы с весами для приближенного решения краевой задачи для одномерного параболического уравнения.

1.4.1. Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассматривается система линейных обыкновенных уравнений первого порядка

$$\frac{du_i}{dt} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\, u_j = f_i(t), \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.118}$$

Полагая $u = u(t) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $A = \{a_{ij}\}$, запишем (1.118) в матричном (операторном) виде

$$\frac{du}{dt} + A(t)\, u = f(t). \tag{1.119}$$

Изучаются методы численного решения задачи Коши, когда (1.119) дополняется начальным условием

$$u(0) = u^0, \quad u^0 = \{u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0\}. \tag{1.120}$$

В вычислительной практике наибольший интерес вызывает устойчивость разностного решения задачи (1.119), (1.120) в L_∞ (в C) и L_1. Напомним некоторые основные понятия линейной алгебры. Для **нормы вектора** и согласованной с ней **нормы матрицы** в L_∞ имеем

$$\|w\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |w_i|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|. \tag{1.121}$$

Аналогично в L_1

$$\|w\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |w_i|, \quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|. \tag{1.122}$$

Задачу (1.119), (1.120) будем рассматривать при следующих ограничениях. Диагональные элементы матрицы A предполагаются неотрицательными и имеется диагональное преобладание по строкам или столбцам, т.е. справедливо

$$a_{ii} \ge \sum_{i\ne j=1}^{m} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.123}$$

(нестрогое **диагональное преобладание по строкам**) либо имеет место

$$a_{jj} \ge \sum_{j\ne i=1}^{m} |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{1.124}$$

(нестрогое **диагональное преобладание по столбцам**).

Логарифмическая норма матрицы A есть [81, 89] число

$$\mu[A] = \lim_{\delta\to 0+} \frac{\|E + \delta A\| - 1}{\delta}.$$

Для логарифмической нормы матрицы в L_∞ (согласованной с (1.121)) и в L_1 (согласованной с (1.122)) имеют место выражения

$$\mu_\infty[A] = \max_{1\le i\le m} \left(a_{ii} + \sum_{i\ne j=1}^{m} |a_{ij}| \right),$$

$$\mu_1[A] = \max_{1\le j\le m} \left(a_{jj} + \sum_{j\ne i=1}^{m} |a_{ij}| \right).$$

В силу ограничений (1.123), (1.124) в задаче Коши (1.119), (1.120) для логарифмической нормы матрицы $-A$ имеем

$$\mu[-A] \le 0 \tag{1.125}$$

в соответствующем пространстве (в L_∞ при выполнении (1.123) и в L_1 — при (1.124)).

Из свойств логарифмической нормы (см. [81, 82]) отметим следующие:

1) $\mu[cA] = c\mu[A], \quad c = \text{const} \geq 0$;

2) $\mu[cE + A] = c + \mu[A], \quad c = \text{const}$;

3) $\|Aw\| \geq \max\{-\mu[-A],\ -\mu[A]\}\ \|w\|$.

Наибольшего внимания заслуживает именно свойство 3, которое позволяет получить легко вычисляемую по элементам матрицы оценку нормы Aw снизу. Такая оценка комбинируется с обычной оценкой нормы Aw сверху: $\|Aw\| \leq \|A\|\ \|w\|$.

С привлечением логарифмической нормы получают априорные оценки для систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, для рассматриваемой задачи (1.119), (1.120) с постоянным оператором A имеем оценку

$$\|u(t)\| \leq \exp(\mu[-A]t) \left(\|u_0\| + \int_0^t \exp(-\mu[-A]\theta)\, \|f(\theta)\|\, d\theta \right),$$

выражающую устойчивость по начальным данным и правой части.

1.4.2. Схема с весами

Построим и исследуем на устойчивость разностные схемы для решения задачи (1.119), (1.120). Обозначим приближенное решение на момент времени t_n через y_n и запишем двухслойную разностную схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\left(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)\, y_n\right) = \varphi_n, \tag{1.126}$$

где, например, $A = A(\sigma t_{n+1} + (1-\sigma)t_n)$ при начальном условии

$$y_0 = u^0. \tag{1.127}$$

Достаточные условия устойчивости разностной схемы (1.126), (1.127) формулируются в виде следующего утверждения.

Теорема 1.17. Для задачи Коши (1.119), (1.120) с матрицей A, удовлетворяющей условиям (1.123) (или (1.124)), разностная схема с весами (1.126), (1.127) безусловно устойчива при $\sigma = 1$ и условно устойчива при $0 \leq \sigma < 1$ в L_∞ (в L_1), если

$$\tau \leq \frac{1}{1-\sigma} \left(\max_{1 \leq i \leq m} a_{ii} \right)^{-1}. \tag{1.128}$$

При этом для разностного решения верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\| \le \|u^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\varphi_k\|. \tag{1.129}$$

Доказательство. Из (1.126) следует

$$(E + \sigma\tau A)\, y_{n+1} = (E - (1-\sigma)\,\tau A)\, y_n + \tau\varphi_n$$

и тем самым

$$\|\,(E + \sigma\tau A)\, y_{n+1}\| \le \|\,(E - (1-\sigma)\,\tau A)\, y_n\| + \tau\|\varphi_n\|. \tag{1.130}$$

Для левой части неравенства (1.130) в силу отмеченных выше свойств логарифмической нормы и с учетом (1.125) имеем

$$\|\,(E + \sigma\tau A)\, y_{n+1}\| \ge -\mu[-E - \sigma\tau A]\, \|y_{n+1}\| =$$

$$= (1 + \sigma\tau\mu[-A])\, \|y_{n+1}\| \ge \|y_{n+1}\|.$$

Для первого слагаемого в правой части (1.130) получим

$$\|\,(E - (1-\sigma)\,\tau A)\, y_n\| \le \|E - (1-\sigma)\,\tau A\|\, \|y_n\|.$$

Рассмотрим подробнее эту оценку при исследовании устойчивости в L_∞. Случай L_1 изучается аналогично. Принимая во внимание (1.121) и условие диагонального преобладания (1.123), имеем

$$\|E - (1-\sigma)\,\tau A\| = \max_{1\le i\le m} \left| 1 - (1-\sigma)\,\tau \left(a_{ii} + \sum_{i\ne j=1}^{m} a_{ij} \right) \right| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le m} \left(|1 - (1-\sigma)\,\tau a_{ii}| + (1-\sigma)\,\tau \sum_{i\ne j=1}^{m} |a_{ij}| \right) \le$$

$$\le \max_{1\le i\le m} \left(|1 - (1-\sigma)\,\tau a_{ii}| + (1-\sigma)\,\tau a_{ii} \right) \le 1$$

при $0 \le \sigma \le 1$ и ограничениях на шаг по времени (1.128).

Подстановка в (1.130) дает неравенство

$$\|y_{n+1}\| \le \|y_n\| + \tau\|\varphi_n\|, \tag{1.131}$$

из которого непосредственно вытекает искомая оценка устойчивости по правой части и начальным данным (1.129). ■

Условия устойчивости в L_1 часто удобно получать на основе соответствующих результатов об устойчивости в сопряженном пространстве L_∞ (см. [16]).

Безусловно устойчивой будет чисто неявная схема $\sigma = 1$. К этому же классу относятся все схемы с $\sigma \geq 1$. Схему с весами (1.126), (1.127) удобно (на это обратил наше внимание П.П.Матус) рассматривать как чисто неявную схему

$$\frac{\tilde{y}_{n+1} - y_n}{\sigma\tau} + A\tilde{y}_{n+1} = \varphi_n$$

для функции $\tilde{y}_{n+1} = \sigma y_{n+1} + (1-\sigma)y_n$. Подобно доказательству теоремы (1.17), имеем

$$(1 + \tau\mu[-A])\,\|\tilde{y}_{n+1}\| \leq \|y_n\| + \tau\sigma\|\varphi_n\|.$$

При ограничениях $\sigma \geq 1$

$$\|\tilde{y}_{n+1}\| \geq \sigma\|y_{n+1}\| - (\sigma - 1)\,\|y_n\|$$

и верно неравенство (1.131).

1.4.3. Разностные схемы для одномерного параболического уравнения

Для иллюстрации условий устойчивости в банаховых пространствах рассмотрим модельную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f\,(x,t)\,, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u\,(0,t) = 0, \quad u\,(l,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u\,(x,0) = u^0\,(x)\,, \quad 0 < x < l$$

при естественных предположениях $k(x) > 0,\ 0 < x < l$.

На равномерной сетке $\bar{\omega}$ с шагом h будем использовать схему с весами (1.126), (1.127), в которой, например, для внутренних узлов ($x \in \omega$)

$$Ay = -\,(ay_{\bar{x}})_x = -\frac{1}{h}k\,(x + 0,5h)\,\frac{y\,(x+h) - y\,(x)}{h} +$$

$$+\frac{1}{h}k\,(x - 0,5h)\,\frac{y\,(x) - y\,(x-h)}{h}.$$

Непосредственно убеждаемся, что для A имеем $\mu[-A] \leq 0$ в L_∞ и для разностной схемы (1.126), (1.127) условия устойчивости (1.128) принимают вид

$$\tau \leq \frac{h^2}{1-\sigma}\left(\max_{x\in\omega} k\left(x \pm 0,5h\right)\right)^{-1}.$$

Для разностного решения верна оценка устойчивости в равномерной норме

$$\|y_{n+1}\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + \sum_{k=0}^{n} \tau\|\varphi_k\|_\infty.$$

Подобным образом исследуются и более общие краевые задачи для параболических уравнений.

Глава 2

Аддитивные схемы двухкомпонентного расщепления

Наиболее известны аддитивные схемы, когда оператор задачи расщепляется на сумму двух операторов. Примером таких схем являются классические схемы переменных направлений. На операторном уровне излагаются вопросы построения и исследования аддитивных схем, примыкающих к схемам переменным направлений, схемам стабилизирующей поправки и т.д. В более общем случае мы имеем дело с факторизованными аддитивными разностными схемами. Среди них выделен класс аддитивных попеременно-треугольных схем для задач с самосопряженным оператором. Обсуждаются возможности построения аддитивных разностных схем для эволюционных уравнений второго порядка, прямые общения рассматриваемых аддитивных схем на случай многокомпонентного расщепления.

2.1. Схемы переменных направлений

Рассматриваются аддитивные схемы двухкомпонентного расщепления, которые предложены в середине 50-х годов для численного решения двухмерных параболических задач. Мы ориентируемся на аддитивное представление оператора задачи в виде суммы попарно некоммутируемых операторов. Устанавливаются условия устойчивости и исследуется сходимость схем переменных направлений, выделены схемы стабилизирующей поправки.

2.1.1. Постановка задачи

В конечномерном гильбертовом пространстве H рассматривается задача

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$u(0) = u^0. \tag{2.2}$$

Для простоты изложения ограничимся случаем положительного постоянного оператора A.

Исследуемые схемы относятся к классу аддитивных разностных схем. Они характеризуются тем, что определяющий сеточный оператор (в нашем случае A) представляется в виде суммы нескольких операторов более простой структуры

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}.$$

В этом случае будем говорить о p-компонентном аддитивном расщеплении оператора A.

Рассмотрим наиболее простой случай двухкомпонентного расщепления, когда

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A^{\alpha} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.3}$$

Тем самым при таком расщеплении мы предполагаем, что оба оператора являются неотрицательными.

Ставится задача построения приближенного решения задачи (2.1), (2.2) с использованием схемы, которая по своим вычислительным затратам эквивалентна решению задач Коши для уравнений

$$\frac{du^{(\alpha)}}{dt} + A^{(\alpha)}u^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = 1, 2, \quad t > 0,$$

т.е. решению некоторых более простых (в некотором смысле) задач.

2.1.2. Схема Писмена-Рекфорда

При приближенном решении уравнения (2.1) для правой части также используется аддитивное представление

$$\varphi_n = \varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)}. \tag{2.4}$$

Классическая **разностная схема переменных направлений** (**схема Писмена-Рекфорда** [97]) для задачи (2.1) — (2.4) состоит из двух шагов. Сначала по известному y_n находится вспомогательная сеточная функция, которую мы обозначим $y_{n+1/2}$, из уравнения

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{0,5\tau} + A^{(1)}y_{n+1/2} + A^{(2)}y_n = 2\varphi_n^{(1)}. \tag{2.5}$$

Интерпретируя $y_{n+1/2}$ как решение на момент времени $t = t_{n+1/2}$, можем заметить, что (2.5) при $2\varphi_n^{(1)} = \varphi_n$ соответствует определению решения по чисто неявной схеме для оператора $A^{(1)}$ и по явной схеме для оператора $A^{(2)}$. В силу этого второй шаг метода переменных направлений будет соответствовать использованию уравнения

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{0,5\tau} + A^{(1)} y_{n+1/2} + A^{(2)} y_{n+1} = 2\varphi_n^{(2)}. \tag{2.6}$$

При расщеплении по пространственным переменным при решении краевой задачи для двухмерного параболического уравнения первый шаг связывается с использованием чисто неявной схемы по первой переменной и явной — по второй переменной. Второй шаг основан на применении явной схемы по первой переменной и чисто неявной — по второй переменной. При такой интерпретации аддитивная схема (2.5), (2.6) называется схемой переменных направлений.

Реализация схемы переменных направлений (2.5), (2.6) основана на определении $y_{n+1/2}$ и y_{n+1} из уравнений

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A^{(1)}\right) y_{n+1/2} = \left(E - \frac{\tau}{2} A^{(2)}\right) y_n + \tau\varphi_n^{(1)}, \tag{2.7}$$

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A^{(2)}\right) y_{n+1} = \left(E - \frac{\tau}{2} A^{(1)}\right) y_{n+1/2} + \tau\varphi_n^{(2)}. \tag{2.8}$$

Запись (2.7), (2.8) указывает на то, что при расщеплении по пространственным переменным решение находится обращением соответствующего одномерного сеточного оператора (методом прогонки) сначала по одной переменной (одному направлению), потом — по другой (другому направлению). Поэтому схему переменных направлений (2.5), (2.6) иногда называют **продольно-поперечной разностной схемой.**

2.1.3. Устойчивость схемы переменных направлений

Приведем априорную оценку, выражающую устойчивость схемы переменных направлений (2.5), (2.6) по начальным данным и правой части.

Теорема 2.1. Пусть в схеме (2.5), (2.6) постоянные операторы $A^{(\alpha)} \geq 0$, $\alpha = 1, 2$. Тогда для разностного решения имеет место следующая оценка устойчивости по начальным данным и правой части:

$$\left\| \left(E + \frac{\tau}{2} A^{(2)}\right) y_{n+1} \right\| \leq \left\| \left(E + \frac{\tau}{2} A^{(2)}\right) y_0 \right\| +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\tau\left(\|\varphi_k^{(1)}\|+\|\varphi_k^{(2)}\|\right). \tag{2.9}$$

Доказательство. Исследование устойчивости основывается на неравенстве

$$\|\left(E-(1-\sigma)\,\tau G\right)v\|\le\|\left(E+\sigma\tau G\right)v\|. \tag{2.10}$$

Имеем

$$\left(E-(1-\sigma)\,\tau G^*\right)\left(E-(1-\sigma)\,\tau G\right)-\left(E+\sigma\tau G^*\right)\left(E+\sigma\tau G\right)=$$

$$=-\tau\left(G^*+G\right)+\left((1-\sigma)^2-\sigma^2\right)\tau^2G^*G$$

и поэтому неравенство (2.10) справедливо для операторов $G\ge 0$ при $\sigma\ge 0,5$.

Из (2.7), (2.8) непосредственно следует

$$\|\left(E+\frac{\tau}{2}A^{(1)}\right)y_{n+1/2}\|\le\|\left(E-\frac{\tau}{2}A^{(2)}\right)y_n\|+\tau\|\varphi_n^{(1)}\|, \tag{2.11}$$

$$\|\left(E+\frac{\tau}{2}A^{(2)}\right)y_{n+1}\|\le\|\left(E-\frac{\tau}{2}A^{(1)}\right)y_{n+1/2}\|+\tau\|\varphi_n^{(2)}\|. \tag{2.12}$$

На основании (2.10) ($\sigma=0,5$) из (2.11), (2.12) получим

$$\|\left(E+\frac{\tau}{2}A^{(2)}\right)y_{n+1}\|\le\|\left(E+\frac{\tau}{2}A^{(1)}\right)y_{n+1/2}\|+\tau\|\varphi_n^{(2)}\|\le$$

$$\le\|\left(E-\frac{\tau}{2}A^{(2)}\right)y_n\|+\tau\|\varphi_n^{(1)}\|+\tau\|\varphi_n^{(2)}\|\le$$

$$\le\|\left(E+\frac{\tau}{2}A^{(2)}\right)y_n\|+\tau\|\varphi_n^{(1)}\|+\tau\|\varphi_n^{(2)}\|.$$

Из данного неравенства обычным образом получим искомую априорную оценку (2.9). ■

Применим теперь полученную оценку (2.9) для исследования точности разностных схем переменных направлений. Определенные проблемы, характерные для многих аддитивных схем, связаны с интерпретацией промежуточных функций — в схеме (2.5), (2.6) с $y_{n+1/2}$.

2.1.4. Точность схемы переменных направлений

Для исследования точности разностной схемы переменных направлений (2.5), (2.6) с $\varphi_n^{(\alpha)} = 0,5\varphi_n$, $\alpha = 1,2$ при приближенном решении задачи (2.1) – (2.4) запишем соответствующую задачу для погрешности. Положим, как обычно, $z_n = y_n - u_n$ и пусть $z_{n+1/2} = y_{n+1/2} - \bar{u}_n$. Сам выбор точного решения, с которым связывается $y_{n+1/2}$, проведем позднее. Задача для погрешности имеет вид

$$\frac{z_{n+1/2} - z_n}{0,5\tau} + A^{(1)} z_{n+1/2} + A^{(2)} z_n = \psi_n^{(1)}, \tag{2.13}$$

$$\frac{z_{n+1} - z_{n+1/2}}{0,5\tau} + A^{(1)} z_{n+1/2} + A^{(2)} z_{n+1} = \psi_n^{(2)}. \tag{2.14}$$

Для погрешности аппроксимации получим

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{\bar{u}_n - u_n}{0,5\tau} - A^{(1)} \bar{u}_n - A^{(2)} u_n + \varphi_n, \tag{2.15}$$

$$\psi_n^{(2)} = -\frac{u_{n+1} - \bar{u}_n}{0,5\tau} - A^{(1)} \bar{u}_n - A^{(2)} u_{n+1} + \varphi_n. \tag{2.16}$$

Положим в (2.15), (2.16)

$$\bar{u}_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + u_n\right) + \frac{\tau^2}{4} A^{(2)} \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau}. \tag{2.17}$$

В этом случае из (2.15), (2.16) следует

$$\psi_n^{(2)} - \psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1} - 2\bar{u}_n + u_n}{0,5\tau} - A^{(2)}\left(u_{n+1} - u_n\right) = 0.$$

Кроме того, в силу (2.17) имеем

$$\psi_n^{(1)} = -A^{(1)} \frac{u_{n+1} + u_n}{2} - A^{(2)} u_n + \varphi_n -$$

$$- \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - \frac{\tau}{2} A^{(2)} \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + O\left(\tau^2\right).$$

Полагая $\varphi_n = f(t_n + 0,5\tau)$, на решениях задачи получим

$$\psi_n^{(1)} = \psi_n^{(2)} = O\left(\tau^2\right). \tag{2.18}$$

Тем самым, при специальном определении промежуточного решения (см. (2.17)) разностная схема переменных направлений (2.5), (2.6) с

$\varphi_n^{(\alpha)} = 0,5\varphi_n$, $\alpha = 1,2$ имеет второй порядок аппроксимации по времени.

Для исследования точности рассмотрим сеточную задачу (2.13), (2.14). Используя оценку (2.9), при точном задании начальных условий получим

$$\| \left(E + \frac{\tau}{2}A^{(2)}\right) z_{n+1}\| \leq \sum_{k=0}^{n} \tau \left(\|\psi_k^{(2)}\| + \|\psi_k^{(1)}\|\right). \tag{2.19}$$

Принимая во внимание (2.18), на основе оценки (2.19) мы можем сделать вывод о том, что схема переменных направлений сходится со скоростью $O(\tau^2)$ в соответствующей норме.

2.1.5. Другие схемы переменных направлений

Среди других наиболее известных схем переменных направлений [77], помимо (2.5), (2.6), отметим **разностную схему Дугласа-Рекфорда** [84]. Она записывается в виде

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} + A^{(1)}y_{n+1/2} + A^{(2)}y_n = \varphi_n, \tag{2.20}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{\tau} + A^{(2)}\left(y_{n+1} - y_n\right) = 0. \tag{2.21}$$

На первом шаге (2.20) аппроксимируется исходное уравнение на всем временном интервале, второй шаг (2.21) вводится для обеспечения устойчивости. Поэтому за схемами типа (2.20), (2.21) закрепилось название "**схемы стабилизирующей поправки**". Нетрудно убедиться, что схема (2.20), (2.21) имеет погрешность аппроксимации $O(\tau)$ и является абсолютно устойчивой. Соответствующая априорная оценка для аддитивной схемы (2.20), (2.21) имеет вид

$$\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) y_{n+1}\| \leq \| \left(E + \tau A^{(2)}\right) y_0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau\|\varphi_k\|.$$

Исследуемые схемы переменных направлений могут рассматриваться как специальный вариант факторизованных схем, устойчивость которых более подробно рассматривается ниже.

Обобщение схем переменных направлений на случай многокомпонентного расщепления ($p > 2$) для общих попарно неперестановочных операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ сопряжено со значительными трудностями, несмотря на большое количество работ в этом направлении.

Среди вариантов метода переменных направлений выделим случай самосопряженного оператора A, когда в (2.3)

$$\left(A^{(1)}\right)^* = A^{(2)}.$$

При решении задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ связываются с нижней и верхней треугольными матрицами. В этом случае об аддитивных схемах говорят как о попеременно-треугольных методах. Аддитивные схемы такого типа проанализированы нами отдельно.

2.2. Факторизованные схемы

Рассматриваются возможности построения класса аддитивных разностных схем на основе представления оператора на верхнем временном слое в виде произведения более простых операторов. Двухкомпонентные варианты факторизованных схем тесно связаны с аддитивными схемами переменных направлений. При построении факторизованных аддитивных схем используется общий подход для получения разностных схем заданного качества — принцип регуляризации разностных схем.

2.2.1. Общее рассмотрение

Решается модельная задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{2.22}$$

$$u(0) = u^0 \tag{2.23}$$

при двухкомпонентном расщеплении на два постоянных неотрицательных оператора

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A^{(\alpha)} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.24}$$

Для приближенного решения задачи (2.22) – (2.24) построим двухслойную разностную схему, которая имеет канонический вид

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau. \tag{2.25}$$

Факторизованная схема соответствует выбору оператора B в виде

$$B = B^{(1)}B^{(2)}, \tag{2.26}$$

где

$$B^{(\alpha)} = E + \sigma\tau A^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.27}$$

При таком задании B каждый из операторов $B^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ соответствует использованию обычной схемы с весами для отдельного операторного слагаемого. Вычислительная реализация факторизованной схемы (2.24) — (2.27) связана с решением двух задач

$$B^{(1)}v_n + Ay_n = \varphi_n,$$

$$B^{(2)}\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = v_n, \quad t_n \in \omega_\tau.$$

При расщеплении по пространственным переменным в двухмерной параболической задаче последовательно решаются одномерные задачи, связанные с дифференциальным оператором по соответствующему направлению.

2.2.2. Схемы переменных направлений как факторизованные схемы

В некоторых случаях схемы переменных направлений записываются в виде факторизованной схемы (2.24) — (2.27). Рассмотрим, например. схему

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{0,5\tau} + A^{(1)}y_{n+1/2} + A^{(2)}y_n = 2\varphi_n^{(1)}, \tag{2.28}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{0,5\tau} + A^{(1)}y_{n+1/2} + A^{(2)}y_{n+1} = 2\varphi_n^{(2)}. \tag{2.29}$$

Складывая уравнения (2.28), (2.29), получим

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A^{(1)}y_{n+1/2} + A^{(2)}\frac{y_{n+1} + y_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)}\right).$$

Домножим это уравнение слева на оператор $B^{(1)}$, определяемый согласно (2.27) при $\sigma = 0,5$, что дает

$$B^{(1)}B^{(2)}\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A^{(1)}B^{(1)}y_{n+1/2} + B^{(1)}A^{(2)}y_n =$$

$$= \frac{1}{2} B^{(1)} \left(\varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)} \right). \tag{2.30}$$

Для промежуточных сеточных функций $y_{n+1/2}$ из уравнения (2.28) имеем

$$B^{(1)} y_{n+1/2} = \left(E - \frac{\tau}{2} A^{(2)} \right) y_n + \tau \varphi_n^{(1)}.$$

Подстановка в (2.30) дает факторизованную схему (2.24) — (2.27) при $\sigma = 0,5$ и

$$\varphi_n = \left(E - \frac{\tau}{2} A^{(1)} \right) \varphi_n^{(1)} + \left(E + \frac{\tau}{2} A^{(1)} \right) \varphi_n^{(2)}.$$

Еще более просто устанавливается, что схема Дугласа-Рекфорда (2.41), (2.42) записывается в виде (2.24) — (2.27) при $\sigma = 1$.

2.2.3. Устойчивость и точность факторизованных схем

Факторизованная схема имеет канонический вид двухслойной схемы (2.25) с операторами A и B, которые определяются согласно (2.24) и (2.26), (2.27). Прямое исследование устойчивости на основе проверки необходимых и достаточных условий затруднено в силу несамосопряженности операторов, неположительности оператора B. Поэтому можно пытаться доказывать устойчивость схемы (2.24) — (2.27) в более сложных нормах. Ориентиром может служить доказательство устойчивости схемы переменных направлений, проведенное выше.

Теорема 2.2. Пусть в факторизованной схеме (2.24) — (2.27) $A^{(\alpha)} \geq \geq 0$, $\alpha = 1, 2$ — постоянные операторы. Тогда при $\sigma \geq 0,5$ схема безусловно устойчива и для решения имеет место априорная оценка

$$\|B^{(2)} y_{n+1}\| \leq \|B^{(2)} y_0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\varphi_k\|. \tag{2.31}$$

Доказательство. Запишем (2.24), (2.25) в виде

$$B^{(2)} y_{n+1} = B^{(2)} y_n - \tau \left(B^{(1)} \right)^{-1} A y_n + \tau \left(B^{(1)} \right)^{-1} \varphi_n. \tag{2.32}$$

Добавим и вычтем из правой части (2.32) слагаемое, равное $(2\sigma)^{-1} B^{(2)} y_n$, что дает

$$B^{(2)} y_{n+1} = \frac{2\sigma - 1}{2\sigma} B^{(2)} y_n +$$

$$+\frac{1}{2\sigma}\left(B^{(2)}-2\sigma\tau\left(B^{(1)}\right)^{-1}A\right)y_n+\tau\left(B^{(1)}\right)^{-1}\varphi_n. \qquad (2.33)$$

Принимая во внимание (2.27), получим

$$B^{(2)}-2\sigma\tau\left(B^{(1)}\right)^{-1}A=\left(B^{(1)}\right)^{-1}\left(B^{(1)}B^{(2)}-2\sigma\tau A\right)=$$

$$=\left(B^{(1)}\right)^{-1}\left(\left(E+\sigma\tau A^{(1)}\right)\left(E+\sigma\tau A^{(2)}\right)-2\sigma\tau A\right)=$$

$$=\left(B^{(1)}\right)^{-1}\left(E-\sigma\tau A^{(1)}\right)\left(E-\sigma\tau A^{(2)}\right). \qquad (2.34)$$

Обозначим $w_n=B^{(2)}y_n$ и перепишем (2.33) в виде

$$w_{n+1}=\frac{2\sigma-1}{2\sigma}w_n+\frac{1}{2\sigma}Qw_n+\tau\left(B^{(1)}\right)^{-1}\varphi_n. \qquad (2.35)$$

С учетом (2.34) для оператора Q получим представление

$$Q=\left(E+\sigma\tau A^{(1)}\right)^{-1}\left(E+\sigma\tau A^{(1)}\right)\times$$

$$\times\left(E-\sigma\tau A^{(2)}\right)\left(E+\sigma\tau A^{(2)}\right)^{-1}.$$

В силу этого запишем Q в виде

$$Q=S_1S_2^*, \qquad (2.36)$$

где

$$S_\alpha=\left(E+\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)^{-1}\left(E-\sigma\tau A^{(\alpha)}\right). \qquad (2.37)$$

Сформулируем следующее утверждение, известное как **лемма Келлога**.

Лемма 2.1. Пусть оператор $G\geq 0$ в H, тогда справедлива оценка

$$\|\,(E-G)\,(E+G)^{-1}\,\|\leq 1. \qquad (2.38)$$

Доказательство. Неравенство (2.38) эквивалентно операторному неравенству $J=E-S^*S\geq 0$, где $S=(E-G)(E+G)^{-1}$. Имеем

$$(E+G^*)\,J\,(E+G)=(E+G^*)\,(E+G)-(E-G^*)\,(E-G)=$$

$$=2\,(G^*+G)$$

и поэтому неравенство (2.38) справедливо для неотрицательных операторов G. ■

В силу леммы из (2.37) получим $\|S_\alpha\| \leq 1$, $\alpha = 1, 2$. С учетом (2.36) не превосходит единицы и норма оператора Q, поэтому из (2.35) следует неравенство

$$\|w_{n+1}\| \leq \|w_n\| + \tau\|\varphi_n\|,$$

при всех $\sigma \geq 0,5$. Тем самым приходим к доказываемой оценке (2.31) для разностного решения. ■

На основе полученной оценки устойчивости (2.31) исследуется сходимость факторизованной схемы. Перепишем схему (2.25) — (2.27) в виде

$$\left(E + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau A + \sigma^2\tau^2 A^{(1)}A^{(2)}\right)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} +$$

$$+A\frac{y_{n+1} + y_n}{2} = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau. \tag{2.39}$$

Для погрешности $z_n = y_n - u_n$ из (2.31) получим оценку

$$\|B^{(2)}z_{n+1}\| \leq \sum_{k=0}^{n} \tau\|\psi_k\|,$$

где с учетом (2.39) для погрешности аппроксимации рассматриваемой схемы верно представление

$$\psi_n = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau A\frac{du}{dt}(t_n) + O\left(\tau^2\right).$$

Тем самым при $\sigma = 0,5$ факторизованная схема (2.24) — (2.27) сходится со вторым порядком по τ, а при $\sigma \neq 0,5$ — с первым.

2.2.4. Принцип регуляризации для построения факторизованных схем

Для построения безусловно устойчивых факторизованных схем используем общий подход для улучшения качества разностных схем — **принцип регуляризации разностных схем**. В настоящее время

рассматриваемый как основной методологический принцип улучшения разностных схем он предложен и проиллюстрирован на большом числе примеров в работе [41]. Для общих двух- и трехслойных схем формулируются рецепты улучшения качества (устойчивости, точности, экономичности) разностных схем. На его основе проводится [47, 61] исследование устойчивости и сходимости широкого класса разностных схем для краевых задач математической физики.

Принцип регуляризации разностных схем базируется на использовании уже известных результатов об условиях устойчивости. С этой точки зрения мы можем рассматривать принцип регуляризации как элемент конструктивного использования общих результатов теории устойчивости разностных схем. Это достигается за счет записи разностных схем в достаточно общей канонической форме и формулированием критериев устойчивости, удобных для проверки.

Построение безусловно устойчивых разностных схем на основе принципа регуляризации реализуется следующим образом:

1) для исходной задачи строится какая-то простейшая разностная схема (производящая разностная схема), не обладающая необходимыми свойствами, т.е. схема является условно устойчивой либо даже абсолютно неустойчивой;

2) разностная схема записывается в единой (канонической) форме, для которой условия устойчивости известны;

3) качества разностной схемы (ее устойчивость) улучшаются за счет возмущения операторов разностной схемы.

В соответствии с принципом регуляризации выберем вначале какую-нибудь разностную схему, от которой и будем отталкиваться. В качестве такой производящей схемы для задачи (2.22), (2.23) с $A > 0$ естественно рассмотреть простейшую явную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau. \tag{2.40}$$

Запишем разностную схему (2.40) в канонической форме двухслойных операторно-разностных схем (2.25) с оператором $B = E$. С учетом необходимых и достаточных условий устойчивости (теорема 1.2)

$$B \geq \frac{\tau}{2} A \tag{2.41}$$

при $A \leq \|A\| E$ получим следующие ограничения на шаг по времени для явной схемы:

$$\tau \leq \frac{2}{\|A\|}.$$

В соответствии с (2.41) повышение устойчивости может достигаться двояко. В первом случае — за счет увеличения энергии (By, y) оператора B (левой части неравенства (2.41)) или же за счет уменьшения энергии оператора A (правой части неравенства (2.41)).

Рассмотрим возможности, связанные с добавлением операторных слагаемых в операторы B и A, при построении безусловно устойчивых факторизованных. В этом случае будем говорить об **аддитивной регуляризации**. Регуляризацию проведем за счет перехода от единичного оператора B в схеме (2.40) к факторизованной схеме (2.25), (2.26), в которой

$$B^{(\alpha)} = E + \mu R^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{2.42}$$

где $R^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ — некоторые регуляризирующие операторы.

При выбранной регуляризации необходимо остаться в классе самосопряженных положительных операторов B. При расщеплении (2.24) на самосопряженные неотрицательные операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ факторизованный оператор B, определяемый согласно (2.26), (2.27), будет самосопряженным и положительным для перестановочных операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$. При общем расщеплении (2.24) рассчитывать на выполнимость требования перестановочности не приходится. Тем самым будем при регуляризации (2.42) использовать операторы $R^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, которые свойством перестановочности обладают.

Пусть

$$\begin{gathered} R = R^{(1)} + R^{(2)}, \quad R^{(\alpha)} = \left(R^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \\ R^{(1)} R^{(2)} = R^{(2)} R^{(1)}, \end{gathered} \tag{2.43}$$

тогда

$$B = B^* = E + \mu R + \mu^2 R^{(1)} R^{(2)} \geq E + \mu R.$$

Предположим, что регуляризирующий оператор R такой, что

$$R \geq \theta A, \quad \theta = \text{const} > 0, \tag{2.44}$$

тогда факторизованная схема (2.25), (2.42), (2.43) будет устойчива при ограничениях

$$\mu \geq \frac{\tau}{2\theta}.$$

Это следует из основного неравенства (2.41) при учете сформулированных условий (2.44) на регуляризатор.

При построении факторизованных схем наиболее важным является выбор оператора регуляризации R, его расщепления (2.43). При рассмотрении разностных схем для задач математической физики с переменными коэффициентами в качестве регуляризатора обычно выбирается разностный оператор, который соответствует задаче с постоянными коэффициентами, а операторные слагаемые $R^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ — разностные операторы по отдельным переменным. Для задач с сильно переменными коэффициентами не очень удобным может оказаться условие (2.44).

На этом пути можно строить регуляризованные факторизованные схемы при многокомпонентном расщеплении оператора задачи. Отметим и некоторые другие возможности построения факторизованных схем многокомпонентного расщепления.

2.2.5. Факторизованные схемы многокомпонентного расщепления

При решении трехмерных задач, использовании методов декомпозиции области необходимо ориентироваться на использование аддитивных схем многокомпонентного расщепления, когда

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad p > 2. \tag{2.45}$$

При построении факторизованного оператора по формуле

$$B = \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \sigma\tau A^{(\alpha)}\right) \tag{2.46}$$

устойчивыми будут схемы с попарно перестановочными операторами $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, ..., p$. В общем случае неперестановочных операторов (даже при двухкомпонентном расщеплении) $B \neq B^*$.

В [53] предложена факторизованная разностная схема многокомпонентного расщепления, которая записывается в каноническом виде (2.25) с оператором

$$B = \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \sigma\tau A^{(p+1-\alpha)}\right) \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \sigma\tau A^{(\alpha)}\right). \tag{2.47}$$

В этом случае $B = B^* > 0$ и поэтому можно использовать результаты общей теории устойчивости операторно-разностных схем.

По сравнению с традиционной факторизованной схемой многокомпонентного расщепления (2.25), (2.45), (2.46) за счет двукратного увеличения вычислительной работы на одном шаге в симметризованной разностной схеме (2.25), (2.45), (2.47) предоставляется возможность построения безусловно устойчивых факторизованных разностных схем для общего случая неперестановочных операторов $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, ..., p$.

Исследование устойчивости проводится на основе общей теории устойчивости разностных схем. Нетрудно убедиться, что рассматриваемая факторизованная схема (2.25), (2.45), (2.47) безусловно устойчива при значениях весового параметра $\sigma \geq 0,25$. С этой целью привлекается оценка

$$B = B^* \geq E + 2\sigma\tau \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} \tag{2.48}$$

для факторизованного оператора (2.47).

Доказательство (2.48) для произвольного p проведем по индукции. При $p = 2$ с учетом (2.45) имеем

$$B = \left(E + \sigma\tau A^{(1)}\right)\left(E + \sigma\tau A^{(1)}\right) =$$

$$= E + 2\sigma\tau A^{(1)} + \sigma^2\tau^2\left(A^{(1)}\right)^2 = B^* \geq E + 2\sigma\tau A^{(1)}.$$

Предположим, что (2.48) имеет место при $p - 1$, тогда для оператора B, определяемого согласно (2.47), получим

$$B = \left(E + \sigma\tau A^{(p)}\right)\left(E + 2\sigma\tau \sum_{\alpha=1}^{p-1} A^{(\alpha)} + D\right)\left(E + \sigma\tau A^{(p)}\right) = B^*,$$

где $D = D^* \geq 0$. Дальнейшие рассуждения очевидны.

С учетом (2.48) условие устойчивости (2.41) выполнено при сформулированных выше ограничениях на веса $\sigma \geq 0,25$. При $\sigma = 0,25$ рассматриваемая схема имеет второй порядок точности по τ.

Необходимо отметить, что на основе представления оператора B в факторизованном виде (2.46) при $\sigma = 1$ можно строить безусловно устойчивые схемы многокомпонентного расщепления [27, 74]. Дадим их интерпретацию с позиций принципа регуляризации разностных схем.

При приближенном решении задачи Коши (2.22), (2.23) в качестве производящей будем использовать чисто неявную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_{n+1} = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau,$$

которая является безусловно устойчивой. Запишем ее в виде

$$(E + \tau A)\, y_{n+1} = y_n + \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau. \tag{2.49}$$

Для получения более удобной для реализации факторизованной схемы в соответствии с принципом регуляризации внесем малые возмущения в операторные коэффициенты. Вместо (2.49) при расщеплении (2.45) естественно рассмотреть схему

$$\prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \tau A^{(\alpha)}\right) y_{n+1} = y_n + \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau. \tag{2.50}$$

Фактически это соответствует возмущению оператора задачи A членом порядка $O(\tau)$. Регуляризованная схема (2.50) аппроксимирует исходную задачу с первым порядком по τ.

Для того чтобы показать устойчивость факторизованной схемы многокомпонентного расщепления (2.50), запишем ее в виде

$$\left(E + \tau A^{(1)}\right) y_{n+1/p} = y_n + \tau\varphi_n,$$

$$\left(E + \tau A^{(\alpha)}\right) y_{n+\alpha/p} = y_{n+(\alpha-1)/p}, \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p, \quad t_n \in \omega_\tau.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\|y_{n+1/p}\| \le \|y_n\| + \tau\|\varphi_n\|,$$

$$\|y_{n+\alpha/p}\| \le \|y_{n+(\alpha-1)/p}\|, \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p, \quad t_n \in \omega_\tau.$$

Тем самым имеет место оценка

$$\|y_{n+1}\| \le \|y_n\| + \tau\|\varphi_n\|, \quad t_n \in \omega_\tau,$$

обеспечивающая устойчивость разностной схемы (2.50) в H.

Определенные недостатки факторизованной схемы (2.50) во многом компенсируются простотой конструкции. Среди важнейших достоинств отметим возможность использования расщепления на произвольное число неперестановочных неотрицательных операторов $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, \ldots, p$. Кроме этого, имеется возможность исследования таких факторизованных схем в банаховых пространствах сеточных функций.

2.3. Попеременно-треугольный метод

Для решения задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с симметричной матрицей в работе [32] предложен попеременно-треугольный метод. Он основан на расщеплении матрицы уравнения на две треугольные матрицы. В данном разделе дается общее описание попеременно-треугольного метода, показана сходимость аддитивной схемы со вторым порядком по времени. Отмечаются возможности построения новых классов аддитивных попеременно-треугольных схем, среди которых отметим задачи с несамосопряженными операторами.

2.3.1. Общее описание попеременно-треугольного метода

Будем рассматривать задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{2.51}$$

$$u(0) = u^0 \tag{2.52}$$

с постоянным оператором $A = A^* \geq 0$.

Попеременно-треугольный метод определяется двухкомпонентным аддитивном расщеплением

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} > 0, \quad \left(A^{(1)}\right)^* = A^{(2)}. \tag{2.53}$$

Пусть (2.51), (2.52) является операторной записью задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du_i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j(t) = f_i(t), \quad t > 0, \tag{2.54}$$

$$u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.55}$$

В этом случае $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — вектор неизвестных, $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ — заданный вектор правых частей, а $A = \{a_{ij}\}$ — симметричная вещественная матрица с элементами $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

При сформулированных условиях матрица A задачи (2.54), (2.55) рассматривается как самосопряженный линейный оператор, действующий в конечномерном гильбертовом (евклидовом) пространстве $H = l_2$ со скалярным произведением $(y, v) = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i$ и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Для элементов матриц

$$A^{(\alpha)} = \{a_{ij}^{(\alpha)}\}, \quad \alpha = 1, 2$$

в соответствии с разложением (2.53) имеем

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{ij}, & i < j, \\ \frac{1}{2}\, a_{ii}, & i = j, \\ 0, & i > j, \end{cases} \qquad a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \frac{1}{2}\, a_{ii}, & i = j, \\ a_{ij}, & i > j. \end{cases}$$

Тем самым матрица A расщепляется на две треугольные матрицы.

Стандартный вариант попеременно-треугольного метода соответствует использованию для приближенного решения задачи (2.51) — — (2.53) разностной схемы переменных направлений Писмена-Рекфорда

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{0,5\tau} + A^{(1)} y_{n+1/2} + A^{(2)} y_n = \varphi_n, \tag{2.56}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{0,5\tau} + A^{(1)} y_{n+1/2} + A^{(2)} y_{n+1} = \varphi_n. \tag{2.57}$$

Реализация аддитивных схем при используемом расщеплении связана с поочередным обращением верхней и нижней треугольных матриц, что и объясняет название "попеременно-треугольный метод"для таких аддитивных схем.

Для разностной схемы переменных направлений (2.56), (2.57) справедлива (см. теорему 1.1) априорная оценка

$$\| \left(E + \frac{\tau}{2} A^{(2)}\right) y_{n+1} \| \le \| \left(E + \frac{\tau}{2} A^{(2)}\right) y_0 \| + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\varphi_k\|.$$

Имеет место сходимость рассматриваемой разностной схемы со вторым порядком по τ.

2.3.2. Исследование устойчивости и сходимости

Аддитивные схемы попеременно-треугольного метода наиболее полно исследуются с привлечением результатов общей теории устойчивости операторно-разностных схем. Запишем двухслойную факторизованную схему попеременно-треугольного метода в каноническом виде

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=\varphi_n, \quad t_n\in\omega_\tau \tag{2.58}$$

с оператором

$$B=\left(E+\sigma\tau A^{(1)}\right)\left(E+\sigma\tau A^{(2)}\right). \tag{2.59}$$

При весовом параметре $\sigma=0,5$ схема (2.58), (2.59) эквивалентна схеме (2.56), (2.57).

Теорема 2.3. Факторизованная схема попеременно-треугольного метода (2.53), (2.58), (2.59) безусловно устойчива при $\sigma\geq 0,5$ в H_A и для разностного решения имеет место априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A^2\leq\|y_0\|_A^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\tau\|\varphi_k\|^2. \tag{2.60}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.8. Для (2.59) имеем

$$B=E+\sigma\tau A+\sigma^2\tau^2A^{(1)}A^{(2)}.$$

Принимая во внимание (2.53), получим

$$B=B^*\geq E+\sigma\tau A.$$

Поэтому неравенство (1.49) будет выполнено при выборе $G=E$, если $\sigma\geq 0,5$, а априорная оценка (1.50) примет искомый вид (2.60). ■

Стандартным образом исследуется сходимость факторизованной схемы попеременно-треугольного метода (2.53), (2.58), (2.59). Уравнение для погрешности $z_n=y_n-u_n$ имеет вид

$$B\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau}+Az_n=\psi_n, \quad t_n\in\omega_\tau,$$

где погрешность аппроксимации

$$\psi_n=\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau A\frac{du}{dt}(t_n)+O\left(\tau^2\right).$$

Поэтому с учетом (2.60) при $\sigma=0,5$ факторизованная схема попеременно-треугольного метода (2.53), (2.58), (2.59) сходится в H_A со вторым порядком по τ, а при $\sigma\neq 0,5$ — с первым.

2.3.3. Трехслойные аддитивные схемы

Повышение точности интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений наиболее естественно достигается на основе использования многослойных разностных схем (многошаговых методов). Отметим некоторые возможности построения трехслойных схем при использовании попеременно-треугольного метода.

Процесс построения факторизованных схем попеременно-треугольного метода будем интерпретировать с позиций принципа регуляризации разностных схем. Начиная с производящей схемы второго порядка точности за счет малых возмущений операторных коэффициентов, придем к схеме, реализация которой базируется на обращении сеточных операторов для отдельных операторных слагаемых в аддитивном представлении (2.53).

Начнем с вышерассмотренной схемы попеременно-треугольного метода (2.53), (2.56), (2.57). В качестве производящей возьмем **симметричную схему (схему Кранка-Николсона)**

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\frac{y_{n+1} + y_n}{2} = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{2.61}$$

которая абсолютно устойчива и имеет второй порядок точности. Она записывается в каноническом виде (2.58) при

$$B = E + \frac{\tau}{2}A.$$

Для того чтобы перейти к схеме с более удобным для реализации факторизованным оператором, будем возмущать оператор B. Оставаясь в классе безусловно устойчивых схем второго порядка точности, положим

$$B = E + \frac{\tau}{2}A + \mu\tau^2 A^{(1)}A^{(2)}. \tag{2.62}$$

При $\mu \geq 0$ для расщепления (2.53) имеем

$$B = B^* \geq E + \frac{\tau}{2}A.$$

Оператор (2.62) представляется в факторизованном виде

$$B = \left(E + \frac{\tau}{2}A^{(1)}\right)\left(E + \frac{\tau}{2}A^{(2)}\right),$$

если выбрать $\mu = 0,25$.

Совершенно аналогично строятся трехслойные аддитивные схемы попеременно-треугольного метода. Рассмотрим, например, в качестве производящей чисто неявную схему второго порядка точности

$$\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2\tau} + Ay_{n+1} = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau. \tag{2.63}$$

Эта схема записывается в канонической форме трехслойных операторно-разностных схем

$$B\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right) + Ay_n = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

с операторами

$$B = E + \tau A, \quad R = \frac{1}{\tau}E + \frac{1}{2}A.$$

Условие устойчивости

$$R > \frac{1}{4}A$$

для схемы (2.63) выполнено при всех $\tau > 0$.

Регуляризацию схемы (2.63) проведем следующим образом:

$$D\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2\tau} + Ay_{n+1} = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{2.64}$$

где

$$D = D^* = E + \mu\tau^2 A^{(1)}A^{(2)} \geq E. \tag{2.65}$$

Схема (2.64), (2.65) при $\mu > 0$ остается абсолютно устойчивой схемой второго порядка точности. Для того чтобы убедиться в этом, домножим уравнение (2.64) слева на $D^{-1/2}$ и обозначим $D^{1/2}y_n = v_n$. Тогда уравнение (2.64) примет вид, аналогичный (2.63)

$$\frac{3v_{n+1} - 4v_n + v_{n-1}}{2\tau} + \tilde{A}v_{n+1} = \tilde{\varphi}_n, \quad t_n \in \omega_\tau,$$

где

$$\tilde{A} = \left(\tilde{A}\right)^* = D^{1/2}AD^{1/2} > 0, \quad \tilde{\varphi}_n = D^{-1/2}\varphi_n.$$

Остается выбрать параметр регуляризации μ. Для определения решения на новом временном слое обращается оператор

$$D + \frac{2}{3}\tau A = \left(E + \frac{2}{3}\tau A^{(1)}\right)\left(E + \frac{2}{3}\tau A^{(2)}\right) + \left(\mu - \frac{4}{9}\right)\tau^2 A^{(1)}A^{(2)}.$$

При выборе $\mu = 4/9$ регуляризованная схема (2.64), (2.65) является факторизованной аддитивной схемой.

Аналогично на основе принципа регуляризации строятся трехслойные факторизованные схемы попеременно-треугольного метода, когда в качестве производящей берется разностная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + A\left(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma)\, y_n + \sigma y_{n-1}\right) = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau.$$

Эта схема устойчива при $\sigma > 0,25$ и сходится со вторым порядком.

2.3.4. Задачи с несамосопряженными операторами

Попеременно-треугольный метод наиболее хорошо приспособлен для построения приближенных методов решения задач с самосопряженным оператором A. Здесь мы отметим некоторые возможности использования такого подхода при решении задач с несамосопряженными операторами при некоторых ограничениях на их кососимметричную часть.

Пусть в задаче (2.51), (2.52)

$$A = A_0 + A_1 > 0, \tag{2.66}$$

где выделены самосопряженная и кососимметричная части A

$$A_0 = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right), \quad A_1 = \frac{1}{2}\left(A - A^*\right).$$

Будем предполагать, что кососимметриная часть подчинена самосопряженной части в смысле выполнения оценки

$$\|A_1 y\|^2 \le M\left(A_0 y, y\right), \quad M = \text{const} > 0. \tag{2.67}$$

Подобного типа ограничения типичны для параболических задач с эллиптическим оператором второго порядка, когда члены с первыми производными подчинены членам со старшими производными.

Будем строить факторизованные схемы попеременно-треугольного метода на основе расщепления самосопряженной части оператора A, т.е.

$$A_0 = A_0^{(1)} + A_0^{(2)} > 0, \quad \left(A_0^{(1)}\right)^* = A_0^{(2)}. \tag{2.68}$$

Оставаясь в классе схем второго порядка аппроксимации, мы должны ориентироваться на использование трехслойных факторизованных схем. Ориентиром будет схема

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + A_0\left(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma)\, y_n + \sigma y_{n-1}\right) +$$

$$+ A_1 y_n = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau. \tag{2.69}$$

Разностную схему (2.69) запишем в виде

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right) + A_0 y_n = \tilde{\varphi}_n, \tag{2.70}$$

где

$$B = E, \quad R = \sigma A_0, \quad \tilde{\varphi}_n = \varphi_n + A_1 y_n.$$

Для разностной схемы (2.70) при $\sigma > 0,25$ справедлива (см. теорему 1.14) априорная оценка

$$\mathcal{E}_{n+1} \le \mathcal{E}_n + \frac{1}{2}\tau \|\tilde{\varphi}_n\|^2, \tag{2.71}$$

где

$$\mathcal{E}_{n+1} = \frac{1}{4}\left(A_0\left(y_{n+1} + y_n\right), y_{n+1} + y_n\right) +$$

$$+ \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\left(A_0\left(y_{n+1} - y_n\right), y_{n+1} - y_n\right).$$

С учетом неравенства подчиненности (2.67) имеем

$$\frac{1}{2}\|\tilde{\varphi}_n\|^2 \le \|\varphi_n\|^2 + M\left(A_0 y_n, y_n\right).$$

Осталось оценить последнее слагаемое в этом неравенстве через $\mathcal{E}_n$. Это мы сделаем при наложении на вес более жестких ограничений

$$\sigma > \frac{1+\varepsilon}{4}, \tag{2.72}$$

где $\varepsilon > 0$. В этом случае (см. (1.99) при доказательстве теоремы 1.13) справедлива оценка

$$\left(A_0 y_n, y_n\right) \le \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\mathcal{E}_n.$$

Подстановка в (2.71) дает искомую послойную оценку ρ-устойчивости

$$\mathcal{E}_{n+1} \le \rho \mathcal{E}_n + \tau \|\varphi_n\|^2, \tag{2.73}$$

$$\rho = 1 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} M\tau.$$

Для построения факторизованной схемы попеременно-треугольного метода проведем регуляризацию производящей схемы (2.70) на основе возмущения оператора R. С учетом (2.68) положим

$$B = E, \quad R = \sigma A_0 + \mu\tau A_0^{(1)} A_0^{(2)}, \quad \tilde{\varphi_n} = \varphi_n + A_1 y_n.$$

Для нахождения решения на новом временном слое обращается оператор

$$\frac{1}{2\tau}(B + 2\tau R) =$$

$$= \frac{1}{2\tau}\left(E + 2\sigma\tau A_0^{(1)}\right)\left(E + 2\sigma\tau A_0^{(2)}\right) + \left(\mu - 2\sigma^2\right)\tau A^{(1)} A^{(2)}.$$

Так что для получения факторизованной схемы достаточно положить $\mu = 2\sigma^2$. Дальнейшие рассуждения полностью повторяют случай схемы (2.70).

Тем самым получаем факторизованную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \left(\sigma A_0 + 2\sigma^2\tau A_0^{(1)} A_0^{(2)}\right)(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) +$$

$$+ Ay_n = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau$$

второго порядка точности, которая устойчива при ограничениях (2.72), а для разностного решения справедлива оценка (2.73).

2.4. Уравнения второго порядка

Рассматриваются возможности построения аддитивных схем при решении задачи Коши для эволюционного уравнения второго порядка. Основное внимание уделяется обсуждению факторизованных разностных схем, среди которых выделим схемы попеременно-треугольного метода.

2.4.1. Модельная задача

В конечномерном гильбертовом пространстве H рассматривается задача Коши для уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{2.74}$$

$$u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v^0. \tag{2.75}$$

Будем считать, что оператор A является постоянным (не зависит от t), самосопряженным и положительным ($A = A^* > 0$).

При построении разностных схем для задачи (2.74), (2.75) ориентиром является оценка устойчивости по начальным данным и правой части

$$\|u(t)\|_*^2 \le \exp(t) \left(\|u^0\|_A^2 + \|v^0\|^2 + \int\limits_0^t \exp(-\theta) \|f(\theta)\|^2 d\theta \right),$$

где

$$\|u\|_*^2 = \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \|u\|_A^2.$$

Для (2.74), (2.75) наиболее естественно использовать схему второго порядка аппроксимации

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} +$$

$$+A(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma) y_n + \sigma y_{n-1}) = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.76}$$

$$y_0 = u^0, \quad y_1 = u^1. \tag{2.77}$$

Эта схема записывается в канонической форме трехслойных операторно-разностных схем

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + Ay_n = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

при

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2} E + \sigma A.$$

При ограничениях $\sigma \ge 0,25$ (см. теорему 1.16) схема с весами устойчива. Соответствующая оценка устойчивости по начальным данным ($\varphi = 0$) имеет вид

$$\|Y^{n+1}\|_* \le \|Y_1\|_*,$$

где

$$\|Y^{n+1}\|_*^2 = \frac{1}{4} \|y_{n+1} + y_n\|_A^2 + \|y_n - y_{n-1}\|_{R - \frac{1}{4}A}^2.$$

Реализация схемы (2.76), (2.77) связана с необходимостью обращения оператора $R = \tau^{-2}E + \sigma A$. При построении аддитивных схем выделяются операторы более простой структуры $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, такие что

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.78}$$

Переход на новый временной слой реализуется как решение p задач с операторами $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

2.4.2. Факторизованные схемы

При построении аддитивных схем начнем с простейшего случая расщепления на попарно перестановочные операторы, т.е.

$$A^{(\alpha)}A^{(\beta)} = A^{(\beta)}A^{(\alpha)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.79}$$

В этом случае с схеме

$$D\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + Ay_n = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.80}$$

естественно задать оператор D в факторизованном виде

$$D = \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \sigma\tau^2 A^{(\alpha)}\right).$$

Принимая во внимание (2.78), (2.79), получим

$$D = D^* \geq E + \sigma\tau^2 A,$$

и поэтому схема (2.80) устойчива при $\sigma \geq 0,25$ и сходится со вторым порядком.

Требование попарной перестановочности операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ очень жесткое и рассчитывать на его выполнение при решении прикладных задач не приходится. Поэтому необходимо провести модификацию рассматриваемой факторизованной схемы. Отметим некоторые основные возможности построения безусловно устойчивых факторизованных схем.

Предположим, что существует постоянный оператор G, такой что

$$G \geq \theta A, \quad \theta = \text{const} > 0,$$

причем для него существует аддитивное представление с попарно перестановочными операторами простой структуры

$$G = \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha, \quad G^{(\alpha)} = \left(G^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$$G^{(\alpha)} G^{(\beta)} = G^{(\beta)} G^{(\alpha)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p.$$

При задании

$$D = \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \mu\tau^2 G^{(\alpha)}\right)$$

факторизованная схема (2.80) будет устойчивой при

$$\mu \geq \frac{1}{4\theta}.$$

При приближенном решении краевых задач для параболических уравнений в качестве G выбирается сеточный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами. При этом операторы $G^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ являются разностными операторами по отдельным направлениям.

В более общем случае можно ориентироваться на использование симметризованной факторизованной схемы многокомпонентного расщепления. Аналогично (2.47) в схеме (2.80) положим

$$D = \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \sigma\tau^2 A^{(p+1-\alpha)}\right) \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \sigma\tau^2 A^{(\alpha)}\right). \tag{2.81}$$

В этом случае

$$D = D^* \geq E + 2\sigma\tau^2 A$$

и поэтому схема (2.80), (2.81) будет устойчивой при $\sigma \geq 1/8$ и сходится со вторым порядком по τ.

2.4.3. Схемы попеременно-треугольного метода

Можно строить аддитивные разностные схемы для приближенного решения задачи (2.74), (2.75) на основе расщепления

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} > 0, \quad \left(A^{(1)}\right)^* = A^{(2)}, \tag{2.82}$$

которое определяет попеременно-треугольный метод.

В схеме (2.80) определим факторизованный оператор

$$D = \left(E + \sigma\tau^2 A^{(1)}\right)\left(E + \sigma\tau^2 A^{(2)}\right). \tag{2.83}$$

С учетом (2.82) имеем

$$D = D^* \geq E + \sigma\tau^2 A$$

и поэтому факторизованная схема попеременно-треугольного метода (2.80), (2.82), (2.83) устойчива при $\sigma \geq 0,25$.

Исследование устойчивости и сходимости факторизованной схемы попеременно-треугольного метода (2.80), (2.82), (2.83) проводится стандартным образом на основе использования общих результатов устойчивости трехслойных операторно-разностных схем. Схема устойчива при $\sigma \geq 0,25$ и сходится со вторым порядком.

Глава 3

Схемы суммарной аппроксимации

Безусловно устойчивые аддитивные схемы многокомпонентного расщепления для произвольных некоммутируемых операторов строятся на основе понятия суммарной аппроксимации. Обсуждаются подходы с решением промежуточных задач для отдельных операторных слагаемых. Исследуются схемы покомпонентного расщепления в последовательном и параллельном вариантах (аддитивно-усредненные схемы). Исследование устойчивости базируется на соответствующих априорных оценках для промежуточных задач. На этом пути предоставляется возможность получения оценок в банаховых конечномерных пространствах. Отмечаются возможности построения аддитивных схем покомпонентного расщепления повышенного (второго) порядка точности, связь этих схем с другими: факторизованными и переменных направлений.

3.1. Аддитивные формулировки для дифференциальной задачи

Приведем соображения в пользу того, что решение нестационарной задачи может быть приближенно найдено как последовательное решение более простых задач. Выделены классы методов с дробными и целыми промежуточными шагами.

3.1.1. Модельная задача

Рассматривается задача Коши

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$u(0) = u^0. \tag{3.2}$$

Будем считать для простоты, что оператор A в уравнении (3.1) постоянный (не зависит от t).

Оператор задачи имеет p-компонентное расщепление на сумму постоянных операторов

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}. \tag{3.3}$$

Переход с одного временного слоя t_n на t_{n+1} будет основываться на последовательном решении pзадач Коши для операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

3.1.2. Промежуточные задачи

Обсудим основные подходы к построению аддитивных разностных схем. Для этого необходимо сформулировать вспомогательные задачи с операторами $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ аддитивного расщепления (3.3), решение которых даст приближенное решение исходной задачи (3.1), (3.2). Для построения аддитивных схем используются два основных подхода: аддитивные схемы с дробными шагами по времени и аддитивные схемы с целыми шагами.

Используется равномерная сетка по времени

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, ..., N_0, \quad \tau N_0 = T\}.$$

Каждый полуинтервал $(t_n, t_{n+1}]$ разобьем на p частей, введя промежуточные точки $t_{n+\alpha/p} = t_n + \alpha\tau/p$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Уравнение (3.1) с учетом аддитивного представления (3.3) оператора A запишем в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{1}{p} \frac{du}{dt} + A^{(\alpha)} u - f^{(\alpha)}(t) \right) = 0, \quad t > 0. \tag{3.4}$$

Здесь $f^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\alpha=1}^{p} f^{(\alpha)}(t) = f(t), \quad t > 0. \tag{3.5}$$

В соответствии с (3.4) будем решать последовательно следующие промежуточные задачи. Вспомогательные функции $v^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ определяются из уравнений

$$\frac{1}{p} \frac{dv^{(1)}}{dt} + A^{(1)} v^{(1)} = f^{(1)}(t), \quad t_n < t \le t_{n+1/p},$$

.....

$$\frac{1}{p}\frac{dv^{(\alpha)}}{dt} + A^{(\alpha)}v^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t),$$

$$t_{n+(\alpha-1)/p} < t \le t_{n+\alpha/p}, \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p-1, \tag{3.6}$$

.....

$$\frac{1}{p}\frac{dv^{(p)}}{dt} + A^{(1)}v^{(p)} = f^{(p)}(t), \quad t_{n+(p-1)/p} < t \le t_{n+1}.$$

Начальные условия для (3.6) имеют вид

$$v^{(1)}(0) = u^0, \quad v^{(1)}(t_n) = v^{(p)}(t_n),$$

$$v^{(\alpha)}\left(t_{n+(\alpha-1)/p}\right) = v^{(\alpha-1)}\left(t_{n+(\alpha-1)/p}\right), \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p. \tag{3.7}$$

В качестве приближенного решения задачи (3.1) — (3.3) на моменты времени $t = t_n$ выступает $v(t_n) = v^{(p)}(t_n)$.

Промежуточные задачи (3.6), (3.7) решаются на отдельных частях полуинтервала $(t_n, t_{n+1}]$, поэтому разностные схемы, построенные на основе (3.6), (3.7), можно назвать **аддитивными разностными схемами с дробными шагами**. Вопрос о близости решений задач (3.6), (3.7) и (3.1), (3.2) рассматривался Н.Н.Яненко [72, 73]. Показано, что

$$\|v(t_n) - u(t_n)\| = M\tau, \quad M = \text{const} > 0$$

при допущении о достаточной гладкости точного решения.

Второй способ построения аддитивных схем (см. [38]) основан на решении вспомогательных задач на всем временном полуинтервале $(t_n, t_{n+1}]$. Поэтому о таких схема говорят как об **аддитивных разностных схемах с целыми шагами**.

Для определения функций $v^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ используются уравнения

$$\frac{dv^{(1)}}{dt} + A^{(1)}v^{(1)} = f^{(1)}(t), \quad t_n < t \le t_{n+1},$$

.....

$$\frac{dv^{(\alpha)}}{dt} + A^{(\alpha)}v^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t),$$

$$t_n < t \le t_{n+1}, \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p-1,$$

.....

$$\frac{dv^{(p)}}{dt} + A^{(1)}v^{(p)} = f^{(p)}(t), \quad t_n < t \le t_{n+1}, \tag{3.8}$$

дополненные начальными условиями

$$v^{(1)}(0) = u^0, \quad v^{(1)}(t_n) = v^{(p)}(t_n),$$

$$v^{(\alpha)}(t_n) = v^{(\alpha-1)}(t_{n+1}), \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p. \tag{3.9}$$

При реализации (3.8), (3.9) сначала решается уравнение для $v^{(1)}(t)$ при начальном условии $v^{(1)}(t_n) = v^{(p)}(t_n)$ и находится $v^{(1)}(t_{n+1})$, которое используется в качестве начального для определения $v^{(2)}(t)$ и т.д. За приближенное решение задачи (3.1) — (3.3) на момент времени t_{n+1} принимается $v(t_{n+1}) = v^{(p)}(t_{n+1})$.

Следует заметить, что между двумя рассматриваемыми подходами для построения аддитивных разностных схем (3.6), (3.7) и (3.8), (3.9) имеется тесная связь. Решение системы (3.8), (3.9) также аппроксимирует с первым порядком исходную задачу (3.1) — (3.3). При условии, что операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ не зависят от времени, а правые части $f^{(\alpha)}(t) = 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p = 0$, задачи (3.6), (3.7) и (3.8), (3.9) просто совпадают друг с другом. В более общих ситуациях предпочтительнее использование именно второго варианта с решением вспомогательных задач на целых временных шагах.

3.1.3. Понятие суммарной аппроксимации

Встает вопрос о точности, с которой дискретный аналог системы уравнений (3.8), (3.9) позволяет найти приближенное решение задачи (3.1) — (3.3). Для этого приходится расширить понятие аппроксимации.

Каждая отдельная промежуточная задача (3.8), (3.9) не аппроксимирует исходную задачу (не дает приближенное решение), и только последовательное решение всех промежуточных задач с их согласованием через начальные условия позволяет получить приближенное решение. Потому в этом случае говорят, что задача (3.8), (3.9) аппроксимирует (3.1) — (3.3) в суммарном смысле (**суммарная аппроксимация**).

Рассмотрим погрешность

$$z^{(1)}(t) = v^{(1)}(t) - u(t), \quad t_n < t \le t_{n+1},$$

$$z^{(\alpha)}(t) = v^{(\alpha)}(t) - u(t_{n+1}), \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p, \quad t_n < t \le t_{n+1}.$$

Сформулируем соответствующие задачи для погрешностей. Подставляя $z^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ в (3.8), (3.9), получим уравнения

$$\frac{dz^{(\alpha)}}{dt} + A^{(\alpha)} z^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(t),$$

$$t_n < t \leq t_{n+1}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{3.10}$$

которые дополняются условиями

$$z^{(1)}(0) = 0, \quad z^{(1)}(t_n) = z^{(p)}(t_n),$$

$$z^{(\alpha)}(t_n) = z^{(\alpha-1)}(t_{n+1}), \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p. \tag{3.11}$$

Погрешность аппроксимации для каждой промежуточной задачи (3.8), (3.9) определяется выражениями

$$\psi^{(1)}(t) = -\frac{du}{dt} - A^{(1)} u + f^{(1)}(t),$$

$$\psi^{(\alpha)}(t) = -A^{(\alpha)} u + f^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p. \tag{3.12}$$

Из (3.12) следует, что для каждой промежуточной задачи $\psi^{\alpha}(t) = O(1)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, т.е. задачи (3.8), (3.9) не аппроксимируют (3.1) – (3.3).

Рассмотрим теперь

$$\psi(t) = \psi^{(1)}(t) + \psi^{(2)}(t) + \cdots + \psi^{(p)}(t).$$

Из (3.12) следует

$$\psi(t) = \varphi(t) - \frac{du}{dt} - A^{(1)} u(t) - \sum_{\alpha=2}^{p} A^{(\alpha)} u(t_{n+1}).$$

Принимая во внимание, что

$$u(t_{n+1}) = u(t) + O(\tau), \quad t_n \leq t \leq t_{n+1},$$

получим для погрешности представление

$$\psi^{(\alpha)}(t) = \overset{\circ}{\psi}{}^{(\alpha)}(t) + \overset{*}{\psi}{}^{(\alpha)}(t).$$

Здесь выделены слагаемые

$$\overset{*}{\psi}{}^{(\alpha)}(t) = O(\tau),$$

$$\overset{\circ}{\psi}^{(\alpha)}(t) = \varphi^{(\alpha)}(t) - A^{(\alpha)}u(t) - \delta_{\alpha 1}\frac{du}{dt},$$

где $\delta_{\alpha 1}$ — символ Кронекера. На решениях задачи (3.1) — (3.3)

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}^{(\alpha)}(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} \varphi^{(\alpha)}(t) - \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}u(t) - \frac{du}{dt} = 0$$

и поэтому для суммарной погрешности аппроксимации имеем

$$\psi(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi^{(\alpha)}(t) = O(\tau).$$

Будем говорить, что (3.8), (3.9) аппроксимирует задачу (3.1) — (3.3) в суммарном смысле с первым порядком.

Для оценки точности будем считать, что выполнены следующие условия: $\|A^{(\alpha)}A^{(\beta)}u\| \leq M$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p$. Как показывает углубленный анализ задачи для погрешности (3.10), (3.11), при таких дополнительных условиях оценка близости имеет вид $\|v(t_n) - u(t_n)\| = O(\tau)$. Таким образом, на основе решения промежуточных задач (3.8), (3.9) можно получить приближенное решение исходной дифференциально-разностной задачи (3.1) — (3.3) с первым порядком по времени.

Интересно отметить, что в случае, когда

$$f(t) = 0, \quad f^{(\alpha)}(t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

а операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ перестановочны друг с другом, т.е.

$$A^{(\alpha)}A^{(\beta)} = A^{(\beta)}A^{(\alpha)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p,$$

то (3.8), (3.9) дает точное решение задачи (3.1) — (3.3).

3.1.4. Схемы суммарной аппроксимации второго порядка

Для повышения точности приближенного решения задачи (3.1) — (3.3) на основе решения промежуточных задач можно использовать идею симметризации (двуциклическая организация) [65, 68, 69, 70]. Для ее пояснения (см., например, [110, 111]) рассмотрим случай однородного уравнения ($f(t) = 0$ в (3.1)) при двухкомпонентном расщеплении, т.е.

$$\frac{du}{dt} + \left(A^{(1)} + A^{(2)}\right)u = 0, \quad t > 0. \tag{3.13}$$

Решение задачи (3.2), (3.13) на момент времени $t = t_{n+1}$ связано с решением на момент времени $t = t_n$ соотношением

$$u(t_{n+1}) = \exp\left(-\tau\left(A^{(1)} + A^{(2)}\right)\right) u(t_n).$$

Применение метода суммарной аппроксимации (3.8), (3.9) соответствует представлению

$$v(t_{n+1}) = \exp\left(-\tau A^{(1)}\right) \exp\left(-\tau A^{(2)}\right) v(t_n). \tag{3.14}$$

Для погрешности $z(t_n) = v(t_n) - u(t_n)$ имеем

$$z(t_{n+1}) = \exp\left(-\tau A^{(1)}\right) \exp\left(-\tau A^{(2)}\right) z(t_n) + \tau\psi_n,$$

где

$$\psi_n = \left(\exp\left(-\tau A^{(1)}\right) \exp\left(-\tau A^{(2)}\right) - \exp\left(-\tau\left(A^{(1)} + A^{(2)}\right)\right)\right) \frac{u_n}{\tau}.$$

Непосредственные выкладки дают

$$\psi_n = \frac{1}{2}\tau\left(A^{(2)}A^{(1)} - A^{(1)}A^{(2)}\right) u_n + O(\tau^2).$$

Поэтому для перестановочных операторов погрешность аппроксимации имеет второй порядок, а в общем случае — только первый.

Для повышения точности приближенного решения задачи (3.2), (3.14) вместо (3.14) используем выражение

$$v(t_{n+1}) = \exp\left(-\frac{\tau}{2}A^{(1)}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{2}A^{(2)}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\tau}{2}A^{(2)}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{2}A^{(1)}\right) v(t_n). \tag{3.15}$$

Оно соответствует использованию вместо (3.8) следующей организации вычислений:

$$\frac{dv^{(\alpha)}}{dt} + A^{(\alpha)}v^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t), \quad t_n < t \le t_{n+1/2}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$$\frac{dv^{(\alpha)}}{dt} + A^{(\alpha)}v^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t), \tag{3.16}$$

$$t_{n+1/2} < t \le t_{n+1}, \quad \alpha = p, p-1, \ldots, 1.$$

При использовании (3.14) для погрешности аппроксимации получим $\psi_n = O(\tau^2)$ без предположений о коммутируемости операторов.

Задача (3.8), (3.9) связана со следующей цепочкой:

$$A^{(1)} \longmapsto A^{(2)} \longmapsto \cdots \longmapsto A^{(p)},$$

которая отражает последовательность решения промежуточных задач. Симметризованная цепочка, связанная с (3.16), имеет вид

$$A^{(1)} \longmapsto A^{(2)} \longmapsto \cdots \longmapsto A^{(p)} \longmapsto A^{(p-1)} \longmapsto \cdots \longmapsto A^{(1)}.$$

Общий случай многокомпонентного расщепления рассматривается аналогично. При (3.3) положим

$$A = A^{(1)} + \tilde{A}^{(2)}, \quad \tilde{A}^{(2)} = \sum_{\alpha=2}^{p} A^{(\alpha)}.$$

С учетом (3.15) получим

$$v\left(t_{n+1}\right) = \exp\left(-\frac{\tau}{2}A^{(1)}\right)\exp\left(-\tau\tilde{A}^{(2)}\right)\exp\left(-\frac{\tau}{2}A^{(1)}\right)v\left(t_n\right).$$

Для оператора $\tilde{A}^{(2)}$ в этом представлении используется аналогичная конструкция расщепления и т.д. В итоге получим

$$v\left(t_{n+1}\right) = \prod_{\alpha=1}^{p}\exp\left(-\frac{\tau}{2}A^{(\alpha)}\right)\prod_{\alpha=p}^{1}\exp\left(-\frac{\tau}{2}A^{(\alpha)}\right)v\left(t_n\right).$$

Это приводит к отмеченной выше организации (3.16) решений промежуточных задач.

3.2. Схемы суммарной аппроксимации

Рассматриваются аддитивные схемы суммарной аппроксимации при произвольном многокомпонентном расщеплении оператора задачи на попарно неперестановочные операторы. Устанавливается их устойчивость, которая напрямую связывается с устойчивостью задач для отдельных компонент.

3.2.1. Схемы покомпонентного расщепления

Рассматривается задача Коши

$$\frac{du}{dt} + Au = f\left(t\right), \quad t > 0, \tag{3.17}$$

$$u(0) = u^0. \tag{3.18}$$

Будем предполагать, что для постоянного оператора A справедливо следующее общее аддитивное представление:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.19}$$

Попарная перестановочность операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ не предполагается.

Аддитивные разностные схемы для задач с расщеплением на три и более попарно некоммутируемых операторов традиционно строятся на основе понятия суммарной аппроксимации - **схемы покомпонентного расщепления**. При расщеплении по пространственным переменным такие схемы называются локально-одномерными схемами [31, 90].

Схемы многокомпонентного расщепления соответствуют переходу от исходной задачи (3.17) — (3.19) к цепочке более простых задач (см. (3.8), (3.9))

$$\frac{dv^{(\alpha)}}{dt} + A^{(\alpha)} v^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t), \quad t_n < t \leq t_{n+1},$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{3.20}$$

$$v^{(1)}(0) = u^0, \quad v^{(1)}(t_n) = v^{(p)}(t_n),$$

$$v^{(\alpha)}(t_n) = v^{(\alpha-1)}(t_{n+1}), \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p. \tag{3.21}$$

Поставим каждой промежуточной задаче в соответствие схему с весами, что дает

$$\frac{y_{n+\alpha/p} - y_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + A^{(\alpha)} \left(\sigma_\alpha y_{n+\alpha/p} + (1 - \sigma_\alpha) y_{n+(\alpha-1)/p}\right) =$$

$$= \varphi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.22}$$

В этой разностной схеме правые части согласованы следующим образом:

$$\varphi_n = \sum_{\alpha=1}^{p} \varphi_n^{(\alpha)}. \tag{3.23}$$

При организации вычислений по схеме (3.22) реализуются условия согласования (3.21) решений промежуточных задач.

3.2.2. Оценки решений промежуточных задач

Для каждого отдельного уравнения (3.20) формулируются стандартные условия устойчивости. Необходимые и достаточные условия устойчивости сформулированы в теореме 1.9. Здесь мы приведем послойную оценку устойчивости по начальным данным и правой части схемы с весами, на основе которой анализируется аддитивная схема многокомпонентного расщепления (3.22).

Рассмотрим разностную схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\left(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)\, y_n\right) = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{3.24}$$

в которой $A \geq 0$ выполнены достаточное условие устойчивости $\sigma \geq \geq 0,5$. Наше рассмотрение базируется на исследовании нормы оператора перехода.

Лемма 3.1. Пусть

$$C = \tau\left(E + \sigma\tau D\right)^{-1} D, \tag{3.25}$$

где E – тождественный оператор, а $D \geq 0$. Тогда имеет место оценка

$$\|E - \mu C\| \leq 1, \quad \mu > 0 \tag{3.26}$$

при $\sigma \geq \mu/2$.

Доказательство. Неравенство (3.26) эквивалентно выполнению операторного неравенства

$$\left(E - \mu C^*\right)\left(E - \mu C\right) \leq E,$$

т.е.

$$\mu C^* C \leq 2C.$$

С учетом конкретного представления (3.25) для оператора имеем

$$\mu\tau\left(E + \sigma\tau D^*\right)^{-1} D^* D\left(E + \sigma\tau D\right)^{-1} \leq 2D\left(E + \sigma\tau D\right)^{-1}.$$

Домножая это неравенство слева на $E + \sigma\tau D^*$, а справа на $E + \sigma\tau D$ (неравенство при этом сохраняется), получим

$$\mu\tau D^* D \leq 2D + 2\sigma\tau D^* D.$$

Оно с очевидностью выполняется при $\sigma \geq \mu/2$. ■

Теперь можно вернуться к разностной схеме с весами.

Теорема 3.1. При $\sigma \geq 0,5$ и $\tau > 0$ для разностной схемы (3.24) выполняется априорная оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \|u^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\varphi_k\|. \tag{3.27}$$

Доказательство. Разностную схему (3.24) запишем в виде

$$y_{n+1} = (E - C)\, y_n + \tau\, (E + \sigma\tau A)^{-1}\, \varphi_n,$$

где

$$C = \tau\, (E + \sigma\tau A)^{-1}\, A,$$

т.е. в представлении (3.25) $D = A$. В силу леммы ($\mu = 1$) имеем

$$\|y_{n+1}\| \leq \|E - C\| \|y_n\| + \tau \|\, (E + \sigma\tau A)^{-1}\, \| \|\varphi_n\| \leq \|y_n\| + \tau \|\varphi_n\|$$

при $\sigma \geq 0,5$. Отсюда следует доказываемая оценка (3.27). ■

Некоторые другие априорные оценки схем с весами приведены в книгах [47, 59, 61].

3.2.3. Устойчивость схем покомпонентного расщепления

Приведем соответствующую априорную оценку устойчивости (см. [47, 61, 103]) по начальным данным и правой части аддитивной схемы покомпонентного расщепления (3.19), (3.22).

Для правых частей $\varphi_n^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, ..., p$ в схеме (3.23) будем использовать специальное представление

$$\varphi_n^{(\alpha)} = \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} + \overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} = 0. \tag{3.28}$$

Для схемы покомпонентного расщепления верно следующее утверждение.

Теорема 3.2. При $0,5 \leq \sigma_\alpha \leq 2$, $\alpha = 1, 2, ..., p$ и $\tau > 0$ для разностной схемы (3.19), (3.22) выполняется априорная оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \|u^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|\overset{*}{\varphi}{}_k^{(\alpha)}\| + \tau \|A^{(\alpha)} \sum_{\beta=\alpha}^{p} \overset{\circ}{\varphi}{}_k^{(\alpha)}\| \right). \tag{3.29}$$

Доказательство. Для разностного решения используем выражение

$$y_{n+\alpha/p} = v_{n+\alpha/p} + w_{n+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \tag{3.30}$$

причем $w_0 = 0$. Определим функции $w_{n+\alpha/p}$, $\alpha = 1, 2, ..., p$ из уравнений

$$\frac{w_{n+\alpha/p} - w_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p. \tag{3.31}$$

С учетом разложения (3.19) и наших предположений о начальном значении из данной системы уравнений получим

$$w_{n+1} = w_n = \cdots = w_0 = 0. \tag{3.32}$$

Рассмотрим теперь задачу для первого слагаемого в (3.30). Имеем

$$\frac{v_{n+\alpha/p} - v_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + A^{(\alpha)} \left(\sigma_\alpha v_{n+\alpha/p} + (1 - \sigma_\alpha) v_{n+(\alpha-1)/p}\right) =$$

$$= \chi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.33}$$

где

$$\chi_n^{(\alpha)} = \overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} - A^{(\alpha)} w_{n+(\alpha-1)/p} - \sigma_\alpha \tau A^{(\alpha)} \frac{w_{n+\alpha/p} - w_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau}.$$

Принимая во внимание (3.31), получим

$$w_{n+(\alpha-1)/p} = \tau \sum_{\beta=\alpha}^{p} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\beta)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Поэтому для правой части уравнения (3.33) получим

$$\chi_n^{(\alpha)} = \overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} + \tau A^{(\alpha)} \left((1 - \sigma_\alpha) \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\beta)} \right), \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Для разностного уравнения (3.33) при сформулированных ограничениях на σ_α, $\alpha = 1, 2, ..., p$ имеем оценку

$$\|v_{n+\alpha/p}\| \leq \|v_{n+(\alpha-1)/p}\| + \tau \left(\|\overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)}\| + \tau \|A^{(\alpha)} \sum_{\beta=\alpha}^{p} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\beta)}\| \right).$$

Суммирование по всем α от 1 до p с учетом (3.32) дает неравенство

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|\overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)}\| + \tau \|A^{(\alpha)} \sum_{\beta=\alpha}^{p} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\beta)}\| \right),$$

из которого следует искомая оценка устойчивости по начальным данным и правой части (3.29). ■

3.2.4. Сходимость схем покомпонентного расщепления

Приведенная выше оценка устойчивости (3.29) служит основой при исследовании точности рассматриваемых схем расщепления. В виде (3.28), (3.29) формулируется задача для погрешности разностного решения. Принципиальный момент связан с тем, что в исследуемых схемах покомпонентного расщепления оценки устойчивости существенно зависят от расщепления (3.19), от того, как выделяются отдельные слагаемые. Фактически это означает, что точность таких аддитивных схем зависит от того, как мы формулируем промежуточные задачи, как их аппроксимируем и т.д.

С другой стороны, промежуточные задачи (вспомогательные сеточные величины $y_{n+\alpha/p}$, $y_{n+1}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, ..., p$) какого-то самостоятельного значения не имеют. В идеале хотелось бы обойтись без них, т.е. строить схемы не привлекая понятия суммарной аппроксимации. Некоторые возможности развития теории в этом, как нам представляется, очень перспективном направлении обсуждаются в следующих главах нашей работы.

Будем исследовать точность аддитивной схемы суммарной аппроксимации для задачи (3.17), (3.18). Рассмотрим соответствующую задачу для погрешности. Положим $z_n = y_n - u_n$ и пусть $z_{n+\alpha/p} = y_{n+\alpha/p} - u_{n+\alpha/p}$, что при подстановке в (3.22) дает

$$\frac{z_{n+\alpha/p} - z_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + A^{(\alpha)} \left(\sigma_\alpha z_{n+\alpha/p} + (1-\sigma_\alpha) z_{n+(\alpha-1)/p}\right) =$$

$$= \psi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \quad n = 0, 1, \ldots \quad (3.34)$$

Для погрешности аппроксимации отдельных уравнений имеем

$$\psi_n^{(\alpha)} = -\frac{u_{n+\alpha/p} - u_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} -$$

$$- A^{(\alpha)} \left(\sigma_\alpha u_{n+\alpha/p} + (1-\sigma_\alpha)\, u_{n+(\alpha-1)/p}\right) +$$

$$+ \varphi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Будем использовать (см. (3.28)) представление погрешности аппроксимации в виде

$$\psi_n^{(\alpha)} = \overset{\circ}{\psi}{}_n^{(\alpha)} + \overset{*}{\psi}{}_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}{}_n^{(\alpha)} = 0. \tag{3.35}$$

С учетом выражений (3.35) на решениях задачи (3.17) — (3.19) положим

$$\overset{\circ}{\psi}{}_n^{(\alpha)} = -\frac{1}{p}\frac{du}{dt}(t_n) - A^{(\alpha)} u(t_n) - f^{(\alpha)}(t_n), \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \tag{3.36}$$

где, напомним,

$$\sum_{\alpha=1}^{p} f^{(\alpha)}(t) = f(t), \quad t > 0.$$

Для оставшихся частей погрешности из (3.34) и (3.36) получим

$$\overset{*}{\psi}{}_n^{(\alpha)} = O(\tau), \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.37}$$

При точном задании начального условия для (3.22), (3.23) в силу теоремы 3.2 для погрешности приближенного решения имеет место оценка

$$\|z_{n+1}\| \le \sum_{k=0}^{n} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|\overset{*}{\psi}{}_k^{(\alpha)}\| + \tau \|A^{(\alpha)} \sum_{\beta=\alpha}^{p} \overset{\circ}{\psi}{}_k^{(\alpha)}\| \right).$$

Подстановка (3.35) — (3.37) обеспечивает сходимость аддитивной схемы покомпонентного расщепления (3.22), (3.23) с первым порядком по времени.

3.2.5. Сходимость аддитивных схем в банаховых пространствах

Исследование схем суммарной аппроксимации базируется на соответствующей оценке устойчивости для задачи с отдельным операторным слагаемым. Такая схема реализована нами (см. уравнение (3.33)) при рассмотрении схем многокомпонентного расщепления. До сих пор

мы ориентировались на соответствующие оценки устойчивости в сеточных гильбертовых пространствах, а именно в $H = L_2(\omega)$. Для многих прикладных задач математической физики часто не меньшее значение имеют оценки устойчивости и сходимости в банаховых пространствах — в $L_\infty(\omega)$ и в $L_1(\omega)$.

Будем рассматривать для примера схему покомпонентного расщепления (3.22), (3.23) для приближенного решения задачи (3.17) — — (3.19). Здесь мы будем ориентироваться на схемы, в которых для промежуточных имеется устойчивость в $L_\infty(\omega)$ или в $L_1(\omega)$, в которых

$$\|w\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |w_i|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|,$$

$$\|w\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |w_i|, \quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

для вектора $u = u(t) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ и матрицы $A = \{a_{ij}\}$.

Предположим что при расщеплении (3.19) для элементов матриц $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ выполнены условия диагонального преобладания по строкам

$$a_{ii}^{(\alpha)} \ge \sum_{i\ne j=1}^{m} |a_{ij}^{(\alpha)}|, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.38}$$

или по столбцам

$$a_{jj}^{(\alpha)} \ge \sum_{j\ne i=1}^{m} |a_{ij}^{(\alpha)}|, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.39}$$

При ориентации на безусловно устойчивые разностные схемы подчиним выбор весов в аддитивной схеме (3.22) условиям $\sigma_\alpha \ge 1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Тогда при выполнении (3.38) (или (3.39)) справедлива априорная оценка (см. теорему 1.17)

$$\|y_{n+\alpha/p}\| \le \|y_{n+(\alpha-1)/p}\| + \tau\|\varphi_n^{(\alpha)}\|$$

в пространстве $L_\infty(\omega)$ (или в $L_1(\omega)$).

Повторяя доказательство теоремы 3.2, мы придем к оценке (3.29). На ее основе при отмеченных ограничениях $\sigma_\alpha \ge 1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ устанавливается безусловная сходимость аддитивной разностной схемы (3.22), (3.23) с первым порядком по τ в $L_\infty(\omega)$ или в $L_1(\omega)$.

3.3. Аддитивно-усредненные схемы

Рассмотренные аддитивные схемы суммарной аппроксимации связаны с последовательным решением p более простых задач — решение одной задачи дает начальные условия для другой. Здесь обсуждается вторая возможность построения аддитивных разностных схем, которая допускает независимое решение простых задач и параллельную организацию вычислений.

3.3.1. Дифференциальная задача

Поясним идею построения нового класса аддитивных схем на примере модельной задачи при двухкомпонентном расщеплении

$$\frac{du}{dt} + \left(A^{(1)} + A^{(2)}\right) u = 0, \quad t > 0, \tag{3.40}$$

$$u\,(0) = u^0. \tag{3.41}$$

Для точного решения задачи (3.40), (3.41) на одном временном шаге имеет место представление

$$u\,(t_{n+1}) = \exp\left(-\tau\left(A^{(1)} + A^{(2)}\right)\right) u\,(t_n)\,.$$

Определим теперь приближенное решение формулой

$$v\,(t_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(-2\tau A^{(1)}\right) + \exp\left(-2\tau A^{(2)}\right)\right) v\,(t_n)\,. \tag{3.42}$$

При использовании обычной схемы покомпонентного расщепления дифференциальным аналогом выступает соотношение

$$v\,(t_{n+1}) = \exp\left(-\tau A^{(1)}\right) \exp\left(-\tau A^{(2)}\right) v\,(t_n)\,.$$

В этом случае мы имеем мультипликативный вариант схем расщепления (операторные экспоненты перемножаются), в то время как (3.42) связывается с аддитивным вариантом (операторные экспоненты складываются).

Задача для погрешности $z(t_n) = v(t_n) - u(t_n)$ имеет вид

$$z\,(t_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(-2\tau A^{(1)}\right) + \exp\left(-2\tau A^{(2)}\right)\right) z\,(t_n) + \tau\psi_n,$$

причем

$$\psi_n = \frac{1}{2\tau}\left(\exp\left(-2\tau A^{(1)}\right) + \exp\left(-2\tau A^{(2)}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{\tau}\exp\left(-\tau\left(A^{(1)}+A^{(2)}\right)\right)u_n.$$

Получим $\psi_n = O(\tau)$, т.е. погрешность аппроксимации имеет первый порядок. Причем первый порядок аппроксимации будет и для случая перестановочных операторов.

Многокомпонентный случай рассматривается аналогично. При расщеплении

$$A=\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)},\quad A^{(\alpha)}\geq 0,\quad \alpha=1,2,\ldots,p \tag{3.43}$$

переход с одного временного слоя на другой осуществляется по схеме

$$v\left(t_{n+1}\right)=\frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\exp\left(-p\tau A^{(\alpha)}\right)v\left(t_n\right). \tag{3.44}$$

Фактически решение является арифметическим средним для задач, связанных с отдельными операторами $A^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$.

3.3.2. Аддитивные разностные схемы

Будем строить разностные схемы для приближенного решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{du}{dt}+Au=f\left(t\right),\quad t>0 \tag{3.45}$$

с аддитивным оператором (3.43) и правой частью

$$\sum_{\alpha=1}^{p}f^{(\alpha)}\left(t\right)=f\left(t\right),\quad t>0.$$

Для рассматриваемой задачи вычисления по (3.44) соответствуют решению задач

$$\frac{1}{p}\frac{dv^{(\alpha)}}{dt}+A^{(\alpha)}v^{(\alpha)}=f^{(\alpha)}\left(t\right),$$

$$t_n<t\leq t_{n+1},\quad \alpha=1,2,\ldots,p \tag{3.46}$$

при начальных условиях

$$v^{(\alpha)}\left(t_n\right)=v\left(t_n\right) \tag{3.47}$$

и определению решения при $t = t_{n+1}$ согласно

$$v\left(t_{n+1}\right) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} v^{(\alpha)}\left(t_{n+1}\right). \tag{3.48}$$

Тем самым при одних и тех же начальных условиях (3.47) решаются независимо друг от друга p задач (3.46), (3.47), а затем в качестве приближенного решения на новом временном слое берется их арифметическое среднее — (3.48). Аддитивные схемы такого класса предложены в работе [17] и их мы называем **аддитивно-усредненными разностными схемами покомпонентного расщепления**. Отмеченная выше возможность асинхронных (независимых) вычислений представляется особенно важной при построении вычислительных алгоритмов для решения задач на параллельных компьютерах.

В соответствии с (3.46) — (3.48) переход на новый временной слой осуществляется следующим образом:

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n}{p\tau} + A^{(\alpha)}\left(\sigma_\alpha y_{n+1}^{(\alpha)} + (1-\sigma_\alpha)\, y_n\right) = \varphi_n^{(\alpha)},$$

$$\alpha = 1, 2, ..., p, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y_{n+1}^{(\alpha)}. \tag{3.49}$$

Здесь использовано представление

$$\varphi_n = \sum_{\alpha=1}^{p} \varphi_n^{(\alpha)}. \tag{3.50}$$

для правой части.

3.3.3. Устойчивость аддитивно-усредненных схем

Условия устойчивости аддитивно-усредненных схем те же,что и для стандартных схем покомпонентного расщепления. Подобно теореме 3.2, доказывается следующее основное утверждение.

Теорема 3.3. При $\sigma_\alpha \geq 0,5$, $\alpha = 1, 2, ..., p$ и любых $\tau > 0$ для решения задачи (3.43), (3.49), (3.50) выполняется априорная оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \|u^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|\overset{*}{\varphi}{}_k^{(\alpha)}\| + p\tau\sigma_\alpha \|A^{(\alpha)} \overset{\circ}{\varphi}{}_k^{(\alpha)}\|\right). \tag{3.51}$$

Доказательство. Снова применяется представление

$$y_{n+1}^{(\alpha)} = v_{n+1}^{(\alpha)} + w_{n+1}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p \tag{3.52}$$

при $w_0 = 0$.

Для нахождения функций $w_{n+1}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, ..., p$ используются уравнения

$$\frac{w_{n+1}^{(\alpha)} - w_n}{p\tau} = \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p. \tag{3.53}$$

С учетом (3.50) для усредненных величин

$$w_{n+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} w_{n+1}^{(\alpha)}$$

из (3.53) получим

$$w_{n+1} = w_n = \ldots = w_0 = 0.$$

Из (3.49), (3.52) имеем

$$\frac{v_{n+1}^{(\alpha)} - v_n}{p\tau} + A^{(\alpha)} \left(\sigma_\alpha v_{n+1}^{(\alpha)} + (1 - \sigma_\alpha) v_n \right) = \chi_n^{(\alpha)},$$

$$\alpha = 1, 2, ..., p, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} v_{n+1}^{(\alpha)}, \tag{3.54}$$

где теперь

$$\chi_n^{(\alpha)} = \overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} - p\sigma_\alpha \tau A^{(\alpha)} \frac{w_{n+1}^{(\alpha)} - w_n}{p\tau}.$$

Принимая во внимание (3.53), получим

$$\chi_n^{(\alpha)} = \overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} - p\tau\sigma_\alpha A^{(\alpha)} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Для разностного уравнения (3.54) на основании теоремы 3.1 имеем

$$\|v_{n+\alpha/p}\| \leq \|v_{n+(\alpha-1)/p}\| + p\tau \left(\|\overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)}\| + p\tau \|A^{(\alpha)} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\alpha)}\| \right).$$

Суммирование по всем α от 1 до p приводит к неравенству

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|\overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)}\| + \tau \|A^{(\alpha)} \sum_{\beta=\alpha}^{p} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\beta)}\| \right),$$

из которого следует искомая оценка устойчивости по начальным данным и правой части (3.51). ■

На основе полученной оценки стандартным образом исследуется сходимость аддитивно-усредненной схемы покомпонентного расщепления (3.50) с первым порядком по τ. Потенциальное преимущество аддитивно-усредненных схем (3.49) связано с тем, что допускается очевидная параллельная организация вычислений сеточных функций y_α^{n+1}, $\alpha = 1, 2, ..., p$.

3.4. Другие варианты схем покомпонентного расщепления

В частных случаях аддитивные разностные схемы покомпонентного расщепления можно связать с факторизованными схемами. При специальной организации вычислений классическая схема переменных направлений может рассматриваться как аддитивная схема. Особого внимания заслуживают вопросы построения и исследования аддитивных схем второго порядка точности.

3.4.1. Чисто неявные аддитивные схемы

Рассмотрим важный частный случай аддитивной схемы покомпонентного расщепления, когда в (3.22) весовые параметры $\sigma_\alpha = 1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, т.е.

$$\frac{y_{n+\alpha/p} - y_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + A^{(\alpha)} y_{n+\alpha/p} = \varphi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p. \quad (3.55)$$

Для правых частей положим

$$\varphi_n^{(1)} = \varphi_n, \quad \varphi_n^{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 2, 3, ..., p. \quad (3.56)$$

Из (3.55), (3.56) следуют рекуррентные формулы

$$\left(E + \tau A^{(1)}\right) y_{n+1/p} = y_n + \tau \varphi_n,$$

$$\left(E + \tau A^{(\alpha)}\right) y_{n+\alpha/p} = y_{n+(\alpha-1)/p}, \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p, \quad t_n \in \omega_\tau.$$

Исключение промежуточных решений приводит к схеме

$$\prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \tau A^{(\alpha)}\right) y_{n+1} = y_n + \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau. \quad (3.57)$$

Тем самым имеем специальную факторизованную схему, которая ранее построена (см. (2.50)) на основе принципа регуляризации разностных схем. Схема (3.57) аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком по τ. Устойчивость и сходимость схемы покомпонентного расщепления (3.55), (3.56) следует из общего рассмотрения аддитивных схем покомпонентного расщепления.

3.4.2. Схемы переменных направлений как аддитивные схемы

Покажем, что и классические схемы переменных направлений могут быть интерпретированы как специальные аддитивные схемы суммарной аппроксимации. Будем рассматривать задачу

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{3.58}$$

$$u(0) = u^0 \tag{3.59}$$

при двухкомпонентном расщеплении

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A^{(\alpha)} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{3.60}$$

При использовании классической схемы Писмена-Рекфорда приближенное решение задачи (3.58) – (3.60) определяется из

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{0,5\tau} + A^{(1)} y_{n+1/2} + A^{(2)} y_n = \varphi_n, \tag{3.61}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{0,5\tau} + A^{(1)} y_{n+1/2} + A^{(2)} y_{n+1} = \varphi_n. \tag{3.62}$$

Запишем (3.61), (3.62) как эквивалентную аддитивную схему покомпонентного расщепления. Определим четырехкомпонентное расщепление оператора задачи (3.58), (3.59)

$$A = \sum_{\alpha=1}^{4} A^{(\alpha)}, \quad \tilde{A}^{(\alpha)} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 4,$$

в котором

$$\tilde{A}^{(1)} = \frac{1}{2} A^{(2)}, \quad \tilde{A}^{(2)} = \frac{1}{2} A^{(2)}, \quad \tilde{A}^{(3)} = \frac{1}{2} A^{(1)}, \quad \tilde{A}^{(4)} = \frac{1}{2} A^{(2)}.$$

Аналогичное представление используется и для правой части

$$\varphi_n = \sum_{\alpha=1}^{4} \varphi_n^{(\alpha)};$$

где

$$\varphi_n^{(1)} = \frac{1}{2}\varphi_n, \quad \varphi_n^{(2)} = 0, \quad \varphi_n^{(3)} = 0, \quad \varphi_n^{(4)} = \frac{1}{2}\varphi_n.$$

Будем использовать специальный вариант схемы покомпонетного расщепления, который характеризуется определенным выбором весов

$$\frac{y_{n+1/4} - y_n}{\tau} + \frac{1}{2}A^{(2)}y_n = \frac{1}{2}\varphi_n,$$

$$\frac{y_{n+1/2} - y_{n+1/4}}{\tau} + \frac{1}{2}A^{(1)}y_{n+1/2} = 0,$$

$$\frac{y_{n+3/4} - y_{n+1/2}}{\tau} + \frac{1}{2}A^{(1)}y_n = 0,$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+3/4}}{\tau} + \frac{1}{2}A^{(2)}y_n = \frac{1}{2}\varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Исключая $y_{n+1/4}, y_{n+3/4}$, приходим к схеме

$$\left(E + \frac{\tau}{2}A^{(1)}\right) y_{n+1/2} = \left(E - \frac{\tau}{2}A^{(2)}\right) y_n + \tau\varphi_n,$$

$$\left(E + \frac{\tau}{2}A^{(2)}\right) y_{n+1} = \left(E - \frac{\tau}{2}A^{(1)}\right) y_{n+1/2} + \tau\varphi_n.$$

В такой же форме записывается схема переменных направлений (3.61), (3.62).

Непосредственные вычисления показывают, что для погрешности аппроксимации имеет место

$$\psi_n = \sum_{\alpha=1}^{4} \psi_n^{(\alpha)} = O\left(\tau^2\right),$$

т.е. схема обладает суммарной аппроксимацией $O(\tau^2)$.

3.4.3. Аддитивные схемы второго порядка точности

Стандартные аддитивные схемы покомпонентного расщепления имеют первый порядок точности по τ. Повышение точности достигается за счет симметризации, перехода от последовательности решения задач

$$A^{(1)} \longmapsto A^{(2)} \longmapsto \cdots \longmapsto A^{(p)},$$

к цепочке

$$A^{(1)} \longmapsto A^{(2)} \longmapsto \cdots \longmapsto A^{(p)} \longmapsto A^{(p-1)} \longmapsto \cdots \longmapsto A^{(1)}.$$

Фактически такая схема выше реализована при построении аддитивных схем, которые эквивалентны схемам переменных направлений. Аддитивные схемы покомпонентного расщепления второго порядка точности исследуются во многих работах, среди которых мы отметим [68, 69].

Для построения аддитивных схем покомпонентного расщепления второго порядка точности рассматриваются промежуточные задачи на интервале $[t_n, t_{n+1}]$

$$\frac{dv^{(\alpha)}}{dt} + \frac{1}{2}A^{(\alpha)}v^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$$\frac{dv^{(\alpha)}}{dt} + \frac{1}{2}A^{(\alpha)}v^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(t), \tag{3.63}$$

$$t_n < t \le t_{n+1}, \quad \alpha = p, p-1, \ldots, 1$$

с правыми частями

$$\sum_{\alpha=1}^{2p} f^{(\alpha)}(t) = f(t), \quad t > 0.$$

Системе уравнений (3.63) поставим в соответствие простейшую аддитивную разностную схему

$$\frac{y_{n+\alpha/2p} - y_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + \frac{1}{2}A^{(\alpha)}\left(y_{n+\alpha/2p} + y_{n+(\alpha-1)/2p}\right) =$$

$$= \varphi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$$\frac{y_{n+\alpha/2p} - y_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + \frac{1}{2}A^{(2p+1-\alpha)}\left(y_{n+\alpha/p} + y_{n+(\alpha-1)/p}\right) =$$

$$= \varphi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = p+1, p+2, ..., 2p, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.64}$$

Устойчивость аддитивной схемы следует из общих условий устойчивости (см. теорему 3.2). Для доказательства сходимости со вторым порядком по τ необходимо специальное исследование.

3.4.4. Сходимость схем повышенной точности

Рассмотрим аддитивную схему (3.64), задав правые части в виде

$$\varphi_n^{(\alpha)} = \frac{1}{2p} f\left(t_{n+1/2}\right).$$

При приближенном решении задачи (3.58), (3.59) определим погрешность $z_n = y_n - u_n$ и $z_{n+\alpha/p} = y_{n+\alpha/2p} - u_{n+\alpha/2p}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, 2p$. Из (3.64) получим

$$\frac{z_{n+\alpha/2p} - z_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + \frac{1}{2} A^{(\alpha)} \left(z_{n+\alpha/2p} + z_{n+(\alpha-1)/2p}\right) =$$

$$= \psi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$$\frac{z_{n+\alpha/2p} - z_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + \frac{1}{2} A^{(2p+1-\alpha)} \left(z_{n+\alpha/p} + z_{n+(\alpha-1)/p}\right) =$$

$$= \psi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = p+1, p+2, ..., 2p, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.65}$$

Для погрешности аппроксимации отдельных уравнений получим

$$\psi_n^{(\alpha)} = -\frac{u_{n+\alpha/2p} - u_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} -$$

$$- \frac{1}{2} A^{(\alpha)} \left(u_{n+\alpha/2p} + u_{n+(\alpha-1)/2p}\right) +$$

$$+ \varphi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$$\psi_n^{(\alpha)} = -\frac{u_{n+\alpha/2p} - u_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} -$$

$$- \frac{1}{2} A^{(2p+1-\alpha)} \left(u_{n+\alpha/p} + u_{n+(\alpha-1)/p}\right) +$$

$$+ \varphi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = p+1, p+2, ..., 2p, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Имеем

$$\frac{u_{n+\alpha/2p} - u_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} - \frac{1}{2}A^{(\alpha)}\left(u_{n+\alpha/2p} + u_{n+(\alpha-1)/2p}\right) + \varphi_n^{(\alpha)} =$$

$$= -\frac{1}{2p}\frac{du}{dt}\left(t_{n+(\alpha-1/2)/2p}\right) - \frac{1}{2}A^{(\alpha)}u\left(t_{n+(\alpha-1/2)/2p}\right) +$$

$$+\frac{1}{2p}f\left(t_{n+1/2}\right) + O\left(\tau^2\right), \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

С учетом этого для погрешности аппроксимации используем представления

$$\psi_n^{(\alpha)} = \overset{\circ}{\psi}{}_n^{(\alpha)} + \overset{\bullet}{\psi}{}_n^{(\alpha)} + \overset{*}{\psi}{}_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., 2p. \tag{3.66}$$

Будем для простоты считать, что операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ — постоянные, тогда

$$\overset{\circ}{\psi}{}_n^{(\alpha)} = -\frac{1}{2p}\frac{du}{dt}\left(t_{n+1/2}\right) - \frac{1}{2}A^{(\alpha)}u\left(t_{n+1/2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2p}f\left(t_{n+1/2}\right) = O\left(1\right),$$

$$\overset{\bullet}{\psi}{}_n^{(\alpha)} = -\left(t_{n+(\alpha-1/2)/2p} - t_{n+1/2}\right)\left(\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{2}A^{(\alpha)}\frac{du}{dt}\right)\left(t_{n+1/2}\right) =$$

$$= O\left(\tau\right), \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$$\overset{\circ}{\psi}{}_n^{(\alpha)} = -\frac{1}{2p}\frac{du}{dt}\left(t_{n+1/2}\right) - \frac{1}{2}A^{(2p+1-\alpha)}u\left(t_{n+1/2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2p}f\left(t_{n+1/2}\right) = O\left(1\right),$$

$$\overset{\bullet}{\psi}{}_n^{(\alpha)} = -\left(t_{n+(\alpha-1/2)/2p} - t_{n+1/2}\right) \times$$

$$\times\left(\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{2}A^{(2p+1-\alpha)}\frac{du}{dt}\right)\left(t_{n+1/2}\right) = O\left(\tau\right),$$

$$\alpha = p+1, p+2, ..., 2p,$$

$$\overset{*}{\psi}{}_n^{(\alpha)} = O\left(\tau^2\right), \quad \alpha = 1, 2, ..., 2p.$$

Дальнейшее рассмотрение проводится по схеме доказательства теоремы 3.2. Используем представление

$$z_{n+\alpha/2p} = q_{n+\alpha/2p} + w_{n+\alpha/2p}, \quad \alpha = 1, 2, ..., 2p$$

при $w_0 = 0$. Функции $w_{n+\alpha/2p}$, $\alpha = 1, 2, ..., 2p$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{w_{n+\alpha/2p} - w_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} = \overset{\circ}{\psi}{}_n^{(\alpha)} + \overset{\bullet}{\psi}{}_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., 2p. \tag{3.67}$$

С учетом того, что

$$\sum_{\alpha=1}^{2p} \left(\overset{\circ}{\psi}{}_n^{(\alpha)} + \overset{\bullet}{\psi}{}_n^{(\alpha)} \right) = 0,$$

следует

$$w_{n+1} = w_n = \cdots = w_0 = 0.$$

Для функций $q_{n+\alpha/2p}$, $\alpha = 1, 2, ..., 2p$ получим уравнения

$$\frac{q_{n+\alpha/2p} - q_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + \frac{1}{2} A^{(\alpha)} \left(q_{n+\alpha/2p} + v_{n+(\alpha-1)/2p} \right) =$$

$$= \chi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$$\frac{q_{n+\alpha/2p} - q_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + \frac{1}{2} A^{(2p+1-\alpha)} \left(q_{n+\alpha/2p} + v_{n+(\alpha-1)/2p} \right) =$$

$$= \chi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = p+1, p+2, ..., 2p,$$

где

$$\chi_n^{(\alpha)} = \overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} - A^{(\alpha)} w_{n+(\alpha-1)/2p} -$$

$$-\frac{1}{2} \alpha \tau A^{(\alpha)} \frac{w_{n+\alpha/2p} - w_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$$\chi_n^{(\alpha)} = \overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} - A^{(2p+1-\alpha)} w_{n+(\alpha-1)/2p} -$$

$$-\frac{1}{2} \alpha \tau A^{(\alpha)} \frac{w_{n+\alpha/2p} - w_{n+(\alpha-1)/2p}}{\tau}, \quad \alpha = p+1, p+2, ..., 2p.$$

Для решения уравнения (3.67) имеем представление

$$w_{n+(\alpha-1)/2p} = \tau \sum_{\beta=\alpha}^{p} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\beta)} + \tau \sum_{\beta=\alpha}^{p} \overset{\bullet}{\varphi}{}_n^{(\beta)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., 2p.$$

Запишем теперь правые части уравнений для $q_{n+\alpha/2p}$, $\alpha = 1, 2, ..., 2p$ в виде

$$\chi_n^{(\alpha)} = \overset{\circ}{\chi}{}_n^{(\alpha)} + \overset{*}{\chi}{}_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., 2p,$$

где

$$\overset{*}{\chi}{}_n^{(\alpha)} = \overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} + \tau A^{(\alpha)} \left(\frac{1}{2} \overset{\bullet}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{2p} \overset{\bullet}{\varphi}{}_n^{(\beta)} \right), \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$$\overset{*}{\chi}{}_n^{(\alpha)} = \overset{*}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} + \tau A^{(2p+1-\alpha)} \left(\frac{1}{2} \overset{\bullet}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{2p} \overset{\bullet}{\varphi}{}_n^{(\beta)} \right),$$

$$\alpha = p+1, p+2, ..., 2p,$$

т.е. $\overset{*}{\chi}{}_n^{(\alpha)} = O(\tau^2)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, 2p$.

Для слагаемых $\overset{\circ}{\chi}{}_n^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, 2p$ имеем

$$\overset{\circ}{\chi}{}_n^{(\alpha)} = \tau A^{(\alpha)} \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{2p} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\beta)} \right), \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$$\overset{\circ}{\chi}{}_n^{(\alpha)} = \tau A^{(2p+1-\alpha)} \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\alpha)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{2p} \overset{\circ}{\varphi}{}_n^{(\beta)} \right),$$

$$\alpha = p+1, p+2, ..., 2p.$$

Непосредственные выкладки дают равенство

$$\overset{\circ}{\chi}{}_n^{(\alpha)} = -\overset{\circ}{\chi}{}_n^{(2+1-\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p,$$

т.е.

$$\sum_{\alpha=1}^{2p} \overset{\circ}{\chi}{}_n^{(\alpha)} = 0.$$

На основании теоремы 3.2 с учетом $\overset{\circ}{\chi}{}_n^{(\alpha)} = O(\tau)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, 2p$ это позволяет доказать послойную оценку

$$\|q_{n+1}\| \leq \|q_n\| + O\left(\tau^2\right).$$

Аналогичная оценка имеет место и для погрешности z_{n+1}. Таким образом, симметризованная аддитивная разностная схема покомпонентного расщепления (3.64) сходится со вторым порядком по τ.

Глава 4

Векторные аддитивные схемы

Рассматривается новый класс аддитивных разностных схем многокомпонентного расщепления, которые относятся к схемам полной аппроксимации — на каждом шаге находится приближенное решение задачи. Исходная задача формулируется как векторная, при этом вместо одного приближенного решения находится вектор приближенных решений. Построение векторных аддитивных разностных схем проведено на единой методической основе с привлечением результатов общей теории устойчивости операторно-разностных схем и принципа регуляризации. Проведено исследование двух- и трехслойных схем для эволюционных уравнений первого и второго порядка.

4.1. Векторные схемы для уравнений первого порядка

Рассматриваются разностные схемы полной аппроксимации с аддитивным расщеплением положительного оператора задачи на несколько при приближенном решении задачи Коши для уравнения первого порядка. Построение безусловно устойчивых векторных разностных схем базируется на принципе регуляризации разностных схем. Такие схемы предложены и исследованы В.Н.Абрашиным (см. [1, 3] и обзорную работу [75]). Исследование векторных разностных схем с позиций общей теории устойчивости операторно-разностных схем проведено в [6, 7, 92].

4.1.1. Векторная дифференциальная задача

Пусть, как обычно, H — конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. В H ищется приближенное решение задачи Коши для эволюционного уравнения первого

порядка

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{4.1}$$

$$u(0) = u^0. \tag{4.2}$$

Будем считать, что линейный оператор A постоянен (не зависит от t) и положителен в H. В силу этого для решения задачи (4.1), (4.2) имеет место оценка устойчивости по правой части и начальным данным

$$\|Du(t)\| \le \|Du^0\| + \int_0^t \|Df(s)\| ds, \tag{4.3}$$

где, например, $D = E, A$. Оценка типа (4.3) является ориентиром при получении оценок для соответствующих разностных схем.

Аддитивные разностные схемы для задачи (4.1), (4.2) строятся на основе представления

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)} \ge 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.4}$$

Приближенное решение задачи (4.1), (4.2) в этом случае связывается с последовательностью p задач, каждая из которых характеризуется отдельным оператором $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. При $p = 2$ имеются различные классы безусловно устойчивых схем: переменных направлений, факторизованные, предиктор-корректор и т.д. При $p > 2$ хорошо известные безусловно устойчивые схемы строятся на основе метода суммарной аппроксимации.

Вместо нахождения скалярной функции u будем искать вектор $U = \{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}\}$. Каждая отдельная компонента определяется как решение однотипных задач

$$\frac{du^{(\alpha)}}{dt} + \sum_{\beta=1}^{p} A^{(\beta)} u^{(\beta)} = f(t), \quad t > 0, \tag{4.5}$$

$$u^{(\alpha)}(0) = u^0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.6}$$

В этом случае $u^{(\alpha)}(t) = u(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ и поэтому в качестве решения исходной задачи (4.1), (4.2), (4.4) можно взять любую компоненту вектора $U(t)$.

Запишем задачу Коши для системы уравнений как одно уравнение первого порядка для векторных величин. Проведем также предварительное преобразование системы уравнений (4.5). Определим вектор правых частей $\mathcal{F}(t) = \{(A^{(1)})^* f(t), (A^{(2)})^* f(t), \ldots, (A^{(p)})^* f(t)\}$ и диагональную операторную матрицу $\mathcal{B} = \{(A^{(\alpha)})^* \delta_{\alpha\beta}\}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Домножая отдельные уравнения (4.5) слева на $(A^{(\alpha)})^*$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, придем к системе уравнений

$$\mathcal{B}\frac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = \mathcal{F}(t), \quad t > 0. \tag{4.7}$$

Для операторной матрицы $\mathcal{A}$ имеем представление $\mathcal{A} = \{(A^{(\alpha)})^* A^{(\beta)}\}$. С учетом (4.6) систему уравнений (4.7) дополним начальными условиями

$$U(0) = U^0 \equiv \{u^0, u^0, \ldots, u^0\}. \tag{4.8}$$

Задачу (4.7), (4.8) естественно рассматривать на векторном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = H^p$, в котором скалярное произведение определяется выражением

$$(U, V)_p = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}\right).$$

В силу $((A^{(\alpha)})^* A^{(\beta)})^* = (A^{(\beta)})^* A^{(\alpha)}$ оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. Кроме того, непосредственно убеждаемся в том, что

$$(\mathcal{A}U, U) = \left(\left(\sum_{\alpha=1}^{p} u^{(\alpha)}\right)^2, 1\right). \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует неотрицательность оператора $\mathcal{A}$. При расщеплении (4.4) неотрицательным является также и оператор $\mathcal{B}$. Приходим к векторной задаче (4.7), (4.8) с

$$\mathcal{B} \geq 0, \quad \mathcal{A} = (\mathcal{A})^* \geq 0. \tag{4.10}$$

Для задачи (4.7), (4.8), (4.10) **векторные разностные схемы** строятся на основе общей теории устойчивости операторно-разностных схем. Специфика задачи проявляется в неотрицательности операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$, в то время как основные результаты получены для положительных операторов. Это часто вынуждает проводить соответствующие выкладки каждый раз отдельно.

4.1.2. Устойчивость векторных аддитивных схем

По времени введем обычную равномерную сетку с шагом $\tau > 0$. Приближенное решение векторной задачи (4.7), (4.8) на момент времени $t = t_n$ обозначим $Y_n = y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(p)}$. Свое исследование начнем с устойчивости векторных схем по начальным данным. Соответствующие двухслойные разностные схемы записываются в каноническом виде

$$\mathbf{B}\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\tau} + \mathbf{A}Y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.11}$$

Исследование устойчивости базируется на следующем утверждении.

Лемма 4.1. Если в схеме (4.11) $\mathbf{A}$ — самосопряженный и постоянный оператор, тогда при выполнении операторного неравенства

$$\mathbf{B} \geq \frac{\tau}{2}\mathbf{A} \tag{4.12}$$

имеет место неравенство

$$(\mathbf{A}Y_{n+1}, Y_{n+1}) \leq (\mathbf{A}Y_n, Y_n)\,. \tag{4.13}$$

Доказательство. Для получения приведенной оценки достаточно воспроизвести доказательство теоремы 1.2. ■

Естественно попытаться интерпретировать неравенство (4.13), примененное к разностной схеме для задачи (4.7), (4.8) как оценку устойчивости по начальным данным. Для схемы (4.11) это имеет место при дополнительном предположении о положительности оператора $\mathbf{A}$.

Построение устойчивых разностных схем для задачи (4.7), (4.8) проведем на единой методологической основе — принципе регуляризации разностных схем. Теория регуляризации разностных схем рассматривается как принцип улучшения качества разностной схемы за счет введения новых дополнительных слагаемых (регуляризаторов) в операторы исходной разностной схемы. Построение устойчивых разностных схем на основе принципа регуляризации реализуется следующим образом. Для (производящей) исходной задачи строится какая-то простейшая разностная схема, не обладающая необходимыми свойствами устойчивости. Затем разностная схема записывается в канонической форме и условия устойчивости разностной схемы ослабляются за счет возмущения операторов разностной схемы.

В качестве производящей для задачи (4.7), (4.8) (с $\mathcal{F}(t) = 0$) естественно взять явную схему

$$\mathcal{B}\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\tau} + \mathcal{A}Y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.14}$$

Эта схема имеет канонический вид (4.11) двухслойной разностной схемы при

$$\mathbf{B} = \mathcal{B}, \quad \mathbf{A} = \mathcal{A}.$$

Принимая во внимание (4.9), неравенство (4.12) для схемы (4.14) эквивалентно выполнению неравенства

$$(\mathbf{B}Y, Y) - \frac{\tau}{2}(\mathbf{A}Y, Y) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \left(A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right) - \frac{\tau}{2}\left(\left(\sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}\right)^2, 1\right) \geq 0. \tag{4.15}$$

Имеет место неравенство

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} y^{(\alpha)}\right)^2 \leq p\sum_{\alpha=1}^{p}\left(A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}\right)^2. \tag{4.16}$$

В явных схемах ограничения на шаг по времени связываются с оценками разностных операторов сверху. Для несамосопряженных операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ будем считать выполненными неравенства

$$\left(A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right) \geq \frac{1}{\Delta_\alpha}\|A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.17}$$

С учетом (4.16), (4.17) неравенство (4.15) преобразуется следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \left(A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right) - \frac{\tau}{2}\left(\left(\sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}\right)^2, 1\right) \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{p}{2}\tau\right)\sum_{\alpha=1}^{p}\|A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}\|^2 \geq 0,$$

где $\Delta = \max\limits_{\alpha}\Delta_\alpha$. Оно будет выполнено при

$$\tau \leq \frac{2}{p\Delta}. \tag{4.18}$$

Эти ограничения на шаг по времени можно рассматривать как обобщение условий устойчивости обычных явных схем для задачи (4.1), (4.2) на случай явных разностных схем для векторной задачи (4.7), (4.8).

При выполнении (4.18) в силу леммы 4.1 для разностной схемы (4.14) справедлива априорная оценка

$$(\mathcal{A}Y_{n+1}, Y_{n+1}) \leq (\mathcal{A}Y_n, Y_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.19}$$

Разностная схема (4.14) построена для нахождения решения исходной задачи (4.1), (4.2).

Под этим приближенным решением будем понимать не отдельные компоненты вектора Y, а функцию $\bar{y}$, которая определяется следующим образом:

$$A\bar{y} = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} y^{(\alpha)}. \tag{4.20}$$

Учитывая (4.4), можем переписать (4.19) в виде

$$\|A\bar{y}_{n+1}\| \leq \|A\bar{y}_n\|. \tag{4.21}$$

В силу положительности оператора A (4.21) есть искомая оценка устойчивости приближенного решения задачи (4.1), (4.2), определяемого по явной разностной схеме (4.12), по начальным данным.

Принимая во внимание условие (4.12), естественно строить класс регуляризованных разностных схем для задачи (4.7), (4.8), (4.10) на основе возмущения оператора $\mathcal{B}$ в схеме (4.14). Рассмотрим разностную схему (4.11) с

$$\mathbf{B} = \mathcal{B} + \mu\mathcal{R}, \quad \mathbf{A} = \mathcal{A}, \tag{4.22}$$

где μ — параметр регуляризации (возмущения), а $\mathcal{R}$ — регуляризатор. Оставаясь в классе диагональных операторных матриц $\mathbf{B}$, положим

$$\mathcal{R} = \left\{ \left(A^{(\alpha)}\right)^* A^{(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \right\}. \tag{4.23}$$

Теорема 4.1. Для разностной схемы (4.11), (4.22), (4.23) при

$$\mu \geq \left(\frac{p}{2} - \frac{1}{\Delta\tau} \right) \tau \tag{4.24}$$

справедлива оценка (4.20), (4.21).

Доказательство. Для схемы (4.11), (4.22), (4.23) неравенство (4.12) преобразуется аналогично (4.15) — (4.17)

$$(\mathbf{B}Y,Y)-\frac{\tau}{2}(\mathbf{A}Y,Y)=\sum_{\alpha=1}^{p}\left(A^{(\alpha)}y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right)+$$

$$+\mu\sum_{\alpha=1}^{p}\|A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}\|^2-\frac{\tau}{2}\left(\left(\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}\right)^2,1\right)\geq$$

$$\geq\left(\frac{1}{\Delta}+\mu-\frac{p}{2}\tau\right)\sum_{\alpha=1}^{p}\|A^{(\alpha)}y^{(\alpha)}\|^2\geq 0.$$

Это неравенство будет выполнено при ограничениях (4.24) на параметр регуляризации μ. Из (4.13) приходим к оценке устойчивости (4.21) для приближенного решения задачи (4.1), (4.2). Из (4.24) следует, что безусловно устойчивыми будут схемы с $\mu\geq 0,5p\tau$. ■

К регуляризованной схеме (4.11), (4.22), (4.23) мы приходим при рассмотрении следующей схемы с весами для системы уравнений (4.5) ($\mu=\sigma\tau$):

$$\left(E+\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)\frac{y_{n+1}^{(\alpha)}-y_n^{(\alpha)}}{\tau}+\sum_{\beta=1}^{p}A^{(\beta)}y_n^{(\beta)}=\varphi_n,$$

$$\alpha=1,2,\ldots,p. \tag{4.25}$$

Переход на новый временной слой в схеме (4.25), как и в стандартных (скалярных) вариантах аддитивных разностных схем, связан с обращением на каждом временном шаге операторов $E+\sigma\tau A^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$. Отметим особенность схем (4.25) для задач с $p>2$, которая связана с выбором веса σ больше единицы. Существенным моментом является требование хранения всего вектора, что может накладывать дополнительные ограничения на используемую память компьютера. Это же замечание относится и к таким (скалярным) вариантам аддитивных разностных схем, как аддитивно-усредненные разностные схемы.

4.1.3. Устойчивость по правой части

Исследование сходимости разностных схем для нестационарных задач базируется на оценках устойчивости разностного решения по

правой части. Во многих случаях можно ориентироваться на простейшие оценки устойчивости по правой части, которые непосредственно вытекают их оценок устойчивости по начальным данным. Однако особенности рассматриваемых векторных схем, связанные с очень слабыми ограничениями (4.10) на операторы задачи (4.7), (4.8), требуют самостоятельного рассмотрения.

Будем исследовать устойчивость разностной схемы типа (4.25), но с различными правыми частями. Именно такая ситуация имеет место при исследовании задачи для погрешности. Пусть

$$\left(E+\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)\frac{y_{n+1}^{(\alpha)}-y_n^{(\alpha)}}{\tau}+\sum_{\beta=1}^{p}A^{(\beta)}y_n^{(\beta)}=\varphi_n^{(\alpha)},$$

$$\alpha=1,2,\ldots,p. \tag{4.26}$$

Положим $B^{(\alpha)}=E+\sigma\tau A^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, так что $B_\alpha>0$ и поэтому $(B^\alpha)^{-1}$ существует. Схему (4.26) перепишем в виде

$$y_{n+1}^{(\alpha)}=\sum_{\beta=1}^{p}s_{\alpha\beta}y_n^{(\alpha)}+\tau\left(B^{(\alpha)}\right)^{-1}\varphi_n^{(\alpha)},\quad \alpha=1,2,\ldots,p$$

при задании

$$s_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}-\tau\left(B^{(\alpha)}\right)^{-1}A^{(\beta)}.$$

Домножая на $A^{(\alpha)}$ и складывая эти уравнения, получим

$$\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)}y_{n+1}^{(\alpha)}=\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta=1}^{p}A^{(\alpha)}s_{\alpha\beta}y_n^{(\alpha)}+$$

$$+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)}\left(B^{(\alpha)}\right)^{-1}\varphi_n^{(\alpha)}. \tag{4.27}$$

Принимая во внимание (4.20) и доказанную выше устойчивость по начальным данным при выполнении условий (4.24), из (4.27) имеем

$$\|A\bar{y}_{n+1}\|\le\|A\bar{y}_n\|+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|A^{(\alpha)}\left(B^{(\alpha)}\right)^{-1}\varphi_n^{(\alpha)}\|. \tag{4.28}$$

Тем самым для разностной схемы (4.26) при выполнении условий (4.24) получена априорная оценка по начальным данным и правой части. Более простой, чем (4.28), является оценка

$$\|A\bar{y}_{n+1}\| \le \|A\bar{y}_n\| + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|A^{(\alpha)}\varphi_n^{(\alpha)}\|.$$

На основе (4.28) при рассмотрении задачи для погрешности доказывается сходимость векторных аддитивных разностных с первым порядком по времени. Другие варианты векторных аддитивных разностных схем рассматриваются ниже.

4.2. Устойчивость векторных аддитивных схем в банаховых пространствах

Рассматриваются вопросы построения безусловно устойчивых разностных схем в банаховых конечномерных пространствах. Это свойство, как и классических аддитивных схем покомпонентного расщепления, является следствием устойчивости разностных задач для отдельных операторных слагаемых.

4.2.1. Постановка задачи

Наиболее полные результаты по устойчивости аддитивных разностных схем получены при исследовании разностных схем в сеточных гильбертовых пространствах на основе общей теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем. Это относится и к устойчивости и к сходимости векторных аддитивных операторно-разностных схем полной аппроксимации. Во многих задачах принципиальной является проблема корректности схемы в равномерной норме (в сеточном банаховом пространстве L_∞). Здесь, согласно работе [60], изучается устойчивость в произвольных нормах простейшей векторной аддитивной схемы. Показана устойчивость аддитивной схемы при условии, что устойчивыми являются чисто неявные схемы для отдельных компонент.

Будем рассматривать задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du_i}{dt} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\, u_j = f_i(t), \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.29}$$

К (4.29) мы приходим после дискретизации по пространству, например, для начально-краевых задач для параболических уравнений.

Полагая $u = u(t) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $A = \{a_{ij}\}$, запишем (4.29) в матричном (операторном) виде

$$\frac{du}{dt} + A(t)\,u = f(t). \tag{4.30}$$

Будем строить разностные схемы для приближенного решения задачи Коши, когда (4.30) рассматривается при $t > 0$ и начальных условиях

$$u(0) = u^0, \quad u^0 = \{u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0\}. \tag{4.31}$$

Аддитивные схемы для приближенного решения задачи (4.30), (4.31) строятся на основе представления

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.32}$$

Здесь для простоты ограничимся проблемами, в которых каждое из операторных слагаемых $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ является стационарным оператором.

Определим класс аддитивных разностных схем следующим образом. Зададим равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$ и пусть y_n — приближенное решение на момент времени $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$ Будем считать, что полностью неявные разностные схемы

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} + A_\alpha y_{n+1}^{(\alpha)} = \varphi_{n+1}^{(\alpha)}, \; n = 0, 1, \ldots, \; \alpha = 1, 2, \ldots, p \tag{4.33}$$

безусловно устойчивы в некотором банаховом пространстве с некоторой нормой $\|\cdot\|$. Более точно будем считать выполненными следующие послойные оценки для разностных схем (4.33):

$$\|y_{n+1}^{(\alpha)}\| \le \|y_n^{(\alpha)}\| + \tau\|\varphi_{n+1}^{(\alpha)}\|, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.34}$$

К выделенному классу аддитивных схем относятся схемы с неотрицательно определенными операторами ($A_\alpha \ge 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ в сеточном гильбертовом пространстве L_2). Вторым важным примером служат разностные схемы для задач с нестрогим диагональным преобладанием по строкам для каждого операторного слагаемого

$$a_{ii} \ge \sum_{i \ne j = 1}^{M} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

В этом случае мы имеем устойчивость схем (4.33) в L_∞.

4.2.2. Векторная аддитивная схема

Для приближенного решения задачи (4.30) — (4.32) будем использовать двухслойную векторную аддитивную схему (см. [1])

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A^{(\beta)} y_{n+1}^{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A^{(\beta)} y_n^{(\beta)} = \varphi_n,$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.35}$$

Начальные условия в соответствии с (4.31) зададим в виде

$$y_0^{(\alpha)} = u^0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.36}$$

Выше мы подробно рассматривали схему

$$\left(E + \sigma\tau A^{(\alpha)}\right) \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p} A^{(\beta)} y_n^{(\beta)} = \varphi_n, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

построенную на основе регуляризации (возмущения) диагональной матрицей. В этом случае допускается асинхронная организация вычислений, когда отдельные элементы $y^{(\alpha)}$ вычисляются на новом временном слое независимо друг от друга. В этом они подобны аддитивно-усредненным схемам покомпонентного расщепления.

В схеме (4.35), (4.36), подобно переходу от итерационного метода Якоби к методу Зейделя, найденная компонента решения на новом временном слое участвует при нахождении следующей компоненты вектора. В этом случае можно рассчитывать на приобретение положительных черт, типичных для чисто неявных разностных схем. Покажем безусловную устойчивость векторной аддитивной схемы (4.35), (4.36).

4.2.3. Исследование устойчивости

Рассматривая уравнение для определения $y_{n+1}^{(1)}$ и $y_n^{(p)}$, из (4.35) непосредственно получим равенство

$$\left(E + \tau A^{(1)}\right) \frac{y_{n+1}^{(1)} - y_n^{(1)}}{\tau} = \frac{y_n^{(p)} - y_{n-1}^{(p)}}{\tau} + \tau \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\tau}. \tag{4.37}$$

Вычитая из уравнения для нахождения $y_{n+1}^{(\alpha+1)}$ уравнение для $y_{n+1}^{(\alpha)}$, приходим ко второму полезному соотношению

$$\left(E + \tau A^{(\alpha+1)}\right) \frac{y_{n+1}^{(\alpha+1)} - y_n^{(\alpha+1)}}{\tau} = \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau},$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{4.38}$$

Из (4.38) с учетом (4.33), (4.34) непосредственно следуют оценки

$$\left\| \frac{y_{n+1}^{(\alpha+1)} - y_n^{(\alpha+1)}}{\tau} \right\| \le \left\| \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} \right\|,$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{4.39}$$

Аналогично из (4.37) получим

$$\left\| \frac{y_{n+1}^{(1)} - y_n^{(1)}}{\tau} \right\| \le \left\| \frac{y_n^{(p)} - y_{n-1}^{(p)}}{\tau} \right\| + \tau \left\| \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\tau} \right\|. \tag{4.40}$$

С учетом (4.39) из (4.40) получается послойная оценка для производной разностного решения по времени

$$\left\| \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} \right\| \le \left\| \frac{y_n^{(\alpha)} - y_{n-1}^{(\alpha)}}{\tau} \right\| + \tau \left\| \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\tau} \right\|,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.41}$$

Из (4.41) вытекает неравенство

$$\left\| \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} \right\| \le \left\| \frac{y_1^{(\alpha)} - y_0^{(\alpha)}}{\tau} \right\| + \sum_{k=1}^{n} \tau \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.42}$$

Из (4.35) при $\alpha = 1$ с учетом (4.32) и (4.36) получаем неравенство

$$\left\| \frac{y_1^{(1)} - y_0^{(1)}}{\tau} \right\| \le \|\varphi_0 - Au^0\|.$$

В силу (4.39) неравенство (4.42) теперь можно переписать в виде

$$\left\| \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} \right\| \le \|\varphi_0 - Au^0\| + \sum_{k=1}^{n} \tau \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.43}$$

Принимая во внимание очевидное неравенство

$$\|y_{n+1}^{(\alpha)}\| \le \|y_n^{(\alpha)}\| + \tau \left\| \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} \right\|,$$

из (4.43) получим искомую оценку для каждой отдельной компоненты векторной аддитивной схемы (4.35), (4.36)

$$\|y_{n+1}^{(\alpha)}\| \le \|y_n^{(\alpha)}\| + \tau\|\varphi_0 - Au^0\| + \tau \sum_{k=1}^{n} \tau \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.44}$$

Это дает нам возможность сформулировать следующий основной результат.

Теорема 4.2. Пусть для неявных разностных схем (4.33) выполнены априорные оценки (4.34). Тогда векторная аддитивная схема (4.32), (4.35), (4.36) устойчива по начальным данным и правой части и для разностных решений верны оценки (4.44).

Специально подчеркнем, что выше мы получили оценки устойчивости для каждой отдельной компоненты $y_n^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Тем самым в качестве приближенного решения задачи (4.29), (4.30) можно взять любую компоненту или же их линейную комбинацию

$$y_n = \sum_{\alpha=1}^{p} c_\alpha y_n^{(\alpha)}, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} c_\alpha = 1, \quad c_\alpha \ge 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

На основе оценок типа (4.44) стандартным образом исследуется сходимость векторных аддитивных схем. В этой связи отметим близость полученной оценки (4.44) к основным априорным оценкам для двухслойных разностных схем, которые базируются на производных правой части по времени.

Полученная оценка устойчивости по начальным данным и правой части для векторной разностной схемы базируется на аналогичных оценках для разностных схем (4.33), в которые входят лишь отдельные операторные слагаемые расщепления (4.32). Такие задачи хорошо исследованы в теории устойчивости операторно-разностных схем [47, 61]. В частности, получены совпадающие необходимые и достаточные условия, исследована сходимость в различных нормах при минимальных требованиях на операторы задачи и т.д.

4.3. Схемы второго порядка точности

Рассмотрены векторные аддитивные схемы многокомпонентного расщепления, которые сходятся со вторым порядком по τ. На основе принципа регуляризации строятся трехслойные разностные схемы, выделен класс попеременно-треугольных векторных аддитивных схем.

4.3.1. Постановка задачи

Будем рассматривать модельную задачу

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{4.45}$$

$$u(0) = u^0, \tag{4.46}$$

в которой

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p \tag{4.47}$$

и все операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ являются постоянными. Возможные обобщения полученных результатов на более общий случай несамосопряженных нестационарных операторов мы не будем здесь обсуждать.

От (4.45) – (4.47) перейдем к векторной задаче

$$\mathcal{B}\frac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = \mathcal{F}(t), \quad t > 0, \tag{4.48}$$

$$U(0) = U^0 \equiv \{u^0, u^0, \ldots, u^0\}. \tag{4.49}$$

Для операторных матриц $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ имеем представление

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B})^* = \left\{\left(A^{(\alpha)}\right)^* \delta_{\alpha\beta}\right\} \geq 0, \tag{4.50}$$

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A})^* = \left\{\left(A^{(\alpha)}\right)^* A^{(\beta)}\right\} \geq 0, \tag{4.51}$$

а правая часть в уравнении (4.48) есть

$$\mathcal{F}(t) = \left\{\left(A^{(1)}\right)^* f(t), \left(A^{(2)}\right)^* f(t), \ldots, \left(A^{(p)}\right)^* f(t)\right\}.$$

Для приближенного решения векторной задачи (4.48), (4.49) с общих позиций теории устойчивости операторно-разностных схем ранее рассматривались двухслойные разностные схемы первого порядка точности. Аналогичное исследование можно провести при построении схем второго порядка точности.

4.3.2. Трехслойные векторные схемы

Основой нашего рассмотрения являются условия устойчивости трехслойных операторно-разностных схем. При исследовании устойчивости трехслойных векторных схем используется каноническая форма

$$\mathbf{B}\frac{Y_{n+1}-Y_{n-1}}{\tau}+\mathbf{R}\left(Y_{n+1}-2Y_n+Y_{n-1}\right)+\mathbf{A}Y_n=0,$$

$$n=1,2,\ldots \tag{4.52}$$

Имеет место (см. доказательство теоремы 1.10) следующее утверждение.

Лемма 4.2. Пусть в (4.52) операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{R}$ — самосопряженные и постоянные. Тогда при выполнении условия

$$\mathbf{B}\geq 0 \tag{4.53}$$

имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{n+1}\leq \mathcal{E}_n, \tag{4.54}$$

где использованы обозначения

$$\mathcal{E}_{n+1}=\frac{1}{4}\left(\mathbf{A}\left(y_{n+1}+y_n\right),y_{n+1}+y_n\right)+$$

$$+\left(\mathbf{R}\left(y_{n+1}-y_n\right),y_{n+1}-y_n\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\left(\mathbf{A}\left(y_{n+1}-y_n\right),y_{n+1}-y_n\right). \tag{4.55}$$

Будем ориентироваться на схемы, для которых $\mathcal{E}_{n+1}$ определяет соответствующую норму решения. При $\mathbf{A}>0$ это предполагает выполнение неравенств

$$\mathbf{B}\geq 0,\quad 4\mathbf{R}-\mathbf{A}\geq 0, \tag{4.56}$$

которые (см. [47, 61], теорему 1.10) являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости трехслойной схемы (4.52).

Подобно случаю двухслойной векторной схемы, под решением будем понимать функцию $\bar{y}$, которая определяется следующим образом:

$$A\bar{y} = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} y^{(\alpha)}.$$

Поэтому для трехслойной схемы (4.52) с $\mathbf{A} = \mathcal{A}$ при выполнении условий (4.56) величина $\mathcal{E}_{n+1}$ определяет норму, хотя условие положительности оператора $\mathbf{A}$, вообще говоря, не выполнено.

Безусловно устойчивые трехслойные векторные аддитивные схемы будем строить на основе принципа регуляризации. Для однородной задачи ($\mathcal{F}(t) = 0$) в качестве производящей естественно взять простейшую явную схему второго порядка аппроксимации

$$\mathcal{B}\frac{Y_{n+1} - Y_{n-1}}{2\tau} + \mathcal{A}Y_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.57}$$

Схема (4.57) записывается в канонической форме (4.52) при

$$\mathbf{B} = \mathcal{B}, \quad \mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{A} = \mathcal{A}.$$

В соответствии с (4.56) она относится к классу абсолютно неустойчивых.

Принимая во внимание необходимые и достаточные условия (4.56), регуляризованные абсолютно устойчивые схемы будем строить на основе возмущения оператора $\mathbf{R}$. Для сохранения второго порядка по τ положим

$$\mathbf{B} = \mathcal{B}, \quad \mathbf{R} = \mu\mathcal{R}, \quad \mathbf{A} = \mathcal{A} \tag{4.58}$$

с ранее используемым регуляризатором

$$\mathcal{R} = \left\{ \left(A^{(\alpha)}\right)^* A^{(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \right\}. \tag{4.59}$$

Теорема 4.3. Разностная схема (4.52), (4.58), (4.59) абсолютно устойчива по начальным данным при $\mu \geq p/4$ и для разностного решения справедлива оценка (4.54), (4.55).

Доказательство. Для рассматриваемой схемы первое из условий (4.56) выполнено, а второе принимает вид

$$4\,(\mathbf{R}Y, Y) - (\mathbf{A}Y, Y) =$$

$$= 4\mu \sum_{\alpha=1}^{p} \|A^{(\alpha)} y^{(\alpha)}\|^2 - \left(\left(\sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \right)^2, 1 \right) \geq$$

$$\geq (4\mu - p) \sum_{\alpha=1}^{p} \|A^{(\alpha)} y^{(\alpha)}\|^2 \geq 0.$$

Отсюда следуют искомые ограничения на параметр μ. ■

В соответствии с общими результатами теории устойчивости (корректности) трехслойных операторно-разностных схем [47, 61] можно получить оценки устойчивости по начальным данным и правой части, на основе которых полностью исследуется сходимость рассматриваемых векторных аддитивных схем.

4.3.3. Схемы попеременно-треугольного метода

Среди наиболее интересных схем двухкомпонентного расщепления мы выделили аддитивные разностные схемы попеременно-треугольного метода. Они базируются на разделении самосопряженного оператора задачи на сумму двух операторов, которые сопряжены друг к другу. Здесь такого класса схемы используются для построения векторных аддитивных схем второго порядка точности.

Рассматривается задача (4.48), (4.49). Для оператора используем расщепление

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1)} + \mathcal{A}^{(2)}, \quad \left(\mathcal{A}^{(1)}\right)^* = \mathcal{A}^{(2)}. \tag{4.60}$$

С учетом (4.51) для отдельных компонент такого расщепления имеем

$$\mathcal{A}^{(\alpha)} = \{A_{ij}^{(\alpha)}\}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} A^{(i)} A^{(j)}, & i < j, \\ \dfrac{1}{2} A^{(i)} A^{(i)}, & i = j, \\ 0, & i > j, \end{cases} \qquad A_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \dfrac{1}{2} A^{(i)} A^{(i)}, & i = j, \\ A^{(i)} A^{(j)}, & i > j. \end{cases}$$

Тем самым операторная матрица расщепляется на нижнюю и верхнюю треугольные матрицы. В такой интерпретации можно говорить о блочно-операторном варианте попеременно-треугольного метода.

Аддитивная схема для задачи (4.50), (4.51), (4.60) соответствует использованию

$$\mathcal{B}\frac{y_{n+1/2}-y_n}{0,5\tau}+\mathcal{A}^{(1)}y_{n+1/2}+\mathcal{A}^{(2)}y_n=\mathcal{F}_{n+1/2}, \tag{4.61}$$

$$\mathcal{B}\frac{y_{n+1}-y_{n+1/2}}{0,5\tau}+\mathcal{A}^{(1)}y_{n+1/2}+\mathcal{A}^{(2)}y_{n+1}=\mathcal{F}_{n+1/2}. \tag{4.62}$$

Реализация векторных аддитивных схем (4.61), (4.62) при используемом расщеплении связана с поочередным обращением верхней и нижней треугольных операторных матриц. Например, первый этап (уравнение 4.61)) соответствует решению p задач

$$\frac{y^{(\alpha)}_{n+1/2}-y^{(\alpha)}_n}{0,5\tau}+\sum_{\beta=1}^{\alpha-1}A^{(\beta)}y^{(\beta)}_{n+1/2}+A^{(\alpha)}\frac{y^{(\alpha)}_{n+1/2}+y^{(\alpha)}_n}{2}+$$

$$+\sum_{\beta=\alpha+1}^{p}A^{(\beta)}y^{(\beta)}_n=\varphi_{n+1/2},\quad n=0,1,\ldots,\quad \alpha=1,2,\ldots,p.$$

Для второго этапа (уравнение (4.62)) получим

$$\frac{y^{(\alpha)}_{n+1}-y^{(\alpha)}_{n+1/2}}{0,5\tau}+\sum_{\beta=1}^{\alpha-1}A^{(\beta)}y^{(\beta)}_{n+1/2}+A^{(\alpha)}\frac{y^{(\alpha)}_{n+1}+y^{(\alpha)}_{n+1/2}}{2}+$$

$$+\sum_{\beta=\alpha+1}^{p}A^{(\beta)}y^{(\beta)}_{n+1}=\varphi_{n+1/2},\quad n=0,1,\ldots,\quad \alpha=1,2,\ldots,p.$$

Аддитивная схема (4.61), (4.62) записывается в каноническом виде (при $\mathcal{F}(t)=0$) двухслойной векторной схемы

$$\mathbf{B}\frac{Y_{n+1}-Y_n}{\tau}+\mathbf{A}Y_n=0,\quad n=0,1,\ldots$$

При положительных $A^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$ в расщеплении (4.47) для оператора $\mathbf{B}$ имеем факторизованный вид

$$\mathbf{B}=\left(\mathcal{B}+\frac{\tau}{2}\mathcal{A}^{(1)}\right)\mathcal{B}^{-1}\left(\mathcal{B}+\frac{\tau}{2}\mathcal{A}^{(2)}\right). \tag{4.63}$$

Дальнейшее исследование проводится по стандартной схеме. В случае (4.63) имеем

$$\mathbf{B}=(\mathbf{B})^{-1}=\mathcal{B}+\frac{\tau}{2}\mathcal{A}+\frac{\tau^2}{4}\mathcal{A}^{(1)}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{(2)}.$$

Условие устойчивости

$$\mathbf{B} \geq \frac{\tau}{2}\mathcal{A}$$

выполнено, и поэтому векторная аддитивная схема попеременно-треугольного метода (4.61), (4.62) безусловно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации по τ при решении задачи (4.45) — (4.47). Нетрудно получить и соответствующие оценки устойчивости по начальным данным и правой части в различных нормах.

4.4. Векторные схемы для уравнений второго порядка

Строятся векторные аддитивные схемы (многокомпонентные схемы переменных направлений) для приближенного решения задачи Коши для эволюционного уравнения второго порядка. Эти схемы относятся к схемам полной аппроксимации — каждая промежуточная задача аппроксимирует исходную. Преимущества векторных аддитивных схем проявляются, в частности, в том, что проблемы построения схем расщепления для эволюционных уравнений второго порядка не намного сложнее, чем для уравнений первого порядка. Такие схемы рассматривались во многих работах, среди которых отметим [1, 3]. В своем исследовании мы руководствуемся статьей [2].

4.4.1. Задача Коши для уравнения второго порядка

Будем рассматривать функции y из конечномерного вещественного гильбертового пространства H, для скалярного произведения и нормы в котором используем обозначения $(\cdot,\cdot)$, $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$. Для оператора $D = D^* > 0$ через H_D обозначим пространство H, снабженное скалярным произведением $(y,w)_D = (Dy,w)$ и нормой $\|y\|_D = \sqrt{(Dy,y)}$.

Будем искать решение $u(t) \in H$ задачи Коши для эволюционного уравнения второго порядка, когда

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{4.64}$$

$$u(0) = u^0, \tag{4.65}$$

$$\frac{du}{dt}(0) = v^0. \tag{4.66}$$

Ограничимся простейшим случаем положительного, самосопряженного и стационарного оператора A.

Напомним оценку устойчивости по начальным данным и правой части для задачи (4.64) — (4.66), которую можно получить, если домножить скалярно в H уравнение (4.64).

Лемма 4.3. Для задачи (4.64) — (4.66) верна априорная оценка

$$\|u(0)\|_* \leq \|u^0\|_A + \|v^0\| + \int\limits_0^t \|f(s)\| ds, \tag{4.67}$$

где

$$\|u(0)\|_*^2 \equiv \|u\|_A^2 + \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2.$$

На эту оценку мы будем ориентироваться при построении разностных схем.

Ставится задача построения аддитивных схем для задачи (4.64) — — (4.66). Будем считать, что для оператора A имеет место аддитивное представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.68}$$

Аддитивные разностные схемы строятся на основе представления (4.68), причем переход с одного временного слоя t_n на другой — $t_{n+1} = t_n + \tau$, где $\tau > 0$ — шаг по времени, связан с решением задач для отдельных постоянных операторов $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, \ldots, p$ в аддитивном разложении (4.68). Тем самым исходная задача распадается на p более простых подзадач.

4.4.2. Векторная задача

Зададим вектор $U = \{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}\}$. Каждая отдельная компонента определяется как решение однотипных задач

$$\frac{d^2 u^{(\alpha)}}{dt^2} + \sum_{\beta=1}^{p} A^{(\beta)} u^{(\beta)} = f(t), \quad t > 0, \tag{4.69}$$

$$u^{(\alpha)}(0) = u^0, \tag{4.70}$$

$$\frac{du^{(\alpha)}}{dt}(0) = v^0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.71}$$

Очевидно, что $u^{(\alpha)}(t) = u(t)$, и поэтому в качестве решения исходной задачи (4.64) — (4.66) можно взять любую компоненту $U(t)$.

Проведем предварительное преобразование системы уравнений (4.69). Домножая уравнение (4.69) слева на $A^{(\alpha)}$), $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, придем к системе уравнений

$$\mathcal{D}\frac{d^2U}{dt^2} + \mathcal{A}U = \mathcal{F}(t), \quad t > 0. \tag{4.72}$$

Для элементов операторной матрицы $\mathcal{A}$ имеем $\mathcal{A} \equiv \left\{A^{(\alpha)}A^{(\beta)}\right\}$. Для вектора правой части справедливо представление $\mathcal{F}(t) = \{A^{(1)}f(t), A^{(2)})f(t), \ldots, A^{(p)}f(t)\}$, а диагональная операторная матрица $\mathcal{D} \equiv \left\{A^{(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\right\}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

С учетом (4.70), (4.71) систему уравнений (4.72) дополним начальными условиями

$$U(0) = U^0 \equiv \{u^0, u^0, \ldots, u^0\}, \tag{4.73}$$

$$\frac{dU}{dt}(0) = V^0 \equiv \{v^0, v^0, \ldots, v^0\}. \tag{4.74}$$

Задачу (4.72) — (4.74) естественно рассматривать на векторном гильбертовом пространстве H^p, в котором скалярное произведение определяется выражением

$$(U, V) = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}\right).$$

В силу самосопряженности операторов $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, \ldots, p$ оператор $\mathcal{A}$ в H^p самосопряжен. Кроме того, непосредственно убеждаемся в том, что

$$(\mathcal{A}U, U) = \left(\left(\sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}\right)^2, 1\right). \tag{4.75}$$

Из (4.75) непосредственно следует неотрицательность оператора $\mathcal{A}$. При расщеплении (4.68) неотрицательным и самосопряженным является также оператор $\mathcal{D}$. Приходим к векторной задаче (4.72) — — (4.74), в которой

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq 0, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \geq 0. \tag{4.76}$$

Специфика рассматриваемой векторной задачи проявляется именно в неотрицательности операторов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{A}$, что не позволяет непосредственно воспользоваться общими результатами теории устойчивости трехслойных разностных схем [47, 61].

4.4.3. Разностная схема с весами

Приведем оценку устойчивости по начальным данным и правой части обычной схемы с весами для задачи (4.64) — (4.66). Для ее приближенного решения будем использовать схему второго порядка

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + A\left(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma)\, y_n + \sigma y_{n-1}\right) = f_n \quad (4.77)$$

при заданных y_0, y_1. Аналогом леммы 4.3 является следующее утверждение.

Лемма 4.4. Для разностной схемы (4.77) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_* \le \|y_n\|_* + \tau\|f_n\|, \quad (4.78)$$

где

$$\|y_{n+1}\|_*^2 \equiv \left\|\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}\right\|^2_{E+\left(\sigma-\frac{1}{4}\right)\tau^2 A} + \left\|\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right\|^2_A.$$

Доказательство. Оценка (4.78) согласована с оценкой (4.67) для решения дифференциальной задачи и при $\sigma \ge 0,25$ обеспечивает безусловную устойчивость разностной схемы с весами (4.77) по начальным данным и правой части.

Для доказательства удобно ввести новые функции

$$v_n = \frac{y_n + y_{n-1}}{2}, \quad w_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau},$$

причем

$$y_n = \frac{v_{n+1} + v_n}{2} - \frac{\tau^2}{4}\frac{w_{n+1} - w_n}{\tau}.$$

В этих новых обозначениях схема (4.77) записывается в виде

$$B\frac{w_{n+1} - w_n}{\tau} + A\left(\frac{v_{n+1} + v_n}{2}\right) = f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (4.79)$$

где

$$B = E + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 A.$$

Домножим скалярно уравнение (4.79) на

$$\tau\left(w_{n+1}+w_n\right)=2\left(v_{n+1}-v_n\right),$$

что дает

$$\|w_{n+1}\|_B^2-\|w_n\|_B^2+\|v_{n+1}\|_A^2-\|v_n\|_A^2=\tau\left(f_n,w_{n+1}+w_n\right).$$

Для левой части этого равенства имеем

$$\|w_{n+1}\|_B^2-\|w_n\|_B^2+\|v_{n+1}\|_A^2-\|v_n\|_A^2=$$
$$=\left(\|y_{n+1}\|_*-\|y_n\|_*\right)\left(\|y_{n+1}\|_*+\|y_n\|_*\right).$$

Для правой части получим

$$\left(f_n,w_{n+1}+w_n\right)\le\|f_n\|\left(\|w_{n+1}\|+\|w_n\|\right)\le$$
$$\le\|f_n\|\left(\|y_{n+1}\|_*+\|y_n\|_*\right).$$

Отсюда и следует доказываемая априорная оценка (4.78), на основе которой исследуется сходимость и точность разностных схем. ■

4.4.4. Аддитивные схемы

При построении разностных схем заданного качества будем, как обычно, ориентироваться на использование общего методологического принципа - принципа регуляризации разностных схем.

При построении векторных аддитивных схем естественно в качестве производящей использовать явную схему. Для задачи (4.72) — — (4.74) эта схема имеет канонический вид

$$\mathbf{B}\frac{Y_{n+1}-Y_{n-1}}{\tau}+\mathbf{R}\left(Y_{n+1}-2Y_n+Y_{n-1}\right)+\mathbf{A}Y_n=\mathcal{F}_n \tag{4.80}$$

при

$$\mathbf{B}=0,\quad \mathbf{R}=\frac{1}{\tau^2}\mathcal{D},\quad \mathbf{A}=\mathcal{A}. \tag{4.81}$$

К (4.80), (4.81) мы придем при использовании явной схемы

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)}-2y_n^{(\alpha)}+y_{n-1}^{(\alpha)}}{\tau^2}+\sum_{\beta=1}^{p}A^{(\beta)}y_n^{(\beta)}=f_n,\quad n=1,2,\ldots.$$

для задачи (4.69) — (4.71).

В обозначениях

$$V_n = \frac{Y_n + Y_{n-1}}{2}, \quad W_n = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{\tau}$$

векторная разностная схема, записанная в каноническом форме (4.80), (4.81), имеет вид

$$\mathcal{B}\frac{W_{n+1} - W_n}{\tau} + \mathcal{A}\left(\frac{\mathbf{v}_{n+1} + V_n}{2}\right) = \mathcal{F}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.82}$$

где

$$\mathcal{B} = \mathcal{D} - \frac{1}{4}\tau^2\mathcal{A}.$$

При ограничениях $\mathcal{B} \geq 0$, т.е.

$$\mathcal{D} \geq \frac{1}{4}\tau^2\mathcal{A}, \tag{4.83}$$

подобно доказательству леммы 4.4, приходим к оценке

$$\|Y_{n+1}\|_* \leq \|Y_n\|_* + \tau\|\mathcal{F}_n\|, \tag{4.84}$$

если положить

$$\|Y_{n+1}\|_*^2 \equiv \left\|\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\tau}\right\|^2_{\mathcal{D}-\frac{1}{4}\tau^2\mathcal{A}} + \left\|\frac{Y_{n+1} + Y_n}{2}\right\|^2_{\mathcal{A}}.$$

Для конкретизации условий (4.83) привлекаются оценки операторных слагаемых $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, \ldots, p$ сверху. Пусть

$$\left(A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}\right) \leq \Delta^{(\alpha)}\|u^{(\alpha)}\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p$$

и положим $\Delta = \max\limits_{\alpha} \Delta^{(\alpha)}$. Для неотрицательных самосопряженных операторов $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, \ldots, p$ в этих условиях будем иметь также

$$\left(A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}\right) \geq \frac{1}{\Delta}\|A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Принимая во внимание (4.75), неравенство (4.83) переписываем в виде

$$(\mathcal{D}U, U) - \frac{1}{4}\tau^2(\mathcal{A}U, U) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\left(A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}\right) - \frac{1}{4}\tau^2\left(\left(\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}\right)^2, 1\right) \geq 0. \tag{4.85}$$

С учетом неравенства

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}\right)^2 \le p\sum_{\alpha=1}^{p}\left(A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}\right)^2,$$

из (4.85) получим

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\left(A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}\right) - \left(\left(\sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}\right)^2, 1\right) \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{p}{4}\tau^2\right)\sum_{\alpha=1}^{p}\|A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}\|^2 \ge 0.$$

Тем самым приходим к следующим ограничениям на шаг по времени:

$$\tau \le \sqrt{\frac{4}{p\Delta}} \tag{4.86}$$

для явной схемы (4.81). Условия (4.86) естественно сопоставить с обычными ограничениями на допустимый шаг по времени при использовании явной схемы для задачи (4.64) — (4.66).

В соответствии с принципом регуляризации для снятия ограничений на временной шаг будем возмущать операторы разностной схемы. Оставаясь в классе диагональных операторных матриц и сохраняя второй порядок аппроксимации, положим в (4.80), (4.81)

$$\mathcal{D} = \left\{\left(A^{(\alpha)} + \mu\left(A^{(\alpha)}\right)^2\right)\delta_{\alpha\beta}\right\}. \tag{4.87}$$

Такая регуляризация соответствует применению схемы с весами

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - 2y_n^{(\alpha)} + y_{n-1}^{(\alpha)}}{\tau^2} + \sum_{\alpha\ne\beta=1}^{p} A^{(\beta)}y_n^{(\beta)} +$$

$$+A^{(\alpha)}\left(\sigma y_{n+1}^{(\alpha)} + (1-2\sigma)\,y_n^{(\alpha)} + \sigma y_{n-1}^{(\alpha)}\right) = f_n,\ n = 1, 2, \ldots \tag{4.88}$$

вместо явной схемы (4.81) при $\mu = \sigma\tau^2$. Реализация регуляризованной схемы (4.88) полностью аналогична реализации стандартных схем расщепления и связана с обращением операторов $(E + \sigma\tau^2 A^{(\alpha)}), \alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Для схемы (4.80), (4.87) условие (4.83), подобно явной схеме (4.81), дает

$$(\mathcal{D}U, U) - \frac{1}{4}\tau^2 (\mathcal{A}U, U) \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\Delta} + \left(\sigma - \frac{p}{4}\right)\tau^2\right) \sum_{\alpha=1}^{p} \|A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}\|^2 \geq 0.$$

Поэтому оценка (4.84) для схемы (4.80), (4.87) будет иметь место при

$$\sigma \geq \frac{p}{4} - \frac{1}{\Delta\tau^2}. \tag{4.89}$$

При более жестких ограничениях $\sigma \geq 0,25p$ оценка (4.84) имеет место при любых шагах τ, т.е. носит безусловный характер. Тем самым установлено следующее утверждение.

Теорема 4.4. Для регуляризованной векторной разностной схемы (4.88) при ограничениях (4.89) справедлива априорная оценка (4.84).

Среди других безусловно устойчивых векторных аддитивных схем для уравнения второго порядка отметим схемы попеременно-треугольного метода, когда дополнительно к (4.68) используется расщепление

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1)} + \mathcal{A}^{(2)}, \quad \left(\mathcal{A}^{(1)}\right)^* = \mathcal{A}^{(2)}$$

на две треугольные операторные матрицы.

4.4.5. Устойчивость аддитивных схем

Априорная оценка (4.84) есть оценка устойчивости по начальным данным и по правой части при условии, что $\|U\|_*$ — норма. В наших условиях (см. (4.76)) при ограничениях (4.83) $\|U\|_*$ — это полунорма. Переход к норме может быть связан с использованием более жестких, чем (4.83), ограничений

$$\mathcal{D} > \frac{1}{4}\tau^2\mathcal{A}.$$

Не обсуждая различные возможности в этом направлении, ограничимся случаем $\sigma \geq 0,25p$, когда

$$(\mathcal{D}U, U) - \frac{1}{4}\tau^2 (\mathcal{A}U, U) \geq \sum_{\alpha=1}^{p} \left(A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}\right). \tag{4.90}$$

Из (4.84) с учетом (4.90) получим оценку

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\frac{y_{n+1}^{(\alpha)}-y_n^{(\alpha)}}{\tau}\right\|_{A^{(\alpha)}}^2\right)^{1/2} \le \|Y_1\|_* + \sum_{k=1}^{n}\tau\|\mathcal{F}_k\|. \tag{4.91}$$

Эта оценка обеспечивает устойчивость некоторой отдельной компоненты $y^{(\alpha)}$ вектора Y при дополнительном предположении о положительности операторного слагаемого $A^{(\alpha)}, \alpha = 1,2,\ldots,p$. При $A^{(\alpha)} > 0$, $\alpha = 1,2,\ldots,p$ в качестве приближенного решения скалярной задачи (4.64) — (4.66) можно брать, как это следует из оценки (4.91), любую компоненту $y^{(\alpha)}, \alpha = 1,2,\ldots,p$.

В более общих условиях неотрицательности операторных слагаемых $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2,\ldots,p$ будем по аналогии с [7] ориентироваться на специальное определение приближенного решения как линейной комбинации отдельных компонент. По заданным компонентам $u^{(\alpha)}, \alpha = 1,2,\ldots,p$ определим скалярную функцию $\bar{u}$ из соотношения

$$A\bar{u} \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}u^{(\alpha)}. \tag{4.92}$$

Принимая во внимание (4.75), получим

$$(\mathcal{A}U, U) = \|A\bar{u}\|^2. \tag{4.93}$$

С учетом (4.92), (4.93) из (4.84) следует оценка

$$\|A\bar{u}_{n+1/2}\| \le \|Y_1\|_* + \sum_{k=1}^{n}\tau\|\mathcal{F}_k\| \tag{4.94}$$

для приближенного решения в полуцелом узле

$$\bar{u}_{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\bar{u}_{n+1} + \bar{u}_n\right).$$

Оценку (4.94) можно рассматривать как аналог соответствующей априорной оценки для дифференциальной задачи (4.64) — (4.66), к которой мы приходим при скалярном умножении уравнения на Au.

Глава 5

Регуляризованные аддитивные схемы

Принцип регуляризации разностных схем предоставляет большие возможности для построения разностных схем заданного качества. С его помощью получены устойчивые разностные схемы для широкого класса задач математической физики, итерационные методы решения сеточных уравнений. В данной части работы отражены некоторые новые результаты по конструированию устойчивых разностных схем на основе возмущений операторов разностной схемы. На примере задачи Коши для эволюционного уравнения первого порядка выделены аддитивные и мультипликативные регуляризации при построении безусловно устойчивых разностных схем. Рассматривается новый класс аддитивных схем (схем расщепления) полной аппроксимации при произвольном многокомпонентном расщеплении. Отмечаются возможности построения регуляризованных аддитивных схем второго порядка точности, анализируются регуляризованные аддитивные разностные схемы для уравнений второго порядка.

5.1. Мультипликативная регуляризация разностных схем

Стандартный подход к построению устойчивых схем на основе принципа регуряризации связан с введением дополнительных слагаемых (регуляризаторов) в операторы производящей разностной схемы — аддитивная регуляризация. Здесь выделен класс методов мультипликативной регуляризации, когда операторы схемы возмущаются за счет операторных множителей.

5.1.1. Принцип регуляризации разностных схем

Теория регуляризации разностных схем рассматривается как принцип улучшения качества разностной схемы за счет введения регуляризаторов в операторы исходной разностной схемы. Принцип ре-

гуляризации при построении безусловно устойчивых разностных реализуется следующим образом:

1) для исходной задачи строится простейшая разностная схема (производящая разностная схема), не обладающая необходимыми свойствами, т.е. схема является условно устойчивой либо даже абсолютно неустойчивой;

2) разностная схема записывается в единой (канонической) форме, для которой условия устойчивости известны;

3) качества разностной схемы (ее устойчивость) улучшаются за счет возмущения операторов разностной схемы.

Тем самым принцип регуляризации разностных схем базируется на использовании уже известных условий устойчивости. Такие критерии дает общая теория устойчивости разностных схем [47, 61]. С этой точки зрения мы можем рассматривать принцип регуляризации как элемент конструктивного использования общих результатов теории устойчивости разностных схем. Это достигается за счет записи разностных схем в достаточно общей канонической форме и формулировкой критериев устойчивости, удобных для проверки.

Пусть H — конечномерное гильбертово пространство, D, A — линейные операторы в H. Скалярное произведение и норма в H есть $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ соответственно. Через H_D, где $D = D^* > 0$, обозначим пространство H со скалярным произведением и нормой

$$(y,v)_D = (Dy,v)\,, \quad \|y\| = \sqrt{(Dy,y)}.$$

Пусть $\tau > 0$ — шаг сетки по времени и $y_n = y(t_n)$, $t_n = n\tau$. Рассмотрим однородную (с нулевой правой частью) двухслойную операторно-разностную схему, записанную в канонической форме

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0,1,\ldots \tag{5.1}$$

при заданном y_0. Будем считать, что в (5.1) операторы A и B постоянны (не зависят от n), оператор A самосопряжен и положителен ($A = A^* > 0$). Напомним основные результаты (см. теоремы 1.2, 1.3) об устойчивости двухслойной разностной схемы по начальным данным.

Для разностной схемы (5.1) с оператором $A = A^* > 0$ условие

$$B \geq \frac{\tau}{2}A \tag{5.2}$$

является необходимым и достаточным для устойчивости в H_A, т.е. для выполнения оценки

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|y_n\|_A, \quad n = 0,1,\ldots \tag{5.3}$$

Если оператор $B = B^* > 0$, то условие (5.2) является необходимым и достаточным для устойчивости и в H_B.

5.1.2. Аддитивная регуляризация

Рассмотрим модельную задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0, \tag{5.4}$$

$$u(0) = u^0 \tag{5.5}$$

с постоянным, самосопряженным и положительным в H линейным оператором A.

В соответствии с принципом регуляризации выберем вначале какую-нибудь разностную схему, от которой мы и будем отталкиваться. В качестве такой производящей схемы естественно рассмотреть простейшую явную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.6}$$

$$y_0 = u^0. \tag{5.7}$$

Запишем разностную схему (5.6) в канонической форме двухслойных операторно-разностных схем (5.1) с операторами $B = E$. С учетом неравенства $A \leq \|A\|E$ из необходимых и достаточных условий устойчивости (5.2) получим следующие ограничения на шаг по времени для явной схемы (5.6), (5.7):

$$\tau \leq \frac{2}{\|A\|}.$$

В соответствии с (5.2) повышение устойчивости может достигаться двояко. В первом случае — за счет увеличения энергии (By, y) оператора B (левой части неравенства (5.2)) или же за счет уменьшения энергии оператора A (правой части неравенства (5.2)). Рассмотрим вначале возможности, связанные с добавлением операторных слагаемых в операторы B и A. В этом случае будем говорить об аддитивной регуляризации.

Наиболее естественно начать с аддитивного возмущения оператора B, т.е. с перехода $B \longmapsto B + \mu R$, где R — регуляризирующий оператор,

а μ — параметр регуляризации. Принимая во внимание, что для нашей производящей схемы $B = E$, положим

$$B = E + \mu R. \tag{5.8}$$

Для того чтобы сохранить первый порядок аппроксимации в схеме (5.1), (5.8), достаточно выбрать $\mu = O(\tau)$.

В качестве характерных рассмотрим два способа выбора регуляризирующего оператора

$$R = A, \tag{5.9}$$

$$R = A^2. \tag{5.10}$$

Теорема 5.1. Регуляризованная разностная схема (5.1), (5.8) устойчива в H_A при $\alpha \geq \dfrac{\tau}{2}$ в случае (5.9) и $\alpha \geq \dfrac{\tau^2}{16}$ при (5.10).

Регуляризованная схема (5.1), (5.8), (5.9) соответствует использованию стандартной схемы с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\left(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)\, y_n\right) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

при выборе $\mu = \sigma\tau$.

Существует еще одна принципиальная возможность аддитивной регуляризации за счет возмущения оператора A, когда $A \longmapsto A - \mu R$. Примером является (см., например, [66]) выбор регуляризирующего оператора согласно (5.10). Подчеркнем, что в этом случае схема остается явной. Для разностной схемы

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \tilde{A} y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

при

$$\tilde{A} = A - \mu A^2, \quad B = E$$

условие неотрицательности оператора $\tilde{A}$ и условие устойчивости приводят к ограничениям на параметр регуляризации

$$\mu \geq \frac{1}{\|A\|}, \quad \mu \leq \frac{\tau}{8}.$$

При оптимальном выборе μ получим $\tau \leq \dfrac{8}{\|A\|}$, т.е. удается увеличить максимальный допустимый шаг по времени для явной схемы в 4 раза.

5.1.3. Мультипликативная регуляризация

Стандартный подход к построению устойчивых схем базируется на основе использования аддитивной регуляризации. Вторая возможность связана с мультипликативным возмущением сеточных операторов производящей схемы. Рассмотрим некоторые простейшие примеры использования такого подхода, часть из которых можно рассматривать как новую интерпретацию уже рассмотренных выше регуляризованных схем.

При **мультипликативной регуляризации** оператора B произведем, например, замену $B \longmapsto B(1+\mu R)$ или $B \longmapsto (1+\mu R)B$. При таком возмущении мы остаемся в классе схем с самосопряженными операторами, если $R = R^*$. При этом мы имеем регуляризованную схему (5.1), (5.8), которая исследовалась выше.

Пример более сложной регуляризации дается преобразованием

$$B \longmapsto (E+\mu R^*)\, B\, (E+\mu R)\,.$$

В случае $R = A$ условие устойчивости имеет вид $\mu \geq \dfrac{\tau}{8}$. Другой интересный пример такой регуляризации соответствует попеременно-треугольному методу, когда $A = R^* + R$ и $\mu \geq \dfrac{\tau}{2}$.

Аналогично проводится мультипликативная регуляризация за счет возмущения оператора A. С учетом неравенства (5.2) можно осуществить преобразование $A \longmapsto A(1+\mu R)^{-1}$ или $A \longmapsto (1+\mu R)^{-1}A$. Для простейших двухслойных схем такая регуляризация может рассматриваться как новая редакция регуляризации оператора B. Для того чтобы остаться в классе схем с самосопряженными операторами, достаточно выбрать $R = R(A)$. Большие возможности предоставляет регуляризация

$$A \longmapsto (E+\mu R^*)^{-1}\, A\, (E+\mu R)^{-1}\,.$$

В этом случае регуляризирующий оператор R может напрямую не связываться с оператором A.

5.2. Мультипликативная регуляризация аддитивных схем

Строятся аддитивные разностные схемы для эволюционных уравнений первого порядка для общего случая аддитивного расщепления с

произвольным числом попарно некоммутируемых операторных слагаемых. Построение безусловно устойчивых схем основывается на регуляризации простейшей явной двухслойной схемы за счет малого мультипликативного возмущения каждого из операторов расщепления.

5.2.1. Задача Коши для уравнения первого порядка

Для аддитивных разностных схем характерно разбиение (расщепление) оператора задачи на сумму операторов более простой структуры. Аддитивные разностные схемы в общих условиях расщепления оператора задачи на сумму неперестановочных несамосопряженных операторов наиболее просто строятся для двухкомпонентного расщепления. Более сложная ситуация имеет место для случая многокомпонентного (на три и более операторов) расщепления. Для таких задач наиболее интересные результаты получены при использовании понятия суммарной аппроксимации.

Исходная задача при переходе с одного временного слоя на другой разбивается на ряд подзадач, причем каждая из этих задач не аппроксимирует, вообще говоря, исходную задачу. На этом пути строятся безусловно устойчивые схемы покомпонентного расщепления (локально-одномерные схемы при расщеплении по пространственным переменным). При ориентации на современные параллельные компьютеры особого внимания заслуживают аддитивно-усредненные схемы покомпонентного расщепления. Развивается новый класс операторно-разностных схем расщепления – векторные аддитивные схемы полной аппроксимации при общем многокомпонентном расщеплении.

В рассматриваемых аддитивных схемах для перехода на новый временной слой вводятся в рассмотрение несколько промежуточных (вспомогательных) функций, которые не всегда имеют прямое отношения к искомому решению.

Рассматриваются сеточные функции y из конечномерного вещественного гильбертового пространства H, для скалярного произведения и нормы в котором используем обозначения: $(\cdot,\cdot)$, $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$. Для $D = D^* > 0$ через H_D обозначим пространство H, снабженное скалярным произведением $(y,w)_D = (Dy,w)$ и нормой $\|y\|_D = \sqrt{(Dy,y)}$.

В задаче Коши для эволюционного уравнения первого порядка ищется функция $y(t) \in H$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0 \tag{5.11}$$

и начальному условию

$$u(0) = u^0. \tag{5.12}$$

Будем считать, что линейный оператор A, действующий из H в H $(A : H \to H)$, — положительный и стационарный $(A > 0)$. Для решения задачи (5.11), (5.12) верна априорная оценка

$$\|y(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds, \tag{5.13}$$

выражающая устойчивость по начальным данным и правой части.

Будем считать, что для оператора A справедливо следующее аддитивное представление:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{5.14}$$

Аддитивные разностные схемы строятся на основе (5.14), причем переход с одного временного слоя t^n на другой — $t_{n+1} = t_n + \tau$ — связан с решением задач для отдельных операторов $\Lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p$ в аддитивном разложении (5.14), т.е. задача распадается на p подзадач.

5.2.2. Регуляризация аддитивных схем

Построение разностных схем заданного качества можно провести на основе мультипликативной регуляризации. При рассмотрении задачи (5.11), (5.12) в качестве производящей естественно взять явную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.15}$$

при заданном $y_0 = u^0$. Схема (5.15) записывается в канонической форме

$$\tilde{B}\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \tilde{A}y_n = \tilde{\varphi}_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.16}$$

при

$$\tilde{B} = A^{-1}, \quad \tilde{A} = E.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости для схемы (5.16) в H формулируются в виде неравенства

$$\tilde{B} \geq \frac{\tau}{2}\tilde{A}. \tag{5.17}$$

В соответствии с (5.17) для улучшения условий устойчивости можно ориентироваться на возмущение (увеличение) оператора $\tilde{B}$ или же на возмущение (уменьшение) оператора $\tilde{A}$.

При мультипликативной регуляризации явной схемы (5.15) будем иметь

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (E + \mu A)^{-1} A y_n = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.18}$$

Эта схема при $\mu = \sigma\tau$ отличается от обычной схемы с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\left(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma) y_n\right) = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.19}$$

лишь правой частью.

Для схем (5.18), (5.19) при $\sigma \geq 0,5$ ($\mu \geq 0,5\tau$) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \|u^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\varphi_k\|, \tag{5.20}$$

обеспечивающая устойчивость в H и согласованная с оценкой (5.13) для исходной задачи (5.11), (5.12).

Принципиальная особенность схемы (5.18) связана с тем, что фактически она строится на основе явной схемы с мультипликативной регуляризацией оператора задачи. На этой новой методологической основе можно строить и аддитивные схемы.

В качестве производящей при конструировании безусловно устойчивых аддитивных схем для задачи (5.11), (5.12), (5.14) рассмотрим простейшую явную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} y_n = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.21}$$

По аналогии с (5.18) аддитивные схемы построим на основе возмущения каждого отдельного операторного слагаемого в схеме (5.21)

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{p} \left(E + \mu A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} y_n = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.22}$$

В **регуляризованной аддитивной схеме** [57, 105] никаких промежуточных задач, вспомогательных функций не вводится, а аппроксимируется непосредственно исходная задача. В этом проявляется принципиальная особенность этого класса аддитивных разностных

схем. Ограничения на шаг по времени в явной схеме связаны с нормой оператора задачи. Рассматриваемая мультипликативная регуляризация направлена на то, чтобы эту норму соответствующим образом уменьшить.

5.2.3. Устойчивость и сходимость

Регуляризованные аддитивные схемы по своей форме (но не по реализации) являются явными схемами. На основе стандартных условий устойчивости явных схем формулируются и условия устойчивости регуляризованной аддитивной схемы.

Теорема 5.2. При $\mu \geq p\tau/2$ и любых $\tau > 0$ для (5.22) выполняется априорная оценка (5.20).

Доказательство. Схему (5.22) запишем в виде

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \tilde{A} y_n = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.23}$$

где

$$\tilde{A} = \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}^{(\alpha)}, \quad \tilde{A}^{(\alpha)} = \left(E + \mu A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)},$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{5.24}$$

Неравенства

$$D \geq 0, \quad \left(E + \mu A^{(\alpha)}\right) D \left(E + \mu \left(A^{(\alpha)}\right)^*\right) \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p$$

эквивалентны и поэтому при $A^{(\alpha)} \geq 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ неотрицательными будут и операторы $\tilde{A}^{(\alpha)} \geq 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Тем самым в задаче (5.23), (5.24) оператор $\tilde{A} \geq 0$.

Для решения на новом слое имеем

$$y_{n+1} = \left(E - \tau \tilde{A}\right) y_n + \tau \varphi_n$$

и поэтому

$$\|y_{n+1}\| \leq \|E - \tau \tilde{A}\| \|y_n\| + \tau \|\varphi_n\|.$$

Принимая во внимание (5.24), получим

$$\|E - \tau \tilde{A}\| \leq \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \|E - p\tau \tilde{A}^{(\alpha)}\|.$$

Покажем, что при сформулированных ограничениях на параметр регуляризации μ справедлива оценка

$$||E - p\tau\tilde{A}^{(\alpha)}|| \leq 1 \tag{5.25}$$

для каждого оператора $\tilde{A}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Неравенство (5.25) эквивалентно

$$\left(E - p\tau\tilde{A}^{(\alpha)}\right)\left(E - p\tau\left(\tilde{A}^{(\alpha)}\right)^*\right) \leq E,$$

т.е.

$$p\tau\tilde{A}^{(\alpha)}\left(\tilde{A}^{(\alpha)}\right)^* \leq \tilde{A}^{(\alpha)} + \left(\tilde{A}^{(\alpha)}\right)^*.$$

Для доказательства домножим неравенство слева на $E+\mu A^{(\alpha)}$, справа – на $E + \mu(A^{(\alpha)})^*$ (неравенство при этом не изменится), что с учетом (5.24) дает

$$p\tau A^{(\alpha)}\left(A^{(\alpha)}\right)^* \leq A^{(\alpha)} + \left(A^{(\alpha)}\right)^* +$$

$$+ \mu\left(A^{(\alpha)}\left(A^{(\alpha)}\right)^* + \left(A^{(\alpha)}\right)^* A^{(\alpha)}\right).$$

Неравенство выполнено при $\mu \geq 0,5p\tau$.

В силу (5.25) для разностного решения справедлива послойная оценка

$$||y_{n+1}|| = ||y_n|| + \tau||\varphi_n||,$$

из которой и следует (5.20). ■

На основе полученной априорной оценки (5.20) обычным образом исследуется точность аддитивной схемы (5.22). Легко доказывается сходимость с первым порядком по времени.

Рассмотрим соответствующую задачу для погрешности $z_n = y_n - u_n$. При $\mu = \sigma\tau$ имеем

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + \tilde{A}z_n = \psi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.26}$$

где погрешность аппроксимации

$$\psi_n = -\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - \tilde{A}u_n + \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Принимая во внимание (5.24), получим

$$\tilde{A}^{(\alpha)} = A^{(\alpha)} - \sigma\tau\left(A^{(\alpha)}\right)^2 + O\left(\tau^2\right), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Для погрешности аппроксимации это дает

$$\psi_n = -\tau \frac{d^2 u}{dt^2}(t_n) + \tau\sigma \left(A^{(\alpha)}\right)^2 + O\left(\tau^2\right) u\left(t_n\right) + O\left(\tau^2\right).$$

Для решения (5.26) в силу теоремы 5.2 верна оценка

$$\|z_{n+1}\| \le \sum_{k=0}^{n} \tau \|\varphi_k\|,$$

которая обеспечивает сходимость регуляризованной аддитивной схемы (5.23), (5.24) при $\mu = \sigma\tau$, $\sigma \ge 0,5p$ с первым порядком по τ.

5.2.4. Регуляризованные и аддитивно-усредненные схемы

Регуляризованная схема (5.22) имеет тесную связь с аддитивно-усредненной схемой суммарной аппроксимации. Для того чтобы продемонстрировать это, введем фиктивные сеточные величины $y_{n+1}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Самим этим функциям теперь никакого самостоятельного значения не придается.

Будем реализовывать схему (5.22) в следующей форме:

$$\left(E + \sigma\tau A^{(\alpha)}\right) \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n}{p\tau} + A^{(\alpha)} y_n = \frac{1}{p}\left(E + \sigma\tau A^{(\alpha)}\right) \varphi_n,$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Решение на новом временном слое определяется по формуле

$$y_{n+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} y_{n+1}^{(\alpha)}.$$

Тем самым мы приходим к аддитивно-усредненной схеме, построение которой проводится теперь без привлечения понятия суммарной аппроксимации. Отличие от стандартных аддитивно-усредненных схем покомпонентного расщепления связано с выбором правых частей. Подчеркнем, что это только одна из возможных реализаций регуляризованных разностных схем.

5.3. Схемы повышенного порядка точности

Отмечаются возможности построения регуляризованных аддитивных схем второго порядка аппроксимации по τ при приближенном решении задачи Коши для эволюционного уравнения первого порядка. В качестве производящей берется трехслойная явная схема.

5.3.1. Постановка задачи

Построение аддитивных разностных схем второго порядка аппроксимации проведем в несколько более жестких условиях. А именно, дополнительно потребуем самосопряженности операторов расщепления. Рассматривается модельная задача

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{5.27}$$

$$u(0) = u^0, \tag{5.28}$$

в которой

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} > 0, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* \geq 0. \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p \tag{5.29}$$

и все операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ являются постоянными.

Некоторые возможности построения аддитивных разностных схем в более общих условиях расщепления требуют специального исследования.

Выделим классы стандартных разностных схем второго порядка аппроксимации для задачи (5.27), (5.28), на основе которых можно пытаться строить аддитивные разностные схемы. Простейшей схемой отмеченного типа является симметричная двухслойная схема (схема Кранка-Николсона)

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\frac{y_{n+1} + y_n}{2} = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $\varphi_n = f(t_{n+1/2})$.

Значительно больше возможностей мы имеем при использовании трехслойных разностных схем. Наиболее известный пример — однопараметрическое семейство

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + A\left(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma) y_n + \sigma y_{n-1}\right) = \varphi_n \tag{5.30}$$

с $\varphi_n = f(t_n)$.

В этих схемах переход на новый временной слой сопряжен с обращением операторов $E+\gamma\tau A$. Построение аддитивных разностных схем связано с приближением этого оператора на основе операторов более простой структуры типа $E + \eta\tau A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Такая методика фактически реализована в факторизованных аддитивных схемах.

В регуляризованных аддитивных схемах основная идея связана с использованием условно устойчивых явных разностных схем. Для перехода к безусловно устойчивым схемам модифицируются оператор задачи или отдельные операторные слагаемые. Явную схему мы имеем в классе (5.30) при $\sigma = 0$. Но такую схему нельзя взять в качестве производящей, так как она является безусловно неустойчивой и никакие манипуляции с малым возмущением A здесь не спасают ситуацию.

5.3.2. Явная трехслойная схема

Среди многослойных разностных схем можно выделить **явные методы Адамса**. В качестве производящей возьмем явную трехслойную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\frac{3y_n - y_{n-1}}{2} = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.31}$$

где $\varphi_n = f(t_{n+1/2})$. Прежде всего сформулируем условия устойчивости этой схемы.

Схему (5.31) запишем в канонической форме трехслойных разностных схем

$$\tilde{B}\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tilde{R}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \tilde{A}y_n = \varphi_n. \tag{5.32}$$

Принимая во внимание

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_{n-1}) + \frac{1}{2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}),$$

$$3y_n - y_{n-1} = \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_{n-1}) - \frac{1}{2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + 2y_n,$$

для схемы (5.31) получим представление (5.32) при

$$\tilde{B} = E + \frac{\tau}{2}A, \quad \tilde{R} = \frac{1}{2\tau}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right), \quad \tilde{A} = A.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости трехслойной схемы (5.31) с самосопряженными операторами имеют (см. теорему 1.10) вид

$$\tilde{B} \geq 0, \quad \tilde{R} \geq \frac{1}{4}\tilde{A}, \quad \tilde{A} > 0. \tag{5.33}$$

В силу (5.33) явная разностная схема (5.31) является устойчивой при

$$\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A} = \frac{1}{2\tau}E - \frac{1}{2}A \geq 0.$$

Это дает ограничения на шаг по времени

$$\tau \leq \frac{1}{\|A\|}.$$

Следовательно, по сравнению с двухслойной явной схемой допускается в 2 раза меньший шаг.

5.3.3. Регуляризованные схемы

Для построения безусловно устойчивых схем снова можно ориентироваться на мультипликативную регуляризацию оператора задачи A. Оставаясь в классе схем второго порядка аппроксимации вместо (5.31) используем регуляризованную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \left(E + \mu A^2\right)^{-1} A \frac{3y_n - y_{n-1}}{2} = \varphi_n,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \tag{5.34}$$

где параметр регуляризации $\mu = \sigma\tau^2$.

Условия устойчивости (5.33) выполнены при

$$E - \tau\left(E + \mu A^2\right)^{-1} A = \left(E + \mu A^2\right)^{-1}\left(E + \mu A^2 - \tau A\right) =$$

$$= \left(E + \mu A^2\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)^2 + \left(\mu - \frac{\tau^2}{4}\right)A \geq 0.$$

Тем самым регуляризированная схема (5.34) является безусловно устойчивой при $\mu \geq 0,25\tau^2$ ($\sigma \geq 0,25$).

Эта схема соответствует схеме

$$\left(E + \mu A^2\right)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\frac{3y_n - y_{n-1}}{2} = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

с аддитивной регуляризацией явной схемы (5.31), которая характеризуется нетрадиционным выбором регуляризирующего оператора.

Теперь мы можем перейти к построению аддитивных разностных схем для приближенного решения задачи (5.27) — (5.29). В проведенных ниже построениях предполагается, что обращение операторов $E+\eta\tau(A^{(\alpha)})^2$, $\alpha=1,2,\ldots,p$ не намного сложнее обращения операторов $E+\eta\tau A^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, т.е. задача остается простой.

Для производящей разностной схемы

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)}\frac{3y_n-y_{n-1}}{2}=\varphi_n,\quad n=1,2,\ldots$$

по аналогии с (5.34) (путем замены операторов $A^{(\alpha)}$ на $(E+\sigma\tau^2A^{(\alpha)})^{-1}A^{(\alpha)}$) строим регуляризованную аддитивную разностную схему для задачи (5.27) — (5.29)

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\sum_{\alpha=1}^{p}\left(E+\sigma\tau^2\left(A^{(\alpha)}\right)^2\right)^{-1}A^{(\alpha)}\frac{3y_n-y_{n-1}}{2}=$$

$$=\varphi_n,\quad n=1,2,\ldots \tag{5.35}$$

Теорема 5.3. При $\sigma\geq 0,25p^2$ и любых $\tau>0$ аддитивная разностная схема второго порядка аппроксимации (5.35) устойчива.

Доказательство. Достаточно проверить выполнимость условий (5.33). Для схемы (5.35) имеем представление (5.32), в котором

$$\tilde{B}=E+\frac{\tau}{2}\tilde{A},\quad \tilde{R}=\frac{1}{2\tau}\left(E-\frac{\tau}{2}\tilde{A}\right),$$

$$\tilde{A}=\sum_{\alpha=1}^{p}\left(E+\sigma\tau^2\left(A^{(\alpha)}\right)^2\right)^{-1}A^{(\alpha)}.$$

Второе из условий (5.33) запишем в виде

$$\tilde{R}-\frac{1}{4}\tilde{A}=\frac{1}{2p\tau}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(E-p\tau\left(E+\sigma\tau^2\left(A^{(\alpha)}\right)^2\right)^{-1}A^{(\alpha)}\right)\geq 0.$$

Для каждого отдельного слагаемого неравенство

$$E-p\tau\left(E+\mu\left(A^{(\alpha)}\right)^2\right)^{-1}A^{(\alpha)}\geq 0,$$

как было показано выше, имеет место при $\mu = \sigma\tau^2 \geq 0,25p^2\tau^2$. Поэтому регуляризованная аддитивная схема (5.35) будет устойчива при $\sigma \geq 0,25p^2$. ■

Нетрудно привести соответствующие оценки устойчивости по начальным данным и правой части, на основе которых доказывается сходимость аддитивной разностной схемы (5.35) со вторым порядком.

5.3.4. Аддитивно-усредненная схема

Мы отмечали глубокую связь регуляризованных аддитивных разностных схем первого порядка точности с аддитивно-усредненными схемами. Интересно попытаться дать рассматриваемым аддитивным схемам второго порядка аппроксимации такую же интерпретацию.

Введем $y_{n+1}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, такие что

$$y_{n+1} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y_{n+1}^{(\alpha)}. \tag{5.36}$$

С учетом этого запишем схему (5.35) в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n}{p\tau} + \left(E + \sigma\tau^2\left(A^{(\alpha)}\right)^2\right)^{-1} A^{(\alpha)}\frac{3y_n - y_{n-1}}{2}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{p}\varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Конкретизируем теперь определение вспомогательных величин $y_{n+1}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, находя их из уравнений

$$\left(E + \sigma\tau^2\left(A^{(\alpha)}\right)^2\right)\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n}{p\tau} + A^{(\alpha)}\frac{3y_n - y_{n-1}}{2} = \tag{5.37}$$

$$= \left(E + \sigma\tau^2\left(A^{(\alpha)}\right)^2\right)\varphi_n^{(\alpha)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

где

$$\varphi_n^{(\alpha)} = \frac{1}{p}\varphi_n.$$

Мы показали эквивалентность аддитивно-усредненной схемы (5.36), (5.37) регуляризованной схеме (5.35), которая имеет второй порядок аппроксимации по τ. В силу этого она также сходится со вторым порядком.

5.4. Регуляризованные схемы для уравнений второго порядка

Демонстрируются конструктивные возможности принципа регуляризации разностных схем для построения безусловно устойчивых аддитивных разностных схем. Производящей является стандартная явная разностная схема, а ее регуляризация осуществляется на основе мультипликативного возмущения оператора задачи

5.4.1. Модельная задача

В конечномерном вещественном гильбертовом пространстве H ищется функция $u(t) \in H$ как решение задачи Коши для эволюционного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{5.38}$$

$$u(0) = u^0, \tag{5.39}$$

$$\frac{du}{dt}(0) = v^0. \tag{5.40}$$

В случае положительного, самосопряженного и стационарного оператора A используется расщепление

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{5.41}$$

Для задачи (5.38) — (5.40) естественно использовать схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + A\left(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma) y_n + \sigma y_{n-1}\right) = \varphi_n \tag{5.42}$$

при заданных y_0, y_1, которая аппроксимирует (5.38) со вторым порядком.

Схема (5.42) записывается в канонической форме трехслойных разностных схем

$$\tilde{B}\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tilde{R}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \tilde{A}y_n = \varphi_n, \tag{5.43}$$

когда

$$\tilde{B} = 0, \quad \tilde{R} = \frac{1}{\tau^2}E + \sigma A, \quad \tilde{A} = A.$$

Условия

$$\tilde{B} \geq 0, \quad \tilde{R} \geq \frac{1}{4}\tilde{A}, \quad \tilde{A} > 0 \tag{5.44}$$

обеспечивают устойчивость разностной схемы (5.43).

Для схемы с весами условия (5.44) будут выполнены при

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{||A||\tau^2}.$$

Для явной схемы это приводит к ограничениям на шаг по времени

$$\tau \leq \frac{1}{2||A||^{1/2}}.$$

При расщеплении (5.41) будем модифицировать явную схему за счет уменьшения $||A||$ так, чтобы подобные условия всегда выполнялись.

5.4.2. Регуляризованная схема

Для явной схемы

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + Ay_n = \varphi_n$$

простейшая мультипликативная регуляризация приводит к схеме

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + (E + \mu A)^{-1} Ay_n = \varphi_n. \tag{5.45}$$

Для сохранения второго порядка аппроксимации выберем параметр регуляризации $\mu = \sigma\tau^2$. В аналогичном виде записывается схема с весами (5.42), отличающаяся от схемы (5.45) только правой частью.

Условия устойчивости (5.44) схемы (5.45) приводят к неравенству

$$R - \frac{1}{4}A = \frac{1}{\tau^2}\left(E - \frac{1}{4}\tau^2 (E + \mu A)^{-1} A\right) \geq 0.$$

Имеем

$$E - \frac{1}{4}\tau^2 (E + \mu A)^{-1} A = (E + \mu A)^{-1}\left(E + \mu A - \frac{1}{4}\tau^2 A\right)$$

и поэтому при $\mu \geq 0,25\tau^2$ ($\sigma \geq 0,25$) условия устойчивости будут выполнены.

Многокомпонентный аналог (5.45) приводит нас к регуляризованной аддитивной схеме. В качестве производящей берется явная схема, которая имеет вид

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} y_n = \varphi_n.$$

Мультипликативное возмущение отдельных операторных слагаемых дает искомую аддитивную схему

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + \sum_{\alpha=1}^{p} \left(E + \mu A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} y_n = \varphi_n. \qquad (5.46)$$

Теорема 5.4. При $\sigma \geq 0,25p$ $(\mu = \sigma\tau^2)$ и любых $\tau > 0$ аддитивная разностная схема (5.46) для задачи (5.38) — (5.40) безусловно устойчива.

Доказательство. Для схемы (5.46), подобно рассмотренной выше (5.45), имеем

$$E - \frac{1}{4}\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p} \left(E + \mu A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \left(E - \frac{p}{4}\tau^2 \left(E + \mu A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)}\right) \geq 0$$

при $\mu \geq 0,25p\tau^2$ $(\sigma \geq 0,25p)$. ■

Регуляризованная аддитивная схема многокомпонентного расщепления (5.46) сходится при сформулированных ограничениях на параметр регуляризации со вторым порядком по τ. Полное исследование этой проблемы читатель может провести самостоятельно.

5.4.3. Аддитивно-усредненные схемы для уравнений второго порядка

На основе схемы (5.46) проведем построение аддитивно-усредненной схемы для приближенного решения задачи Коши (5.38) — (5.40).

Мы отмечали глубокую связь регуляризованных аддитивных разностных схем первого порядка точности с аддитивно-усредненными схемами. Интересно попытаться дать аддитивным схемам второго порядка аппроксимации такую же интерпретацию.

Вспомогательные функции $y_{n+1}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ определим из уравнений

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - 2y_n + y_{n-1}}{p\tau^2} + \left(E + \mu A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} y_n =$$

$$= \frac{1}{p}\varphi_n, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.47}$$

Под решением на новом слое понимается

$$y_{n+1} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y_{n+1}^{(\alpha)}. \tag{5.48}$$

Аддитивно-усредненная схема (5.47), (5.48) эквивалентна регуляризованной аддитивной схеме (5.46).

Эта схема при $\mu = \sigma\tau^2$ небольшим возмущением правой части приводится к схеме

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - 2y_n + y_{n-1}}{p\tau^2} + A^{(\alpha)}\left(\sigma y_{n+1}^{(\alpha)} + (1 - 2\sigma)\, y_n + \sigma y_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\varphi_n, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

которая имеет привычную форму схемы с весами и сходится со вторым порядком по τ.

Глава 6

Итерационные методы

При решении стационарных задач математической физики применяются итерационные методы, которые могут интерпретироваться как методы установления. Итерационные методы основаны на определении приближенных решений из последовательности решения более простых задач, которые часто можно связать с использованием тех или иных аддитивных схем. Здесь приведены основные факты теории итерационных методов и кратко обсуждаются возможности построения итерационных методов на основе расщепления оператора задачи на сумму более простых операторов. Отмечаются факторизованные методы, среди которых наиболее известен итерационные метод переменных направлений. В качестве одного из наиболее эффективных выделяется итерационный попеременно-треугольный метод. Кратко обсуждаются проблемы построения итерационных методов на основе использования векторных аддитивных разностных схем.

6.1. Элементы теории итерационных методов

В этом разделе приводятся основные понятия теории итерационных методов решения операторных уравнений, рассматриваемых в конечномерных гильбертовых пространствах. Ставится проблема выбора итерационных параметров и оператора перехода (переобусловливателя) на новое итерационное приближение.

6.1.1. Постановка задачи

В конечномерном вещественном гильбертовом пространстве H ищется функция $y \in H$ как решение операторного уравнения

$$Ay = \varphi. \tag{6.1}$$

Здесь A рассматривается как линейный положительный оператор, действующий в H, а φ — заданный элемент H.

Итерационный метод основан на том, что начиная с некоторого начального приближения $y_0 \in H$ последовательно определяются приближенные решения уравнения (6.1) $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$, где k — — номер итерации. Значения y_{k+1} определяются по ранее найденным y_k, $y_{k-1}, \ldots$ Если при вычислении y_{k+1} используются значения на предыдущей итерации y_k, то итерационный метод называется одношаговым (**двухслойным**). Соответственно при использовании y_k и y_{k-1} итерационный метод называется двухшаговым (**трехслойным**).

Любой двухслойный итерационный метод можно записать в виде

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{6.2}$$

Согласно [47, 63], это — **каноническая форма двухслойного итерационного метода**. При заданном y_0 все последующие приближения находятся по (6.3). При такой записи итерационного метода явно прослеживается его связь с разностными схемами приближенного решения нестационарных задач.

Для характеристики точности приближенного решения естественно ввести погрешность $z_k = y_k - y$. Будем рассматривать сходимость итерационного метода в энергетическом пространстве H_D, порожденном самосопряженным и положительно определенным в H оператором D. В H_D скалярное произведение и норма есть

$$(y, w)_D = (Dy, w), \quad \|y\|_D = ((y, y)_D)^{1/2}.$$

Итерационный метод сходится в H_D, если $\|z_k\|_D \to 0$ при $k \to \infty$. В качестве меры сходимости итераций принимают относительную погрешность ε, так что на n-й итерации

$$\|y_n - y\|_D \le \varepsilon \|y_0 - y\|_D. \tag{6.3}$$

В силу того, что само точное решение y неизвестно, оценка точности приближенного решения проводится по невязке

$$r_k = Ay_k - \varphi = Ay_k - Ay,$$

которая может быть вычислена непосредственно. Например, итерационный процесс проводится до выполнения оценки

$$\|r_n\| \le \varepsilon \|r_0\|. \tag{6.4}$$

Использование критерия сходимости (6.4) соответствует выбору $D = A^*A$ в (6.3). Минимальное число итераций, которое гарантирует точность ε (выполнение (6.3) или (6.4)), обозначим $n(\varepsilon)$.

При построении итерационного метода мы должны стремиться к минимизации вычислительной работы по нахождению приближенного решения задачи (6.1) с заданной точностью. Пусть Q_k — число арифметических действий для нахождения приближения y_k и пусть делается $n \geq n(\varepsilon)$ итераций. Тогда общие затраты оцениваются величиной

$$Q(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} Q_k.$$

Применительно к двухслойному итерационному методу (6.2) минимизация $Q(\epsilon)$ может достигаться за счет выбора операторов B_k и итерационных параметров τ_{k+1}. Обычно операторы B_k задаются из каких-либо соображений, а оптимизация итерационного метода (6.2) осуществляется за счет выбора итерационных параметров.

В теории итерационных методов для выбора итерационных параметров получили распространение два подхода. Первый из них связан с использованием априорной информации об операторах итерационной схемы (B_k и A в (6.2)). Во втором подходе (итерационные методы вариационного типа) итерационные параметры находятся на каждой итерации из минимума некоторых функционалов, при этом явно не используется априорная информация об операторах. Вначале мы остановимся на общем описании итерационных методов без указания структуры сеточных операторов B_k. Конкретизация результатов для сеточных эллиптических операторов двухмерных задач конвекции-диффузии проводится отдельно.

Будем рассматривать в качестве основной задачу (6.1), когда оператор A самосопряжен и положительно определен ($A = A^* > 0$) в конечномерном гильбертовом пространстве H. Исследуется итерационный процесс

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{6.5}$$

т.е. в отличие от общего случая (6.2) оператор B считается постоянным (не изменяется в процессе итераций).

6.1.2. Метод простой итерации

Метод простой итерации соответствует использованию в (6.5) постоянного итерационного параметра $\tau_{k+1} = \tau$, т.е. рассматривается итерационный процесс

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{6.6}$$

в предположении, что

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0. \tag{6.7}$$

Итерационный метод (6.6) называется **стационарным**.

Пусть априорная информация об операторах B и A задана в виде двухстороннего операторного неравенства

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0, \tag{6.8}$$

т.е. операторы B и A энергетически эквивалентны с постоянными энергетической эквивалентности γ_α, $\alpha = 1, 2$. Имеет место следующее основное утверждение [47, 63].

Теорема 6.1. Итерационный метод (6.6) — (6.8) сходится в H_D, $D = A, B$ при $0 < \tau < 2/\gamma_2$. Оптимальным значением итерационного параметра является

$$\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \tag{6.9}$$

при котором для числа итераций n, необходимых для достижения точности ε, справедлива оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho_0}, \tag{6.10}$$

где

$$\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Заметим, что в (6.10) $n_0(\varepsilon)$, вообще говоря, нецелое и n — минимальное целое, при котором выполнено $n \geq n_0(\varepsilon)$. Теорема 6.1 указывает путь оптимизации сходимости итерационного процесса (6.6), (6.7) за счет выбора оператора B в соответствии с (6.8), т.е. оператор B должен быть близок оператору A по энергии.

6.1.3. Чебышевский набор итерационных параметров

Оптимальный набор итерационных параметров в (6.5) связан с корнями полиномов Чебышева, поэтому такой итерационный метод называется **чебышевским итерационным методом** (методом Ричардсона). Определим множество $\mathcal{M}_n$ следующим образом:

$$\mathcal{M}_n = \left\{ -\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n \right\}. \tag{6.11}$$

Для итерационных параметров τ_k используется формула

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \mu_k}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.12}$$

Имеет место [47, 63] следующее основное утверждение о скорости сходимости итерационного метода с чебышевским набором итерационных параметров.

Теорема 6.2. Чебышевский итерационный метод (6.5), (6.7), (6.8), (6.11), (6.12) сходится в H_D, $D = A, B$, и для числа итераций n, необходимых для достижения точности ε, справедлива оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln\left(2\varepsilon^{-1}\right)}{\ln \rho_1^{-1}}, \tag{6.13}$$

где

$$\rho_1 = \frac{1 - \xi^{1/2}}{1 + \xi^{1/2}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

В чебышевском методе расчет итерационных параметров осуществляется (см. (6.11), (6.12)) по заданному общему числу итераций n. Естественно, что вырожденный случай $n = 1$ соответствует рассмотренному выше методу простой итерации. Практическая реализация чебышевского итерационного метода связана с проблемой вычислительной устойчивости. Это обусловлено тем, что норма оператора перехода на отдельных итерациях больше единицы и может происходить рост локальной погрешности до авоста. Проблема вычислительной устойчивости решается специальным упорядочиванием итерационных параметров (выбором μ_k из множества $\mathcal{M}_n$). Для вычисления оптимальных последовательностей итерационных параметров τ_k по заданному числу итераций n предложены (см., например, [63]) различные алгоритмы.

Можно отметить также широко используемый в вычислительной практике трехслойный вариант чебышевского итерационного метода (см., например, [63, 88]), в котором итерационные параметры рассчитываются по рекуррентным формулам. При этом достигается монотонное убывание погрешности и нет необходимости заранее выбирать общее число итераций n, как при использовании (6.11), (6.12).

6.1.4. Двухслойные методы вариационного типа

Выше рассматривались итерационные методы решения задачи (6.1) в условиях, когда задана априорная информация об операторах

B и A в виде констант (см. (6.8)) энергетической эквивалентности γ_1 и γ_2. Через эти постоянные определяются оптимальные значения итерационных параметров (см. (6.9), (6.12)). Получение этих постоянных может оказаться сложной задачей, поэтому есть смысл пытаться строить итерационные методы, для которых итерационные параметры вычисляются без такой априорной информации. Этот класс методов известен как **итерационные методы вариационного типа**. Начнем с рассмотрения двухслойного итерационного метода (6.5) в предположении (6.7).

Обозначая невязку $r_k = Ay_k - \varphi$ и поправку $w_k = B^{-1}r_k$, итерационный процесс (6.5) запишем следующим образом:

$$y^{k+1} = y^k - \tau_{k+1}w^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Естественно выбирать итерационный параметр τ_{k+1} из условия минимума нормы погрешности z_{k+1} в H_D. Непосредственные вычисления показывают, что минимум нормы достигается при выборе

$$\tau_{k+1} = \frac{(Dw_k, z_k)}{(Dw_k, w_k)}. \tag{6.14}$$

Конкретизация итерационного метода достигается за счет выбора оператора $D = D^* > 0$. Этот выбор должен быть подчинен, в частности. условию возможности вычисления итерационных параметров. В формулу (6.14) входит невычисляемая величина z_k и поэтому простейший выбор $D = B$ (см. теорему 6.1) здесь не проходит. Вторая отмеченная выше возможность $D = A$ приводит нас к **итерационному методу скорейшего спуска**, когда

$$\tau_{k+1} = \frac{(w_k, r_k)}{(Aw_k, w_k)}. \tag{6.15}$$

Среди других возможностей выбора D отметим случай $D = AB^{-1}A$ — **метод минимальных поправок**, когда

$$\tau_{k+1} = \frac{(Aw_k, w_k)}{(B^{-1}Aw_k, Aw_k)}.$$

Двухслойный итерационный метод вариационного типа сходится не медленнее метода простой итерации. Сформулируем соответствующий результат применительно к методу скорейшего спуска.

Теорема 6.3. Итерационный метод (6.5), (6.7), (6.8), (6.15) сходится в H_A, и для числа итераций n, необходимых для достижения точности ε, справедлива оценка (6.10).

В вычислительной практике наибольшее распространение получили трехслойные итерационные методы вариационного типа. По скорости сходимости они не хуже итерационного метода с чебышевским набором итерационных параметров.

6.1.5. Метод сопряженных градиентов

В трехслойном (двухшаговом) итерационном методе новое приближение находится по двум предыдущим. Для реализации метода требуются два начальных приближения y_0, y_1. Обычно y_0 задается произвольно, а y_1 находится по двухслойному итерационному методу. Трехслойный метод записывается в следующей **канонической форме трехслойного итерационного метода**:

$$
\begin{aligned}
&By_{k+1} = \alpha_{k+1}\left(B - \tau_{k+1}A\right)y_k + \left(1 - \alpha_{k+1}\right)By_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}\varphi, \\
&\qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad\qquad (6.16)\\
&By_1 = \left(B - \tau_1 A\right)y_0 + \tau_1\varphi,
\end{aligned}
$$

где α_{k+1} и τ_{k+1} — итерационные параметры.

Вычисления по (6.16) основаны на представлении

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1}y_k + \left(1 - \alpha_{k+1}\right)y_{k-1} - \alpha_{k+1}\tau_{k+1}w_k,$$

где, напомним, $w_k = B^{-1}r_k$.

В **методе сопряженных градиентов** для расчета итерационных параметров трехслойного итерационного метода (6.16) используются формулы

$$
\begin{aligned}
&\tau_{k+1} = \frac{\left(w^k, r^k\right)}{\left(Aw^k, w^k\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \\
&\alpha_{k+1} = \left(1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k}\frac{\left(w^k, r^k\right)}{\left(w^{k-1}, r^{k-1}\right)}\frac{1}{\alpha_k}\right)^{-1}, \qquad (6.17)\\
&\quad k = 1, 2 \ldots, \quad \alpha_1 = 1.
\end{aligned}
$$

Метод сопряженных градиентов в настоящее время наиболее широко используется в вычислительной практике.

Теорема 6.4. Метод сопряженных градиентов (6.16), (6.17) при выполнении (6.7), (6.8) сходится в H_A, и для числа итераций n, необходимых для достижения точности ε, справедлива оценка (6.13).

Мы привели некоторый материал справочного характера относительно итерационных методов решения задачи (6.1) в случае самосопряженных операторов A и B (условия (6.7)). Мы не будем уделять большого внимания несамосопряженным задачам, чтобы не отходить от основной темы нашего исследования — аддитивных разностных схем.

6.2. Итерационный метод переменных направлений

Этот итерационный метод основан на использовании аддитивной схемы переменных направлений. Исследуется скорость сходимости при использовании стационарных итерационных параметров. Отмечаются возможности построения аналогичных итерационных методов при общем многокомпонентном расщеплении.

6.2.1. Итерационный метод при двухкомпонентном расщеплении

В конечномерном гильбертовом пространстве H ищется приближенное решение операторного уравнения первого рода

$$Ay = \varphi \tag{6.18}$$

с положительным оператором A. Рассматриваются итерационные методы, которые основаны на аддитивном представлении оператора задачи. При двухкомпонентном расщеплении

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A^{(\alpha)} > 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{6.19}$$

Для конкретизации оценок сходимости привлекается та или иная априорная информация об операторах $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$. В рассматриваемом ниже случае используются оценки

$$\begin{aligned} &A^{(\alpha)} \geq \delta_\alpha E, && \delta_\alpha > 0, \\ &\|A^{(\alpha)} y\|^2 \leq \Delta_\alpha \left(A^{(\alpha)} y, y\right), && \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Будем рассматривать **итерационный метод переменных направлений** с одним постоянным итерационным параметром τ

$$\begin{aligned} &\frac{y_{k+1/2} - y_k}{\tau} + A^{(1)} y_{k+1/2} + A^{(2)} y_k = \varphi, \\ &\frac{y_{k+1} - y_{k+1/2}}{\tau} + A^{(1)} y_{k+1/2} + A^{(2)} y_{k+1} = \varphi. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Итерационный метод (6.21) записывается в канонической форме двухслойного итерационного метода

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=\varphi, \quad k=0,1,\ldots$$

с оператором

$$B=\left(E+\tau A^{(1)}\right)\left(E+\tau A^{(2)}\right), \quad \tau_{k+1}=2\tau.$$

В общем случае неперестановочных операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2$ оператор B не является самосопряженным и положительным. Это — основное препятствие для использования общей теории итерационных методов. Фактически та же ситуация имела место и при исследовании аддитивных разностных схем переменных направлений.

6.2.2. Исследование сходимости

Для исследования скорости сходимости итерационного метода (6.21) воспользуемся следующим вспомогательным результатом.

Лемма 6.1. Пусть

$$A\geq\delta E, \quad \delta>0, \quad \|Ay\|^2\leq\Delta\left(Ay,y\right), \tag{6.22}$$

тогда норма оператора

$$S\left(\tau\right)=\left(E+\tau A\right)^{-1}\left(E-\tau A\right) \tag{6.23}$$

минимальна при

$$\tau=\tau_0=\frac{1}{\delta\Delta}, \tag{6.24}$$

причем

$$\|S\left(\tau_0\right)\|^2=\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \quad \xi=\frac{\delta}{\Delta}. \tag{6.25}$$

Доказательство. Положим

$$w=\left(E+\tau A\right)y,$$

тогда с учетом (6.23) будем иметь

$$Sw=\left(E-\tau A\right)y.$$

Принимая во внимание представление

$$\|(E \pm \tau A)\, y\|^2 = \|y\|^2 \pm 2\tau\,(Ay, y) + \tau^2 \|Ay\|^2, \tag{6.26}$$

получим равенство

$$\|(E + \tau A)\, y\|^2 - \|(E - \tau A)\, y\|^2 = 4\tau\,(Ay, y)\,. \tag{6.27}$$

Используя (6.26) и априорную информацию (6.22), придем к оценке

$$\|(E + \tau A)\, y\|^2 \le \left(\frac{1}{\delta} + 2\tau + \Delta\tau^2\right)(Ay, y)\,. \tag{6.28}$$

С учетом (6.27), (6.28) имеем

$$\|(E - \tau A)\, y\|^2 = \|(E + \tau A)\, y\|^2 - 4\tau\,(Ay, y) \le$$

$$\le \frac{1-\eta}{1+\eta}\|(E + \tau A)\, y\|^2,$$

где

$$\eta = \frac{2\tau\delta}{1 + \delta\Delta\tau}.$$

Мы доказали неравенство

$$\|Sw\|^2 \le \frac{1-\eta}{1+\eta}\|w\|^2,$$

т.е.

$$\|S\|^2 \le \frac{1-\eta}{1+\eta}.$$

Минимум правой части достигается при $\tau = \tau_0$, при этом справедливо равенство (6.25). ■

Теперь можно вернуться к методу переменных направлений. Для простоты ограничимся наиболее благоприятным для исследования случаем, когда $\delta_1\Delta_1 = \delta_2\Delta_2$.

Теорема 6.5. При решении задачи (6.18) — (6.20) в случае $\delta_1\Delta_1 = \delta_2\Delta_2$ итерационным методом (6.21) для числа итераций n, необходимых для достижения точности ε в H_{D^*D}, $D = E + \tau A^{(2)}$, при выборе итерационного параметра

$$\tau = \tau_0 = \frac{1}{\delta_\alpha \Delta_\alpha}, \quad \delta = 1, 2 \tag{6.29}$$

справедлива оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho}, \tag{6.30}$$

где

$$\rho = \left(\frac{1-\sqrt{\xi_1}}{1+\sqrt{\xi_1}}\right)^{1/2} \left(\frac{1-\sqrt{\xi_2}}{1+\sqrt{\xi_2}}\right)^{1/2}, \quad \xi_\alpha = \frac{\delta_\alpha}{\Delta_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{6.31}$$

Доказательство. Запишем уравнения для погрешности итерационного процесса (6.21)

$$\left(E + \tau A^{(1)}\right) z^{k+1/2} = \left(E - \tau A^{(2)}\right) z^k,$$

$$\left(E + \tau A^{(2)}\right) z^{k+1} = \left(E - \tau A^{(1)}\right) z^{k+1/2}.$$

Полагая

$$w^k = \left(E + \tau A^{(2)}\right) z^k,$$

получим равенство

$$w^{k+1} = S_1 S_2 w^k, \tag{6.32}$$

где

$$S_\alpha = S_\alpha(\tau) = \left(E + \tau A^{(\alpha)}\right)^{-1} \left(E - \tau A^{(\alpha)}\right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Из (6.32) следует оценка

$$||w^{k+1}|| = ||S_1||||S_2||||w^k||.$$

В силу леммы 6.1 для нормы операторов S_α при выборе итерационного параметра в соответствии с (6.29) (см. (6.24)) получим

$$||S_\alpha||^2 \leq \frac{1-\sqrt{\xi_\alpha}}{1+\sqrt{\xi_\alpha}}, \quad \xi_\alpha = \frac{\delta_\alpha}{\Delta_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Поэтому на одном итерационном шаге

$$||w^{k+1}|| = \rho ||w^k||, \tag{6.33}$$

где постоянная ρ определена согласно (6.31). Для числа итераций в соответствии с (6.33) получим оценку (6.30). ■

В настоящее время существует много вариантов итерационного метода переменных направлений (см. [63]), которые ориентированы на более узкие классы задач. В частности, для задач с самосопряженными операторами $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ дополнительная оптимизация достигается за счет выбора разных итерационных параметров в первом и во втором уравнениях (6.21). Наиболее благоприятный случай имеет место при перестановочных самосопряженных операторах $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$.

6.2.3. Модифицированный метод переменных направлений

Традиционный итерационный метод переменных направлений (6.21) ассоциируется с методом установления, когда вместо стационарной задачи (6.18) рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения

$$\frac{dy}{dt} + Ay = \varphi, \quad t > 0.$$

Вместо этого уравнения можно использовать вариант установления, когда решается несколько более общее уравнение

$$D\frac{dy}{dt} + Ay = \varphi, \quad t > 0, \tag{6.34}$$

в котором положительный оператор D вводится для более быстрой сходимости соответствующего итерационного процесса. Сам выбор оператора D мы здесь не обсуждаем, так как он порождается спецификой конкретной задачи.

Рассмотрим вариант итерационного метода переменных направлений, связанный с аддитивной схемой для уравнения (6.34). О таком итерационном методе мы будем говорить как о **модифицированном методе переменных направлений** Для простоты ограничимся случаем самосопряженного оператора D.

Итерационный метод имеет вид

$$\begin{aligned} &D\frac{y_{k+1/2} - y_k}{\tau} + A^{(1)}y_{k+1/2} + A^{(2)}y_k = \varphi, \\ &D\frac{y_{k+1} - y_{k+1/2}}{\tau} + A^{(1)}y_{k+1/2} + A^{(2)}y_{k+1} = \varphi. \end{aligned} \tag{6.35}$$

С помощью замены

$$\tilde{y}_{k+\alpha/2} = D^{1/2}y_{k+\alpha/2}, \quad \alpha = 1, 2$$

от (6.35) придем у системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{y}_{k+1/2} - \tilde{y}_k}{\tau} + \tilde{A}^{(1)}\tilde{y}_{k+1/2} + \tilde{A}^{(2)}\tilde{y}_k = \tilde{\varphi}, \\ &\frac{\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_{k+1/2}}{\tau} + \tilde{A}^{(1)}\tilde{y}_{k+1/2} + \tilde{A}^{(2)}\tilde{y}_{k+1} = \tilde{\varphi}, \end{aligned} \tag{6.36}$$

в которой

$$\tilde{A}^{(\alpha)} = D^{-1/2}A^{(\alpha)}D^{-1/2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \tilde{\varphi} = D^{-1/2}\varphi.$$

Сходимость итерационного метода (6.36) исследовалась нами выше (см. теорему 6.5). Скорость сходимости определяется теперь постоянными $\delta_\alpha, \Delta_\alpha$ в неравенствах

$$\begin{aligned} &\tilde{A}^{(\alpha)} \geq \delta_\alpha E, && \delta_\alpha > 0, \\ &\|\tilde{A}^{(\alpha)}y\|^2 \leq \Delta_\alpha \left(\tilde{A}^{(\alpha)}y, y\right), && \alpha = 1, 2, \end{aligned}$$

которые перепишем в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} &A^{(\alpha)} \geq \delta_\alpha D, && \delta_\alpha > 0, \\ &\|A^{(\alpha)}y\|^2_{D^{-1}} \leq \Delta_\alpha \left(A^{(\alpha)}y, y\right), && \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{6.37}$$

При априорной информации (6.37) определяется оптимальное значение итерационного параметра и дается оценка числа итераций для модифицированного итерационного метода переменных направлений (6.35).

6.2.4. Многокомпонентное расщепление

Оптимизация итерационных методов (минимизация вычислительной работы) достигается за счет выбора итерационных параметров и переобусловливателя. В настоящее время наибольшее внимание уделяется выбору переобусловливателя в виде произведения двух экономичных операторов. Фактически речь идет о применении в тех или иных вариантах итерационных методов типа классического двухкомпонентного итерационного метода переменных направлений.

При рассмотрении трехмерных задач, использовании методов декомпозиции области, *многоцветных* итерационных методов приходится часто ориентироваться не на двухкомпонентное, а на многокомпонентное расщепление. В работе [53] на общем операторном уровне отмечаются возможности построения двух основных вариантов итерационных методов многокомпонентного расщепления. В первом из них

(итерационные методы с мультипликативным переобусловливателем) новое приближение строится на основе последовательного решении элементарных задач. Во втором варианте (аддитивные алгоритмы) допускается параллельная огранизация вычислений.

Принципиальный момент связан с тем, что в классе рассматриваемых итерационных методов при решении задач с самосопряженным положительным оператором можно использовать трехслойные итерационные методы вариационного типа, т.е. допускается стандартное ускорение по сопряженным градиентам.

Пусть, например, ищется решение системы линейных уравнений (6.18) с положительным и самосопряженным оператором A. Для построения итерационного метода привлекается представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} > 0, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{6.38}$$

Традиционный итерационный метод переменных направлений связан с выбором оператора B, имеющего следующее мультипликативное представление:

$$B = \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \omega_\alpha A^{(\alpha)}\right), \tag{6.39}$$

с некоторыми положительными постоянными $\omega_\alpha, \alpha = 1, 2, ..., p$. Оптимизация методов за счет выбора итерационных параметров в (6.39) достигается только при предположении о попарной перестановочности операторов $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, ..., p$. В общем случае неперестановочных операторов даже при двухкомпонентном расщеплении $B \neq B^*$.

Будем вначале ориентироваться на построение итерационных методов многокомпонентного расщепления (6.38) с мультипликативными переобусловливателями (класс факторизованных операторов B). Рассмотрим итерационный метод

$$\prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \omega_\alpha A^{(\alpha)}\right) \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} +$$

$$+ \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \omega_\alpha A^{(\alpha)}\right)^{-1} (Ay_k - \varphi) = 0. \tag{6.40}$$

При записи (6.40) в канонической форме имеем

$$B = \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \omega_{p+1-\alpha} A^{(p+1-\alpha)}\right) \prod_{\alpha=1}^{p} \left(E + \omega_\alpha A^{(\alpha)}\right) \tag{6.41}$$

и тем самым $B = B^* > 0$.

По сравнению с традиционной итерационным методом многокомпонентного расщепления (6.38), (6.39) имеем двукратное увеличение вычислительной работы на одном итерационном шаге. Но при этом в симметризованном итерационном методе (6.38), (6.41) предоставляется возможность оптимизации выбора итерационных параметров для общего случая неперестановочных операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, ..., p$.

При ориентации на современные параллельные компьютеры особого внимания заслуживают итерационные методы не с мультипликативным, а с аддитивным представлением оператора B^{-1}. Вместо (6.40) будем использовать итерационный метод

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + \sum_{\alpha=1}^{p} (E + \omega_\alpha A_\alpha)^{-1} (Ay_k - \varphi) = 0. \tag{6.42}$$

В канонической форме для итерационного метода (6.42) имеем

$$B^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{p} (E + \omega_\alpha A_\alpha)^{-1} \tag{6.43}$$

и снова $B = B^* > 0$.

Реализация итерационного метода (6.42) может быть проведена по схеме

$$\left(E + \omega_\alpha A^{(\alpha)}\right) \frac{y_{k+1}^{(\alpha)} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = \varphi,$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} y_{k+1}^{(\alpha)}.$$

Подобная схема организации присуща аддитивно-усредненным схемам. Предложенный итерационный метод можно рассматривать как векторную аддитивную схему.

Здесь мы ограничились описанием общей возможной конструкцией итерационных схем многокомпонентного расщепления. В достаточно общих предположениях (6.38) отмечена возможность использования последовательных (мультипликативных) и параллельных (аддитивных) вычислительных алгоритмов с самосопряженным и положительно определенным переобусловливателем. Для более конкретных классов расщепления необходимо ставить и решать задачу оптимизации итерационных методов, исследования скорости сходимости.

6.3. Попеременно-треугольный итерационный метод

В качестве оператора B можно взять оператор, который соответствует нижней (верхней) треугольной матрице, или произведение операторов такой структуры. Итерационные методы подобного класса наиболее популярны в прикладных расчетах.

6.3.1. Итерационный метод

В конечномерном гильбертовом пространстве H ищется решение уравнения

$$A = \varphi, \tag{6.44}$$

в котором оператор $A = A^* \geq 0$. В попеременно-треугольном итерационном методе используется следующее двухкомпонентное аддитивное расщепление

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} > 0, \quad \left(A^{(1)}\right)^* = A^{(2)}. \tag{6.45}$$

Для приближенного решения задачи (6.44), (6.45) будем использовать двухслойный итерационный метод

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{6.46}$$

В **попеременно-треугольном итерационном методе** [32] для оператора B в соответствии с разложением оператора (6.45) имеем

$$B = \left(E + \omega A^{(1)}\right)\left(E + \omega A^{(2)}\right) \tag{6.47}$$

с некоторым параметром $\omega > 0$. При использовании аддитивной схемы попеременно-треугольного метода $\tau_{k+1} = \tau$, $\omega = 0,5\tau$.

При решении системы линейных алгебраических уравнений (6.44) (оператор A — матрица) оператор B, определяемый согласно (6.47), представляет собой произведение двух треугольных. При расщеплении (6.45) оператор B самосопряжен, поэтому здесь можно использовать общие результаты теории итерационных методов. Имеется возможность повышения скорости сходимости итерационных методов за счет выбора итерационных параметров $\tau_{k=1}$ с использованием, например, метода сопряженных градиентов.

6.3.2. Скорость сходимости

Скорость сходимости итерационного метода (6.46), (6.47) определяется постоянными энергетической эквивалентности: γ_α, $\alpha = 1, 2$ в двустороннем операторном неравенстве

$$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0. \tag{6.48}$$

Найдем эти постоянные при априорной информации в виде неравенств

$$A \ge \delta E, \quad A^{(1)} A^{(2)} \le \frac{\Delta}{4} A. \tag{6.49}$$

Для оператора B с учетом представления (6.45), (6.47) имеем

$$B = E + \omega A + \omega^2 A^{(1)} A^{(2)}. \tag{6.50}$$

Принимая во внимание (6.49), получим

$$B \le \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \omega^2 \right) A.$$

Тем самым для постоянной γ_1 имеет место

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{1 + \omega\delta + \omega^2 \delta \Delta / 4}. \tag{6.51}$$

Для получения постоянной γ_2 представим оператор B на основании (6.50) в следующем виде:

$$B = E - \omega \left(A^{(1)} + A^{(2)} \right) + \omega^2 A^{(1)} A^{(2)} + 2\omega A =$$

$$= \left(E - \omega A^{(1)} \right) \left(E - \omega A^{(2)} \right) + 2\omega A.$$

Отсюда имеем $(By, y) \ge 2\omega (Ay, y)$, т.е. $A \le \gamma_2 B$, где

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\omega}. \tag{6.52}$$

Сейчас мы можем выбрать параметр ω в (6.47), исходя из условия максимума $\xi = \xi(\omega) = \gamma_1 / \gamma_2$. С учетом (6.51), (6.52) получим

$$\xi(\omega) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\omega\delta}{1 + \omega\delta + \omega^2 \delta \Delta / 4}.$$

Максимум $\xi(\omega)$ достигается при

$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{(\delta\Delta)^{1/2}}, \tag{6.53}$$

причем

$$\xi = \xi(\omega_0) = \frac{2\eta^{1/2}}{1+\eta^{1/2}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}. \tag{6.54}$$

На основании приведенных оценок можно сформулировать соответствующее утверждение о сходимости попеременно-треугольного итерационного метода при оптимальном выборе параметра ω.

Теорема 6.6. Попеременно-треугольный итерационный метод (6.45) — (6.47), (6.53) с чебышевским набором итерационных параметров сходится в H_A и H_B, причем для числа итераций, необходимых для достижения точности ε, справедлива оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2\varepsilon^{-1})}{\ln \rho_1^{-1}}, \tag{6.55}$$

где

$$\rho_1 = \frac{1-\xi^{1/2}}{1+\xi^{1/2}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

а ξ определяется согласно (6.54).

При малых ξ для числа итераций можно получить более простое выражение

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2\varepsilon^{-1})}{2\sqrt{2}\eta^{1/4}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Попеременно-треугольный метод может реализовываться также в варианте метода сопряженных градиентов. И в этом случае число итераций характеризуется приведенной выше оценкой (6.55). При численном решении краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка число итераций в попеременно-треугольном итерационном методе пропорционально корню квадратному из числа узлов по одному направлению [63].

6.3.3. Модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод

Отметим возможную модификацию попеременно-треугольного метода, который мы можем связать с расчетами на установление для уравнения

$$D\frac{dy}{dt} + Ay = \varphi, \quad t > 0.$$

Выберем оператор B в следующем факторизованном виде:

$$B = \left(D + \omega A^{(1)}\right) D^{-1} \left(D + \omega A^{(2)}\right), \tag{6.56}$$

где $D = D^* > 0$. Важнейшие свойства самосопряженности и положительности оператор B при обобщении (6.56) сохраняет.

Для числа итераций модифицированного попеременно-треугольного итерационного метода (6.45), (6.46), (6.56) верно утверждение, аналогичное теореме 6.6. Скорость сходимости зависит от параметров δ, Δ, которые входят в неравенства

$$A \geq \delta D, \quad A^{(1)} D^{-1} A^{(2)} \leq \frac{\Delta}{4} A.$$

Доказательство этого факта проводится аналогично доказательству теоремы 6.6.

6.4. Итерационные методы кластерного агрегирования

Теория итерационных методов решения систем линейных уравнений развивается в различных направлениях [63, 88]. При ориентации на современные параллельные компьютеры [83, 96] успех достигается за счет использования классических блочных итерационных методов, многоцветного упорядочивания неизвестных. При решении эллиптических краевых задач рассматриваются подходы с декомпозицией (разделением) области на подобласти с (и без) наложением подобластей друг на друга. В качестве примера выступает классический альтернирующий метод Шварца. Методы декомпозиции области на матричном уровне могут рассматриваться как специальные итерационные методы блочного типа. Следуя работе [51], выделим класс

итерационных методов со специальной организацией вычислений, типичной для классических блочных методов. Отдельные уравнения системы после предварительной обработки (например, после масштабирования) объединяются в группы. Причем одно и то же уравнение может входить в различные группы, которые мы называем кластерами. Для симметричной линейной системы уравнений показана сходимость итерационных методов кластерного агрегирования. Среди них отметим методы, которые связываются с методами точечной и блочной релаксации, с итерационными методами декомпозиции области типа Шварца.

6.4.1. Переход к системе уравнений

В конечномерном гильбертовом пространстве H ищется решение уравнения

$$Ay = \varphi \tag{6.57}$$

с положительным и самосопряженным оператором A. До сих пор мы рассматривали итерационные методы, которые связаны с аддитивным представлением оператора задачи в виде

$$A = A^* = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} > 0, \quad A^{(\alpha)} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{6.58}$$

Такое представление порождается, например, расщеплением на одномерные операторы — расщепление по пространственным переменным. Второй класс рассмотренных методов связывался с разбиением оператора задачи на два сопряженных друг с другом оператора — попеременно-треугольный метод. Здесь мы отметим новый класс расщеплений, который позволяет включить в общую схему построения итерационных методов на основе аддитивного представления оператора задачи блочные итерационные методы в различных вариантах. Мы ограничимся общими рассуждениями на операторном уровне, не рассматривая конкретные реализации в деталях.

Если понимать под (6.57) систему линейных уравнений, то рассматриваемый класс итерационных методов основан на объединении (агрегировании) отдельных уравнений системы в кластеры. Причем одни и те же уравнения после тех или иных преобразований могут входить в разные кластеры. Примером такого подхода служат классические блочные методы линейной алгебры.

Будем считать, что из одного уравнения (6.57) получена система из p уравнений (p кластеров). Построение системы уравнений формализуется на основе введения операторов агрегирования $G^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. В достаточно общих условиях примем, что

$$G^{(\alpha)} = \left(G^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad \bar{G} = \sum_{\alpha=1}^{p} G^{(\alpha)} > 0. \quad (6.59)$$

Отдельные уравнения получим, домножая исходное уравнение (6.57) на $G^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, что дает

$$G^{(\alpha)} A y = G^{(\alpha)} \varphi, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Тем самым от уравнения (6.57) переходим к системе уравнений

$$A^{(\alpha)} y = \varphi^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad (6.60)$$

в которой

$$A^{(\alpha)} = G^{(\alpha)} A, \quad \varphi^{(\alpha)} = G^{(\alpha)} \varphi, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \quad (6.61)$$

Пусть y некоторый вектор, который удовлетворяет (6.60), (6.61). Тогда суммирование по всем $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ дает

$$\bar{G} A y = \bar{G} \varphi.$$

В наших предположениях $\bar{G} > 0$ и поэтому всякое решение (6.60), (6.61) есть не что иное, как единственное искомое решение исходной системы уравнений (6.57).

6.4.2. Итерационный метод

Для приближенного решения системы уравнений (6.57) будем использовать итерационный метод, который основан на кластерном агрегировании — на переходе к системе уравнений в соответствии с (6.57) — (6.61). Поэтому методы данного класса будем называть **итерационными методами кластерного агрегирования**.

Переход с приближения y_k на новое приближение y_{k+1} осуществляется на основе решения p задач, которые соответствуют кластерному разбиению (6.60), (6.61). Приближенное решение, отнесенное к кластеру (уравнению) с номером α, обозначим $y_{k+\alpha/p}$. Сначала остановимся на методе, когда $y_{k+\alpha/p}$ определяются последовательно друг за другом по мере возрастания номера α. В этом случае мы будем говорить о синхронном итерационном методе.

Приближенное решение $y_{k+\alpha/p}$ будем определять на основе найденного ранее решения $y_{k+(\alpha-1)/p}$. Для стационарного итерационного метода положим

$$\left(\mu E + A^{(\alpha)}\right) \frac{y_{k+\alpha/p} - y_{k+(\alpha-1)/p}}{\tau} +$$

$$+A^{(\alpha)} y_{k+(\alpha-1)/p} = \varphi^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{6.62}$$

Здесь μ — некоторая положительная постоянная (параметр итерационного метода). Итерационный метод (6.62) можно связать с применением аддитивной схемы покомпонентного расщепления при решении задачи Коши для уравнения

$$\mu \frac{dy}{dt} + Ay = \varphi, \quad t > 0.$$

Теорема 6.7. Итерационный метод кластерного агрегирования (6.58) — (6.62) сходится в H_A при любых $0 < \tau < 2$.

Доказательство. Рассмотрим соответствующую задачу для погрешности $z_{k+\alpha/p} = y_{k+\alpha/p} - y$, $\alpha = 1, 2, ..., p$. С учетом (6.61) имеем

$$\left(\mu E + G^{(\alpha)} A\right) \frac{z_{k+\alpha/p} - z_{k+(\alpha-1)/p}}{\tau} +$$

$$+G^{(\alpha)} A z_{k+(\alpha-1)/p} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{6.63}$$

Домножая (6.63) на A, перепишем эту систему в виде

$$\mu A z_{\bar{t},\alpha} + A G^{(\alpha)} A \left(\frac{1}{\tau} z_\alpha + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) z_{\alpha-1}\right) = 0, \tag{6.64}$$

где

$$z_\alpha = z^{k+\alpha/p}, \qquad z_{\bar{t},\alpha} = \frac{z_\alpha - z_{\alpha-1}}{\tau}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Домножая (6.64) скалярно на

$$2\tau z_\alpha^* = 2z_\alpha + (2\tau - 2) z_{\alpha-1} = \tau (z_\alpha + z_{\alpha-1}) - (\tau - 2) \tau z_{\bar{t},\alpha},$$

получим равенства

$$\mu \|z_\alpha\|_A^2 - \mu \|z_{\alpha-1}\|_A^2 + (2 - \tau) \tau \mu \left\|z_{\bar{t},\alpha}\right\|_A^2 +$$

$$+ 2\tau (\chi_\alpha A z_\alpha^*, A z_\alpha^*) = 0, \quad \alpha = 1, 2, ..., p. \tag{6.65}$$

Складывая все уравнения (6.65), получим

$$\mu \|z_p\|_A^2 - \mu \|z_0\|_A^2 + (2-\tau)\,\tau\mu \sum_{\alpha=1}^{p} \|z_{\bar{t},\alpha}\|_A^2 \le 0. \tag{6.66}$$

Легко устанавливается, что

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \|z_{\bar{t},\alpha}\|_A^2 > 0. \tag{6.67}$$

Если это не так, т.е. эта сумма равна нулю, мы имеем

$$z^{k+\alpha/p} = z^k, \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Принимая во внимание (6.62), получим

$$G^{(\alpha)} A z^k = 0, \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

При ограничениях (6.59) последнее равенство будет верно, только если $z_k = 0$, т.е. только при точном решении исходной задачи.

Из (6.66) и (6.67) при $0 < \tau < 2$ получим в исходных обозначениях

$$\|z_{k+1}\|_A < \|z_k\|_A \,. \tag{6.68}$$

Эта оценка гарантирует сходимость итерационного процесса (6.62) в H_A к решению задачи (6.57). ■

Важнейший вопрос об исследовании скорости сходимости, ее зависимости от операторов $G^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ и числового параметра μ каждого конкретного варианта метода агрегирования требует более содержательного анализа. Аналогичное замечание относится также к не затрагиваемой здесь проблеме оптимального выбора итерационного параметра τ или переменных итерационных параметров $\tau_{k+\alpha/p}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

6.4.3. Параллельный вариант

В плане построения вычислительных алгоритмов для современных параллельных компьютеров отдельного внимания заслуживают **асинхронные итерационные методы**. В этом случае приближенное решение рассчитывается на основе отдельных подзадач, которые могут решаться независимо друг от друга. Отметим некоторые имеющиеся возможности в этом направлении исследований.

Определим векторы $\tilde{y}_{k+\alpha/p}$ из уравнений

$$\left(\mu E + A^{(\alpha)}\right) \frac{\tilde{y}_{k+\alpha/p} - y_k}{\tau} +$$

$$+A^{(\alpha)} y_k = \varphi^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{6.69}$$

Для приближения на $k+1$ итерации будем использовать выражение

$$y_{k+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{y}_{k+\alpha/p}. \tag{6.70}$$

Принципиальным отличием алгоритма (6.69), (6.70) от (6.62) является то, что вычисления $\tilde{y}_{k+\alpha/p}$ могут проводиться независимо (асинхронно) друг от друга с использованием только итерационного приближения y_k. Сходимость такого варианта устанавливается при тех же условиях, что и для ранее рассмотренного синхронного варианта итерационного метода кластерного агрегирования.

Теорема 6.8. Итерационный метод кластерного агрегирования (6.58) — (6.61), (6.69), (6.70) сходится в H_A при $0 < \tau < 2$.

Доказательство. Подобно доказательству теоремы 6.7 при сформулированных ограничениях на τ имеем

$$\mu \left\| \tilde{z}_{k+\alpha/p} \right\|_A^2 - \mu \left\| z_k \right\|_A^2 +$$

$$+ (2-\tau)\, \tau\mu \left\| \tilde{z}_{\bar{t},\alpha} \right\|_A^2 + 2\tau \left(G^{(\alpha)} A z_\alpha^*, A z_\alpha^* \right) = 0,$$

где теперь

$$\tau z_\alpha^* = \tilde{z}_{k+\alpha/p} + (\tau - 1)\, z_k,$$

$$\tilde{z}_{k+\alpha/p} = \tilde{y}_{k+\alpha/p} - y, \quad \tilde{z}_{\bar{t},\alpha} = \frac{\tilde{z}_{k+\alpha/p} - z_k}{\tau}.$$

Заметим также, что, хотя бы при одном $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, последнее неравенство строгое. Принимая во внимание, что в силу (6.70)

$$\left\| y_{k+1} \right\|_A^2 \le \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| \tilde{y}_{k+\alpha/p} \right\|_A^2,$$

придем к доказываемой оценке (6.68). ■

Если синхронные варианты метода кластерного агрегирования можно рассматривать как аналоги итерационных процедур типа Зейделя, то асинхронный вариант естественно связать с итерационными методами типа Якоби. За возможность огранизации параллельных вычислений необходимо платить, вообще говоря, более медленной скоростью сходимости. В плане связи итерационных методов с аддитивными схемами заметим, что итерационный метод (6.69), (6.70) является прототипом аддитивно-усредненной схемы многокомпонетного расщепления.

6.4.4. Агрегация неизвестных

Обсудим возможность построения итерационных методов кластерного агрегирования с несколько другой точки зрения. Выше мы рассмотрели некоторые варианты при переходе от уравнения к системе уравнений — агрегация уравнений. Вторая возможность (см. [117]) связывается с разделением самого неизвестного решения — **агрегация неизвестных**. Представим решение уравнения (6.57) в виде

$$y = \sum_{\alpha=1}^{p} G^{(\alpha)} y^{(\alpha)}. \tag{6.71}$$

Подстановка в (6.57) дает

$$\sum_{\alpha=1}^{p} A G^{(\alpha)} y^{(\alpha)} = f. \tag{6.72}$$

Вместо одного неизвестного y в уравнении (6.57) мы имеем сейчас p неизвестных $y^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, ..., p$ в (6.72). Функция y, которая определяется в соответствии с (6.72), интерпретируется как решение исходной задачи (6.57). Ясно, что новая задача (6.72) имеет много решений. Для получения любого их них мы используем итерационный метод.

Приближенное решение $y^{(\alpha)}$ на k-й итерации обозначим $y_k^{(\alpha)}$. Новое приближение находится из системы уравнений

$$\left(\mu E + A G^{(\alpha)}\right) \frac{y_{k+1}^{(\alpha)} - y_k^{(\alpha)}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p} A G_\beta y_k^{(\beta)} = f. \tag{6.73}$$

Этот итерационный процесс кластерного агрегирования неизвестных очень близок по организации вычислений к итерационному методу кластерного агрегирования уравнений в варианте (6.69), (6.70).

Теорема 6.9. Итерационный метод кластерного агрегирования (6.59), (6.73) сходится в H_A при любых $0 < \tau < 2/p$.

Доказательство. Наметим основные моменты доказательства этого утверждения. Рассматривая задачу для погрешности, из (6.73) получим

$$\left(\mu E + \tilde{A}^{(\alpha)}\right) \frac{v_{k+1}^{(\alpha)} - v_k^{(\alpha)}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p} \tilde{A}^{(\beta)} v_k^{(\beta)} = 0, \tag{6.74}$$

где

$$v_k^{(\alpha)} = A^{-1/2}\left(y_k^{(\alpha)} - y^{(\alpha)}\right), \quad \tilde{A}^{(\alpha)} = A^{1/2} G^{(\alpha)} A^{1/2}.$$

Умножая уравнение (6.74) на $\tilde{A}^{(\alpha)}$, перепишем его в виде

$$\left(\mu \tilde{A}^{(\alpha)} + \left(\tilde{A}^{(\alpha)}\right)^2\right) \frac{v_{k+1}^{(\alpha)} - v_k^{(\alpha)}}{\tau} +$$

$$+ \frac{1}{2} \tilde{A}^{(\alpha)} \sum_{\beta=1}^{p} \tilde{A}^{(\beta)} \left(v_{k+1}^{(\beta)} + v_k^{(\beta)}\right) -$$

$$- \frac{1}{2} \tilde{A}^{(\alpha)} \sum_{\beta=1}^{p} \tilde{A}^{(\beta)} \left(v_{k+1}^{(\beta)} - v_k^{(\beta)}\right) = 0.$$

Домножая каждое уравнение скалярно на

$$2\left(v_{k+1}^{(\alpha)} - v_k^{(\alpha)}\right) = 2\tau v_{t,\alpha}$$

и суммируя их, получим

$$2\mu \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha}, v_{t,\alpha}\right) +$$

$$+ 2 \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha}, \tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha}\right) - \tau \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha}, \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha}\right) +$$

$$+ \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}^{(\alpha)} v_{k+1}^{(\alpha)}, \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}^{(\alpha)} v_{k+1}^{(\alpha)}\right) -$$

$$- \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}^{(\alpha)} v_k^{(\alpha)}, \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}^{(\alpha)} v_k^{(\alpha)}\right) = 0. \tag{6.75}$$

Подобно (6.71), введем

$$y_k = \sum_{\alpha=1}^{p} G^{(\alpha)} y_k^{(\alpha)}$$

и для последних слагаемых в (6.75) получим

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}^{(\alpha)} v_k^{(\alpha)} = A^{1/2} (y_k - y).$$

Принимая во внимание неравенство

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha} \right)^2 \leq p \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha} \right)^2,$$

из (6.75) получим неравенство

$$2\mu \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha}, v_{t,\alpha} \right) + (2 - p\tau) \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha}, \tilde{A}^{(\alpha)} v_{t,\alpha} \right) +$$

$$+ (A (y_{k+1} - y), (y_{k+1} - y)) - (A (y_k - y), (y_k - y)) \leq 0.$$

Эта оценка, подобно доказательству теоремы 6.9, дает доказательство сходимости итерационного процесса (6.73). ■

Итерационный процесс кластерного агрегирования тесно связан с векторными аддитивными схемами многокомпонентного расщепления при приближенном решении задачи Коши для уравнения

$$\mu \frac{dy}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} y = \varphi, \quad t > 0,$$

где с учетом (6.72) положим

$$A^{(\alpha)} = AG^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

В этой связи отметим возможность использования итерационных методов, которые основаны на последовательной организации вычислений

$$\left(\mu E + AG^{(\alpha)} \right) \frac{y_{k+1}^{(\alpha)} - y_k^{(\alpha)}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} G^{(\beta)} y_k^{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha}^{p} G^{(\beta)} y_k^{(\beta)} = f.$$

Подчеркнем также возможность использования такого класса итерационных методов с ускорением по методу сопряженных градиентов.

Глава 7

Расщепление по пространственным переменным

Основная идея аддитивных разностных схем связана с переходом от решения исходной задачи к решению цепочки более простых задач. При численном решении многомерных нестационарных задач математической физики в качестве наименее сложных выступают одномерные задачи. В этом случае речь идет о расщеплении оператора задачи на сумму одномерных операторов — расщепление по пространственным переменным. На примере задач математической физики иллюстрируются возможности построения и исследования аддитивных разностных схем. Рассмотрены локально-одномерные схемы для параболического уравнения, для уравнения переноса и гиперболического уравнения второго порядка. Такой традиционный материал дополнен обсуждением проблем численного решения некорректных эволюционных задач. В качестве примера взята начально-краевая задача для параболического уравнения второго порядка с обратным временем.

7.1. Краевая задача для параболического уравнения

Обсуждаются проблемы использования аддитивных схем на простейшем примере краевой задачи для параболического уравнения в прямоугольной расчетной области. Исследование базируется на рассмотрении основных свойств разностных операторов и использовании ранее полученных общих результатов по устойчивости и сходимости.

7.1.1. Дифференциальная задача

Ограничимся рассмотрением двухмерной задачи в прямоугольной расчетной области с использованием равномерных сеток. Пере-

ход к более общим трехмерным задачам не вызывает принципиальных сложностей. Это же замечание относится к возможностям применения неравномерных прямоугольных сеток. В некоторых важных случаях удается провести аналогичные исследования и для нерегулярных расчетных областей. Мы не ставим задачу проведения максимально полного анализа аддитивных разностных схем. Приведенные ниже примеры носят иллюстративный характер и свидетельствуют о необходимости освоения общей методики построения аддитивных схем, закрепления навыков использования общих результатов теории для проведения конкретных исследований.

В прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2)\,,\ 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$$

решается параболическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k\,(\mathbf{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = f\,(\mathbf{x}, t)\,, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{7.1}$$

Это уравнение дополняется однородными граничными условиями Дирихле

$$u\,(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0. \tag{7.2}$$

Кроме того, задается начальное условие

$$u\,(\mathbf{x}, 0) = u^0\,(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{7.3}$$

Будем рассматривать множество функций $u(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих граничным условиям (7.2). Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, w) = \int\limits_{\Omega} u\,(\mathbf{x})\,w\,(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

для произвольных функций $u(\mathbf{x})$ и $w(\mathbf{x})$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$, и нормой

$$\|u\| \equiv (u, u)^{1/2} = \left(\int\limits_{\Omega} u^2\,(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right)^{1/2}.$$

Определим оператор задачи (7.1) — (7.3) выражением

$$\mathcal{D}u = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k\,(\mathbf{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right). \tag{7.4}$$

Он самосопряжен в $\mathcal{H}$ на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (7.2)

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^*. \tag{7.5}$$

Действительно, принимая во внимание формулу Грина, имеем

$$(\mathcal{D}u, w) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{D}u(\mathbf{x})\, w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^{2} \int\limits_{\Omega} k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} d\mathbf{x} =$$

$$= (u, \mathcal{D}^* w).$$

Отметим также, что рассматриваемый оператор при естественных ограничениях $k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0$ положительно определен, а именно верна оценка

$$\mathcal{D} \geq \kappa \lambda_0 E, \tag{7.6}$$

где $\lambda_0 > 0$ — минимальное собственное значение оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле. Для прямоугольника Ω имеем

$$\lambda_0 = \pi^2 \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right).$$

При построении дискретного аналога естественно ориентироваться на аппроксимации, которые сохраняют отмеченные свойства дифференциального оператора.

Приведем простейшую априорную оценку для решения задачи (7.1) — (7.3). Домножая скалярно уравнение (7.1) на $u(\mathbf{x}, t)$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + (\mathcal{D}u, u) = (f, u). \tag{7.7}$$

С привлечением неравенства

$$(f, u) \leq (\mathcal{D}u, u) + \frac{1}{4} \|f\|^2_{\mathcal{D}^{-1}}$$

из (7.7) получим

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|^2_{\mathcal{D}^{-1}}.$$

На основе леммы Гронуолла получим

$$\|u(\mathbf{x}, t)\|^2 \leq \|u^0\|^2 + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \|f(\theta)\|^2_{\mathcal{D}^{-1}} d\theta. \tag{7.8}$$

Оценка (7.8) обеспечивают непрерывность решения задачи (7.1) — — (7.3) по начальным данным и правой части.

Для краевых задач для параболических уравнений второго порядка, как и для краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка, особое внимание уделяется принципу максимума. Нетрудно показать, например, что если в задаче Коши (7.1) — (7.3) правая часть $f(\mathbf{x},t) > 0$ $(f(\mathbf{x},t) < 0)$ и начальное условие $u_0(\mathbf{x}) \geq 0$ $(u_0(\mathbf{x}) \leq 0)$, тогда $u(\mathbf{x},0) \geq 0$ $(u(\mathbf{x},0) \leq 0)$ для всех $\mathbf{x} \in \Omega$ и $t > 0$.

На основе принципа максимума доказываются оценки устойчивости в банаховых пространствах. Типичной является оценка в $\mathcal{L}_\infty \Omega)$

$$\|u(\mathbf{x},t)\|_\infty \leq \|u(\mathbf{x},0)\|_\infty + \int\limits_0^t \|f(\mathbf{x},\theta)\|_\infty d\theta, \tag{7.9}$$

где

$$\|w\|_\infty = \max_{\mathbf{x}\in\Omega} |w(\mathbf{x})|.$$

При исследовании разностных схем необходимо ориентироваться на сеточные аналоги априорных оценок типа (7.8), (7.9).

7.1.2. Дифференциально-разностная задача

Будем использовать равномерную по каждому направлению сетку. Для сеток по отдельным направлениям x_α, $\alpha = 1,2$ используем обозначения

$$\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0,1,\ldots,N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}.$$

Для сеточных функций, обращающихся в нуль на множестве граничных узлов $\partial\omega$ $(\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega)$, определим гильбертово пространство $H = L_2(\omega)$, в котором скалярное произведение и норма задаются следующим образом:

$$(y,w) \equiv \sum_{\mathbf{x}\in\omega} y(\mathbf{x})\, w(\mathbf{x})\, h_1 h_2, \quad \|y\| \equiv (y,y)^{1/2}.$$

На введенной сетке аппроксимируем оператор $\mathcal{D}$ при обычных предположениях $k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0$. Двухмерный разностный оператор представим в виде суммы одномерных

$$D = \sum_{\alpha=1}^{2} D^{(\alpha)}, \quad D^{(\alpha)} y = -\left(a^{(\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha}, \ \alpha = 1,2, \ \mathbf{x} \in \omega. \tag{7.10}$$

Для гладких коэффициентов диффузии можно положить

$$a^{(1)}(\mathbf{x}) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2), \quad a^{(2)}(\mathbf{x}) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2).$$

В общем случае необходимо ориентироваться на применение интегро-интерполяционного метода, когда для коэффициентов используются выражения

$$a^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_2} \int\limits_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2} \left(\frac{1}{h_1} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1} \frac{ds_1}{k(\mathbf{s})} \right)^{-1} ds_2,$$

$$a^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_1} \int\limits_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1} \left(\frac{1}{h_2} \int\limits_{x_2-h_2}^{x_2} \frac{ds_2}{k(\mathbf{s})} \right)^{-1} ds_1.$$

В этом случае дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ аппроксимируется разностным оператором D с погрешностью $O(|h|^2)$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

Одномерные разностные операторы $D^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ являются самосопряженными и положительными в H. Более конкретно (см. [63])

$$D^{(\alpha)} = \left(D^{(\alpha)}\right)^* \geq \delta_\alpha E, \quad D^{(\alpha)} \leq \Delta_\alpha E, \tag{7.11}$$

где

$$\delta_\alpha = \frac{8\kappa}{l_\alpha^2}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4\bar{\kappa}}{h_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

причем $\kappa \leq k(\mathbf{x}) \leq \bar{\kappa}$.

После дискретизации по пространственным переменным от задачи (7.1) — (7.3) придем к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} + Ay = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad t > 0, \tag{7.12}$$

$$y(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{7.13}$$

Для оператора A имеет место аддитивное представление

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* > 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{7.14}$$

Принимая во внимание (7.10), примем

$$A^{(\alpha)} = D^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{7.15}$$

Для задачи (7.12), (7.13) при двухкомпонентном расщеплении (7.14), (7.15) можно использовать все рассмотренные выше классы аддитивных разностных схем. Имея в виду обобщение результатов на более общие трехмерные задачи, мы будем ориентироваться на безусловно устойчивые аддитивные схемы многокомпонентного расщепления.

7.1.3. Локально-одномерная схема

Для приближенного решения задачи (7.12) — (7.15) стандартная схема покомпонентного расщепления (в нашем случае двухкомпонентного расщепления) принимает вид

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} + A^{(1)}\left(\sigma_1 y_{n+1/2} + (1-\sigma_1)\, y_n\right) = \varphi_n^{(1)}, \tag{7.16}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{\tau} + A^{(2)}\left(\sigma_2 y_{n+1} + (1-\sigma_2)\, y_{n+1/2}\right) = \varphi_n^{(2)} \tag{7.17}$$

при некотором расщеплении правой части

$$\varphi_n = f(\mathbf{x}, t_n) = \varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Для исследования сходимости приближенного решения к точному решению задачи (7.1) — (7.3) рассмотрим соответствующую задачу для погрешности. Положим $z_n = y_n - u_n$ и пусть $z_{n+1/2} = y_{n+1/2} - u_{n+1/2}$, что при подстановке в (7.16), (7.17) дает

$$\frac{z_{n+1/2} - z_n}{\tau} + A^{(1)}\left(\sigma_1 z_{n+1/2} + (1-\sigma_1)\, z_n\right) = \psi_n^{(1)}, \tag{7.18}$$

$$\frac{z_{n+1} - z_{n+1/2}}{\tau} + A^{(2)}\left(\sigma_2 z_{n+1} + (1-\sigma_2)\, z_{n+1/2}\right) = \psi_n^{(2)}. \tag{7.19}$$

Для погрешности аппроксимации отдельных уравнений имеем

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1/2} - u_n}{\tau} - \\ - A^{(1)}\left(\sigma_1 u_{n+1/2} + (1-\sigma_1)\, u_n\right) + \varphi_n^{(1)}, \tag{7.20}$$

$$\psi_n^{(2)} = -\frac{u_{n+1} - u_{n+1/2}}{\tau} - \\ - A^{(2)}\left(\sigma_2 u_{n+1} + (1-\sigma_2)\, u_{n+1/2}\right) + \varphi_n^{(2)}. \tag{7.21}$$

Будем использовать представление погрешности аппроксимации в виде

$$\psi_n^{(\alpha)} = \overset{\circ}{\psi}{}_n^{(\alpha)} + \overset{*}{\psi}{}_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \overset{\circ}{\psi}{}_n^{(1)} + \overset{\circ}{\psi}{}_n^{(2)} = 0. \tag{7.22}$$

Принимая во внимание (7.20), (7.21), на решениях задачи (7.1) — — (7.3) положим

$$\overset{\circ}{\psi}{}_n^{(1)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{A}^{(1)}u + f^{(1)}(\mathbf{x}, t_n), \tag{7.23}$$

$$\overset{\circ}{\psi}{}_n^{(2)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{A}^{(2)}u + f^{(2)}(\mathbf{x}, t_n), \tag{7.24}$$

где

$$f(\mathbf{x}, t_n) = f^{(1)}(\mathbf{x}, t_n) + f^{(2)}(\mathbf{x}, t_n).$$

Для оставшихся частей погрешности из (7.20), (7.21) и (7.23), (7.24) получим

$$\overset{*}{\psi}{}_n^{(1)} = O\left(\tau + |h|^2\right), \quad \overset{*}{\psi}{}_n^{(2)} = O\left(\tau + |h|^2\right). \tag{7.25}$$

При точном задании начального условия для (7.18), (7.19), (7.22) в силу теоремы 3.2 при σ_α, $\alpha = 1, 2$ имеет место оценка

$$\|z_{n+1}\| \le \sum_{k=0}^{n} \tau \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\|\overset{*}{\psi}{}_k^{(\alpha)}\| + \tau \|A^{(\alpha)} \sum_{\beta=\alpha}^{2} \overset{\circ}{\psi}{}_k^{(\alpha)}\| \right).$$

Подстановка (7.23) — (7.25) обеспечивает сходимость локально-одномерной схемы (7.16), (7.17) с первым порядком по времени и вторым по пространству.

Необходимо отметить, что для рассматриваемого двухкомпонентного расщепления при $\sigma_\alpha = 0,5$, $\alpha = 1, 2$ можно установить (см. [47, 61]) более сильный результат о сходимости разностной схемы со вторым порядком по времени.

7.1.4. Сходимость схем в банаховых пространствах

Исследование схем суммарной аппроксимации базируется на соответствующей оценке устойчивости для задачи с отдельным операторным слагаемым. До сих пор мы ориентировались на соответствующие оценки устойчивости в сеточных гильбертовых пространствах, а именно в $H = L_2(\omega)$. Для параболической задачи (7.1) — (7.3) можно получать оценки устойчивости разностного решения в $L_\infty(\omega)$.

При ориентации на получение безусловно сходящихся монотонных схем ограничимся чисто неявной локально-одномерной разностной схемой

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} + A^{(1)} y_{n+1/2} = \varphi_n^{(1)}, \tag{7.26}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{\tau} + A^{(2)} y_{n+1} = \varphi_n^{(2)}. \tag{7.27}$$

Для разностного решения справедлива априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_\infty \le \|u^0\|_\infty + \sum_{k=0}^{n} \tau \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\|\overset{*}{\varphi}{}_k^{(\alpha)}\|_\infty + \tau \|A^{(\alpha)} \sum_{\beta=\alpha}^{2} \overset{\circ}{\varphi}{}_k^{(\alpha)}\|_\infty \right).$$

Эта оценка базируется на послойной оценке устойчивости в $L_\infty(\omega)$ для каждой отдельной подзадачи.

На основе этой оценки устанавливается безусловная сходимость локально-одномерной разностной схемы (7.26), (7.27) с первым порядком по времени и вторым по пространству ($O(\tau + |h|^2)$) в $L_\infty(\omega)$.

7.2. Аддитивные схемы для уравнения переноса

При численном решении многомерных нестационарных задач механики сплошной среды, задач газовой динамики в качестве базового выступает нестационарное уравнение переноса, например обычное уравнение неразрывности. Проблемы построения дискретных аналогов для соответствующих краевых задач хорошо известны. Здесь (см. [10, 56]) рассматриваются основные разностные схемы для приближенного решения модельных краевых задач для многомерного нестационарного уравнения переноса. Выделены три основные формы записи конвективных (переносных) слагаемых: дивергентная, недивергентная и симметричная (полусумма дивергентной и недивергентной).

7.2.1. Уравнение переноса

Нестационарные задачи переноса будем записывать как эволюционные операторные уравнения в соответствующих пространствах. Выделим класс модельных нестационарных задач для уравнения переноса с переменными коэффициентами конвективного переноса. Имея в

виду прикладные задачи, естественно считать их переменными как по пространственным переменным, так и по времени.

В прямоугольнике Ω рассматривается нестационарное **уравнение переноса** с конвективными слагаемыми в дивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(v_\alpha \left(\mathbf{x}, t \right) u \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{7.28}$$

В таком виде записывается обычное уравнение неразрывности, когда под u понимается плотность, а вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ определяет локальную скорость сплошной среды. Уравнение (7.28) дополняется начальным условием

$$u \left(\mathbf{x}, 0 \right) = u^0 \left(\mathbf{x} \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{7.29}$$

В зависимости от поля скоростей для уравнения (7.28) ставятся соответствующие граничные условия. Они задаются на той части границы, на которой поток входит в область. Для того чтобы не отвлекаться на технические детали, порождаемые граничными условиями, будем рассматривать начально-краевые задачи с условиями непротекания для скорости

$$\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{7.30}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к границе расчетной области. При ограничениях (7.30) на поле скоростей нет необходимости формулировать какие-либо граничные условия для однозначного определения решения задачи (7.28), (7.29).

Нестационарную задачу для уравнения переноса запишем в виде дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{C} u = 0, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C} \left(t \right), \quad t > 0. \tag{7.31}$$

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения (7.31), когда

$$u \left(0 \right) = u^0. \tag{7.32}$$

Для оператора конвективного переноса в недивергентной форме в соответствии с (7.28) положим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$, где

$$\mathcal{C}_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(v_\alpha \left(\mathbf{x}, t \right) u \right). \tag{7.33}$$

Вторым важным примером является нестационарное уравнение переноса в недивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{7.34}$$

При записи задачи переноса (7.29), (7.34) в виде (7.31), (7.32) имеем $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$, где теперь

$$\mathcal{C}_1 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}. \tag{7.35}$$

Исходное уравнение (7.28) может быть записано с оператором конвективного переноса в недивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + u \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0.$$

Для несжимаемой среды ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) имеем $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, и уравнение (7.28) совпадает с (7.34).

В ряде случаев удобнее использовать уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(v_\alpha(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x}, t)\, u) \right) = 0, \tag{7.36}$$

когда оператор конвективного переноса записан в симметричной форме — в виде полусуммы конвективного переноса в недивергентной и дивергентной формах. При записи в виде (7.31) получим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, где

$$\mathcal{C}_0 u = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(v_\alpha(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x}, t)\, u) \right). \tag{7.37}$$

К такой записи уравнения переноса (7.28) можно прийти не только в случае несжимаемой среды. Введем новую неизвестную $w = \sqrt{u}$, для которой из (7.28) непосредственно получим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(v_\alpha(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} w + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x}, t)\, w) \right) = 0.$$

В частном случае уравнения неразрывности в качестве неизвестной теперь выступает корень квадратный из плотности.

На основе (7.33), (7.35), (7.37) получим следующие представления для операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах:

$$\mathcal{C}_1 u = \mathcal{C}_0 u - \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\mathbf{v}\ u, \quad \mathcal{C}_2 u = \mathcal{C}_0 u + \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\mathbf{v}\ u \tag{7.38}$$

через оператор конвективного переноса в симметричной форме.

7.2.2. Свойства решений дифференциальной задачи

Решение дискретной задачи должно наследовать основные свойства дифференциальной задачи. Этого можно достичь, в частности, когда сеточные операторы будут иметь те же основные свойства, что и дифференциальные операторы.

Пусть $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой

$$(u, w) = \int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x})\, w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \|u\| \equiv (u, u)^{1/2}$$

для произвольных функций $u(\mathbf{x})$ и $w(\mathbf{x})$.

Операторы конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах при ограничениях (7.30) на поле скоростей сопряжены друг с другом с точностью до знака, а оператор конвективного переноса в симметричной форме является кососимметричным, т.е.

$$\mathcal{C}_1 = -\mathcal{C}_2^*, \quad \mathcal{C}_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) = -\mathcal{C}_0^*. \tag{7.39}$$

Из равенства

$$\int\limits_{\Omega} (\mathcal{C}_1 u w + u \mathcal{C}_2 w)\, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}\,(\mathbf{v} u w)\, d\mathbf{x} = 0,$$

которое следует из (7.30), получим доказываемое свойство

$$(\mathcal{C}_1 u, w) = (u, \mathcal{C}_1^* w) = -(u, \mathcal{C}_2 w).$$

В силу (7.38) из (7.39) имеет место оценка энергии оператора конвективного переноса

$$|(\mathcal{C}_\alpha u, u)| \le \mathcal{M}_\alpha \|u\|^2 \tag{7.40}$$

с постоянной

$$\mathcal{M}_\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha = 0, \\ \dfrac{1}{2} \max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{v}|, & \alpha = 1, 2. \end{cases} \tag{7.41}$$

Приведем основную априорную оценку для нестационарной задачи (7.31), (7.32), обеспечивающую устойчивость по начальным данным. С учетом (7.40), (7.41), домножая скалярно уравнение на u, получим

$$||u|| \frac{d||u||}{dt} = -(\mathcal{C}u, u) \leq \mathcal{M}_\alpha ||u||^2.$$

Отсюда непосредственно вытекает оценка

$$||u(\mathbf{x}, t)|| \leq \exp(\mathcal{M}_\alpha t) ||u_0(\mathbf{x})||, \quad \alpha = 0, 1, 2. \tag{7.42}$$

Тем самым рост нормы решения непосредственно связывается с масштабом сжимаемости среды (с постоянной $\mathcal{M}_\alpha, \alpha = 0, 1, 2$).

Отметим, что для уравнения переноса с конвективным слагаемым в симметричной форме (7.36) имеет место равенство

$$\int\limits_\Omega u^2(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega u_0^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{7.43}$$

Естественно стремиться к тому, чтобы аналогичный инвариант (закон сохранения) имел место и для дискретного аналога задачи (7.29), (7.36). О таких схемах говорят как о консервативных [47, 64].

Для уравнения переноса в дивергентной форме при ограничениях (7.30) на поле скоростей интегрированием по всей области Ω получим равенство

$$\int\limits_\Omega u(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega u_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{7.44}$$

Для несжимаемой среды выполнены два свойства консервативности: (7.43) и (7.44).

Для уравнений переноса в дивергентной и недивергентной формах (7.28), (7.34) часто не очень удобно ориентироваться на оценки устойчивости (7.42), так как рост нормы решения связывается с сжимаемостью среды. Прежде чем получать другие оценки, отметим важное свойство монотонности для уравнений переноса, которое связываем с выполнением принципа максимума.

Начнем с рассмотрения задачи Коши (7.28), (7.29) для уравнения переноса в дивергентной форме. Покажем прежде всего, что при

неотрицательных начальных условиях неотрицательным будем решение на любой другой момент времени $t > 0$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что начиная с момента времени $t = t^*$ в части области Ω функция $u(x,t) < 0$. Выберем достаточно малое θ и проинтегрируем уравнение (7.28) по подобласти

$$Q^* = \{(\mathbf{x},t) \quad | \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t^* \leq t \leq t^* + \theta, \quad u(x,t) < 0\},$$

что дает

$$\int\limits_{Q^*} \frac{\partial u}{\partial t} d\mathbf{x}dt + \int\limits_{Q^*} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha(\mathbf{x},t)\, u)\, d\mathbf{x}dt = 0.$$

Такое равенство невозможно, так как второй интеграл равен нулю, а первый отрицателен ($u(\mathbf{x}, t^* + \theta) < 0$ на соответствующей части границы области Q^*).

На основании установленного свойства монотонности (выполнимости принципа максимума) выводится оценка устойчивости решения задачи (7.28), (7.29) по начальным данным в пространстве $L_1(\Omega)$, норма в котором есть

$$||g||_1 = \int\limits_{\Omega} |g(\mathbf{x})|d\mathbf{x}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha(\mathbf{x},t)\, w) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$w(\mathbf{x},0) = |u^0(\mathbf{x})|, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

В силу принципа максимума имеем $|u(\mathbf{x},t)| \leq w(\mathbf{x},t)$, т.е. функция $w(\mathbf{x},t)$ является мажорирующей для решения задачи (7.28), (7.29). Принимая во внимание равенство (см. (7.44)) $||w(\mathbf{x},t)||_1 = ||u^0(\mathbf{x})||_1$, получим

$$||u(\mathbf{x},t)||_1 \leq ||u_0(\mathbf{x})||_1. \tag{7.45}$$

Аналогичные свойства решения задачи Коши (7.29), (7.34) для уравнения переноса в недивергентном виде получим, опираясь на установленные свойства для задачи (7.28), (7.29). Применяемый методологический прием удобно использовать и при изучении сеточных задач.

Рассмотрим вспомогательную задачу для сопряженного к (7.34) уравнения

$$-\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(v_\alpha\left(\mathbf{x},t\right)w\right)=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega,\quad T>t>0 \tag{7.46}$$

с начальным условием

$$w\left(\mathbf{x},T\right)=w_0\left(\mathbf{x}\right),\quad \mathbf{x}\in\Omega. \tag{7.47}$$

Домножив уравнение (7.46) на решение задачи (7.29), (7.34) $u(\mathbf{x},t)$ и проинтегрировав по $\mathbf{x}\in\Omega$ и $0<t<T$, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} u\left(\mathbf{x},T\right)w\left(\mathbf{x},T\right)d\mathbf{x}=\int\limits_{\Omega} u\left(\mathbf{x},0\right)w\left(\mathbf{x},0\right)d\mathbf{x}.$$

Конкретизируем начальное условие (7.47), положив $w_0(\mathbf{x})=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$, где $\delta(\mathbf{x})$ — δ-функция. Тем самым $w(\mathbf{x},t)$ есть функция источника для уравнения переноса в дивергентной форме (7.46). Решение задачи (7.29), (7.34) представим в виде

$$u\left(\mathbf{x}^*,T\right)=\int\limits_{\Omega} u\left(\mathbf{x},0\right)w\left(\mathbf{x},0\right)d\mathbf{x}. \tag{7.48}$$

На основании принципа максимума получим

$$w\left(\mathbf{x},0\right)\geq 0,\quad \int\limits_{\Omega} w\left(\mathbf{x},0\right)d\mathbf{x}=1$$

для решения задачи (7.46), (7.47). Используя (7.48), с учетом произвольности $T>0$ можем сделать вывод о справедливости принципа максимума и для решения задачи (7.29), (7.34): $u(\mathbf{x},t)\geq 0$, если $u_0(\mathbf{x})\geq 0$; кроме того, верна априорная оценка в $L_\infty(\Omega)$

$$\|u\left(\mathbf{x},t\right)\|_\infty\leq\|u_0\left(\mathbf{x}\right)\|_\infty, \tag{7.49}$$

где, напомним,

$$\|g\|_\infty=\max_{\mathbf{x}\in\Omega}|g\left(\mathbf{x}\right)|.$$

Тем самым при исследовании устойчивости разностных схем для уравнения переноса в симметричной форме (7.36) естественно ориентироваться на безусловную оценку устойчивости по начальным данным (см. (7.42))

$$\|u\left(\mathbf{x},t\right)\|\leq\|u_0\left(\mathbf{x}\right)\| \tag{7.50}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Для уравнения переноса в дивергентной форме (7.28) типичной является оценка (7.45) в банаховом пространстве $L_1(\Omega)$, а для уравнения переноса в недивергентной форме (7.34) — оценка (7.49) в $L_\infty(\Omega)$.

Среди важнейших качественных свойств рассматриваемых задач выделяем консервативность и монотонность. Для уравнения переноса в дивергентной форме имеет место свойство консервативности (7.44) — L_1-консервативность. Аналогичное свойство (L_2-консервативность) выполняется и для уравнения переноса в симметричной форме — (7.43). Для уравнений в дивергентной и недивергентной формах справедлив принцип максимума.

Особое внимание должно быть уделено случаю несжимаемой ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) среды, когда рассматриваемые формы уравнения переноса эквивалентны. Необходимо только учитывать, что эта эквивалентность имеет место на дифференциальном уровне. При переходе к дискретным аналогам проблема такой эквивалентности должна рассматриваться специально.

7.2.3. Разностные операторы конвективного переноса

В прямоугольнике Ω введем равномерную для простоты по обеим переменным разностную сетку с шагами $h_\alpha, \alpha = 1, 2$. Для сеток по отдельным направлениям x_α, $\alpha = 1, 2$ используем обозначения

$$\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

где

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$$

есть множество внутренних узлов. Для сетки в Ω положим

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), \; x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\},$$

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2.$$

На множестве сеточных функций, заданных на $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$, определим гильбертово пространство $H = L_2(\omega)$, в котором скалярное произведение и норма задаются следующим образом:

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x} \in \bar{\omega}} y(\mathbf{x})\, w(\mathbf{x})\, \hbar_1(x_1)\, \hbar_2(x_2), \quad \|y\| = (y, y)^{1/2},$$

где

$$\hbar_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} h_\alpha, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0,5h_\alpha, & x_\alpha = 0,\ x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь разностные аналоги дифференциальных операторов конвективного переноса, записанных в различных формах. Оператору в недивергентной форме (7.35) поставим с учетом ограничений (7.30) на поле скоростей в соответствие двухмерный разностный оператор конвективного переноса

$$C_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_1^{(\alpha)}, \tag{7.51}$$

где

$$C_1^{(\alpha)} y = \begin{cases} b^{(\alpha)} y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0, & x_\alpha = 0,\ x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

В простейшем случае достаточно гладких коэффициентов конвективного переноса положим $b^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = v_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$. Очевидно, что на классе функций $C^{(3)}(\Omega)$ разностный оператор C_1 аппроксимирует дифференциальный оператор конвективного переноса в недивергентной форме (7.35) со вторым порядком по пространственным переменным — погрешность аппроксимации есть $O(|h|^2)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

Несколько сложнее обстоит дело с аппроксимацией оператора конвективного переноса в дивергентной форме (7.33). Во внутренних узлах можем использовать центральноразностные аппроксимации

$$C_2^{(\alpha)} y = \left(b^{(\alpha)} y\right)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, \quad h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Для граничных узлов приходится ограничиваться аппроксимациями направленными разностями, например,

$$C_2^{(\alpha)} y = \left(b^{(\alpha)} y\right)_{x_\alpha}, \quad x_\alpha = 0,$$

$$C_2^{(\alpha)} y = \left(b^{(\alpha)} y\right)_{\bar{x}_\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

В общем случае можем рассчитывать только на первый порядок погрешности аппроксимации. Ситуацию во многом спасает локальность потери второго порядка аппроксимации, специальное дивергентное представление погрешности аппроксимации. Тем самым воспользуемся разностным оператором

$$C_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_2^{(\alpha)}, \tag{7.52}$$

в котором

$$C_2^{(\alpha)}y = \begin{cases} \left(b^{(\alpha)}y\right)_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \left(b^{(\alpha)}y\right)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \quad \alpha = 1,2. \\ \left(b^{(\alpha)}y\right)_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases}$$

Он аппроксимирует оператор конвективного переноса в дивергентной форме C_2.

При аппроксимации двухмерного оператора конвективного переноса в симметричной форме будем рассматривать представление $C_0 = 0,5(C_1 + C_2)$, так что

$$C_0 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_0^{(\alpha)}, \tag{7.53}$$

где

$$C_0^{(\alpha)}y = \begin{cases} 0,5\left(b^{(\alpha)}y\right)_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ 0,5\left(b^{(\alpha)}y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + \left(b^{(\alpha)}y\right)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\right), & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0,5\left(b^{(\alpha)}y\right)_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

Разностные операторы C_α, $\alpha = 0,1,2$ наследуют такие основные свойства сопряженности дифференциальных операторов конвективного переноса (см. (7.39)):

$$C_1^* = -C_2, \quad C_0^* = -C_0 \tag{7.54}$$

в пространстве сеточных функций H. Доказательство проводится на основе рассмотрения соответствующих одномерных операторов. Прямыми выкладками убеждаемся, что на классе сеточных функций (см. условие (7.30))

$$b^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = 0, \quad x_\alpha = 0, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1,2$$

имеют место свойства (7.54) и для одномерных операторов

$$\left(C_1^{(\alpha)}y, w\right) = -\left(y, C_2^{(\alpha)}w\right), \quad \left(C_0^{(\alpha)}y, y\right) = 0, \quad \alpha = 1,2.$$

Рассмотрим сеточный аналог оценки (7.40) энергии оператора конвективного переноса. Для указанных операторов справедливо неравенство

$$|(C_\alpha y, y)| \le M_\alpha \|y\|^2, \quad \alpha = 0,1,2 \tag{7.55}$$

с постоянными M_α, $\alpha = 0, 1, 2$, не зависящими от шагов сетки. В случае операторов (7.51), (7.52) получим постоянную, которая зависит от первых производных коэффициентов конвективного переноса.

Для дифференциальных операторов конвективного переноса с учетом (7.38) имеем

$$(\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_1)\, u = (\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_0)\, u = \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{v}\ u.$$

К сожалению, при выбранных аппроксимациях операторов конвективного переноса и при обычных аппроксимациях $\operatorname{div} \mathbf{v}$ на разностном уровне подобного соотношения нет. В силу этого для несжимаемой среды нет эквивалентности различных аппроксимаций операторов конвективного переноса. Постоянные M_α, $\alpha = 1, 2$ в неравенстве (7.55) не согласованы с постоянными (7.41) в неравенстве (7.40). В частности, для внутренних узлов получим

$$(C_1 - C_0)\, y = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} b^{(\alpha)}_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\ y + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} h_\alpha \left(y_{x_\alpha} b^{(\alpha)}_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha} b^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha} \right).$$

Последнее слагаемое в правой части и определяет меру рассогласованности используемых аппроксимаций.

В оценке (7.55) $M_0 = 0$, а для M_α, $\alpha = 1, 2$ имеем

$$M_\alpha \le \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{2} \max_{x_\beta \in \omega_\beta} \{ |b^{(\alpha)}_{x_\beta}|,\ |b^{(\alpha)}_{\bar{x}_\beta}| \}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{7.56}$$

Тем самым, хотя эти постоянные и не зависят от сеточных параметров, но они существенно грубее (см. (7.41)), чем в оценке (7.40). И с этой точки зрения простейшие аппроксимации конвективного переноса (7.51) — (7.53) нельзя признать удачными.

Рассматриваемыми свойствами сопряженности обладают двухмерные операторы конвективного переноса, которые основаны на использовании аппроксимаций с заданием коэффициентов $v_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\alpha = 1, 2$ на сдвинутых на полшага сетках в соответствующих направлениях. Такие сетки традиционно широко используются в вычислительной гидродинамике.

Будем относить коэффициент $v_1(\mathbf{x}, t)$ конвективного переноса по переменной x_1 к узлам сетки, сдвинутой по этой переменной на полшага, сетка для коэффициента $v_2(\mathbf{x}, t)$ сдвигается по x_2 на $0,5 h_2$ соответственно.

Разностный оператор конвективного переноса в недивергентной форме определим следующим образом:

$$C_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_1^{(\alpha)}, \tag{7.57}$$

где

$$C_1^{(1)} y = \begin{cases} b^{(1)}(x_1 + 0,5h_1, x_2)\, y_{x_1}, & x_1 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(b^{(1)}(x_1 - 0,5h_1, x_2)\, y_{\bar{x}_1} + b^{(1)}(x_1 + 0,5h_1, x_2)\, y_{x_1}\right), \\ \quad h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1, \\ b^{(1)}(x_1 - 0,5h_1, x_2)\, y_{\bar{x}_1}, & x_1 = l_1; \end{cases}$$

$$C_1^{(2)} y = \begin{cases} b^{(2)}(x_1, x_2 + 0,5h_2)\, y_{x_2}, & x_2 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(b^{(2)}(x_1, x_2 - 0,5h_2)\, y_{\bar{x}_2} + b^{(2)}(x_1, x_2 + 0,5h_2)\, y_{x_2}\right), \\ \quad h_2 \le x_2 \le l_2 - h_2, \\ b^{(2)}(x_1, x_2 - 0,5h_2)\, y_{\bar{x}_2}, & x_2 = l_2. \end{cases}$$

Вблизи границы мы снова использовали (см. (7.52)) аппроксимации направленными разностями. С учетом условия непротекания (7.30) при этом сохраняется второй порядок аппроксимации.

Для дивергентного оператора конвективного переноса используем аппроксимацию

$$C_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_2^{(\alpha)}, \tag{7.58}$$

где теперь

$$C_2^{(1)} y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_1} b^{(1)}(x_1 + 0,5h_1, x_2)\left(y(x_1 + h_1, x_2) + y(x_1, x_2)\right), \\ \qquad x_1 = 0, \\ \dfrac{1}{2h_1} b^{(1)}(x_1 + 0,5h_1, x_2)\left(y(x_1 + h_1, x_2) + y(x_1, x_2)\right) - \\ -\dfrac{1}{2h_1} b^{(1)}(x_1 - 0,5h_1, x_2)\left(y(x_1 - h_1, x_2) + y(x_1, x_2)\right), \\ \qquad h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1, \\ -\dfrac{1}{h_1} b^{(1)}(x_1 - 0,5h_1, x_2)\left(y(x_1 - h_1, x_2) + y(x_1, x_2)\right), \\ \qquad x_1 = l_1, \end{cases}$$

$$C_2^{(2)}y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_2} b^{(2)}(x_1, x_2 + 0,5h_2)\left(y(x_1, x_2 + h_2) + y(x_1, x_2)\right), \\ \qquad x_2 = 0, \\ \dfrac{1}{2h_2} b^{(2)}(x_1, x_2 + 0,5h_2)\left(y(x_1, x_2 + h_2) + y(x_1, x_2)\right) - \\ -\dfrac{1}{2h_2} b^{(1)}(x_1, x_2 - 0,5h_2)\left(y(x_1, x_2 - h_2) + y(x_1, x_2)\right), \\ \qquad h_2 \le x_2 \le l_2 - h_2, \\ -\dfrac{1}{h_2} b^{(2)}(x_1, x_2 - 0,5h_2)\left(y(x_1, x_2 - h_2) + y(x_1, x_2)\right), \\ \qquad x_2 = l_2. \end{cases}$$

Непосредственными выкладками убеждаемся в важнейшем свойстве сопряженности с обратным знаком ($C_1^* = -C_2$) построенных операторов переноса. Для кососимметричного ($C_0^* = -C_0$) оператора в симметричной форме из (7.57), (7.58) получим

$$C_0 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_0^{(\alpha)}, \tag{7.59}$$

где теперь

$$C_0^{(1)}y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_1} b^{(1)}(x_1 + 0,5h_1, x_2)\, y(x_1 + h_1, x_2), \quad x_1 = 0, \\ \dfrac{1}{2h_1} b^{(1)}(x_1 + 0,5h_1, x_2)\, y(x_1 + h_1, x_2) - \\ \quad -\dfrac{1}{2h_1} b^{(1)}(x_1 - 0,5h_1, x_2)\, y(x_1 - h_1, x_2), \\ \qquad h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1, \\ -\dfrac{1}{h_1} b^{(1)}(x_1 - 0,5h_1, x_2)\, y(x_1 - h_1, x_2), \quad x_1 = l_1; \end{cases}$$

$$C_0^{(2)}y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_2} b^{(2)}(x_1, x_2 + 0,5h_2)\, y(x_1, x_2 + h_2), \quad x_2 = 0, \\ \dfrac{1}{2h_2} b^{(2)}(x_1, x_2 + 0,5h_2)\, y(x_1, x_2 + h_2) - \\ \quad -\dfrac{1}{2h_2} b^{(1)}(x_1, x_2 - 0,5h_2)\, y(x_1, x_2 - h_2), \\ \qquad h_2 \le x_2 \le l_2 - h_2, \\ -\dfrac{1}{h_2} b^{(2)}(x_1, x_2 - 0,5h_2)\, y(x_1, x_2 - h_2), \quad x_2 = l_2. \end{cases}$$

На основании (7.57) — (7.59) получим сеточный аналог (7.38)

$$C_1 y = C_0 y - \frac{1}{2}\mathrm{div}_h \mathbf{b}\, y, \tag{7.60}$$

$$C_2 y = C_0 y + \frac{1}{2}\mathrm{div}_h \mathbf{b}\, y \tag{7.61}$$

при специальной аппроксимации $\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ и учете ограничений (7.30), а именно

$$\mathrm{div}_h \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^{2} \mathrm{div}_h \mathbf{b}_\alpha, \tag{7.62}$$

где

$$\mathrm{div}_h \mathbf{b}_1 = \begin{cases} \dfrac{2}{h_1}\left(b^{(1)}(x_1+0,5h_1,x_2) - b^{(1)}(x_1,x_2)\right), & x_1 = 0, \\ \dfrac{1}{h_1}\left(b^{(1)}(x_1+0,5h_1,x_2) - b^{(1)}(x_1-0,5h_1,x_2)\right), & \\ \qquad h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1, & \\ -\dfrac{2}{h_1}\left(b^{(1)}(x_1,x_2) - b^{(1)}(x_1-0,5h_1,x_2)\right), & x_1 = l_1; \end{cases}$$

$$\mathrm{div}_h \mathbf{b}_2 = \begin{cases} \dfrac{2}{h_2}\left(b^{(2)}(x_1,x_2+0,5h_2) - b^{(2)}(x_1,x_2)\right), & x_2 = 0, \\ \dfrac{1}{h_2}\left(b^{(2)}(x_1,x_2+0,5h_2) - b^{(2)}(x_1,x_2-0,5h_2)\right), & \\ \qquad h_2 \le x_2 \le l_2 - h_2, & \\ -\dfrac{2}{h_2}\left(b^{(2)}(x_1,x_2) - b^{(2)}(x_1,x_2-0,5h_2)\right), & x_2 = l_2. \end{cases}$$

Следовательно, для несжимаемой среды, для которой условие несжимаемости на сеточном уровне задано в виде $\mathrm{div}_h \mathbf{b} = 0$, имеет место алгебраическая эквивалентность разностных операторов конвективного переноса (7.57) — (7.59), т.е. $C_1 = C_2 = C_0$.

В соответствии с (7.60) для постоянных в (7.55) получим

$$M_\alpha = \frac{1}{2}\max_{\mathbf{x}\in\bar\omega} |\mathrm{div}_h \mathbf{b}|, \quad \alpha = 1,2, \tag{7.63}$$

что является прямым сеточным аналогом (7.41).

Свойство L_2-консервативности (7.43) — следствие кососимметричности оператора переноса в симметричной форме. На разностном

уровне имеем $(C_0 y, y) = 0$. При исследовании L_1-консервативности (см. (7.44)) опираемся на свойство оператора дивергентного конвективного переноса $(C_2 y, 1) = 0$, которое для рассмотренных аппроксимаций (7.52), (7.58) при ограничениях (7.30) на поле скоростей устанавливается непосредственно.

7.2.4. Двухслойные разностные схемы

После дискретизации по пространственным переменным от (7.31) придем к дифференциально-операторному уравнению

$$\frac{dw}{dt} + Cw = 0, \quad C = C(t), \quad t > 0. \tag{7.64}$$

В соответствии с (7.32) положим

$$w(0) = u^0. \tag{7.65}$$

Исследуем на устойчивость стандартные двухслойные разностные схемы для задачи (7.64), (7.65), опираясь на установленные выше свойства разностных операторов конвективного переноса.

Простейшей является двухслойная явная схема, когда дифференциально-разностной задаче (7.64), (7.65) при $C = C_0$ ставится в соответствие разностное уравнение

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + C_0(t_n) y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = u^0. \tag{7.66}$$

Хорошо известно, что эта двухслойная явная схема является безусловно неустойчивой. Чтобы показать это, запишем уравнение (7.66) в виде

$$y_{n+1} = S_n y_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $S_n = E - \tau C_0(t_n)$ — оператор перехода с n временного слоя на $n+1$, E — тождественный оператор. Устойчивость в H по начальным данным

$$\|y_{n+1}\| \le \|y_n\|, \quad n = 0, 1, \ldots$$

эквивалентна операторному неравенству

$$S_n^* S_n \le E, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Подстановка выражения для S_n с учетом кососимметричности оператора $C_0(t_n)$ приводит нас к условию

$$\tau C_0^*(t_n) C_0(t_n) \le 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, ни при каких шагах по времени схема (7.68) не является устойчивой.

Более предпочтительны классические двухслойные схемы с весами. В этом случае разностное уравнение

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+C_0\left(t_{n+1}^{(\sigma)}\right)(\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)\,y_n)=0, \tag{7.67}$$

где $t_{n+1}^{(\sigma)}=\sigma t_{n+1}+(1-\sigma)t_n$, аппроксимирует уравнение переноса (7.36) во внутренних узлах с погрешностью $O(\tau^\nu+|h|^2)$, причем ν равно двум при $\sigma=0,5$ и равно единице при $\sigma\neq 0,5$. Принимая во внимание кососимметричность оператора переноса, домножим уравнение (7.67) скалярно на

$$2\tau\,(\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)\,y_n)=\tau\,(y_{n+1}+y_n)+(2\sigma-1)\,\tau^2\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}.$$

Получим равенство

$$||y_{n+1}||^2+(2\sigma-1)\,\tau^2\left\|\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}\right\|^2=||y_n||^2. \tag{7.68}$$

Отсюда следует, что схема с весами (7.67) абсолютно устойчива при $\sigma\geq 0,5$. Заметим также, что из (7.68) непосредственно следует консервативность схемы второго порядка аппроксимации по времени ($\sigma=0,5$) в смысле (см. (7.43)) выполнения равенства

$$||y_{n+1}||^2=||y_0||^2,\quad n=0,1,\ldots$$

Установим теперь условия устойчивости для схем с весами для операторов конвективного переноса в недивергентной и дивергентной формах

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+C_\alpha\left(t_{n+1}^{(\sigma)}\right)(\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)\,y_n)=0,\quad \alpha=1,2. \tag{7.69}$$

Основой нашего рассмотрения является оценка типа (7.42) с постоянными, определяемыми согласно (7.56), (7.63). Подобно (7.68), для разностного уравнения (7.69) получим неравенство

$$||y_{n+1}||^2+(2\sigma-1)\,\tau^2\left\|\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}\right\|^2\leq||y_n||^2+$$

$$+2\tau M_\alpha||\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)\,y_n||^2,\quad \alpha=1,2. \tag{7.70}$$

Для последнего слагаемого в правой части имеем оценку

$$||\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)\,y_n||^2\leq 2\sigma^2||y_{n+1}||^2+2\,(1-\sigma)\,||y_n||^2,$$

подстановка которой в (7.70) при стандартных ограничениях $\sigma \geq 0,5$ дает неравенство

$$||y_{n+1}||^2 \leq \left(1 + 4\tau M_\alpha (\sigma - 1)^2\right) \left(1 - 4\tau M_\alpha \sigma^2\right)^{-1} ||y_n||^2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Воспользуемся неравенством $(1-\eta)^{-1} \leq \exp(2\eta)$, верным при $\eta \leq 0,75$, и получим оценку ρ-устойчивости

$$||y_{n+1}||^2 \leq \rho ||y_n||^2, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7.71}$$

при слабых ограничениях на шаг по времени

$$\tau \leq \frac{3}{16 M_\alpha \sigma^2}$$

с постоянной

$$\rho = \exp\left(4 M_\alpha \left((\sigma - 1)^2 + 2\sigma^2\right) \tau\right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Учитывая оценку (7.42), для решения дифференциальной задачи более оптимальной была бы оценка (7.71) с меньшим ρ

$$\rho = \exp\left(M_\alpha \tau\right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Еще раз подчеркнем, что при использовании согласованных аппроксимаций конвективного переноса и дивергенции поля скоростей (7.57) — — (7.59), (7.62) обеспечивается ограниченный рост нормы решения, обусловленный сжимаемостью среды (постоянные M_α, $\alpha = 1, 2$ в оценке (7.71) согласованы с дифференциальной задачей).

На основе свойства $(C_2 y, 1) = 0$ устанавливается L_1-консервативность разностной схемы с весами (7.69) при $\alpha = 1$ для дивергентного уравнения переноса (7.28)

$$(y_{n+1}, 1) = (y_0, 1), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

которая для несжимаемой среды (при выполнении условия $\mathrm{div}_h \mathbf{b} = 0$) имеет место и для разностных схем с операторами конвективного переноса в недивергентной (7.57) и симметричной (7.59) формах.

На основе полученных априорных оценок устойчивости стандартным образом находим оценки скорости сходимости разностных схем в сеточном пространстве H, предполагая соответствующую гладкость коэффициентов уравнения и начальных данных.

7.2.5. Аддитивные схемы

Отметим возможности использования локально-одномерных разностных схем для численного решения задачи (7.29), (7.30), (7.36). Дискретизация по пространству приводит нас к задаче

$$\frac{dy}{dt} + Ay = \varphi(t), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad t > 0, \tag{7.72}$$

$$y(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{7.73}$$

Оператор A имеет аддитивное представление

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A^{(\alpha)} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{7.74}$$

в котором

$$A^{(\alpha)} = C_0^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{7.75}$$

Тем самым мы имеем задачу, в которой операторные слагаемые $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ являются неотрицательными и несамосопряженными операторами.

Для задачи (7.72) – (7.75) можно использовать схемы переменных направлений, факторизованные аддитивные схемы и схемы суммарной аппроксимации. Мы ограничимся приведением регуляризованной схемы полной аппроксимации. Для того чтобы еще раз подчеркнуть родство различных классов аддитивных, мы начнем с некоторой аддитивно-усредненной схемы.

Для задачи (7.72), (7.73) стандартная аддитивно-усредненная схема записывается в виде

$$\frac{y_{n+1}^{(1)} - y_n}{2\tau} + A^{(1)}\left(\sigma y_{n+1}^{(1)} + (1-\sigma) y_n\right) = \varphi_n, \tag{7.76}$$

$$\frac{y_{n+1}^{(2)} - y_n}{2\tau} + A^{(2)}\left(\sigma y_{n+1}^{(2)} + (1-\sigma) y_n\right) = \varphi_n, \tag{7.77}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_{n+1}^{(1)} + y_{n+1}^{(2)}\right), \tag{7.78}$$

где, например, $\varphi_n = f(\mathbf{x}, t_n)$, $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$.

Уравнения (7.76), (7.77) запишем в виде

$$\frac{y_{n+1}^{(1)} - y_n}{2\tau} + \left(E + 2\sigma\tau A^{(1)}\right)^{-1} A^{(1)} y_n = \left(E + 2\sigma\tau A^{(1)}\right)^{-1} \varphi_n,$$

$$\frac{y_{n+1}^{(2)} - y_n}{2\tau} + \left(E + 2\sigma\tau A^{(2)}\right)^{-1} A^{(2)} y_n = \left(E + 2\sigma\tau A^{(2)}\right)^{-1} \varphi_n.$$

Складывая их, с учетом (7.78) получим

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{2} \left(E + 2\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} y_n =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(E + 2\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)^{-1} \varphi_n. \tag{7.79}$$

Приходим к регуляризованной двухкомпонентной аддитивной разностной схеме.

Дальнейшее исследование схемы (7.79) проводится стандартно. Запишем ее в виде

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} S_n^{(\alpha)} y_n + \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(E + 2\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)^{-1} \varphi_n, \tag{7.80}$$

где

$$S_n^{(\alpha)} = E - 2\tau \left(E + 2\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Из (7.80) непосредственно получаем

$$\|y_{n+1}\| \le \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \|S_n^{(\alpha)}\| \, \|y_n\| +$$

$$+ \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\| \left(E + 2\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)^{-1} \right\| \, \|\varphi_n\|. \tag{7.81}$$

При $A^{(\alpha)} \ge 0$, $\alpha = 1, 2$

$$\left\| \left(E + 2\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)^{-1} \right\| \le 1, \quad \alpha = 1, 2.$$

Операторы $S_n^{(\alpha)} \ge 0$, $\alpha = 1, 2$ есть операторы перехода со слоя t_n на слой t_{n+1} для (7.76) и (7.77). При обычных ограничениях $\sigma \ge 0,5$ имеем

$$\|S_n^{(\alpha)}\| = \left\| E - 2\tau \left(E + 2\sigma\tau A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} \right\| \le 1, \quad \alpha = 1, 2.$$

Подстановка в (7.81) приводит к искомой оценке

$$\|y_{n+1}\| \le \|y_n\| + \tau\|\varphi_n\| \tag{7.82}$$

для разностной схемы (7.79).

Исследование задачи погрешности на основе полученной априорной оценки устойчивости по начальным данным и правой части (7.82) приводит нас к утверждению о сходимости разностной схемы (7.79) (аддитивно-усредненной схемы (7.76) — (7.78)) к точному решению задачи (7.29), (7.30), (7.36) с точностью $O(\tau + |h|^2)$. Подобным образом рассматриваются аддитивные схемы для уравнения переноса в дивергентной и недивергентной формах (7.28), (7.34). В этом случае устанавливаются оценки ρ-устойчивости, аналогичные (7.71).

7.2.6. Схемы с направленными разностями для уравнений переноса

Безусловно устойчивые в L_∞ и L_1 разностные схемы для уравнений переноса в недивергентной и дивергентной формах можно построить на основе использования простейших аппроксимаций операторов переноса направленными разностями первого порядка.

Будем использовать обозначения

$$g(x) = g_+(x) + g_-(x),$$

$$g_+(x) = \frac{1}{2}(g(x) + |g(x)|) \ge 0,$$

$$g_-(x) = \frac{1}{2}(g(x) - |g(x)|) \le 0.$$

Начнем с аппроксимаций на основе задания поля скоростей в узлах сетки $\bar\omega$. В рассматриваемых задачах с условием непротекания (7.30) аппроксимации на границе строятся с учетом знака нормальной компоненты скорости в приграничных узлах. Для разностного оператора переноса в недивергентной форме используем представление (7.51), в котором

$$C_1^{(\alpha)} y = \begin{cases} b_+^{(\alpha)} y_{\bar x_\alpha} + b_-^{(\alpha)} y_{x_\alpha}, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0, & x_\alpha = 0,\ x_\alpha = l_\alpha. \end{cases} \tag{7.83}$$

Аналогично при аппроксимации оператора переноса в дивергентной форме используем (7.52), где

$$C_2^{(\alpha)} y = \begin{cases} \left(b_-^{(\alpha)} y\right)_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \left(b_+^{(\alpha)} y\right)_{\bar{x}_\alpha} + \left(b_-^{(\alpha)} y\right)_{x_\alpha}, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ \left(b_+^{(\alpha)} y\right)_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases} \tag{7.84}$$

В граничных узлах разностный оператор C_2 не аппроксимирует, вообще говоря, дифференциальный оператор переноса в дивергентной форме. Аналогично аппроксимируются операторы конвективного переноса при задании компонент скорости на смещенных сетках.

Рассматриваемые разностные операторы конвективного переноса аппроксимируются на стандартном пятиточечном шаблоне *крест*. Условия устойчивости в конечномерных пространствах L_∞ и L_1 мы связывали с диагональным преобладанием по столбцам и строкам. Сформулируем условия диагонального преобладания для рассматриваемых аппроксимаций операторов конвективного переноса, положив

$$\begin{aligned} Dy = {} & \gamma(\mathbf{x}, t)\, y(\mathbf{x}, t) - \alpha_1(\mathbf{x}, t)\, y(x_1 - h_1, x_2) - \\ & - \alpha_2(\mathbf{x}, t)\, y(x_1, x_2 - h_2)\, \beta_1(\mathbf{x}, t)\, y(x_1 + h_1, x_2) - \\ & - \beta_2(\mathbf{x}, t)\, y(x_1, x_2 + h_2), \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \end{aligned} \tag{7.85}$$

Будем считать, что в (7.85) соответствующие коэффициенты (α_1, α_2, β_1 и β_2) при $y(\mathbf{x})$ равны нулю для $\mathbf{x} \notin \bar{\omega}$.

При естественной нумерации узлов сетки $(((i_1, i_2),\ i_1 = 0, 1, \ldots, N_1),\ i_2 = 0, 1, \ldots, N_2)$ условие диагонального преобладания по строкам (1.123) для двухмерного пятиточечного оператора D, определяемого согласно (7.85), есть

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{x}, t) \ge {} & |\alpha_1(\mathbf{x}, t)| + |\alpha_2(\mathbf{x}, t)| + \\ & + |\beta_1(\mathbf{x}, t)| + |\beta_2(\mathbf{x}, t)|, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \end{aligned} \tag{7.86}$$

Аналогичное условие диагонального преобладания по столбцам (1.124) принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{x}, t) \ge {} & |\alpha_1(x_1 + h_1, x_2, t)| + |\beta_1(x_1 - h_1, x_2, t)| + \\ & + |\alpha_2(x_1, x_2 + h_2, t)| + |\beta_2(x_1, x_2 - h_2, t)|, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \end{aligned} \tag{7.87}$$

Сеточный оператор конвективного переноса (7.83) записывается в виде (7.85) с

$$\alpha_1(\mathbf{x},t) = \frac{b_+^{(1)}(\mathbf{x},t)}{h_1}, \quad \alpha_2(\mathbf{x},t) = \frac{b_+^{(2)}(\mathbf{x},t)}{h_2},$$

$$\beta_1(\mathbf{x},t) = -\frac{b_-^{(1)}(\mathbf{x},t)}{h_1}, \quad \beta_2(\mathbf{x},t) = -\frac{b_-^{(2)}(\mathbf{x},t)}{h_2},$$

$$\gamma(\mathbf{x},t) = \alpha_1(\mathbf{x},t) + \alpha_2(\mathbf{x},t) + \beta_1(\mathbf{x},t) + \beta_2(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Для разностного оператора (7.84) имеем

$$\alpha_1(\mathbf{x},t) = \frac{b_+^{(1)}(x_1 - h_1, x_2, t)}{h_1}, \quad \alpha_2(\mathbf{x},t) = \frac{b_+^{(2)}(x_1, x_2 - h_2, t)}{h_2},$$

$$\beta_1(\mathbf{x},t) = -\frac{b_-^{(1)}(x_1 + h_1, x_2, t)}{h_1}, \quad \beta_2(\mathbf{x},t) = -\frac{b_-^{(2)}(x_1, x_2 + h_2, t)}{h_2},$$

$$\gamma(\mathbf{x}.t) = \alpha_1(\mathbf{x},t) + \alpha_2(\mathbf{x},t) + \beta_1(\mathbf{x},t) + \beta_2(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}.$$

Тем самым для сеточного оператора C_1, определяемого согласно (7.83), выполнены условия диагонального преобладания по строкам (7.86), а для сеточного оператора C_2 (7.84) – по столбцам (7.87).

Теперь мы можем сформулировать условия устойчивости двухслойной разностной схемы

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + C\left(t_{n+1}^{(\sigma)}\right)(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma) y_n) = 0 \tag{7.88}$$

при использовании разностных операторов переноса с направленными разностями (7.83), (7.84). Ограничения на шаг по времени (1.128) (теорема 1.17) принимают вид

$$\tau \le \frac{1}{1-\sigma}\left(\max_{\mathbf{x}\in\bar{\omega}} \gamma(\mathbf{x},t)\right)^{-1}.$$

Отсюда следует, что при

$$\tau \le \frac{1}{1-\sigma}\left(\sum_{\alpha=1}^{2} \max_{\mathbf{x}\in\bar{\omega}} \frac{|v_\alpha(\mathbf{x},t)|}{h_\alpha}\right)^{-1} \tag{7.89}$$

разностная схема (7.83), (7.88) устойчива в $L_\infty(\bar{\omega})$ и для решения справедлива априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_\infty \le \|u_0\|_\infty, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7.90}$$

При тех же ограничениях (7.89) устойчива и разностная схема (7.84), (7.88), причем имеет место оценка устойчивости в $L_1(\bar{\omega})$

$$\|y_{n+1}\|_1 \le \|u_0\|_1, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{7.91}$$

Оценки (7.90), (7.91) согласуются с соответствующими оценками (см. (7.49) и (7.45)) для решения дифференциальной задачи. Для полностью неявных схем ($\sigma = 1$) имеет место (см. (7.89)) безусловная устойчивость.

Специально подчеркнем, что при использовании центральноразностных аппроксимаций для конвективных слагаемых (7.51), (7.52) (или (7.57), (7.58)) мы не можем рассчитывать на устойчивость двухслойных разностных схем (7.88) в $L_\infty(\bar{\omega})$ или в $L_1(\bar{\omega})$. В этом случае нельзя рассчитывать на диагональное преобладание ни при каких параметрах сетки по времени и пространству.

Аналогично рассматриваются аддитивные схемы, так как свойства диагонального преобладания по строкам или столбцам выполнено для одномерных сеточных операторов $C_\beta^{(\alpha)}$, $\beta, \alpha = 1, 2$. При использовании локально-одномерной схемы

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} + C^{(1)} y_{n+1/2} = 0,$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{\tau} + C^{(2)} y_{n+1} = 0$$

для разностного решения будет верна оценка (7.90) или (7.91).

7.3. Гиперболическое уравнение второго порядка

Рассматривается модельная краевая задача для уравнения колебаний в прямоугольнике. Строятся и исследуются разностные схемы с весами и аддитивные разностные схемы.

7.3.1. Постановка задачи

В прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2)\,,\ 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$$

рассматривается простейшая краевая задача для **гиперболического уравнения второго порядка**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \tag{7.92}$$

которое описывает процесс распространения колебаний в однородной среде. Граничные и начальные условия имеют вид

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{7.93}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{7.94}$$

На множестве функций $u(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих граничным условиям (7.93), определим обычным образом гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$. Дифференциальный оператор, как показано выше при рассмотрении разностных схем для параболического уравнения второго порядка,

$$\mathcal{D}u = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) \tag{7.95}$$

самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq \kappa\lambda_0 E, \tag{7.96}$$

где $\lambda_0 > 0$ — минимальное собственное значение оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле.

При построении устойчивых разностных схем для задачи (7.92) — — (7.94) ориентиром выступает априорная оценка

$$\|u(\mathbf{x}, t)\|_*^2 \leq \exp(t)\left(\|u^0\|_A^2 + \|v^0\|^2\right) + \\ + \int_0^t \exp(t-\theta)\|f(\theta)\|^2 d\theta, \tag{7.97}$$

где

$$\|u(\mathbf{x}, t)\|_*^2 \equiv \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \|u\|_A^2.$$

Эта оценка устойчивости выражает непрерывную зависимость решения задачи (7.92) — (7.94) от начальных данных и правой части.

7.3.2. Аппроксимация по пространству

Для численного решения поставленной задачи используется равномерная прямоугольная сетка

$$\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}.$$

На множестве сеточных функций, обращающихся в нуль $\partial\omega$ ($\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$), определяется гильбертово пространство $H = L_2(\omega)$ со скалярным произведением и нормой

$$(y, w) \equiv \sum_{\mathbf{x}\in\omega} y(\mathbf{x})\, w(\mathbf{x})\, h_1 h_2, \quad \|y\| \equiv (y, y)^{1/2}.$$

Будем считать, что достаточно гладкий коэффициент $k(\mathbf{x})$ в (7.92) ограничен снизу и сверху положительными постоянными

$$\kappa \le k(\mathbf{x}) \le \bar{\kappa}, \quad \kappa > 0.$$

С погрешностью $O(|h|^2)$ на гладких решениях задачи (7.92) – (7.94) аппроксимируем дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ разностным

$$D = \sum_{\alpha=1}^{2} D^{(\alpha)}, \quad D^{(\alpha)} y = -\left(a^{(\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha}, \ \alpha = 1, 2, \ \mathbf{x} \in \omega, \tag{7.98}$$

где, например,

$$a^{(1)}(\mathbf{x}) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2), \quad a^{(2)}(\mathbf{x}) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2).$$

Среди основных свойств одномерных разностных операторов $D^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ выделим свойства самосопряженности и положительной определенности

$$D^{(\alpha)} = \left(D^{(\alpha)}\right)^* \ge \delta_\alpha E, \quad D^{(\alpha)} \le \Delta_\alpha E, \tag{7.99}$$

причем

$$\delta_\alpha = \frac{8\kappa}{l_\alpha^2}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4\bar{\kappa}}{h_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Дискретизация по пространственным переменным дает задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + Ay = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad t > 0, \tag{7.100}$$

$$y(\mathbf{x},0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \frac{dy}{dt}(\mathbf{x},0) = v^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{7.101}$$

При построении аддитивных разностных схем будем ориентироваться на аддитивное представление оператора A в виде

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* > 0, \quad \alpha = 1,2, \tag{7.102}$$

в котором

$$A^{(\alpha)} = D^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1,2. \tag{7.103}$$

Прежде чем рассматривать аддитивные схемы напомним некоторые факты о классических трехслойных разностных схемах для задачи (7.100), (7.101).

7.3.3. Разностные схемы с весами

Для приближенного решения задачи (7.100), (7.101) с использованием равномерной сетки по времени с шагом τ будем использовать простейшую трехслойную схему второго порядка аппроксимации по τ с весом σ

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} +$$

$$+A\left(\sigma y_{n+1} + (1-2\sigma)\, y_n + \sigma y_{n-1}\right) = \varphi_n, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{7.104}$$

$$y_0 = u^0, \quad y_1 = u^1. \tag{7.105}$$

Для задания второго начального условия (7.105) с вторым порядком по τ на решениях дифференциальной задачи положим

$$y_1 = y_0 + \tau\tilde{v}, \quad \tilde{v} = v^0 + \frac{\tau}{2}\left(\varphi_0 - Dy_0\right).$$

Для того чтобы воспользоваться результатами общей теории устойчивости, приведем разностную схему (7.104), (7.105) к канонической форме трехслойных разностных схем

$$B\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right) +$$

$$+ Ay_n = \varphi_n, \quad n = 1,2,\ldots \tag{7.106}$$

при заданных y_0, y_1.

Для (7.104), (7.105) имеем

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2} E + \sigma A, \quad A = A^* > 0. \tag{7.107}$$

Условия устойчивости схемы (7.106) с самосопряженными и постоянными операторами B, R, A имеют (см. теорему 1.10) вид

$$B \geq 0, \quad A > 0, \quad R > \frac{1}{4} A. \tag{7.108}$$

Для явной схемы $\sigma = 0$ с учетом (7.98), (7.99) условия (7.108) дают следующие ограничения на шаг по времени:

$$\tau < \frac{2}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2}} = O\left(|h|\right).$$

Схема (7.104), (7.105) безусловно устойчива при $\sigma \geq 0,25$. Привлекая соответствующие оценки устойчивости по начальным данным и правой части, устанавливаем сходимость разностной схемы (7.104), (7.105) со вторым порядком по времени и пространству.

7.3.4. Аддитивная разностная схема

Рассмотрим возможности использования регуляризованных аддитивных схем для приближенного решения задачи (7.92) — (7.94). Для таких задач можно также строить безусловно устойчивые векторные аддитивные схемы. Такой класс аддитивных схем затрагивается в работе [2].

Принимая во внимание (7.102), перепишем уравнение (7.100) в виде

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \sum_{\alpha=1}^{2} A^{(\alpha)} y = \varphi\left(\mathbf{x}, t\right), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad t > 0.$$

Рассмотрим регуляризованную аддитивную разностную схему

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + \sum_{\alpha=1}^{2} \left(E + \sigma\tau^2 A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} y_n = \varphi_n. \tag{7.109}$$

Вычислительная реализация (7.109) может основываться на решении двух локально-одномерных задач

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - 2y_n + y_{n-1}}{p\tau^2} + \left(E + \sigma\tau^2 A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} y_n =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi_n, \quad \alpha = 1,2, \quad n = 1,2,\ldots \tag{7.110}$$

и определении приближенного решения на новом слое как

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2} y_{n+1}^{(\alpha)}. \tag{7.111}$$

В такой интерпретации мы имеем аддитивно-усредненную локально-одномерную разностную схему (7.110), (7.111).

Аддитивная разностная схема (7.109) записывается в канонической форме (7.106) с операторами

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2}E, \quad \tilde{A} = \tilde{A}^* > 0,$$

где теперь

$$\tilde{A} = \sum_{\alpha=1}^{2} \tilde{A}^{(\alpha)}, \quad \tilde{A}^{(\alpha)} = \left(E + \sigma\tau^2 A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1,2.$$

Принимая во внимание неравенство

$$\left(E + \sigma\tau^2 A^{(\alpha)}\right)^{-1} A^{(\alpha)} \le \frac{1}{\sigma\tau^2}E, \quad \alpha = 1,2,$$

видим, что условия устойчивости для схемы (7.109) будут выполнены при $\sigma \ge 0,5$.

Рассматривая задачу для погрешности и привлекая оценки устойчивости решения разностной задачи по начальным данным и правой части, устанавливаем сходимость локально-одномерной разностной схемы (7.109) к достаточно гладкому решению дифференциальной задачи (7.92) – (7.94) со скоростью $O(\tau^2 + |h|^2)$.

7.4. Обратные эволюционные задачи

Многие прикладные проблемы формулируются как обратные задачи математической физики, которые обычно относятся к классу некорректных в классическом смысле задач. Для их приближенного решения широко используются методы регуляризации [67]. Для обратных задач для эволюционных уравнений применяется также метод квазиобращения [23, 54]. Здесь мы приведем некоторые основные результаты по построению разностных схем для неустойчивых задач на основе принципа регуляризации.

7.4.1. Задача с обратным временем для параболического уравнения

В прямоугольнике Ω будем искать решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{7.112}$$

в котором

$$\kappa \leq k(\mathbf{x}) \leq \bar{\kappa}, \quad \kappa > 0.$$

Рассматриваемое уравнение (7.112) отличается от обычного параболического уравнения только знаком при производных по пространству (соответствует использованию замены t на $-t$ — **уравнение с обратным временем**). Граничные и начальные условия возьмем простейшие

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T, \tag{7.113}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{7.114}$$

Для функций $u(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих граничным условиям (7.113), определим гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$ со скалярным произведением и нормой

$$(u, w) = \int_\Omega u(\mathbf{x})\, w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \|u\| \equiv (u, u)^{1/2} = \left(\int_\Omega u^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Для дифференциального оператора

$$\mathcal{D}u = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \tag{7.115}$$

рассматриваемого в H, имеем

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq \kappa\lambda_0 E, \quad \lambda_0 > 0. \tag{7.116}$$

Основная особенность обратной задачи (7.112) — (7.114) связана с ее некорректностью, которая обусловлена неустойчивостью решения относительно малых возмущений начальных условий. Это требует более широкого взгляда на проблему с учетом практической значимости таких задач.

7.4.2. Условная корректность

При некотором сужении класса допустимых решений рассматриваемой задачи для параболического уравнения с обратным временем уже имеется устойчивость по начальным данным, т.е. эти задачи принадлежат к классу **условно корректных** (корректных по А.Н.Тихонову) задач математической физики. Здесь мы выделим класс априорных ограничений на решение, при котором имеется непрерывная зависимость решения от начальных условий. Он связан с предположением об ограниченности нормы решения.

Получим оценку решения задачи (7.112) – (7.114), из которой вытекает условная корректнось задачи. Обозначим

$$\Phi(t) = \|u(\mathbf{x}, t)\|^2 = (u, u). \tag{7.117}$$

Непосредственное дифференцирование выражения (7.117) с учетом уравнения (7.112) дает

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 2(u, \mathcal{D}u). \tag{7.118}$$

Принимая во внимание самосопряженность оператора $\mathcal{D}$, при повторном дифференцировании получим

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \left(\mathcal{D}u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 4\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2. \tag{7.119}$$

Из (7.117) – (7.119) имеем

$$\Phi\frac{d^2\Phi}{dt^2} - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 = 4\left(\|u\|^2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 - \left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right).$$

Из этого равенства с учетом

$$\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \le \|u\|\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|$$

следует неравенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}\ln\Phi(t) \ge 0, \tag{7.120}$$

т.е. функция $\ln\Phi(t)$ выпукла. Из (7.120) имеем

$$\ln\Phi(t) \le \frac{t}{T}\ln\Phi(T) + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\ln\Phi(0).$$

Отсюда следует

$$\Phi(t) = \Phi^{t/T}(T)\,\Phi^{(1-t/T)}(0)$$

и с учетом (7.117) получим искомую оценку для (7.112) — (7.114)

$$\|u(\mathbf{x},t)\| \le \|u(\mathbf{x},0)\|^{1-t/T}\|u(\mathbf{x},T)\|^{t/T}. \tag{7.121}$$

Пусть теперь рассматривается решение задачи (7.112) — (7.114) в классе ограниченных в $\mathcal{H}$ решений, т.е.

$$\|u(\mathbf{x},t)\| \le M, \quad M = \text{const} > 0, \quad 0 < t \le T. \tag{7.122}$$

В классе априорных ограничений (7.122) из (7.121) получим оценку

$$\|u(\mathbf{x},t)\| \le M^{t/T}\|u(\mathbf{x},0)\|^{1-t/T}. \tag{7.123}$$

Это значит, что для задачи (7.112) — (7.114) имеет место непрерывная зависимость решения от начальных данных при $0 < t \le T$ в классе ограниченных решений. На основании этого имеет смысл строить алгоритмы приближенного решения некорректной задачи (7.112) — — (7.114), которые каким-либо образом выделяли класс ограниченных решений. Кроме того, для приближенного решения должна быть характерной оценка типа (7.123), допускающая рост нормы решения во времени.

7.4.3. Приближенное решение некорректных задач

Основные подходы к приближенному решению некорректных задач связаны с тем или иным возмущением исходной задачи, переходом к некоторой близкой, но уже корректной задаче. На этом пути мы получаем различные алгоритмы регуляризации. В частности, переход к корректной задаче может осуществляться за счет возмущения исходного уравнения, начальных условий, перехода к вариационной задаче и т.д. Важнейшее значение имеет проблема выбора параметра регуляризации (возмущения), его согласование с погрешностями в исходных данных. Здесь мы эту проблему не затрагиваем, отсылая читателя к книге [67].

Приближенные методы решения некорректных эволюционных задач основаны на переходе к некоторой возмущенной корректной задаче. О таких методах говорят как о **методах квазиобращения** [23]. Отметим прежде всего используемые варианты метода квазиобращения для задачи (7.112) — (7.114), связанные с возмущением исходного уравнения (7.112).

Для удобства запишем задачу (7.112) — (7.114) как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в H

$$\frac{du}{dt} - \mathcal{D}u = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{7.124}$$

$$u(0) = u^0. \tag{7.125}$$

Классический вариант метода квазиобращения [23] связан с определением приближенного решения $u_\varepsilon(t)$ задачи (7.124), (7.125) из уравнения

$$\frac{du_\varepsilon}{dt} - \mathcal{D}u_\varepsilon + \varepsilon\mathcal{D}^2 u_\varepsilon = 0, \quad 0 < t \leq T. \tag{7.126}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — **параметр регуляризации**. Тем самым вместо решения некорректной задачи для параболического уравнения второго порядка решается корректная задача для параболического уравнения четвертого порядка. Регуляризирующие свойства данного варианта метода квазиобращения обеспечиваются сходимостью приближенного решения к точному в классе ограниченных решений при согласованном с погрешностью входных данных выборе параметра регуляризации ε.

В работах [85, 107] предложен другой вариант метода квазиобращения для устойчивого решения задачи (7.124), (7.125), основанный на псевдопараболическом возмущении уравнения

$$\frac{du_\varepsilon}{dt} - \mathcal{D}u_\varepsilon + \varepsilon\mathcal{D}\frac{du_\varepsilon}{dt} = 0, \quad 0 < t \leq T. \tag{7.127}$$

При приближенном решении обратных задач математической физики (задача (7.112) — (7.114)) первый вариант метода квазиобращения (7.126) основан на повышении порядка дифференциального оператора по пространству (вместо $\mathcal{D}$ используется $\mathcal{D} - \varepsilon\mathcal{D}^2$). Второй вариант метода квазиобращения (7.127) не связан со столь кардинальным изменением задачи. Можно отметить и некоторые другие возможности регуляризации задачи за счет дополнительных слагаемых.

Второй класс методов квазиобращения для приближенного решения некорректных эволюционных задач связан с возмущением не уравнения, а начальных условий. Речь идет о переходе от начального условия к нелокальному. Например, приближенное решение задачи (7.124), (7.125) определим из такого же уравнения

$$\frac{du_\varepsilon}{dt} - \mathcal{D}u_\varepsilon = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{7.128}$$

а вместо начального условия возьмем простейшее нелокальное условие

$$u_\varepsilon(0) + \varepsilon u_\varepsilon(T) = u^0.$$

Введение в класс корректности осуществляется за счет связи решения на начальный и конечный моменты времени. Такой вариант регуляризации тесно связан с методом регуляризации А.Н. Тихонова, когда исходная задача рассматривается как задача управления.

Следуя работам [49, 102], мы строим разностные схемы для приближенного решения неустойчивых эволюционных задач на основе принципа регуляризации. При возмущении операторов разностной схемы для исходной некорректной задачи специально не формулируется промежуточная возмущенная задача типа (7.126), (7.127). Конструктивизм общей теории устойчивости проявляется в том, что общие критерии устойчивости указывают ориентиры, как возмущать операторы задачи.

7.4.4. Регуляризованные разностные схемы

На равномерной прямоугольной сетке $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ дифференциальному оператору $\mathcal{D}$ поставим в соответствие разностный оператор

$$D = \sum_{\alpha=1}^{2} D^{(\alpha)}, \quad D^{(\alpha)} y = -\left(a^{(\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha}, \ \alpha = 1, 2, \ \mathbf{x} \in \omega, \quad (7.129)$$

причем

$$D^{(\alpha)} = \left(D^{(\alpha)}\right)^* \geq \delta_\alpha E, \quad D^{(\alpha)} \leq \Delta_\alpha E \quad (7.130)$$

с постоянными

$$\delta_\alpha = \frac{8\kappa}{l_\alpha^2}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4\bar{\kappa}}{h_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Используем принцип регуляризации для построения разностных схем для некорректной задачи (7.124), (7.125). Начнем с простейшей явной разностной схемы

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - D y_n = 0,$$

$$\mathbf{x} \in \omega, \quad n = 0, 1, ..., N-1, \quad N\tau = T, \quad (7.131)$$

которую дополним начальным условием

$$y_0 = u^0, \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{7.132}$$

В соответствии с принципом регуляризации запишем схему (7.131), (7.132) в каноническом виде

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, ..., N-1 \tag{7.133}$$

с операторами

$$A = -D, \quad B = E, \tag{7.134}$$

т.е. $A = A^* < 0$.

Явная схема (7.131), (7.132) ρ-устойчива в H с

$$\rho = 1 + \Delta\tau, \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2. \tag{7.135}$$

Этот результат следует из условий

$$\frac{1-\rho}{\tau}B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau}B \tag{7.136}$$

ρ-устойчивости (см. теорему 1.4) для схемы (7.133), (7.134). При наших предположениях $B > 0$, $A < 0$ для $\rho > 1$ правая часть двухстороннего операторного неравенства (7.136), очевидно, выполнена при всех $\tau > 0$. Левая часть (7.136) принимает вид

$$\frac{\rho - 1}{\tau}E \ge D$$

и с учетом (7.130) имеет место при выборе ρ согласно (7.135).

При приближенном решении некорректных задач выбор параметра регуляризации должен быть согласован с уровнем погрешности во входных данных. Здесь мы ограничились построением устойчивых вычислительных алгоритмов для некорректных эволюционных задач и исследованием влияния параметра регуляризации только на устойчивость соответствующей разностной схемы. При заданном параметре регуляризации ε указывается минимальное значение ρ согласно (7.135).

Исходя из явной схемы (7.131), для задачи (7.112) — (7.114) запишем регуляризованную схему в каноническом виде (7.133) с

$$A = -D, \quad B = E + \varepsilon R, \tag{7.137}$$

где R — регуляризатор.

Теорема 7.1. Регуляризованная схема (7.133), (7.137) ρ-устойчива в H_B с

$$\rho = 1 + \frac{\tau}{\varepsilon} \tag{7.138}$$

при выборе регуляризирующего оператора $R = D$ и

$$\rho = 1 + \varepsilon^{-1/2}\frac{\tau}{2}, \tag{7.139}$$

если используется $R = D^2$.

Доказательство. Можно ограничиться проверкой выполнения левой части двухстороннего неравенства (7.136), которое для (7.137) принимает вид

$$\frac{\rho - 1}{\tau}(E + \varepsilon R) \geq D. \tag{7.140}$$

При $R = D$ и выборе ρ в виде (7.138) неравенство (7.140) выполнено.

При $R = D^2$ неравенство (7.140) преобразуется следующим образом:

$$E + \varepsilon D^2 - \frac{\tau}{\rho - 1}D = \left(\varepsilon^{1/2}D - \frac{\tau}{2(\rho - 1)}\varepsilon^{-1/2}E\right)^2 +$$

$$+ \left(1 - \frac{\tau^2}{4(\rho - 1)^2}\varepsilon^{-1}\right)E \geq 0.$$

Это неравенство будет выполнено при выборе ρ в виде (7.139). ■

С построенными регуляризованными разностными схемами можно связать те или иные (стандартные или нестандартные) варианты метода квазиобращения. Аналогично строятся и другие регуляризованные разностные схемы. В частности, рассмотрены эволюционные задачи второго порядка, задачи с несамосопряженными операторами, аддитивные схемы для многомерных обратных задач и т.д.

7.4.5. Аддитивные разностные схемы

Рассмотрим возможности построения аддитивных разностных схем для приближенного решения задачи (7.112) — (7.114), отталкиваясь от регуляризованных схем (7.133), (7.137). Интерпретируя (7.133),

(7.137) как схему с мультипликативной регуляризацией, запишем ее в виде

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}-(E+\varepsilon R)^{-1}Dy_n=0,$$

$$\mathbf{x}\in\omega,\quad n=0,1,...,N-1. \tag{7.141}$$

Имеем при $R=D$ и $R=D^2$

$$0<\tilde{D}=\tilde{D}^*=(E+\varepsilon R)^{-1}Dy_n\le cE,$$

где постоянная

$$c=c(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon^{-1} & R=D,\\ \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2} & R=D^2.\end{cases}$$

Тем самым регуляризация связана с контролируемым ограничением оператора задачи сверху.

При построении аддитивных схем в качестве производящей снова берется разностная схема, которую с учетом представления (7.129), (7.130) перепишем в виде

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}-\sum_{\alpha=1}^{2}D^{(\alpha)}y_n=0,\quad \mathbf{x}\in\omega,\quad n=0,1,...,N-1.$$

Для получения аддитивной схемы проведем мультипликативную регуляризацию каждого отдельного операторного слагаемого $D^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2$

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}-\sum_{\alpha=1}^{2}\left(E+\varepsilon R^{(\alpha)}\right)^{-1}D^{(\alpha)}y_n=0,$$

$$n=0,1,\ldots,N-1, \tag{7.142}$$

где регуляризирующие операторы имеют, например, вид

$$R^{(\alpha)}=D^{(\alpha)},\quad R^{(\alpha)}=\left(D^{(\alpha)}\right)^2,\quad \alpha=1,2. \tag{7.143}$$

Регуляризованная аддитивная схема (7.142), (7.143) ρ-устойчива с

$$\rho=1+\frac{2}{\varepsilon}\tau$$

при выборе регуляризирующего оператора $R^{(\alpha)} = D^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ и

$$\rho = 1 + \varepsilon^{-1/2}\tau$$

если используется $R^{(\alpha)} = (D^{(\alpha)})^2$, $\alpha = 1, 2$.

Рассматриваемая схема (7.142), (7.143) эквивалентна аддитивно-усредненной локально-одномерной схеме. Аналогично строятся и локально-одномерные схемы покомпонентного расщепления.

Глава 8

Расщепление по физическим процессам

Локально-одномерные разностные схемы связываются с представлением оператора задачи в виде операторов по отдельным направлениям. Второй класс аддитивных разностных схем выделяется тем, что разные операторные слагаемые несут разную смысловую нагрузку, описывают различные процессы и явления. В этом случае мы будем говорить о расщеплении по физическим процессам. Здесь выделены некоторые характерные типы задач, для которых идея расщепления по физическим процессам приводит к построению эффективных вычислительных алгоритмов. Мы остановились на нестационарной задаче конвекции–диффузии, являющейся базовой для задач механики сплошной среды. Разностные схемы строятся на основе естественного разделения процессов диффузии и конвекции. Многие прикладные проблемы приводят к необходимости приближенного решения краевых задач для систем параболических уравнений. В рассмотренном примере расщепление позволяет перейти к решению последовательности задач для отдельных параболических уравнений. Рассмотрены проблемы численного решения нестационарных задач динамики несжимаемой жидкости. При решении двухмерных задач с использованием переменных "функция тока, вихрь скорости"проведено расщепление краевой задачи для уравнений Навье–Стокса на краевые задачи для параболического уравнения для вихря скорости и для эллиптического уравнения для функции тока. При решении задач в переменных "скорость, давление"на основе аддитивной схемы формулируется сеточная задача для расчета давления.

8.1. Нестационарные задачи конвекции–диффузии

Рассматривается модельная двухмерная задача конвекции–диффузии в прямоугольнике. Исследуется устойчивость схем с веса-

ми, двух- и трехслойных явно-неявных схем. Аддитивные схемы строятся на основе выделения диффузионного и конвективного переносов. Более подробное обсуждение этих схем имеется в [13, 14, 58].

8.1.1. Модельные задачи

Выделим класс модельных нестационарных задач конвекции–диффузии с постоянным (не зависящим от времени, но зависящим от точки расчетной области) коэффициентом диффузионного переноса. Коэффициенты конвективного переноса, ориентируясь на прикладные задачи, естественно считать переменными как по пространственным переменным, так и по времени.

В прямоугольнике Ω рассматривается нестационарное **уравнение конвекции–диффузии** с конвективными слагаемыми в недивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{8.1}$$

Это уравнение дополняется однородными граничными условиями Дирихле

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{8.2}$$

и начальным условием

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{8.3}$$

Вторым примером является нестационарное уравнение конвекции–диффузии с конвективным переносом в дивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha(\mathbf{x}, t) u) -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{8.4}$$

Необходимо также выделить уравнение конвекции–диффузии с конвективными слагаемыми в симметричной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(v_\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(v_\alpha(\mathbf{x},t)\,u\right)\right) -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = f(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad t>0. \tag{8.5}$$

Будем рассматривать множество функций $u(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющих граничным условиям (8.2). Нестационарную задачу конвекции–диффузии запишем в виде дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}(t) = \mathcal{C}(t) + \mathcal{D}, \quad t>0 \tag{8.6}$$

с использованием ранее введенных обозначений для операторов диффузионного и конвективного переноса.

Для оператора диффузионного переноса используем выражение

$$\mathcal{D}u = -\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right). \tag{8.7}$$

Для операторов конвективного переноса имеем $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\beta$, $\beta = 0,1,2$, где

$$\mathcal{C}_0 u = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(v_\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(v_\alpha(\mathbf{x},t)\,u\right)\right), \tag{8.8}$$

$$\mathcal{C}_1 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \tag{8.9}$$

$$\mathcal{C}_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(v_\alpha(\mathbf{x},t)\,u\right). \tag{8.10}$$

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения (8.6), т.е. уравнение дополняется условием

$$u(0) = u_0. \tag{8.11}$$

Напомним некоторые свойства дифференциальных операторов диффузионного и конвективного переноса. В $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$ для оператора диффузионного переноса имеем

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq \kappa\lambda_0\mathcal{E} \tag{8.12}$$

в предположении

$$\kappa \leq k(\mathbf{x}) \leq \bar{\kappa}, \quad \kappa > 0.$$

Для энергии операторов конвективного переноса мы установили оценку

$$|(\mathcal{C}u, u)| \leq \mathcal{M}_\beta \|u\|^2, \tag{8.13}$$

в которой

$$\mathcal{M}_\beta = \begin{cases} 0, & \beta = 0, \\ \dfrac{1}{2}\max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} |\operatorname{div}\mathbf{v}|, & \beta = 1, 2. \end{cases} \tag{8.14}$$

Нам понадобятся оценки подчиненности оператора конвективного переноса оператору диффузии

$$\|\mathcal{C}u\|^2 \leq \overline{\mathcal{M}}_\beta (\mathcal{D}u, u), \quad \beta = 0, 1, 2 \tag{8.15}$$

с соответствующими постоянными $\overline{\mathcal{M}}_\beta$, $\beta = 0, 1, 2$, зависящей от скорости.

Для недивергентного оператора конвекции (8.9) имеем

$$\|\mathcal{C}_1 u\|^2 = \int\limits_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \leq 2\sum_{\alpha=1}^{2} \int\limits_\Omega v_\alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \leq$$

$$\leq 2\max_\alpha\{\|v_\alpha^2\|_C\}\frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_\Omega k\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{2}{k}\max_\alpha\{\|v_\alpha^2\|_C\}(\mathcal{D}u, u),$$

т.е. в неравенстве (8.15) можно положить

$$\overline{\mathcal{M}}_1 = \frac{2}{k}\max_\alpha\{\|v_\alpha^2\|_C\}.$$

При $C = C_2$ (см. (8.10)) получим

$$\|C_2 u\|^2 = \int\limits_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \operatorname{div} \mathbf{v} u \right)^2 dx \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 + 2 \int\limits_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 u^2 dx.$$

Принимая во внимание неравенство

$$\lambda_0 \int\limits_\Omega u^2 dx \leq \sum_{\alpha=1}^{2} \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx,$$

где постоянная λ_0 зависит только от области и для прямоугольника Ω есть

$$\lambda_0 = \pi^2 \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right),$$

получим при $C = C_2$ оценку (8.15) с

$$\overline{\mathcal{M}}_2 = \frac{2}{k} \left(2 \max_\alpha \{ \|v_\alpha^2\|_C \} + \frac{1}{\lambda_0} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_C^2 \right).$$

Аналогично для случая $C = C_0$ имеем

$$\overline{\mathcal{M}}_0 = \frac{1}{k} \left(3 \max_\alpha \{ \|v_\alpha^2\|_C \} + \frac{1}{\lambda_0} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_C^2 \right).$$

С использованием оценок (8.13), (8.15) получаем априорные оценки для решения задачи конвекции–диффузии.

8.1.2. Оценки устойчивости решения дифференциальной задачи

Ограничимся простейшими априорными оценками для нестационарной задачи (8.6), (8.11), для которой мы и будем пытаться строить разностные аналоги.

Теорема 8.1. Для задачи (8.6), (8.11) в условиях (8.12) — (8.15) имеют место априорные оценки

$$\|u(t)\|^2 \leq \exp(2\mathcal{M}_\beta t) \|u_0\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \exp\left(2\mathcal{M}_1\left(t-\theta\right)\right)\|f\left(\theta\right)\|^2_{\mathcal{D}^{-1}}d\theta, \tag{8.16}$$

$$\|u\left(t\right)\|^2_{\mathcal{D}} \leq \exp\left(\overline{\mathcal{M}}_\beta t\right)\|u_0\|^2_{\mathcal{D}}+$$

$$+\int_0^t \exp\left(\overline{\mathcal{M}}_\beta\left(t-\theta\right)\right)\|f\left(\theta\right)\|^2 d\theta, \tag{8.17}$$

где $\beta = 0, 1, 2$.

Доказательство. Используется простейший вариант хорошо известной леммы Гронуолла.

Лемма 8.1. Для функции $g(t)$, удовлетворяющей неравенству

$$\frac{dg}{dt} \leq ag\left(t\right)+b\left(t\right), \quad t>0$$

с $a = \text{const}$, $b(t) \geq 0$, верна оценка

$$g\left(t\right) \leq \exp\left(at\right)\left(g\left(0\right)+\int_0^t \exp\left(-a\theta\right)b\left(\theta\right)d\theta\right).$$

Домножая скалярно уравнение (8.6) на $u(t)$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\left(\mathcal{D}u,u\right) = -\left(\mathcal{C}u,u\right)+\left(f,u\right). \tag{8.18}$$

С привлечением (8.13) и неравенства

$$\left(f,u\right) \leq \left(\mathcal{D}u,u\right)+\frac{1}{4}\|f\|^2_{\mathcal{D}^{-1}}$$

из (8.18) получим

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 \leq 2\mathcal{M}_\beta\|u\|^2+\frac{1}{2}\|f\|^2_{\mathcal{D}^{-1}}, \quad \beta = 0, 1, 2.$$

Из этого неравенства на основе леммы Гронуолла следует оценка (8.16). Осталось получить оценку (8.17). Для этого домножим скалярно уравнение (8.6) на du/dt, что дает

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{D}u,u\right) = -\left(\mathcal{C}u,\frac{du}{dt}\right)+\left(f,\frac{du}{dt}\right).$$

Для правой части имеем

$$-\left(\mathcal{C}u,\frac{du}{dt}\right)+\left(f,\frac{du}{dt}\right) \leq \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2+\frac{1}{2}\|\mathcal{C}u\|^2+\frac{1}{2}\|f\|^2.$$

С учетом (8.15) приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{D}u, u\right) \leq \overline{\mathcal{M}}_\beta \left(\mathcal{D}u, u\right) + \|f\|^2, \quad \beta = 0, 1, 2,$$

из которого получим искомую оценку (8.17). ■

Полученные оценки (8.16), (8.17) обеспечивают непрерывность решения задачи (8.6), (8.11) по начальным данным и правой части. Для рассматриваемых оценок существенно то, что для нормы решения задачи с однородной правой частью допускается экспоненциальный рост с инкрементом нарастания, который зависит от постоянных $\mathcal{M}_\beta$, $\overline{\mathcal{M}}_\beta$, $\beta = 0, 1, 2$. Учет такого поведения решения задачи конвекции–диффузии проводится на дискретном уровне при исследовании ρ-устойчивости соответствующих разностных схем.

8.1.3. Дифференциально-разностная задача

Для численного решения нестационарной задачи конвекции–диффузии в прямоугольнике Ω будем использовать равномерную прямоугольную сетку

$$\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}.$$

Определим на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на $\partial\omega$ $(\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega)$, гильбертово пространство $H = L_2(\omega)$ со скалярным произведением и нормой

$$(y, w) \equiv \sum_{\mathbf{x}\in\omega} y\left(\mathbf{x}\right) w\left(\mathbf{x}\right) h_1 h_2, \quad \|y\| \equiv (y, y)^{1/2}.$$

Для достаточно гладкого коэффициента $k(\mathbf{x})$ с погрешностью $O(|h|^2)$ на гладких решениях задачи конвекции–диффузии аппроксимируем дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ разностным

$$D = \sum_{\alpha=1}^{2} D^{(\alpha)}, \quad D^{(\alpha)} y = -\left(a^{(\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha}, \ \alpha = 1, 2, \ \mathbf{x} \in \omega, \tag{8.19}$$

положив, например,

$$a^{(1)}\left(\mathbf{x}\right) = k\left(x_1 - 0,5h_1, x_2\right), \quad a^{(2)}\left(\mathbf{x}\right) = k\left(x_1, x_2 - 0,5h_2\right).$$

Для одномерных разностных операторов $D^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ имеем

$$D = D^* \geq \delta E, \quad D \leq \Delta E, \tag{8.20}$$

где

$$\delta = 8\kappa \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{l_\alpha^2}, \quad \Delta = 4\bar{\kappa} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{h_\alpha^2}.$$

Конвективные слагаемые в уравнении конвекции–диффузии аппроксимируем со вторым порядком на основе использования центральных разностных производных и сдвинутых (разнесенных) сеток для задания компонент скорости. Преимущества таких аппроксимаций обсуждались нами выше при рассмотрении аддитивных разностных схем для уравнения переноса.

Для недивергентного оператора конвективного переноса положим

$$C_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_1^{(\alpha)}, \tag{8.21}$$

где

$$C_1^{(1)} y = \frac{1}{2} \left(b^{(1)} (x_1 - 0,5h_1, x_2)\, y_{\bar{x}_1} + b^{(1)} (x_1 + 0,5h_1, x_2)\, y_{x_1} \right),$$

$$C_1^{(2)} y = \frac{1}{2} \left(b^{(2)} (x_1, x_2 - 0,5h_2)\, y_{\bar{x}_2} + b^{(2)} (x_1, x_2 + 0,5h_2)\, y_{x_2} \right).$$

В простейшем случае достаточно гладких компонент скорости и решения дифференциальной задачи положим, например, $b_\alpha(\mathbf{x}) = v_\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha = 1, 2$.

Для уравнения конвекции–диффузии с конвективными слагаемыми в дивергентной форме используется разностный оператор

$$C_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_2^{(\alpha)}, \tag{8.22}$$

где теперь

$$C_2^{(1)} y = \frac{1}{2h_1} b^{(1)} (x_1 + 0,5h_1, x_2) \left(y(x_1 + h_1, x_2) + y(x_1, x_2) \right) -$$

$$- \frac{1}{2h_1} b^{(1)} (x_1 - 0,5h_1, x_2) \left(y(x_1 - h_1, x_2) + y(x_1, x_2) \right),$$

$$C_2^{(2)} y = \frac{1}{2h_2} b^{(2)} (x_1, x_2 + 0,5h_2) \left(y(x_1, x_2 + h_2) + y(x_1, x_2) \right) -$$

$$- \frac{1}{2h_2} b^{(1)} (x_1, x_2 - 0,5h_2) \left(y(x_1, x_2 - h_2) + y(x_1, x_2) \right).$$

Для оператора

$$C_0 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

получим представление

$$C_0 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_0^{(\alpha)}, \tag{8.23}$$

в котором

$$C_0^{(1)} y = \frac{1}{2h_1} b^{(1)}(x_1 + 0,5h_1, x_2)\, y(x_1 + h_1, x_2) -$$

$$-\frac{1}{2h_1} b^{(1)}(x_1 - 0,5h_1, x_2)\, y(x_1 - h_1, x_2),$$

$$C_0^{(2)} y = \frac{1}{2h_2} b^{(2)}(x_1, x_2 + 0,5h_2)\, y(x_1, x_2 + h_2) -$$

$$-\frac{1}{2h_2} b^{(1)}(x_1, x_2 - 0,5h_2)\, y(x_1, x_2 - h_2).$$

Непосредственно убеждаемся, что, как и в непрерывном случае,

$$C_1^* = -C_2, \quad C_0 = -C_0^*.$$

Разностным аналогом неравенства (8.13), (8.14) является неравенство

$$|(Cy, y)| \le M_\beta \|y\|^2, \tag{8.24}$$

в котором

$$M_\beta = \begin{cases} 0, & \beta = 0, \\ \frac{1}{2} \max\limits_{\mathbf{x}\in\omega} |\mathrm{div}_h \mathbf{b}|, & \beta = 1, 2. \end{cases} \tag{8.25}$$

Здесь разностный оператор дивергенции определяется следующим образом:

$$\mathrm{div}_h \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^{2} \mathrm{div}_h \mathbf{b}_\alpha,$$

где

$$\mathrm{div}_h \mathbf{b}_1 = \frac{1}{h_1}\left(b^{(1)}(x_1 + 0,5h_1, x_2) - b^{(1)}(x_1 - 0,5h_1, x_2)\right),$$

$$\operatorname{div}_h \mathbf{b}_2 = \frac{1}{h_2}\left(b^{(2)}\left(x_1, x_2 + 0,5h_2\right) - b^{(2)}\left(x_1, x_2 - 0,5h_2\right)\right).$$

Имеет место также и разностный аналог неравенства подчиненности (8.15)

$$\|Cy\|^2 \le \overline{M}_\beta\left(Dy, y\right), \quad \beta = 0, 1, 2 \tag{8.26}$$

с постоянными $\overline{M}_\beta$, $\beta = 0, 1, 2$, которые согласованы с постоянными $\overline{\mathcal{M}}_\beta$, $\beta = 0, 1, 2$ для дифференциальной задачи. Например, для недивергентного оператора конвективного переноса имеем

$$\overline{M}_1 = \frac{2}{\kappa}\max\left\{\max_{\mathbf{x}\in\tilde{\omega}}\left(b^{(1)}\left(x_1 - 0,5h_1, x_2\right)\right)^2,\right.$$

$$\left.\max_{\mathbf{x}\in\tilde{\omega}}\left(b^{(2)}\left(x_1, x_2 - 0,5h_2\right)\right)^2\right\}.$$

Постоянные подчиненности $\overline{M}_\beta$, $\beta = 0, 1, 2$, невзирая на их громоздкость, демонстрируют принципиальную независимость этой постоянной от расчетной сетки. Постоянная $\overline{M}_\beta$, $\beta = 0, 1, 2$ зависит от величины коэффициентов конвективного переноса $v_\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha = 1, 2$ (скорости) и от $\operatorname{div}\mathbf{v}$, точнее, от их разностных аппроксимаций.

8.1.4. Разностные схемы для задач конвекции–диффузии

Ограничимся рассмотрением задачи конвекции–диффузии (8.2), (8.3), (8.5), т.е. вариантом записи конвективных слагаемых в симметричной форме. После дискретизации по пространству приходим к решению дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{dy}{dt} + C\left(t\right)y + Dy = \varphi\left(t\right), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad t > 0 \tag{8.27}$$

с начальным условием

$$y\left(\mathbf{x}, 0\right) = u^0\left(\mathbf{x}\right), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{8.28}$$

Запишем для (8.27), (8.28) двухслойную разностную схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + C_0\left(\sigma_1 y_{n+1} + \left(1 - \sigma_1\right)y_n\right) +$$

$$+D\left(\sigma_2 y_{n+1} + \left(1 - \sigma_2\right)y_n\right) = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{8.29}$$

которая дополняется начальным условием (8.28).

Для исследования устойчивости запишем схему (8.29) в каноническом виде

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=\varphi_n, \quad n=0,1,... \tag{8.30}$$

Здесь сеточные операторы B и A имеют вид

$$B=E+\sigma_1\tau C_0+\sigma_2\tau D, \quad A=C_0+D. \tag{8.31}$$

Схема с весами характеризуется тем, что оба оператора (A и B) являются несамосопряженными.

Рассмотрим класс схем (8.30), (8.31), когда веса одинаковы

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma. \tag{8.32}$$

Теорема 8.2. Разностная схема (8.28), (8.29), (8.32) устойчива по начальным данным в H при

$$\tau\le\tau_0=\frac{1}{\nu\,(0,5-\sigma)}, \tag{8.33}$$

где

$$\nu=2\overline{M}_0+2k\Delta, \tag{8.34}$$

а постоянные $\overline{M}_0$ и Δ определены согласно (8.26) и (8.20).

Доказательство. В силу (8.31), (8.32) имеем

$$B=E+\sigma\tau A, \quad A\ne A^*. \tag{8.35}$$

Разностная схема с весами (8.30), (8.35) с $A>0$ является устойчивой по начальным данным в H (см. теорему 1.9) при выполнении операторного неравенства

$$A+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau A^*A\ge 0. \tag{8.36}$$

Очевидно, что неравенство (8.36) будет справедливо при $\sigma\ge 0,5$, т.е. в этом случае разностная схема абсолютно устойчива, а при $\sigma<0,5$ условно устойчива. Предположим, что имеет место оценка

$$||Ay||^2\le\nu\,(Ay,y)\,. \tag{8.37}$$

Тогда неравенство (8.36) будет справедливо при

$$\sigma\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu\tau},$$

или при выполнении (8.33). Конкретизируем условия (8.37) при использовании схемы (8.29). С учетом оценки оператора диффузии сверху (8.20) и неравенства подчиненности (8.26) имеем

$$\|Ay\|^2 = \|(C_0 + D)\,y\|^2 \le 2\left(\|C_0 y\|^2 + \|Dy\|^2\right) \le$$

$$\le 2\overline{M}_0\,(Dy, y) + 2k\Delta\,(Dy, y)\,.$$

Принимая во внимание кососимметричность оператора C_0, получим для постоянной ν выражение (8.34), т.е. постоянная $\nu = O(h_1^{-2} + h_2^{-2})$ и зависит от самой скорости конвективного переноса. Из (8.33), (8.34) следуют, например, достаточные условия устойчивости явной схемы ($\sigma = 0$). ■

Среди схем с весами (8.28), (8.29) заслуживает отдельного рассмотрения схема, когда конвективные слагаемые берутся с предыдущего временного слоя, т.е.

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma. \tag{8.38}$$

В явно-неявной схеме (8.29), (8.38) на верхний временной слой выносится только симметричный оператор диффузии

$$B = E + \sigma\tau D, \quad A = C_0 + D. \tag{8.39}$$

Теорема 8.3. Для разностной схемы (8.28), (8.29), (8.38) при $\sigma \ge 0,5$ верна оценка

$$(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \le \left(1 + \overline{M}_0\tau\right)(Dy_n, y_n) + \tau\|\varphi_n\|^2. \tag{8.40}$$

Доказательство. Для доказательства скалярно умножим (8.29) на $2\tau y_t = 2(y_{n+1} - y_n)$ и, учитывая (8.39), получим энергетическое тождество

$$\tau\left((2B - \tau D)\,y_t, y_t\right) + (Dy_{n+1}, y_{n+1}) - (Dy_n, y_n) +$$

$$+2\tau\,(Cy_n, y_t) = 2\tau\,(\varphi_n, y_t)\,. \tag{8.41}$$

Принимая во внимание представления (8.39) и условие $\sigma \ge 0,5$, получим из (8.41) неравенство

$$2\tau\,(y_t, y_t) + (Dy_{n+1}, y_{n+1}) - (Dy_n, y_n) \le$$

$$\le 2\tau|-(Cy_n, y_t)\,| + 2\tau|\varphi_n, y_t|. \tag{8.42}$$

Первый член правой части оценивается с учетом неравенства подчиненности (8.26) следующим образом:

$$|-(Cy_n, y_t)| \le \frac{1}{2}\|y_t\|^2 + \frac{1}{2}\|Cy_n\|^2 \le \frac{1}{2}\|y_t\|^2 + \frac{\overline{M}_0}{2}(Dy_n, y_n).$$

Для второго члена правой части имеем

$$|(\varphi_n, y_t)| \le \frac{1}{2}\|y_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi_n\|^2.$$

Подстановка в (8.42) дает искомую оценку устойчивости (8.40). ■

Оценка ρ-устойчивости (8.40) полностью согласуется с соответствующей оценкой для дифференциальной задачи (см. (8.17)). Совершенно аналогично рассматриваются явно-неявные разностные схемы для задач конвекции–диффузии с конвективными слагаемыми в недивергентной и дивергентной формах.

8.1.5. Схемы расщепления

Приведем примеры аддитивных разностных схем при расщеплении по физическим процессам. Уравнение (8.27) запишем в виде

$$\frac{dy}{dt} + Ay = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad t > 0. \tag{8.43}$$

Для оператора A имеет место аддитивное представление

$$A^{(1)} = C_0, \quad A^{(2)} = D, \tag{8.44}$$

причем

$$A^{(\alpha)} \ge 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Для задачи (8.28), (8.43) при двухкомпонентном расщеплении (8.44) с учетом отмеченных свойств операторов конвективного и диффузионного переносов (их неотрицательность) можно использовать все основные классы аддитивных разностных схем. С учетом того, что каждому отдельному операторному слагаемому $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ приписывается вполне конкретное прикладное значение (физический смысл), о расщеплении (8.44) говорят как о расщеплении по физическим процессам.

Для примера рассмотрим схему переменных направлений для задачи (8.28), (8.43). С учетом расщепления (8.44) получим

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{0,5\tau} + C_0(t_{n+1/2})\, y_{n+1/2} + Dy_n = \varphi_n, \tag{8.45}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{0,5\tau} + C_0\left(t_{n+1/2}\right) y_{n+1/2} + D y_{n+1} = \varphi_n, \tag{8.46}$$

где $\varphi_n = f(\mathbf{x}, t_{n+1/2})$. На первом полушаге на верхний слой выносится конвективный перенос, на втором — диффузионный.

Рассматриваемая аддитивная схема (8.45), (8.46) сходится со вторым порядком по времени и пространству. Для разностного решения (см. теорему 2.1) справедлива априорная оценка

$$\left\|\left(E + \frac{\tau}{2}D\right) y_{n+1}\right\| \le \left\|\left(E + \frac{\tau}{2}D\right) y_0\right\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\varphi_k\|,$$

которая является основной при исследовании сходимости.

Идея решения задачи конвекции–диффузии как последовательности поочередного решения отдельных задач конвекции и диффузии наиболее ярко прослеживается при использовании схем покомпонентного расщепления. В этом случае можно ориентироваться на применение разностной схемы расщепления по физическим процессам

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} + C_0\left(t_{n+1/2}\right)\left(\sigma_1 y_{n+1/2} + (1-\sigma_1) y_n\right) = 0, \tag{8.47}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{\tau} + D\left(\sigma_2 y_{n+1} + (1-\sigma_2) y_{n+1/2}\right) = \varphi_n. \tag{8.48}$$

Переход на новый временной слой осуществляется в два этапа. Сначала (см. (8.47)) осуществляется чистый конвективный перенос, а затем (см. (8.48)) рассчитывается изменение решения за счет диффузии и источника (правой части).

При $\sigma_\alpha \ge 0,5$, $\alpha = 1,2$ для задачи (8.47), (8.48) получим оценку устойчивости

$$\|y_{n+1}\| \le \|y_0\| + \frac{\tau}{2}\|\varphi_n\|_{D^{-1}},$$

которая является разностным аналогом оценки (8.16) для решения дифференциальной задачи. Исследование сходимости проводится по общей схеме рассмотрения аддитивных схем покомпонентного расщепления.

Отметим, что явно-неявная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + C_0 y_n + D y_{n+1} = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

может интерпретироваться как аддитивная схема покомпонентного расщепления (8.47), (8.48) при $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ — явный конвективный перенос и чисто неявный диффузионный перенос.

Подобным образом рассматриваются и другие классы аддитивных разностных схем для задач конвекции–диффузии. Это относится, в частности, к задачам конвекции–диффузии с оператором конвекции в дивергентной и недивергентной формах. Среди возможных обобщений отметим построение экономичных (локально-одномерных) схем в сочетании с расщеплением по физическим процессам.

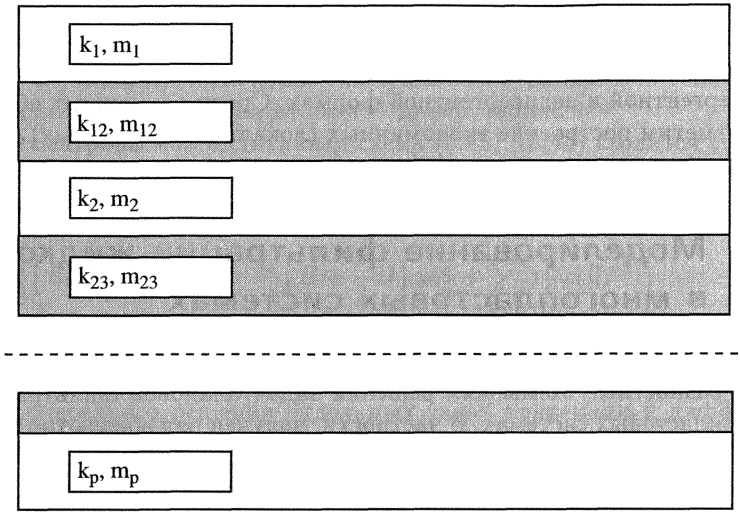
8.2. Моделирование фильтрации жидкости в многопластовых системах

На основе общих результатов теории разностных схем анализируются разностные схемы для решения задач плановой фильтрации в многопластовых системах. В частности, получен ряд абсолютно устойчивых аддитивных разностных схем, реализация которых не связана с существенной переработкой программного обеспечения, имеющегося для численного решения задач фильтрации в однопластовых системах.

8.2.1. Постановка задачи

Моделирование фильтрации жидкости для практических нужд основывается чаще всего на использовании площадных моделей (фильтрация в плане) [15, 29]. В этом случае используются приближения с осреднением фильтрационных потоков по толщине водоносного слоя. Типичной является ситуация, когда отдельные водоносные слои перемежаются слабопроницаемыми пластами. Математические модели **фильтрации в многопластовых системах** строятся на основе предположения (модель Митяева–Гиринского) о преимущественном продольном течении жидкости в водоносных слоях и поперечном течении в разделяющих слоях. Эти математические модели могут быть обоснованы на основе теории гомогенизации [30]. Для численного решения задач плановой фильтрации используются различные подходы [24]. Простейший из них состоит в использовании обычных разностных схем с весами (например, чисто неявной схемы) для параболической связанной системы уравнений для напора в каждом водоносном слое.

Решение соответствующей системы может базироваться на использовании того или иного итерационного процесса, в основе которого лежит идея определения напора в каждом слое отдельно. Могут также строиться разностные схемы расщепления по пространственным



Сечение многопластовой системы

переменным. Для многопластовых систем реализация такого подхода связана с использованием матричной прогонки, что, конечно, значительно усложняет расчетные схемы.

Рассматривается модельная краевая задача о плановой фильтрации в многопластовой системе, состоящей (см. рисунок) из p водоносных слоев, которые разделяются слабопроницаемыми слоями. Ограничимся для примера случаем, когда все эти слои горизонтальны. Обобщение на случай произвольных слоев носит в значительной мере редакционный характер. Напор в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ слоя α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ на момент времени t обозначим $H^\alpha(\mathbf{x}, t)$. Пусть $k_\alpha = k_\alpha(\mathbf{x})$ — коэффициент фильтрации, m_α — мощность водопроницаемого слоя α, $T_\alpha = k_\alpha m_\alpha$ – водопроницаемость, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(\mathbf{x})$ — упругая емкость пласта. Соответственно $k_{\alpha,\beta} = k_{\alpha,\beta}(\mathbf{x})$, $\beta = \alpha+1, \alpha-1$ — коэффициент фильтрации, $m_{\alpha,\beta}$ — мощность слабопроницаемого пласта, $\chi_{\alpha,\beta}$ — коэффициент перетока.

Считая выполненными предположения перетока $k_\alpha/m_\alpha \ll \ll k_{\alpha,\beta}/m_{\alpha,\beta}$, будем использовать для описания фильтрации в каж-

дом водопроницаемом пласте α, $\alpha = 2, 3, \ldots, p-1$ уравнение

$$\mu_\alpha \frac{\partial H^{(\alpha)}}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_\alpha \frac{\partial H^{(\alpha)}}{\partial x_\beta} - \chi_{\alpha,\alpha+1} \left(H^{(\alpha+1)} - H^{(\alpha)} \right) -$$

$$-\chi_{\alpha,\alpha-1} \left(H^{(\alpha-1)} - H^{(\alpha)} \right) = f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t),$$

$$\alpha.\ \alpha = 2, 3, \ldots, p-1, \tag{8.49}$$

где $f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)$ — источник жидкости. Для нижнего и верхнего пластов имеем

$$\mu_1 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_1 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial x_\beta} - \chi_{1,2} \left(H^{(2)} - H^{(1)} \right) +$$

$$+\chi_{1,0} H^{(1)} = f^{(1)}(\mathbf{x}, t), \tag{8.50}$$

$$\mu_p \frac{\partial H^{(p)}}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_p \frac{\partial H^{(p)}}{\partial x_\beta} + \chi_{p,p+1} H^{(p)} -$$

$$-\chi_{p,p-1} \left(H^{(p-1)} - H^{(p)} \right) = f^{(p)}(\mathbf{x}, t). \tag{8.51}$$

Уравнения (8.50), (8.51) при $\chi_{1,0} = 0$, $\chi_{p,p+1} = 0$ соответствуют предположению о том, что верхний и нижний пласты ограничены водоупором.

В силу закона сохранения масс в (8.49) — (8.51) имеем

$$\chi_{\alpha,\alpha+1} = \chi_{\alpha,\alpha+1}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{8.52}$$

Система уравнений (8.49) — (8.51) рассматривается в некоторой расчетной области Ω. Для простоты ограничимся случаем, когда Ω — прямоугольник

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}.$$

Граничные условия возьмем в простейшем виде

$$H^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{8.53}$$

Осталось выписать начальные условия

$$H^{(\alpha)}(\mathbf{x}, 0) = H_0^{(\alpha)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{8.54}$$

Краевая задача (8.49) — (8.54) представляет собой наиболее простой пример краевой задачи для связанных параболических уравнений. В нашем случае связь одного уравнения системы с другим осуществляется с помощью коэффициентов $\chi_{\alpha,\alpha\pm1}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Такие постановки типичны и для многих других прикладных задач.

8.2.2. Дифференциально-разностная задача

Введем некоторые обозначения. Пусть вектор

$$U = U(\mathbf{x}, t) = \{H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(p)}\}$$

есть решение задачи (8.49) — (8.54), а

$$F = F(\mathbf{x}, t) = \{f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(p)}\}.$$

Определим через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{Q}$ диагональные матрицы

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{\mu_\alpha(\mathbf{x})\,\delta_{\alpha,\beta}\}, \\ \mathcal{Q} &= \{T_\alpha(\mathbf{x})\,\delta_{\alpha,\beta}\}, \end{aligned} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p, \tag{8.55}$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ — трехдиагональная матрица, соответствующая перетоку через разделяющие слои

$$\mathcal{K} = \{\eta_{\alpha,\beta}\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p, \tag{8.56}$$

причем

$$\eta_{\alpha,\alpha-1} = -\chi_{\alpha,\alpha-1}, \quad \eta_{\alpha,\alpha+1} = -\chi_{\alpha,\alpha+1},$$

$$\eta_{\alpha,\alpha} = \chi_{\alpha,\alpha-1} + \chi_{\alpha,\alpha+1}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{8.57}$$

Наконец определим

$$\mathcal{L}U = -\sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\beta}. \tag{8.58}$$

Принимая во внимание (8.55) — (8.57) запишем систему уравнений (8.49) — (8.51) в виде

$$\mathcal{M}\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{L}U + \mathcal{K}U = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{8.59}$$

Граничные и начальные условия (8.53), (8.54) в аналогичных обозначениях принимают вид

$$U(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{8.60}$$

$$U(\mathbf{x}, 0) = U^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{8.61}$$

Введем гильбертово пространство $\mathcal{H}$, в котором скалярное произведение определяется выражением

$$(U, V) = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}\right) = \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{\Omega} u^{(\alpha)}(\mathbf{x})\, v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

С учетом (8.58), (8.60) легко устанавливается положительность оператора $\mathcal{L}$, так как

$$(\mathcal{L}U, U) = \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{\Omega} T_\alpha(\mathbf{x}) \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial x_\beta} d\mathbf{x} > 0.$$

Кроме того, этот оператор самосопряжен ($\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$).

Аналогично в силу (8.57) (диагональное преобладание) в общем случае имеем $\mathcal{K} \geq 0$, а соотношения (8.52) обеспечивют $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}$. При более жестких ограничениях $\chi_{1,0} > 0$ и/или $\chi_{p,p+1} > 0$ получим $\mathcal{K} > 0$. Очевидны аналогичные свойства оператора $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} > 0$ в $\mathcal{H}$.

Определим норму в пространстве, порожденном оператором $\mathcal{M}$, соотношением: $\|U\|^2_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}U, U)$. Тогда, умножая уравнение (8.59) скалярно на U, для решения задачи (8.59) — (8.61) получим оценку

$$\|U(\mathbf{x}, t)\|_{\mathcal{M}} \leq \|U^0(\mathbf{x})\|_{\mathcal{M}} + \int_0^t \|F(bfx, \theta)\|_{\mathcal{M}^{-1}} d\theta. \tag{8.62}$$

Естественно для разностного аналога задачи (8.59) — (8.61) требовать выполнения оценки устойчивости разностного решения типа (8.62).

Рассмотрим вначале вопросы аппроксимации по пространственным переменным. В прямоугольнике Ω введем равномерную прямоугольную сетку с шагами h_1 и h_2

$$\bar{\omega} = \omega + \partial\omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,$$
$$i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\},$$

где ω — множество внутренних, а $\partial\omega$ — множество граничных узлов сетки.

Считая решение задачи, коэффициенты уравнения, правую часть и начальные условия достаточно гладкими, поставим в соответствие задаче (8.59) — (8.61) дифференциально-разностную задачу для определения приближенного решения

$$M\frac{\partial V}{\partial t} + LV + KV = F(\mathbf{x}, t), \tag{8.63}$$

$$V(\mathbf{x},0) = U^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{8.64}$$

В стандартных безындексных обозначениях теории разностных схем разностный оператор L определим следующим образом:

$$LV = -\sum_{\beta=1}^{2} \left(\Theta_\beta^{(\alpha)} V_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\beta}, \tag{8.65}$$

где, например,

$$\Theta_1^{(\alpha)}(x_1,x_2) = T_\alpha(x_1 - 0,5h_1, x_2),$$

$$\Theta_2^{(\alpha)}(x_1,x_2) = T_\alpha(x_1, x_2 - 0,5h_2).$$

В сеточном гильбертовом пространстве H скалярное произведение зададим в виде

$$(V,Y) = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(v^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right) = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\mathbf{x}\in\omega} v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\, y^{(\alpha)}(\mathbf{x})\, h_1 h_2.$$

В H имеем

$$M = M^* > 0, \quad L = L^* > 0, \quad K = K^* \geq 0.$$

На основании отмеченных свойств операторов и результатов общей теории устойчивости разностных схем далее строятся безусловно устойчивые разностные схемы для приближенного решения дифференциально-разностной задачи (8.63), (8.64). Устойчивость устанавливается в H_M, когда $(V,Y)_M = (MV,Y)$. Мы ограничимся в своем исследовании устойчивостью разностного решения по отношению к возмущению начальных условий (в уравнении (8.63) положим $F(\mathbf{x},t) = 0$). Переход к более общему случаю (устойчивость и по правой части) осуществляется обычным образом.

8.2.3. Разностные схемы

Введем по временной переменной равномерную сетку с шагом $\tau > 0$. Приближенное решение задачи (8.63), (8.64) в момент времени t_n обозначим Y_n. Отметим, что операторы M, L и K — постоянные (не зависят от n).

Для задачи (8.63), (8.64) отметим прежде всего класс двухслойных разностных схем с весами. В этом случае (напомним, что в (8.63) правая часть равна нулю) имеем

$$M\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\tau} + (L+K)(\sigma Y_{n+1} + (1-\sigma)Y_n) = 0 \tag{8.66}$$

при заданном Y_0 (см. (8.64)).

Запишем схему с весами (8.66) в каноническом виде двухслойной разностной схемы

$$B\frac{Y_{n+1}-Y_n}{\tau}+AY_n=0,\quad n=0,1,\ldots \tag{8.67}$$

Для операторов B и A из (8.66) имеем

$$B=M+\sigma A,\quad A=L+K. \tag{8.68}$$

В силу отмеченных выше свойств операторов L и K можем заключить, что $A=A^*>0$. Как показано в теореме 1.2, устойчивость схемы (8.67), (8.68) в H будет иметь место при выполнении неравенства

$$M+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau A\geq 0. \tag{8.69}$$

При выполнении (8.69) справедлив разностный аналог оценки (8.62)

$$\|Y_{n+1}\|_M\leq\|Y_n\|,\quad n=0,1,\ldots \tag{8.70}$$

Специально отметим, что условия (8.69) являются необходимыми и достаточными. Из (8.69) следует, что устойчивость будет иметь место для всех $\sigma\geq 0,5$.

Безусловно устойчивые ($\sigma\geq 0,5$) разностные схемы (8.67), (8.68) характеризуются необходимостью обращения сеточного оператора B на каждом временном шаге и в общем контексте разностная схема (8.66) не очень удобна для вычислительной реализации.

Естественным является направление построения разностных схем, для которых расчет напора на отдельном слое не был бы жестко связан, как в случае схемы (8.66) при $\sigma\neq 0$, с расчетом напора на других водоносных слоях. Обсудим возможности построения таким образом ориентированных разностных схем расщепления с позиций общей теории разностных схем.

Для приближенного решения задачи (8.63), (8.64) можно использовать различные варианты аддитивных разностных схем. Простейшие из них связаны с естественным расщеплением оператора A на два (см. (8.68))

$$A=A^{(1)}+A^{(2)},\quad A^{(1)}=L,\quad A^{(2)}=K.$$

Соответствующая аддитивная схема многокомпонентного расщепления приводит к схеме

$$M\frac{Y_{n+1/2}-Y_n}{\tau}+L\left(\sigma_1Y_{n+1/2}+(1-\sigma_1)Y_n\right)=0, \tag{8.71}$$

$$M\frac{Y_{n+1}-Y_{n+1/2}}{\tau}+K\left(\sigma_2 Y_{n+1}+(1-\sigma_2)\,Y_{n+1/2}\right)=0. \qquad (8.72)$$

На первом полушаге (см. (8.71)) рассматривается перенос жидкости в водоносных пластах, а на втором ((8.72)) — переток через разделяющие слабопроницаемые слои. В таком контексте схема суммарной аппроксимации, естественно, трактуется как схема расщепления по физическим процессам.

Аналогично схеме (8.66) устанавливается устойчивость схемы суммарной аппроксимации (8.71), (8.72) при $\sigma_\alpha \geq 0,5$, $\alpha = 1,2$. Ее реализация связана с решением стандартных сеточных эллиптических задач для каждого отдельного слоя и с учетом перетока. Например, для определения Y_{n+1} при известном $Y_{n+1/2}$ из (8.72) при $\sigma_2 = 1$ в каждом пространственном узле решается алгебраическая задача

$$(M+\tau K)\,Y_{n+1}=Y_{n+1/2}.$$

Тем самым необходимо определить решение системы линейных алгебраических уравнений с симметричной трехдиагональной матрицей. С этой целью используется обычная трехточечная прогонка (метод исключения Гаусса). Вычислительная устойчивость обеспечивается диагональным преобладанием.

Таким образом, этап (8.72) схемы суммарной апроксимации (8.71), (8.72). связанный с учетом перетока, незначительно усложняет вычислительный алгоритм по сравнению с моделированием фильтрации в однопластовых системах и является экономичным (число арифметических действий, отнесенных к одному узлу, при переходе на новый временной слой не зависит от общего числа узлов).

Можно провести более глубокое расщепление оператора задачи. Представим оператор K в виде

$$K=K^{(1)}+K^{(2)}, \quad \left(K^{(1)}\right)^*=K^{(2)},$$

т.е. трехдиагональная матрица K расщепляется на нижнюю и верхнюю. Такое расщепление типично для схем попеременно-треугольного метода. Положим

$$A=A^{(1)}+A^{(2)}, \quad A^{(1)}=\frac{1}{2}L+K^{(1)}, \quad A^{(2)}=\frac{1}{2}L+K^{(2)},$$

тогда $(A^{(1)})^*=A^{(2)}$.

Аддитивная схема переменных направлений при таком расщеплении имеет вид

$$M\frac{Y_{n+1/2}-Y_n}{0,5\tau}+L\frac{1}{2}\left(Y_{n+1/2}+Y_n\right)+K^{(1)}Y_{n+1/2}+K^{(2)}Y_n=0,$$

$$M\frac{Y_{n+1}-Y_{n+1/2}}{0,5\tau}+L\frac{1}{2}\left(Y_{n+1}+Y_{n+1/2}\right)+$$
$$+K^{(1)}Y_{n+1/2}+K^{(2)}Y_{n+1}=0.$$

Эта аддитивная схема попеременно-треугольного метода сходится со вторым порядком по τ, а ее реализация снова связана с решением подзадач на отдельных слоях.

8.3. Разностные схемы для задач гидродинамики в переменных "функция тока, вихрь скорости"

Для двухмерных нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости используются переменные "функция тока, вихрь скорости". На основе аддитивных схем переменных направлений предложены [8, 79] линеаризованные по конвективному переносу разностные схемы. Для разностного решения справедлива априорная оценка без каких-либо ограничений на сеточные параметры. Особенностью схем, помимо специального выбора аппроксимаций конвективных слагаемых, является безытерационная реализация граничных условий для вихря. Переход на новый временной слой связан с решением линейных сеточных эллиптических уравнений для функции тока и вихря скорости.

8.3.1. Дифференциальная задача

Численное моделирование динамики несжимаемой жидкости и процессов тепло- и массообмена часто проводится на основе использования функции тока и вихря скорости [86, 98, 101]. В настоящее время имеется большое многообразие разностных схем для реализации такого подхода. При этом основное внимание уделяется проблемам аппроксимации конвективных слагаемых, граничным условиям для вихря. Успехи в разработке вычислительных алгоритмов подобного класса достигаются не только на теоретической проработке материала, но и на пути большой экспериментальной методической работы.

Рассматривается задача о нестационарном течении несжимаемой жидкости в полости прямоугольного течения под действием объемно распределенной силы. В прямоугольнике

$$\Omega=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}=(x_1,x_2)\,,\ 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$$

компоненты скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и нормализованное на плотность давление p определяются из уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})\,\mathbf{v} + \operatorname{grad} p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$
$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \tag{8.73}$$

где Re — число Рейнольдса (безразмерный параметр задачи), $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ — вектор объемных сил, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{v})$ — оператор конвективного переноса, Δ — двухмерный оператор Лапласа. Уравнение (8.73) дополняется уравнением несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{8.74}$$

Границы полости $\partial\Omega$ считаются твердыми и неподвижными и поэтому условия прилипания и непротекания приводят к граничным условиям

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0. \tag{8.75}$$

Пусть в начальный момент жидкость покоится и поэтому

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{8.76}$$

Задача (8.73) — (8.76) полностью описывает движение жидкости в сечении Ω на любой момент времени $t > 0$.

Вычислительный алгоритм строится на основе использования функции тока и вихря скорости. Компоненты скорости выражаются через **функцию тока** $\psi(\mathbf{x}, t)$ следующим образом:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \tag{8.77}$$

поэтому условие несжимаемости (8.77) всегда выполнено. Для **вихря скорости** имеем

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \tag{8.78}$$

С учетом (8.77), (8.78) уравнение движения (8.73) дает следующее уравнение для вихря скорости:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})\,w - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta w = \varphi(\mathbf{x}, t),$$
$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \tag{8.79}$$

где

$$\varphi = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

Для функции тока получим уравнение Пуассона

$$-\Delta\psi = w, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{8.80}$$

Система уравнений дополняется (см. (8.75), (8.76)) граничными и начальными условиями

$$\psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{8.81}$$

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{8.82}$$

где ν — внешняя нормаль.

В (8.79) конвективный член записывается с учетом определения компонент скорости согласно (8.77). Например, для конвективного слагаемого, определяемого (дивергентная форма) согласно

$$\mathcal{V}(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{2} \mathcal{V}^{(\alpha)}(v_\alpha), \quad \mathcal{V}^{(\alpha)}(v_\alpha)\, w = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha w), \quad \alpha = 1, 2, \tag{8.83}$$

получим

$$\mathcal{V}^{(1)}(v_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} w\right), \quad \mathcal{V}^{(2)}(v_2) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} w\right). \tag{8.84}$$

При таком определении конвективного слагаемого имеем

$$(\mathcal{V}(\mathbf{v})\, w, \psi) = 0. \tag{8.85}$$

Для задачи (8.79) — (8.82)) с учетом (8.85) получим простейшую априорную оценку. Пусть $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Домножая уравнение (8.79) скалярно на ψ, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{grad}\psi\|^2 \le \frac{1}{\mathrm{Re}}\|w\|^2 + 2\|\mathbf{f}\|\,\|\operatorname{grad}\psi\|.$$

Отсюда имеем искомую оценку

$$\|\operatorname{grad}\psi(\mathbf{x}, t)\| \le \|\operatorname{grad}\psi(\mathbf{x}, 0)\| + 2\int_0^t \|\mathbf{f}(\mathbf{x}.s)\, ds. \tag{8.86}$$

Оценка (8.86), выражающая ограниченность решения задачи (8.79) — — (8.82), будет служить ориентиром при построении разностных схем.

8.3.2. Дискретизация по пространству

Для приближенного решения задачи (8.79) — (8.82) применяются разностные методы. В Ω введем равномерную по каждому направлению сетку $\bar{\omega} = \omega + \partial\omega$ с шагами h_1 и h_2.

На множестве сеточных функций y, обращающихся в нуль на границе сетки, определим сеточный оператор Лапласа

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda^{(\alpha)} y, \quad \Lambda^{(\alpha)} y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{8.87}$$

В конечномерном сеточном гильбертовом пространстве H скалярное произведение определим выражением

$$(y, z) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega} y(\mathbf{x})\, z(\mathbf{x})\, h_1 h_2.$$

В пространстве H оператор Λ самосопряжен и положительно определен ($\Lambda = \Lambda^* > 0$).

Отдельного внимания заслуживают вопросы аппроксимации конвективных слагаемых. Ориентируясь на использование линеаризованных схем, мы не можем использовать дивергентную форму (8.83), (8.84) для записи конвективного переноса вихря скорости или подобную недивергентную форму в силу того, что трудно рассчитывать на безусловное выполнение сеточного аналога (8.85).

На основании (8.77), (8.78) имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} w &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} w\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} w\right) = \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \psi\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \psi\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\psi\right)\right) + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\psi\right)\right).
\end{aligned}$$

Определим вектор

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}, \quad q_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad q_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \tag{8.88}$$

тогда можем записать конвективный перенос вихря в виде

$$\mathcal{V}(\mathbf{v})\, w = -\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q})\, \psi \equiv -\frac{1}{2}\left(\mathcal{V}(\mathbf{q}) - \mathcal{V}^*(\mathbf{q})\right)\psi. \tag{8.89}$$

При такой записи мы интерпретируем конвективный перенос вихря скорости как некоторый эффективный перенос функции тока. В (8.89) сопряженный оператор с учетом (8.83) имеет вид

$$\mathcal{V}^*(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\mathcal{V}^{(\alpha)}\right)^*(v_\alpha), \quad \left(\mathcal{V}^{(\alpha)}\right)^*(v_\alpha)\, w = -v_\alpha \frac{\partial w}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

и соответствует записи конвективных слагаемых в недивергентной форме. При записи конвективных слагаемых в операторной форме (8.88), (8.89) свойство (8.85) выполнено для любых векторов $\mathbf{q}$.

В соответствии с (8.88), (8.89), используя аппроксимации центральными производными, аппроксимируем конвективные слагаемые следующим образом:

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha=1}^{2} \tilde{V}^{(\alpha)}(q_\alpha), \tag{8.90}$$

где с учетом (8.88)

$$\tilde{V}^{(1)}(q_1)\,\psi = \frac{1}{2}\left(w_{\overset{\circ}{x}_2}\,\psi_{\overset{\circ}{x}_1} + \left(w_{\overset{\circ}{x}_2}\,\psi\right)_{\overset{\circ}{x}_1}\right),$$

$$\tilde{V}^{(2)}(q_2)\,\psi = -\frac{1}{2}\left(w_{\overset{\circ}{x}_1}\,\psi_{\overset{\circ}{x}_2} + \left(w_{\overset{\circ}{x}_1}\,\psi\right)_{\overset{\circ}{x}_2}\right). \tag{8.91}$$

При такой аппроксимации конвективного переноса имеем

$$\left(\tilde{V}(\mathbf{q})\,\psi, \psi\right) = 0, \tag{8.92}$$

т.е. в H оператор $\tilde{V}$ кососимметричен ($\tilde{V} = -\tilde{V}^*$). Более того, кососимметричными будут и операторы $\tilde{V}^{(\alpha)}(q_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$.

Будем использовать для приближенных решений те же обозначения, что и для точных. Аппроксимируем граничные условия (8.81) с использованием обычной формулы Тома для вихря скорости, так что, например, на левой границе области имеем

$$w(0, x_2) = -\frac{2}{h_1^2}\psi(h_1, x_2).$$

Разностная задача записывается во внутренних узлах сетки, и поэтому дискретизация уравнений (8.79), (8.80) по пространству приводит нас к дифференциально-разностному уравнению

$$\frac{d}{dt}\Lambda\psi - \tilde{V}(\mathbf{q})\,\psi + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Lambda^2\psi + \frac{1}{\mathrm{Re}}\rho(\mathbf{x})\,\psi = \varphi(\mathbf{x},t),$$
$$\mathbf{x}\in\Omega,\quad t>0. \tag{8.93}$$

В (8.93) сеточная функция $\rho(\mathbf{x})$ при граничных условиях Тома для вихря скорости определяется соотношением

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{2}\rho_\alpha(x_\alpha),$$

$$\rho_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} 0, & h_\alpha < x_\alpha < l_\alpha - h_\alpha \\ \dfrac{2}{h_\alpha^4}, & x_\alpha = h_\alpha,\ l_\alpha - h_\alpha, \end{cases} \qquad \alpha = 1,2.$$

Учитывая вопросы вычислительной реализации, уравнение (8.93) перепишем в виде

$$\frac{d}{dt}\Lambda\psi + \left(A^{(1)} + A^{(2)}\right)\psi = \varphi, \tag{8.94}$$

где

$$A^{(1)} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Lambda^2,\quad A^{(2)} = -\tilde{V}(\mathbf{q}) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\rho(\mathbf{x})\,E. \tag{8.95}$$

В силу этого

$$A^{(1)} = \left(A^{(1)}\right)^* > 0,\quad A^{(2)} \geq 0$$

при любых $\mathbf{q}$.

8.3.3. Разностные схемы расщепления

Для построения разностной схемы введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$ и пусть $y_n = y(t_n)$, $t_n = n\tau$. Простейшие разностные схемы для уравнения (8.94), (8.95) основаны на естественной линеаризации, когда оператор $\tilde{V}(\mathbf{q})$ определяется решением на предыдущем временном слое. В силу неотрицательности операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2$ можно ориентироваться на различные схемы расщепления: факторизованные разностные схемы, суммарной аппроксимации,

регуляризованные аддитивные и т.д., для которых имеет место безусловная устойчивость для случая расщепления на два неотрицательных оператора. Здесь мы приведем простейшую разностную схему, которая ориентирована прежде всего на безытерационную реализацию граничных условий для вихря.

При использовании чисто неявной факторизованной схемы (аналог схемы Дугласа–Рекфорда) с учетом (8.95) на первом этапе имеем разностное уравнение

$$\frac{\Lambda\psi_{n+1/2} - \Lambda\psi_n}{\tau} - \tilde{V}(\mathbf{q}_n)\,\psi_n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Lambda^2\psi_{n+1/2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\rho(\mathbf{x})\,\psi_n = \varphi_n. \quad (8.96)$$

Тем самым конвективный перенос, граничное условие для вихря берутся с предыдущего временного слоя. С учетом обозначений $w_{n+1/2} = \Lambda_{n+1/2}$ уравнение (8.96) записывается в виде уравнения для вихря скорости

$$\frac{w_{n+1/2} - w_n}{\tau} - \tilde{V}(\mathbf{q}_n)\,\psi_n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Lambda w_{n+1/2} + \\ + \frac{1}{\mathrm{Re}}\rho(\mathbf{x})\,\psi_n = \varphi_n. \quad (8.97)$$

Второй этап состоит в коррекции по конвективному переносу и граничному условию для вихря скорости

$$\frac{\Lambda\psi_{n+1} - \Lambda\psi_{n+1/2}}{\tau} + \left(\rho(\mathbf{x}) - \tilde{V}(\mathbf{q}_n)\right)(\psi_{n+1} - \psi_n) = 0. \quad (8.98)$$

При переходе на новый временной слой вихрь скорости определяется как решение самосопряженной сеточной эллиптической задачи (8.97), а для функции тока получаем несамосопряженную задачу (8.98).

Приведем соответствующую оценку для линеаризованной разностной схемы (8.96) — (8.98). Для их получения достаточно воспользоваться результатами исследования устойчивости факторизованных разностных схем двухкомпонентного расщепления. На основе теоремы 2.2 для разностного решения (8.96) — (8.98) получим

$$\|\psi_{n+1}\|_* \le \|\psi_n\|_* + \tau\|\varphi_n\|_{\Lambda^{-1}}, \quad (8.99)$$

где

$$\|\psi\|_* = \left\|\left(E + \tau\Lambda^{-1}A^{(2)}\right)\psi\right\|_\Lambda.$$

Оценка (8.99) имеет место без каких-либо ограничений на параметры расчетной сетки и является разностным аналогом априорной оценки (8.86).

На основе схемы (8.96) — (8.98) можно строить и другие линеаризованные разностные схемы, ориентированные на повышение точности аппроксимации по времени, учет нелинейности и т.д. В качестве примера отметим схему с дополнительным явным предиктором по нелинейности.

8.4. Задачи гидродинамики в естественных переменных

Ориентируясь на решение общих трехмерных задач, вычислительные алгоритмы приближенного решения уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости строятся на основе использования стандартных естественных переменных "давление, скорость". Основные проблемы численного решения таких задач связаны с расчетом давления, для которого в исходной постановке нет краевой задачи. На основе расщепления по физическим процессам (отделяется перенос, связанный с давлением) строятся эффективные вычислительные алгоритмы, в которых на сеточном уровне формулируется эллиптическая краевая задача для давления. Для простоты изложения мы ограничились двухмерной нестационарной задачей и полностью совмещенной сеткой, когда все расчетные величины определены на единой прямоугольной сетке.

8.4.1. Особенности задач гидродинамики

Рассмотрим модельную задачу для **уравнения Навье-Стокса**. В ограниченной области Ω с твердыми границами исследуется движение несжимаемой жидкости, обусловленное распределенными объемными силами. В естественных переменных "давление, скорость" уравнения движения и неразрывности имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})\,\mathbf{v} + \operatorname{grad} p - \frac{1}{\mathrm{Re}} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{8.100}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \tag{8.101}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, Re — число Рейнольдса, $\mathcal{V}$ — оператор конвективного переноса, который мы запишем в симметричной форме

$$\mathcal{V}(\mathbf{w})\,\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{w} \cdot \operatorname{grad})\,\mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{w}\mathbf{v})\right].$$

Уравнения (8.100), (8.101) дополняются условием для однозначного определения давления

$$\int\limits_{\Omega} p(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = 0, \quad 0 < t \leq T.$$

На твердых границах условия прилипания и непротекания дают

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T. \tag{8.102}$$

Задано также некоторое начальное условие

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{8.103}$$

Основные вычислительные трудности при решении задачи (8.100) — (8.103) порождены несамосопряженностью задачи — прежде всего несамосопряженностью оператора конвективного переноса в (8.104) и проблемами с расчетом давления [76, 101]. Для того чтобы обрисовать пути решения первой проблемы, удобно рассмотреть модельные стационарные и нестационарные задачи для уравнений конвекции–диффузии. Для получения хорошей задачи для давления используются те или иные схемы расщепления по физическим процессам [5, 11, 20, 80, 109] — аналоги классических аддитивных разностных схем для многомерных нестационарных задач.

При построении дискретных аналогов естественно ориентироваться на такие аппроксимации, которые на дискретном уровне сохраняют важнейшие свойства. В этой связи упомянем прежде всего свойство монотонности аппроксимаций конвективно-диффузионного переноса (см., например, [5, 10, 14, 37, 47, 58]). Среди таких свойств необходимо отметить также свойство консервативности разностной схемы — выполнение соответствующего закона сохранения на дискретном уровне. При исследовании уравнений Навье–Стокса для вязкой жидкости принципиальный момент связан с выполнением закона сохранения для кинетической энергии. В частности, члены конвективного переноса в уравнении движения и член, связанный с градиентом давления, не дают вклада в кинетическую энергию — как говорят, энергетически нейтральны. Изменение кинетической энергии в этом случае обусловлено только вязкой диссипацией. При дискретизации уравнений Навье–Стокса мы используем именно энергетически нейтральные аппроксимации для конвективного переноса и переноса за счет давления.

Для моделирования течений несжимаемой жидкости многие проблемы порождены сложностью расчета давления. Для получения задачи для давления применяется безусловно устойчивая (для линейных задач) схема расщепления по физическим процессам, отделяется перенос, обусловленный давлением. В этом случае для разностного решения справедлива априорная оценка, согласованная с соответствующей оценкой для дифференциального решения, которая выполнена при любых шагах по времени и пространству. Для давления получается строго определенная сеточная эллиптическая задача, для которой проблем с разрешимостью или постановкой граничных условий нет.

В рамках отмеченных основных особенностей вычислительных алгоритмов есть произвол, который связан с тем, что мы можем использовать различные типы расчетных сеток. Например, давление и все компоненты скорости могут определяться в одних и тех же узлах единой сетки либо для каждой их этих физических величин можно использовать свою сетку и т.д. Для того чтобы ориентироваться в выборе того или иного типа сеток, помимо теоретического рассмотрения, привлекается вычислительный эксперимент.

8.4.2. Априорная оценка для дифференциальной задачи

Для решения рассматриваемой задачи выполняются некоторые априорные оценки. Мы выделим основную и наиболее простую из них, которая с математической точки зрения выражает оценку нормы решения, а с физической — задает закон изменения кинетической энергии.

Введем гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ функций со скалярным произведением

$$(u, w) = \int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x})\, w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,, \qquad u(\mathbf{x})\,, w(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}$$

и соответствующую норму $||u||$. Для векторов $\mathbf{u}$ определим гильбертово пространство $\mathcal{H}^2$ как прямую сумму $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ со скалярным произведением и нормой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sum_{\alpha=1}^{2} (u_\alpha, w_\alpha)\,, \quad ||\mathbf{u}|| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}\,.$$

Пусть $\mathcal{H}_*^2$ — подпространство $\mathcal{H}^2$, которое состоит из соленоидальных функций, т.е. функций, для которых выполнены условия несжимаемости (8.101).

Перепишем уравнения (8.100), (8.101) в указанном подпространстве как одно уравнение в следующей операторной форме. Будем ориентироваться на операторную формулировку задачи (8.100) — (8.103) в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathcal{V}(\mathbf{v})\,\mathbf{v} + \mathcal{P}\mathbf{v} + \mathcal{N}\mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad 0 < t \leq T \tag{8.104}$$

на подпространстве соленоидальных функций ($\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$).

Оператор конвективного переноса в $L_2(\Omega)$ является кососимметричным

$$\mathcal{V}(\mathbf{v}) = -\mathcal{V}^*(\mathbf{v})$$

и тем самым не дает вклада в кинетическую энергию ($(\mathcal{V}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$). Аналогичным свойством в рассматриваемом классе соленоидальных функций обладает оператор градиента

$$\mathcal{P}\mathbf{v} = \operatorname{grad} p, \quad \mathcal{P} = -\mathcal{P}^*.$$

Оператор вязкого переноса является симметричным и положительным

$$\mathcal{N} = -\frac{1}{\mathrm{Re}} \operatorname{div}\operatorname{grad}, \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}^* > 0\,.$$

Чтобы получить простейшую априорную оценку для задачи Коши (8.103), (8.104) домножим скалярно в $\mathcal{H}_*^2$ уравнение (8.104) на $\mathbf{v}$. С учетом отмеченных свойств операторов получим априорную оценку

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\| \leq \|\mathbf{v}^0(\mathbf{x})\| + \int_0^t \|f(\mathbf{x}, s)\|\,ds\,. \tag{8.105}$$

Она обеспечивает ограниченность решения. Для линейных задач оценка подобного типа дает устойчивость решения по начальным данным и правой части. В нелинейном случае, что и имеет место в нашем случае, оценка (8.105) обеспечивает устойчивость только тривиального решения. Поэтому о таких оценках говорят как об оценках устойчивости в линейном смысле.

8.4.3. Аппроксимация по пространству

Будем строить сеточные аналоги операторов $\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{N}$, которые обладают отмеченными выше свойствами. Используется равномерная прямоугольная сетка с шагами h_1 и h_2 в прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2)\,,\ 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}.$$

Пусть $\bar{\omega} = \omega + \partial\omega$, где ω — множество внутренних узлов, а $\partial\omega$ — множество граничных узлов. Для сеточных функций определим гильбертово пространство H, в котором

$$(y, z) = \sum_{\mathbf{x}\in\omega} y(\mathbf{x})\, z(\mathbf{x})\, h_1 h_2.$$

В $H^2 = H \oplus H$ имеем

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{\alpha=1}^{2} (y_\alpha, z_\alpha)\,.$$

Обозначим через Λ сеточный оператор Лапласа на обычном пятиточечном шаблоне

$$\Lambda y = -\sum_{\alpha=1}^{2} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}\ .$$

В H на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на $\partial\omega$, оператор Λ является самосопряженным и положительно определенным ($\Lambda = \Lambda^* > 0$).

Определим пространство H^2_* как подпространство H^2, состоящее из соленоидальных сеточных функций, удовлетворяющих дискретному аналогу условия несжимаемости

$$\mathrm{div}_h \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega^*, \tag{8.106}$$

где ω^* – подмножество сетки $\bar{\omega}$, которое мы конкретизируем позднее.

Рассмотрим следующую дифференциально-разностную (непрерывную по времени и дискретную по пространству) задачу:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + C(\mathbf{w})\,\mathbf{w} + P\mathbf{w} + N\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{w} \in H^2_*, \quad 0 < t \le T, \tag{8.107}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{8.108}$$

В соответствии с симметричной формой оператора конвективного переноса $\mathcal{V}$ используем следующую центральноразностную аппроксимацию

$$C(\mathbf{w})\,\mathbf{y} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left((w_\alpha \mathbf{y})_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + w_\alpha \mathbf{y}_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\right). \tag{8.109}$$

В этом случае

$$(C(\mathbf{w})\,\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0 \tag{8.110}$$

для любых $\mathbf{w}, \mathbf{y} \in H^2$, обращающихся в нуль на $\partial\omega$. Тем самым разностный оператор конвективного переноса наследует основное свойство кососимметричности дифференциального оператора $\mathcal{C}(\mathbf{v})$.

Рассмотрим сеточный оператор N

$$N = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Lambda, \tag{8.111}$$

где Λ определен выше. Этот оператор наследует свойства оператора $\mathcal{N}$, т.е. $N = N^* > 0$.

Осталось построить кососимметричный сеточный оператор P. Используем следующее представление:

$$P\mathbf{w} = \mathrm{grad}_h p, \quad \mathbf{w} \in H^2_* \tag{8.112}$$

для разностного оператора P. Оператор P будет кососимметричным, если

$$(P\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0, \quad \mathbf{w} \in H^2_*. \tag{8.113}$$

Для того чтобы выполнить свойство кососимметричности оператора P, для которого справедливо (8.112), необходимо использовать согласованные аппроксимации операторов градиента и дивергенции. Согласованность аппроксимаций операторов grad_h и div_h понимается в смысле выполнения равенства

$$(\mathrm{grad}_h p, \mathbf{w}) = -(p, \mathrm{div}_h \mathbf{w})^*, \tag{8.114}$$

где

$$(v, y)^* = \sum_{\mathbf{x}\in\omega^*} v(\mathbf{x})\, y(\mathbf{x})\, h_1 h_2. \tag{8.115}$$

Очевидно, что равенство (8.113) при использовании представления (8.112) для оператора P будет верно, если сеточные операторы grad_h

и div_h согласованы в смысле выполнения (8.114), (8.115) и $\mathrm{div}_h \mathbf{w} = 0$ для $\mathbf{x} \in \omega^*$.

Для того чтобы получить согласованные аппроксимации операторов grad_h и div_h, мы сначала определим оператор grad_h и затем используем равенство (8.115) для конкретизации формы оператора div_h и множества узлов $\omega^* \in \bar{\omega}$.

Выбирая направленные аппроксимации назад для разностного оператора градиента

$$\mathrm{grad}_h p = (p_{\bar{x}_1}, p_{\bar{x}_2}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \tag{8.116}$$

из (8.115) получим

$$(\mathrm{grad}_h p, \mathbf{w}) = \sum_{\alpha=1}^{2} (p_{\bar{x}_\alpha}, w_\alpha) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \left(p, (w_\alpha)_{x_\alpha}\right)^* .$$

Для сеточного оператора дивергенции в рассматриваемом случае получим представление

$$\mathrm{div}_h \mathbf{w} = (w_1)_{x_1} + (w_2)_{x_2}, \quad \mathbf{x} \in \omega^*. \tag{8.117}$$

Из (8.114) и (8.117) следует, что давление p и оператор div_h должны определяться на одном множестве узлов ω^*, причем

$$\omega^* = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha - 1, i_1 + i_2 \neq 0\}.$$

При аппроксимациях (8.116) и (8.117) обеспечивается свойство кососимметричности оператора P.

8.4.4. Аддитивные разностные схемы

При аппроксимации по времени используются схемы расщепления, которые позволяют наиболее естественно сформулировать задачу для давления. Запишем (8.107) в виде

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \left(A^{(1)} + A^{(2)}\right) \mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad 0 < t \leq T.$$

При рассматриваемом двухкомпонентном расщеплении выделим оператор давления так, что

$$A^{(1)} = V(\mathbf{w}) + N, \quad A^{(1)}(\mathbf{w}) \neq \left(A^{(1)}\right)^* \geq 0,$$

$$A^{(2)} = P, \quad A^{(2)} = -\left(A^{(2)}\right)^* .$$

Далее мы может ориентироваться на те или иные схемы расщепления: типа переменных направлений, факторизованные, аналоги локально-одномерных и т.д. Например, при использовании аналога схемы Дугласа–Рекфорда имеем

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1/2}-\mathbf{w}_n}{\tau}+A^{(1)}\left(\mathbf{w}_n\right)\mathbf{w}_{n+1/2}+A^{(2)}\mathbf{w}_n=\mathbf{f}_n, \tag{8.118}$$

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1}-\mathbf{w}_n}{\tau}+A^{(1)}\left(\mathbf{w}_n\right)\mathbf{w}_{n+1/2}+A^{(2)}\mathbf{w}_{n+1}=\mathbf{f}_n, \quad \mathbf{x}\in\omega. \tag{8.119}$$

Для (8.118), (8.119) имеет место безусловная устойчивость (в линейном смысле)

$$\left\|\left(E+\tau A^{(2)}\right)\mathbf{w}_{n+1}\right\|\le\left\|\left(E+\tau A^{(2)}\right)\mathbf{w}_n\right\|+\tau\|\mathbf{f}_n\|.$$

Уравнение (8.118) соответствует неявному конвективно-диффузионному переносу при явном определении градиента давления

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1/2}-\mathbf{w}_n}{\tau}+\left(V\left(\mathbf{w}_n\right)+N\right)\mathbf{w}_{n+1/2}+\mathrm{grad}_h p_n=\mathbf{f}_n, \quad \mathbf{x}\in\omega.$$

Второй шаг (уравнение (33)) соответствует неявному переносу за счет градиента давления:

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1}-\mathbf{w}_n}{\tau}+\left(V\left(\mathbf{w}_n\right)+N\right)\mathbf{w}_{n+1/2}+\mathrm{grad}_h p_{n+1}=\mathbf{f}_n, \quad \mathbf{x}\in\omega,$$

$$\mathrm{div}_h\mathbf{w}_{n+1}=0, \quad \mathbf{x}\in\omega^*.$$

Численная реализация этой схемы связана с решением несамосопряженной эллиптической задачи для определения $\mathbf{w}_{n+1/2}$ и с решением самосопряженной эллиптической задачи для $\delta p=p_{n+1}-p_n$

$$\mathrm{div}_h\mathrm{grad}_h\delta p=\frac{1}{\tau}\mathrm{div}_h\mathbf{v}_{n+1/2}, \quad \mathbf{x}\in\omega.$$

После этого (поправка по давлению) определяется поле скоростей на новом временном слое

$$\mathbf{w}_{n+1}=\mathbf{w}_{n+1/2}-\tau\mathrm{grad}_h\left(p_{n+1}-p_n\right), \quad \mathbf{x}\in\omega.$$

Шаблоны оператора $\mathrm{div}_h\mathrm{grad}_h$ зависят от типа сетки и аппроксимации операторов div и grad.

Аналогично на основе схем расщепления по физическим процессам строятся разностные схемы при использовании других аппроксимаций операторов градиента и дивергенции, других типов сеток.

Глава 9

Схемы декомпозиции области

Обсуждаются возможности построения вычислительных алгоритмов приближенного решения многомерных задач математической физики на современных параллельных компьютерах. Основной подход связан с декомпозицией (разделением) расчетной области на ряд подобластей. Исходная задача разбивается на ряд подзадач, каждая из которых решается в своей подобласти на своем процессоре (своей элементарной машине). При рассмотрении нестационарных задач математической физики особого внимания заслуживают безытерационные варианты метода декомпозиции области, когда переход на новый временной слой связан с решением отдельных подзадач. На границах подобластей задаются различные обменные граничные условия, которые порождаются выбором того или иного оператора декомпозиции области. Проведено исследование разностных схем декомпозиции области при решении краевых задач для параболических и гиперболических уравнений второго порядка на основе тех или иных аддитивных разностных схем.

9.1. Методы декомпозиции области

На примере краевой задачи для параболического уравнения второго порядка в прямоугольнике рассматриваются общие подходы к построению параллельных алгоритмов для численного решения многомерных нестационарных задач математической физики на основе декомпозиции области на ряд подобластей.

9.1.1. Общее описание

Методы декомпозиции области на подобласти используются для приближенного решения краевых задач математической физики в сложных нерегулярных областях и для построения эффективных вычислительных алгоритмов для современных вычислительных систем

с параллельной архитектурой. В настоящее время наибольшее развитие получили методы декомпозиции области для эллиптических уравнений второго порядка (см., например, [4, 78, 83, 114, 116]). Рассматриваются итерационные методы декомпозиции области с (или без) наложением отдельных подобластей при различных краевых условиях на границах подобластей (обменных граничных условиях). Особое внимание уделяется разработке асинхронных (параллельных) алгоритмов, которые позволяют организовать независимые вычисления в отдельных подобластях на каждом итерационном шаге.

Отметим некоторые возможные подходы при использовании методов декомпозиции области для приближенного решения нестационарных задач математической физики.

Первый (традиционный) подход основан на использовании классических неявных схем и итерационных методов декомпозиции области для численного решения сеточной эллиптической задачи на новом временном слое.

При втором подходе особенности нестационарных задач (решение при переходе на новый временной слой мало меняется) учитываются более полно. Предложены и исследованы новые безытерационные схемы декомпозиции области (регионально-аддитивные схемы) в различных вариантах (ссылки на оригинальные работы приведены, например, в [59]).

На основе декомпозиции одномерных задач строятся параллельные варианты стандартных схем расщепления по пространственным переменным: переменных направлений, факторизованных, локально-одномерных (покомпонентного расщепления), векторных и регуляризованных разностных схем.

При приближенном решении нестационарных задач математической физики основное внимание должно быть уделено безытерационным вариантам метода декомпозиции — так называемым **регионально-аддитивным схемам** [9, 50, 55, 104, 106]. Эти алгоритмы наиболее полно учитывают специфику нестационарных задач, когда переход на новый временной слой связан с решением набора отдельных задач в подобластях при задании тех или иных граничных условий с предыдущего временного слоя.

Проблемы построения схем декомпозиции области удобно обсуждать на примере простейшего двухмерного параболического уравнения второго порядка в прямоугольнике.

9.1.2. Модельная параболическая задача

Рассматривается краевая задача в прямоугольнике Ω

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2)\,,\ 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$$

с параллельными осям сторонами. Ищется решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k\,(\mathbf{x})\ \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t > 0. \tag{9.1}$$

Уравнение (9.1) дополняется однородными граничными условиями Дирихле

$$u\,(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{9.2}$$

и начальным условием

$$u\,(\mathbf{x}, 0) = u^0\,(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{9.3}$$

Введем в области Ω равномерную по каждому направлению x_α сетку с шагами h_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть ω есть множество внутренних узлов сетки. На множестве сеточных функций $v(\mathbf{x})$, таких что $v(\mathbf{x}) \equiv 0$, $x \notin \omega$, определим гильбертово пространство H со скалярным произведением и нормой

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y v h_1 h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Зададим сеточный оператор A

$$A = \sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda_\alpha, \tag{9.4}$$

где

$$\Lambda_\alpha v = -\left(a_\alpha\,(\mathbf{x})\, v_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha}, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad \alpha = 1, 2.$$

Для коэффициентов этого разностного оператора для задач с достаточно гладкими коэффициентами положим, например,

$$a_1\,(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(k\,(\mathbf{x}) + k\,(x_1 - h_1, x_2)\right),$$

$$a_2\,(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(k\,(\mathbf{x}) + k_2\,(x_1, x_2 - h_2)\right).$$

В пространстве H оператор A самосопряженный и положительный ($A = A^* > 0$).

От задачи (9.1)–(9.3) при заданном $v(\mathbf{x}, 0)$, $\mathbf{x} \in \omega$ придем к дифференциально-операторному уравнению

$$\frac{dv}{dt} + Av = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{9.5}$$

При приближенном решении задачи Коши для уравнения (9.5) будем применять метод декомпозиции области. Вычислительный алгоритм основан в этом случае на решении задач в отдельных подобластях расчетной области на каждом шаге по времени.

9.1.3. Декомпозиция области

Пусть область Ω состоит из p отдельных подобластей

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \Omega_p,$$

которые могут налегать друг на друга. Работа отдельных вычислительных узлов параллельного компьютера (элементарных машин) связана с решением подзадачи в каждой выделенной подобласти. Именно декомпозиция всей области на подобласти позволяет эффективно использовать параллельные компьютеры при приближенном решении многомерных задач математической физики. **Метод декомпозиции области** дает возможность адаптировать вычислительный алгоритм к параллельной вычислительной системе с произвольной организацией памяти и связями между отдельными вычислительными узлами.

На рис.9.1 схематично изображено разбиение расчетной области (прямоугольника Ω) на отдельные подобласти с налеганием прямыми $x_1 = \text{const}$. Такое разбиение ориентируется на простейшую архитектуру параллельной вычислительной системы типа *линейка*, когда

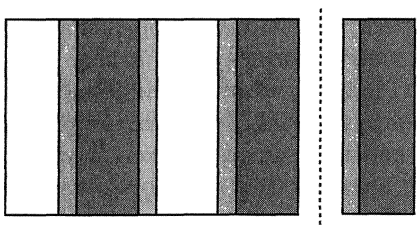


Рис. 9.1. Декомпозиция области по одному направлению

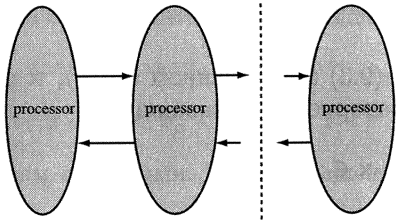


Рис. 9.2. Связь отдельных процессоров

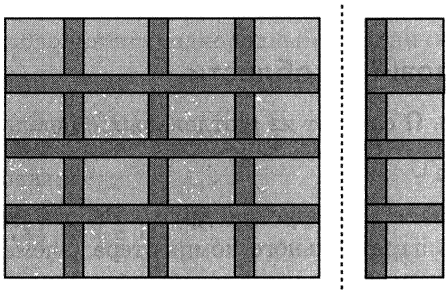


Рис. 9.3. Декомпозиция по двум направлениям

процессоры (элементарные вычислительные машины) соединены последовательно с двумя ближайшими соседями (рис. 9.2).

Подобласти могут группироваться для решения подзадачи на отдельном процессоре. Группирование можно провести всего на две подобласти Ω_1 и Ω_2, каждая из которых будет состоять их нескольких подобластей, не связанных друг с другом. Здесь мы можем говорить о двухцветном *раскрашивании* области, не выделяя подобласти наложения.

Более сложная декомпозиция, которая соответствует фактически четырехцветному раскрашиванию, изображена на рис.9.3. В этом случае мы должны ориентироваться на *решетку* процессоров (рис.9.4).

Наиболее просто идея декомпозиции области при приближенном решении нестационарных задач математической физики реализуется с использованием явных разностных схем. Пусть y_n есть разностное решение на момент времени $t_n = n\tau$, где $\tau > 0$ — шаг по времени. Для модельной задачи (9.5) будем иметь

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{9.6}$$

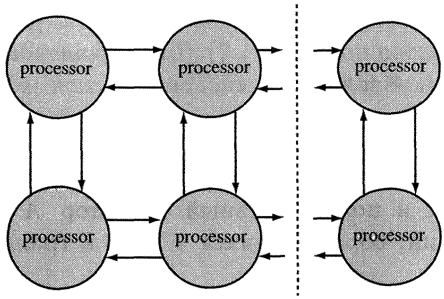


Рис. 9 4. Решеточная архитектура параллельного компьютера

В этом случае фактическая ширина области налегания минимальна и равна h_1 или h_2, минимальны также обмены между элементарными машинами. Хорошо известны и принципиальные трудности использования явных схем при приближенном решении нестационарных задач, связанные прежде всего с жесткими ограничениями на соотношения сеточных шагов. При численном решении прикладных задач, когда коэффициенты уравнений меняются сильно, необходимо стремиться использовать неявные схемы. Обсудим возможности построения разностных схем, ориентированных на параллельные компьютеры, которые по свойству устойчивости были бы близки к безусловно устойчивым неявным разностным схемам, а по организации вычислений — к упомянутым выше явным схемам (9.6).

9.2. Схемы двухкомпонентного расщепления

Наиболее важный класс схем декомпозиции — регионально-аддитивные схемы двухкомпонентного расщепления, когда расчетная область разбивается на две подобласти, каждая из которых состоит из ряда непересекающихся подобластей (см., например, рис.9.1). В этом случае используются аддитивные схемы переменных направлений.

9.2.1. Операторы декомпозиции области

Будем искать решение модельной краевой задачи для параболического уравнения второго порядка (9.1), (9.3). После дискретизации по

пространству приходим к задаче Коши

$$\frac{dy}{dt} + Ay = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \tag{9.7}$$

$$y(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{9.8}$$

Самосопряженный и положительный оператор A определяется на множестве функций, обращающихся в нуль в граничных узлах, соотношением

$$Ay = -\sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha(\mathbf{x})\, y_{\bar{x}})_x, \quad \mathbf{x} \in \omega \tag{9.9}$$

при соответствующем задании коэффициентов.

Пусть область Ω состоит из двух отдельных подобластей

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Каждая из этих подобластей состоит в свою очередь из набора непересекающихся подобластей, что соответствует двухцветному (красно-черному) разбиению. Пример подобного разбиения реализуется при декомпозиции исходной расчетной области по одному направлению (см. рис.9.1).

Построение регионально-аддитивных разностных схем основывается на специальном аддитивном представлении оператора исходного уравнения (9.9) и применении тех или иных схем расщепления. Выбор оператора и схемы расщепления соответствует выбору определенной схемы вычислений в отдельных подобластях, в частности выбору обменных граничных условий на границе подобластей.

Пусть ω_α — узлы сетки ω, лежащие в подобласти $\Omega_\alpha, \alpha = 1, 2$. Будем строить схемы декомпозиции области на основе разбиения единицы области Ω. Определим функции

$$\chi_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} > 0, & \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \tag{9.10}$$

причем

$$\chi_1(\mathbf{x}) + \chi_2(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{9.11}$$

Рассматривается класс схем декомпозиции, когда для оператора A имеет место аддитивное представление

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \tag{9.12}$$

в котором операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ связываются с отдельными подобластями, с разбиением (9.10), (9.11). Выбор расщепления подчинен требованию, чтобы исходная задача распадалась на решение отдельных подзадач в подобластях Ω_α, $\alpha = 1, 2$.

Наиболее естественный выбор операторов декомпозиции связан с заданием операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ в виде

$$A^{(\alpha)} = \chi_\alpha A, \quad \alpha = 1, 2. \tag{9.13}$$

Можно также предложить следующее представление для операторов декомпозиции:

$$A^{(\alpha)} = A\chi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \tag{9.14}$$

Очевидно, что для таких расщеплений теряется свойство самосопряженности: $A^{(\alpha)} \neq (A^{(\alpha)})^*$, $\alpha = 1, 2$.

Часто ориентируются на использование расщепления (9.11), (9.12) с самосопряженными операторами $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$. Положим

$$A^{(\alpha)} y = -\sum_{\alpha=1}^{2} \left(a_\beta^{(\alpha)}(\mathbf{x})\, y_{\bar{x}_\beta} \right)_{x_\beta}, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad \alpha = 1, 2. \tag{9.15}$$

Сеточные операторы $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2$ аппроксимируют дифференциальные вырождающиеся эллиптические операторы

$$-\sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(k(\mathbf{x})\, \chi_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Коэффициенты $a_\beta^{(\alpha)}$ определим аналогично a_β, положив, например,

$$a_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(k(\mathbf{x})\, \chi_\alpha(\mathbf{x}) + k(x_1 - h_1, x_2)\, \chi_\alpha(x_1 - h_1, x_2) \right),$$

$$a_2^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(k(\mathbf{x})\, \chi_\alpha(\mathbf{x}) + k_2(x_1, x_2 - h_2)\, \chi_\alpha(x_1, x_2 - h_2) \right).$$

При выборе (9.11), (9.12), (9.15) имеем $A^{(\alpha)} = (A^{(\alpha)})^* \geq 0$, $\alpha = 1, 2$.

9.2.2. Регионально-аддитивные схемы

При использовании расщепления (9.11), (9.12) с самосопряженными и неотрицательными операторами $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ (операторами декомпозиции (9.15)) легко строятся безусловно устойчивые разностные

схемы для решения уравнения (9.7) с начальным условием (9.8). Среди них отметим соответствующие аналоги разностных схем переменных направлений, факторизованных схем, схем суммарной аппроксимации. В этой связи особый интерес имеет проблема точности приближенного решения, его зависимости от области налегания $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$, от функций $\chi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$. Отдельного изучения требуют схемы с несимметричными операторами декомпозиции.

Подробно рассмотрим аналог классической схемы Дугласа–Рекфорда — схему стабилизирующей поправки. Пусть y_n — разностное решение на момент времени $t_n = n\tau$, $\tau > 0$ — шаг по времени. Переход на новый временной слой осуществляется в соответствии с

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} + A^{(1)} y_{n+1/2} + A^{(2)} y_n = 0, \tag{9.16}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{\tau} + A^{(2)} \left(y_{n+1} - y_n\right) = 0. \tag{9.17}$$

При $A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* \geq 0$, $\alpha = 1, 2$ имеет место безусловная устойчивость схемы (9.16), (9.17) (см., например, теорему 2.2) и для разностного решения имеет место оценка

$$\left\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) y_{n+1} \right\| \leq \left\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) y_n \right\|. \tag{9.18}$$

Разностная схема (9.16), (9.17) при задании операторов декомпозиции, согласно (9.13), (9.14), принадлежит к классу схем с операторными множителями, к симметризуемым разностным схемам, которые подробно исследованы в книге [59].

Рассмотрим вначале схему (9.16), (9.17) при расщеплении (9.12), (9.13), т.е.

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} + \chi_1(x) A y_{n+1/2} + \chi_2(x) A y_n = 0, \tag{9.19}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{\tau} + \chi_2(x) A \left(y_{n+1} - y_n\right) = 0. \tag{9.20}$$

Положим $A^{1/2} y_{n+\alpha/2} = v_{n+\alpha/2}$, $\alpha = 1, 2$ и домножим уравнения (9.19), (9.20) на $A^{1/2}$, что дает

$$\frac{v_{n+1/2} - v_n}{\tau} + \widetilde{A}^{(1)} v_{n+1/2} + \widetilde{A}^{(2)} v_n = 0, \tag{9.21}$$

$$\frac{v_{n+1} - v_{n+1/2}}{\tau} + \widetilde{A}_2 \left(v_{n+1} - v_n\right) = 0, \tag{9.22}$$

где

$$\widetilde{A}^{(\alpha)} = A^{1/2}\chi_\alpha(x)\,A^{1/2}, \quad \widetilde{A}^{(\alpha)} = \left(\widetilde{A}^{(\alpha)}\right)^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{9.23}$$

Для симметризованной разностной схемы (9.19), (9.20) имеет место оценка типа (9.18)

$$\left\|\left(E + \tau A^{(2)}\right) y_{n+1}\right\|_A \leq \left\|\left(E + \tau A^{(2)}\right) y_n\right\|_A. \tag{9.24}$$

Аналогично рассматривается разностная схема (9.12), (9.14), (9.16), (9.17)

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} + A\chi_1(x)\,y_{n+1/2} + A\chi_2(x)\,y_n = 0, \tag{9.25}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{\tau} + A\chi_2(x)\,(y_{n+1} - y_n) = 0. \tag{9.26}$$

Для преобразования разностной схемы (9.25), (9.26) к виду (9.21), (9.22) достаточно положить $A^{-1/2}y_{n+\alpha/2} = v_{n+\alpha/2}$, $\alpha = 1, 2$ и домножить ее слева на $A^{-1/2}$. В этом случае имеем

$$\widetilde{A}_\alpha = A^{-1/2}\chi_\alpha(x)\,A^{-1/2}, \quad \widetilde{A}_\alpha = \widetilde{A}_\alpha^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

а соответствующая оценка устойчивости принимает вид

$$\left\|\left(E + \tau A^{(2)}\right) y_{n+1}\right\|_{A^{-1}} \leq \left\|\left(E + \tau A^{(2)}2\right) y_n\right\|_{A^{-1}}. \tag{9.27}$$

Полученные оценки безусловной устойчивости (9.18), (9.24), (9.27) для схем расщепления (9.12), (9.16), (9.17) позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 9.1. Для разностной схемы декомпозиции (9.12), (9.16), (9.17) с выбором операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ согласно (9.15), (9.13) и (9.14) имеет место оценка устойчивости по начальным данным

$$\left\|\left(E + \tau A^{(2)}\right) y_{n+1}\right\|_D \leq \left\|\left(E + \tau A^{(2)}\right) y_n\right\|_D, \tag{9.28}$$

где $D = A$, A^{-1} и E соответственно.

9.2.3. Точность разностного решения

Исследование сходимости разностных схем декомпозиции, как обычно, проводится на основе соответствующих оценок разностного решения по правой части. Будем считать для простоты изложения, что точное решение дифференциальной задачи имеет необходимую по ходу изложения гладкость.

Для исследования точности разностной схемы декомпозиции области (9.12), (9.16), (9.17) запишем соответствующую задачу для погрешности $z_n = y_n - u_n$, $u_n = u(\mathbf{x}, t_n)$, $\mathbf{x} \in \omega$, полагая $z_{n+1/2} = y_{n+1/2} - u_{n+1}$, и пусть $z_0 = 0$. Из (9.16), (9.17) получим

$$\frac{z_{n+1/2} - z_n}{\tau} + A^{(1)} z_{n+1/2} + A^{(2)} z_n = \psi_n^{(1)}, \tag{9.29}$$

$$\frac{z_{n+1} - z_{n+1/2}}{\tau} + A^{(2)} \left(z_{n+1} - z_n\right) = \psi_n^{(2)}. \tag{9.30}$$

Для погрешностей аппроксимации имеем

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1/2} - u_n}{\tau} - A^{(1)} u_{n+1/2} - A^{(2)} u_n, \tag{9.31}$$

$$\psi_n^{(2)} = -A^{(2)} \left(u_{n+1} - u_n\right). \tag{9.32}$$

Для схемы (9.29), (9.30) при $A^{(\alpha)} \geq 0$, $\alpha = 1, 2$ имеет место (см. теорему 2.2) следующая оценка устойчивости по правой части

$$\left\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) z_{n+1} \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \tau \left(\|\psi_k^{(1)}\| + \|\psi_k^{(2)}\| \right). \tag{9.33}$$

Для конкретизации оценки погрешности разностного решения схемы декомпозиции (9.16), (9.17) запишем погрешности аппроксимации (9.31), (9.32) в более удобном виде. Принимая во внимание

$$A^{(1)} u_{n+1} + A^{(2)} u_n = A u_{n+1} - A^{(2)} \left(u_{n+1} - u_n\right),$$

для достаточно гладких решений будем иметь

$$\psi_n^{(1)} = O\left(\tau + |h|^2\right) + \tau A^{(2)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau) \right),$$

$$\psi_n^{(2)} = -\tau A^{(2)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau) \right),$$

где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

При использовании оператора декомпозиции (9.15) имеем

$$\left\| A^{(2)} \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq M_1 \left\| \sum_{\alpha=1}^{2} |\chi_2(x)_{\bar{x}_\alpha}| \right\| \leq M_1 \|\chi_2(x)\|_A,$$

и поэтому оценка (9.33) для погрешности принимает вид

$$\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) z_{n+1} \| \leq M \left(\tau + |h|^2 + \tau \|\chi_2(x)\|_A\right). \tag{9.34}$$

Таким образом, скорость сходимости разностной схемы декомпозиции зависит от ширины области налегания подобластей Ω_1 и Ω_2 (см. слагаемое с $\|\chi_2(x)\|_A$ в оценке (9.34)). В предельном случае минимального наложения подобластей (ширина области налегания $O(|h|)$) скорость сходимости есть $O(|h|^{-1/2}\tau + |h|^2)$.

В схеме декомпозиции (9.12), (9.13), (9.16), (9.17) для погрешности имеем разностную схему

$$\frac{z_{n+1/2} - z_n}{\tau} + \chi_1 A z_{n+1/2} + \chi_2 A z_n = \psi_n^{(1)}, \tag{9.35}$$

$$\frac{z_{n+1} - z_{n+1/2}}{\tau} + \chi_2 A (z_{n+1} - z_n) = \psi_n^{(2)}, \tag{9.36}$$

где с учетом (9.13), (9.31), (9.32) имеем

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1/2} - u_n}{\tau} - \chi_1 A u_{n+1/2} + \chi_2 A u_n,$$

$$\psi_n^{(2)} = -\chi_2 A (u_{n+1} - u_n).$$

В силу такого представления для погрешности имеем

$$\psi_n^{(1)} = O\left(\tau + |h|^2\right), \quad \psi_n^{(2)} = O(\tau).$$

После симметризации (см. (9.19) — (9.23)) для погрешности из (9.35), (9.36) получим оценку

$$\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) z_{n+1} \|_A \leq \sum_{k=0}^{n} \tau \left(\|\psi_k^{(1)}\|_A + \|\psi_k^{(2)}\|_A\right). \tag{9.37}$$

Принимая во внимание выражение для погрешностей аппроксимации, из (9.37) получим оценку аналогичную (9.34)

$$\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) z_{n+1} \|_A \leq M \left(\tau + |h|^2 + \tau \|\chi_2(x)\|_A\right).$$

Исследование разностной схемы (9.12), (9.14), (9.16), (9.17) приводит нас к оценке

$$\| \left(E + \tau A^{(2)}\right) z_{n+1} \|_{A^{-1}} \leq M \left(\tau + |h|^2 + \tau \| \chi_2(x) \|_A\right).$$

Из подобных оценок следует условная сходимость регионально-аддитивных разностных схем при использовании схем с минимальным наложением.

9.3. Регионально-аддитивные схемы многокомпонентного расщепления

Рассматриваются разностные схемы декомпозиции области для приближенного решения нестационарных задач при разбиении исходной области на большое число подобластей. В качестве примера, взяты классические аддитивные схемы класса суммарной аппроксимации: схемы покомпонентного расщепления (операторные аналоги обычных локально-одномерных схем) и аддитивно-усредненные схемы, которые более полно учитывают специфику современных параллельных компьютеров.

9.3.1. Модельная задача

Выше рассматривались регионально-аддитивные аналоги классических схем переменных направлений для задач, когда возможно расщепление на два оператора. При ориентации на использование современных мощных многопроцессорных систем необходимо использовать схемы с расщеплением на большее число операторов — многоцветное разбиение. Такая ситуация наблюдается при декомпозиции по двум и более переменным.

Для таких задач необходимо ориентироваться на использование аналогов безусловно устойчивых аддитивных схем многокомпонентного расщепления. Примером являются разностные схемы покомпонентного расщепления, векторные аддитивные схемы, регуляризованные аддитивные схемы. Здесь мы проведем подробное исследование двух основных классов регионально-аддитивных разностных схем. Первый из них связан с использованием двухслойных схем покомпонентного расщепления. Проводится исследование зависимости точности от разбиения области. Аналогичные результаты удается получить и для

аддитивно-усредненных разностных схем декомпозиции области, которые фактически являются параллельным вариантом схем покомпонентного расщепления. Последние можно рассматривать как одноитерационную реализацию обычных неявных схем на основе классического синхронного (аддитивного) варианта метода Шварца. Аддитивно-усредненные схемы в этом контексте могут связываться с асинхронным (мультипликативным) вариантом метода Шварца.

Снова рассмотрим в качестве модельной двухмерную задачу в прямоугольнике Ω с параллельными осям координат сторонами. В Ω ищется решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t > 0, \tag{9.38}$$

дополненного простейшими однородными граничными условиями первого рода

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{9.39}$$

и начальным условием

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{9.40}$$

После дискретизации по пространству получим дифференциально-разностную задачу для уравнения

$$\frac{dy}{dt} + Ay = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega \tag{9.41}$$

с начальными условием

$$y(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

и оператором $A = A^* > 0$ в обычном гильбертовом пространстве сеточных функций H.

9.3.2. Регионально-аддитивные схемы

Пусть теперь область Ω состоит из p отдельных подобластей

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_p.$$

Пусть ω_α — узлы сетки ω, лежащие в подобласти $\Omega_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p$. Определим функции

$$\chi_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} > 0, & x \in \Omega_\alpha, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p \tag{9.42}$$

при

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \chi_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{9.43}$$

Рассматривается класс схем декомпозиции при многокомпонентном расщеплении, когда

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}. \tag{9.44}$$

Снова будем использовать три следующих основных класса операторов декомпозиции:

$$A^{(\alpha)} = \chi_\alpha A, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{9.45}$$

$$A^{(\alpha)} = A\chi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{9.46}$$

$$A^{(\alpha)} y = -\sum_{\alpha=1}^{2} \left(a_\beta^\alpha(\mathbf{x})\, y_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\beta}, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{9.47}$$

В последнем случае, напомним, сеточные операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ аппроксимируют дифференциальные вырождающиеся эллиптические операторы

$$-\sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k\chi_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

При использовании схемы покомпонентного расщепления переход на новый временной слой для приближенного решения задачи Коши для уравнения (9.41), (9.42) осуществляется в соответствии с

$$\frac{y_{n+\alpha/p} - y_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + A^{(\alpha)} \sigma y_{n+\alpha/p} +$$

$$+ A^{(\alpha)} (1-\sigma)\, y_{n+(\alpha-1)/p} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{9.48}$$

где $0 \le \sigma \le 1$ — параметр (постоянный вес).

При задании операторов декомпозиции в соответствии с (9.45) разностная схема (9.48) принимает вид

$$\frac{y_{n+\alpha/p} - y_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \chi_\alpha A \sigma y_{n+\alpha/p} +$$

$$+\chi_\alpha A\,(1-\sigma)\,y_{n+(\alpha-1)/p}=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,p. \tag{9.49}$$

Разностную схему (9.49) можно интерпретировать как схему с переменным шагом по времени (локальный шаг равен $\tau\chi_\alpha$).

Она принадлежит к классу симметризуемых разностных схем. Положим $A^{1/2}y_{n+\alpha/p}=v_{n+\alpha/p}$, $\alpha=1,2,...,p$ и домножим (9.49) слева на $A^{1/2}$, что дает

$$\frac{v_{n+\alpha/p}-v_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau}+\tilde{A}^{(\alpha)}\sigma y_{n+\alpha/p}+$$

$$+\tilde{A}^{(\alpha)}\,(1-\sigma)\,y_{n+(\alpha-1)/p}=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,p, \tag{9.50}$$

где

$$\widetilde{A}^{(\alpha)}=A^{1/2}\chi_\alpha\,(\mathrm{x})\,A^{1/2},\quad \widetilde{A}^{(\alpha)}=\left(\widetilde{A}^{(\alpha)}\right)^*\geq 0. \tag{9.51}$$

Для исследования устойчивости схемы (9.50), (9.51) с симметричными разностными операторами привлекаются результаты исследования аддитивных разностных схем покомпонентного расщепления.

Теорема 9.2. Разностная схема покомпонентного расщепления–декомпозиции области (9.48) при $\sigma\geq 0,5$ устойчива в H_A, а для разностного решения справедлива оценка

$$||y_{n+1}||_A\leq ||y_0||_A. \tag{9.52}$$

Доказательство. После симметризации (9.49) мы приходим к схеме (9.50), для которой имеет место (см. теорему 3.1) оценка

$$||v_{n+1}||\leq ||v_0||. \tag{9.53}$$

Из (9.53) следует утверждение теоремы об устойчивости регионально-аддитивной схемы (9.48) по начальным данным. ■

Помимо схемы покомпонентного расщепления (9.48), заслуживает отдельного рассмотрения аддитивно-усредненная схема, которая обладает большими возможностями по распараллеливанию. Переход на новый временной слой осуществляется следующим образом. Сначала находятся вспомогательные функции $\tilde{y}_{n+\alpha/p}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$ из p задач

$$\frac{\tilde{y}_{n+\alpha/p}-y_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau}+A^{(\alpha)}\sigma\tilde{y}_{n+\alpha/p}+$$

$$+A^{(\alpha)}(1-\sigma)\,y_{n+(\alpha-1)/p}=0, \quad \alpha=1,2,\ldots,p. \tag{9.54}$$

Затем уже находится приближенное решение на новом временном слое

$$y_{n+1}=\frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\tilde{y}_{n+\alpha/p}. \tag{9.55}$$

Наиболее существенно то, что этап (9.54) реализуется в каждой отдельной подобласти независимо от других подобластей. Такая асинхронность является принципиальной при построении параллельных алгоритмов.

Аддитивно-усредненная разностная схема декомпозиции области (9.54), (9.55) при $\sigma \geq 0,5$ устойчива в H_A, а для разностного решения справедлива оценка (9.52). Исследование проводится полностью аналогично случаю схемы покомпонентного расщепления (9.48).

9.3.3. Сходимость схем декомпозиции

При исследовании регионально-аддитивных схем основное внимание должно уделяться вопросам точности, в частности зависимости погрешности приближенного решения от разбиения, от функций χ_α, $\alpha=1,2,\ldots,p$. Выше при рассмотрении схем двухкомпонентного расщепления получены оптимальные оценки скорости сходимости схем декомпозиции, которые при минимальном наложении имеют вид $O(\tau|h|^{-1/2})$.

Будем считать для простоты изложения, что точное решение дифференциальной задачи (9.38) — (9.40) имеет необходимую по ходу изложения гладкость. Для исследования точности разностной схемы покомпонентного расщепления–декомпозиции области (9.48) запишем соответствующую задачу для погрешности $z_n=y_n-u_n$, $\mathbf{x}\in\omega$. Эту схему можно рассматривать не с позиций суммарной аппроксимации, а интерпретируя ее как схему полной аппроксимации с локально переменными шагами по времени.

Сеточную функцию $y_{n+\alpha/p}$ будем рассматривать как приближенное решение исходной задачи на момент времени

$$t_{n+\alpha/p}(\mathbf{x})=\sum_{\beta=1}^{\alpha}\chi_\beta(\mathbf{x})\,t_{n+1}+\left(1-\sum_{\beta=1}^{\alpha}\chi_\beta(\mathbf{x})\right)t_n.$$

Для погрешности на промежуточных шагах положим

$$z_{n+\alpha/p}=y_{n+\alpha/p}-u_{n+\alpha/p},$$

где

$$u_{n+\alpha/p} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \chi_\beta(\mathbf{x})\, u_{n+1} + \left(1 - \sum_{\beta=1}^{\alpha} \chi_\beta(\mathbf{x})\right) u_n. \tag{9.56}$$

Из (9.51) получим следующую разностную схему для погрешности:

$$\frac{z_{n+\alpha/p} - z_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \chi_\alpha A\left(\sigma z_{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\, z_{n+(\alpha-1)/p}\right) =$$

$$= \psi_{n+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{9.57}$$

где для погрешности аппроксимации имеем

$$\psi_{n+\alpha/p} = -\frac{u_{n+\alpha/p} - u_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} -$$

$$-\chi_\alpha A\left(\sigma u_{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\, u_{n+(\alpha-1)/p}\right). \tag{9.58}$$

Покажем, что для погрешности разностной схемы декомпозиции (9.48) при $\sigma \geq 0,5$ имеет место оценка

$$\|z_{n+1}\|_A \leq M\left(\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau + \tau^2 + |h|^2 + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|A\chi_\alpha(\mathbf{x})\|\right) \tag{9.59}$$

с постоянной M, не зависящей от сетки.

Принимая во внимание (9.56), выражение (9.58) преобразуем к виду

$$\psi_{n+\alpha/p} = \chi_\alpha \tilde{\psi}_{n+\alpha/p}, \tag{9.60}$$

$$\tilde{\psi}_{n+\alpha/p} = -\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - A\left(\sigma u_{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\, u_{n+(\alpha-1)/p}\right). \tag{9.61}$$

Имеем с учетом (9.56)

$$\sigma u_{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\, u_{n+(\alpha-1)/p} =$$

$$= \sigma\tau\chi_\alpha \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + u_{n+(\alpha-1)/p} =$$

$$= \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + \left(\xi_\alpha(\mathbf{x}) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\right)\tau\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau},$$

где

$$\xi_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma(\chi_\alpha(\mathbf{x}) - 1) + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \chi_\beta(\mathbf{x}).$$

Подстановка в (9.61) приводит нас к оценке

$$\tilde{\psi}_{n+\alpha/p} = O\left(\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau + \tau^2 + |h|^2\right) + \tau A\left(\xi_\alpha \frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{9.62}$$

где первое слагаемое в правой части отражает погрешность аппроксимации при использовании обычной схемы с весами без декомпозиции области. Из (9.62) видим, что величина $\tilde{\psi}_{n+\alpha/p}$ имеет первый порядок по τ вне зависимости от выбора веса σ.

Получим соответствующую оценку для погрешности как решения уравнения (9.57) при специальном представлении погрешности аппроксимации в виде (9.60). Обозначим

$$w_{n+\alpha/p} = \sigma z_{n+\alpha/p} + (1-\sigma) z_{n+(\alpha-1)/p} =$$

$$= \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau z_{t,\alpha} + \frac{z_{n+\alpha/p} - z_{n+(\alpha-1)/p}}{2},$$

$$z_{t,\alpha} = \frac{z_{n+\alpha/p} - z_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau}$$

и домножим уравнение (9.57) скалярно на $Aw_{n+\alpha/p}$. Это при $\sigma \geq 0,5$ дает

$$\frac{1}{2\tau}\left(\|z_{n+\alpha/p}\|_A^2 - \|z_{n+(\alpha-1)/p}\|_A^2\right) + \|\chi_\alpha^{1/2} A w_{n+\alpha/p}\|^2 \leq$$

$$\leq \left(\chi_\alpha \tilde{\psi}_{n+\alpha/p}, A w_{n+\alpha/p}\right).$$

Для правой части имеем

$$\left(\chi_\alpha \tilde{\psi}_{n+\alpha/p}, A w_{n+\alpha/p}\right) \leq \|\chi_\alpha^{1/2} A w_{n+\alpha/p}\|^2 + \frac{1}{4}\|\chi_\alpha^{1/2}\tilde{\psi}_{n+\alpha/p}\|^2$$

и поэтому

$$\|z_{n+\alpha/p}\|_A^2 \leq \|z_{n+(\alpha-1)/p}\|_A^2 + \frac{\tau}{2}\|\chi_\alpha^{1/2}\tilde{\psi}_{n+\alpha/p}\|^2.$$

Отсюда

$$\|z_{n+1}\|_A^2 \leq \|z_n\|_A^2 + \frac{\tau}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\chi_\alpha^{1/2}\tilde{\psi}_{n+\alpha/p}\|^2$$

и с учетом $\|z_0\|_A = 0$ получим

$$\|z_{n+1}\|_A^2 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \|\chi_\alpha^{1/2} \tilde{\psi}_{k+\alpha/p}\|^2.$$

Принимая во внимание представления (9.62) для погрешности аппроксимации, приходим к доказываемой оценке сходимости (9.59).

В предельном случае минимального наложения подобластей (ширина области налегания $O(|h|)$) скорость сходимости есть величина $O(|h|^{-3/2}\tau + |h|^2)$.

Аналогичное утверждение имеет место и для скорости сходимости параллельного варианта регионально-аддитивных схем. А именно для погрешности аддитивно-усредненной разностной схемы декомпозиции (9.54), (9.55) при $\sigma \ge 0,5$ имеет место оценка (9.59).

В этом случае для погрешности имеем задачу

$$\frac{\tilde{z}_{n+\alpha/p} - z_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \chi_\alpha A \left(\sigma \tilde{z}_{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\, z_{n+(\alpha-1)/p}\right) =$$

$$= \psi_{n+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{9.63}$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{z}_{n+\alpha/p}, \tag{9.64}$$

причем

$$\psi_{n+\alpha/p} = -\frac{\tilde{u}_{n+\alpha/p} - u_{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} -$$

$$-\chi_\alpha A \left(\sigma \tilde{u}_{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\, z_{n+(\alpha-1)/p}\right). \tag{9.65}$$

Положим теперь

$$\tilde{u}_{n+\alpha/p} = p\chi_\alpha(\mathbf{x})\, u_{n+1} + (1 - p\chi_\alpha(\mathbf{x}))\, u_n, \tag{9.66}$$

что согласуется с разбиением (9.43) и определением приближенного решения на новом слое в соответствии с (9.55).

Подстановка (9.66) в (9.65) дает для погрешности аппроксимации снова представление (9.60) с

$$\tilde{\psi}_{n+\alpha/p} = -\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} -$$

$$-A\left(\frac{u_{n+1} + u_n}{2} + \left(\chi_\alpha(\mathbf{x}) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\right)\tau \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau}\right).$$

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично доказательству оценки (9.59).

Мы уделили основное внимание схемам декомпозиции с выбором расщепления (9.43) – (9.45). Аналогично рассматриваются варианты с операторами декомпозиции, определенными согласно (9.46), (9.47). При этом сходимость устанавливается не в H_A, а в H_D, где $D = A^{-1}$ и E соответственно.

9.4. Схемы декомпозиции области для уравнений второго порядка

На примере краевой задачи для уравнения колебаний обсуждаются проблемы построения схем декомпозиции области для эволюционных уравнений второго порядка. Строятся безусловно устойчивые векторные регионально-аддитивные схемы.

9.4.1. Уравнение колебаний

Рассматривается простейшая двухмерная начально-краевая задача в прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}.$$

Ищется решение $u(\mathbf{x}, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \tag{9.67}$$

удовлетворяющее краевым и начальным условиям

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{9.68}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{9.69}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{9.70}$$

В прямоугольнике Ω введем равномерную для простоты прямоугольную сетку с шагами $h_\alpha, \alpha = 1, 2$. Как обычно, обозначим через ω множество внутренних сеточных узлов сетки $\bar{\omega} = \omega + \partial\omega$. На множестве сеточных функций $u \in H$, обращающихся в нуль для всех $x \notin \omega$, определим разностный оператор

$$Au = -\sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha u_{x_\alpha})_{\bar{x}_\alpha} \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{9.71}$$

Свойства самосопряженности и положительности сеточного оператора A, определяемого согласно (9.71), хорошо известны.

После дискретизации по пространству от непрерывной задачи (9.67) — (9.70) придем к задаче Коши для дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{9.72}$$

$$u(0) = u^0, \tag{9.73}$$

$$\frac{du}{dt}(0) = v^0 \tag{9.74}$$

с положительным, самосопряженным и стационарным оператором A.

Стандартная априорная оценка для задачи (9.67) — (9.69) имеет вид

$$\|u(0)\|_* \leq \|u^0\|_A + \|v^0\| + \int\limits_0^t \|f(s)\| ds, \tag{9.75}$$

где

$$\|u\|_*^2 \equiv \|u\|_A^2 + \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2.$$

Она выражает свойство устойчивости решения по начальным данным и правой части.

9.4.2. Векторные схемы декомпозиции области

Рассмотрим теперь безытерационные схемы декомпозиции области для приближенного решения задачи (9.67) — (9.70). В общем случае область Ω состоит из p подобластей

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_p.$$

Разбиение на подобласти связывается с функциями

$$\chi_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} > 0, & x \in \Omega_\alpha, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p \tag{9.76}$$

при

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \chi_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{9.77}$$

Для оператора задачи используется аддитивное представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}. \tag{9.78}$$

Будем считать, что операторы декомпозиции $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ имеют вид

$$A^{(\alpha)} y = -\sum_{\alpha=1}^{2} \left(a_\beta^\alpha(\mathbf{x})\, y_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\beta}, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p \tag{9.79}$$

и аппроксимируют дифференциальные операторы

$$-\sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k\chi_\alpha(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

При такой декомпозиции операторы $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ являются самосопряженными и неотрицательными.

Аналогично рассматриваются схемы декомпозиции области при задании операторов декомпозиции в виде

$$A^{(\alpha)} = \chi_\alpha A, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$$A^{(\alpha)} = A\chi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Соответствующие варианты регионально-аддитивных схем мы не будем подробно рассматривать, предоставляя эту возможность читателю.

Векторные аддитивные схемы строятся на основе аппроксимации системы уравнений первого порядка. Зададим вектор $\mathbf{u} = \{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}\}$. Каждая отдельная компонента определяется как решение однотипных задач

$$\frac{d^2 u^{(\alpha)}}{dt^2} + \sum_{\beta=1}^{p} A^{(\beta)} u^{(\beta)} = f(t), \quad t > 0, \tag{9.80}$$

$$u^{(\alpha)}(0) = u^0, \tag{9.81}$$

$$\frac{du^{(\alpha)}}{dt}(0) = v^0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{9.82}$$

Для приближенного решения задачи (9.80) — (9.82) будем использовать разностную схему

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - 2y_n^{(\alpha)} + y_{n-1}^{(\alpha)}}{\tau^2} + \sum_{\alpha \neq \beta = 1}^{p} A^{(\beta)} y_n^{(\beta)} +$$

$$+A^{(\alpha)} \left(\sigma y_{n+1}^{(\alpha)} + (1 - 2\sigma) y_n^{(\alpha)} + \sigma y_{n-1}^{(\alpha)} \right) = \varphi_n. \tag{9.83}$$

Схема (9.83) после симметризации записывается в виде

$$\mathbf{D} \frac{\mathbf{y}_{n+1} - 2\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n-1}}{\tau^2} + \mathbf{A}\mathbf{y}_n = \Phi_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9.84}$$

где

$$\mathbf{D} = \left\{ \left(A^{(\alpha)} + \sigma\tau^2 \left(A^{(\alpha)} \right)^2 \right) \delta_{\alpha\beta} \right\}, \tag{9.85}$$

$$\mathbf{A} = \{ A^{(\alpha)} A^{(\beta)} \}. \tag{9.86}$$

Для векторной схемы (9.84) — (9.86) имеем

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* \geq 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \geq 0$$

при наших предположениях об операторах $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ в разложении (9.78).

Условия устойчивости разностной схемы (9.84) формулируются в виде операторного неравенства

$$\mathbf{D} \geq \frac{1}{4} \tau^2 \mathbf{A}. \tag{9.87}$$

Для выполнения (9.87) в случае (9.85), (9.86) достаточно взять $\sigma \geq$ $\geq 0,25p$. При этом выполнена априорная оценка

$$\|\mathbf{y}_{n+1}\|_* \leq \|\mathbf{y}_n\|_* + \tau \|\Phi_n\|, \tag{9.88}$$

если положить

$$\|\mathbf{y}_{n+1}\|_*^2 = \left\| \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{\tau} \right\|^2_{\mathbf{D} - \frac{1}{4}\tau^2 \mathbf{A}} + \left\| \frac{\mathbf{y}_{n+1} + \mathbf{y}_n}{2} \right\|^2_{\mathbf{A}}.$$

В общих условиях неотрицательности операторных слагаемых $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, \ldots, p$ будем ориентироваться на специальное определение приближенного решения как линейной комбинации отдельных

компонент. По заданным компонентам $u^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, \ldots, p$ определим скалярную функцию $\bar{u}$ из соотношения

$$A\bar{u} = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} u^{(\alpha)}.$$

Принимая во внимание, что

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) = \left(\left(\sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} u^{(\alpha)} \right)^2, 1 \right),$$

получим

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) = \|A\bar{u}\|^2.$$

С учетом этого из (9.88) следует оценка

$$\|A\bar{y}_{n+1/2}\| \leq \|\mathbf{y}_1\|_* + \sum_{k=1}^{n} \tau \|\Phi_k\| \tag{9.89}$$

для приближенного решения в полуцелом узле

$$\bar{y}_{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\bar{y}_{n+1} + \bar{y}_n \right).$$

Оценку (9.89) можно рассматривать как аналог соответствующей априорной оценки для дифференциальной задачи (9.67) — (9.70), к которой мы приходим при скалярном умножении уравнения на A.

9.4.3. Сходимость векторных регионально-аддитивных схем

Исследование точности схем декомпозиции области проводится по стандартной схеме. Обозначим $\bar{z}_n = \bar{y}_n - u_n$ погрешность приближенного решения и пусть $z_n^{(\alpha)} = y_n^{(\alpha)} - u_n$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ — погрешность отдельной компоненты. Задача для погрешности записывается в виде

$$\left(E + \sigma\tau^2 A^{(\alpha)} \right) \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - 2y_n^{(\alpha)} + y_{n-1}^{(\alpha)}}{\tau^2} + \sum_{\beta=1}^{p} A^{(\beta)} y_n^{(\beta)} =$$

$$= \psi_n^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для погрешностей аппроксимации

$$\psi_n^{(\alpha)} = \left(E + \sigma\tau^2 A^{(\alpha)}\right) \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\tau^2} + Au_n, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p$$

справедливо представление

$$\psi_n^{(\alpha)} = \sigma\tau^2 A^{(\alpha)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O\left(\tau^2 + |h|^2\right).$$

На основе полученного выражения для погрешности аппроксимации устанавливается искомая оценка для погрешности решения

$$\|A\left(\bar{z}_{n+1} + \bar{z}_n\right)\| \leq M_1 \left(\tau^2 + |h|^2 + M_2\tau^2 \max_\alpha \|A\chi_\alpha\|\right).$$

Аналогичные оценки (в несколько других нормах) имеют место для регионально-аддитивных схем с другими операторами декомпозиции. При минимальном наложении подобластей (ширина области налегания $O(|h|)$) скорость сходимости есть $O(|h|^{-1/2}\tau^+|h|^2)$.

Методы декомпозиция области в сочетании с использованием аддитивных разностных схем являются теоретической основой для построения новых вычислительных алгоритмов для безытерационного решения нестационарных задач для многомерных уравнений с частными производными, ориентированных на современные компьютеры параллельной архитектуры.

Литература

1. *Абрашин В.Н.* Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики. I // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. С. 314–323.

2. *Абрашин В.Н., Вабищевич П.Н.* Об одном классе экономичных разностных схем решения многомерных задач математической физики // Там же. 1998. Т. 34. С. 1666–1674.

3. *Абрашин В.Н., Муха В.А.* Об одном классе экономичных разностных схем решения многомерных задач математической физики // Там же. 1992. Т. 28. С. 1986–1799.

4. *Агошков В.И.* Методы разделения области в задачах математической физики// Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1991. Вып. 8. С. 4–51.

5. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1994.

6. *Вабищевич П.Н.* Об одном классе векторных аддитивных разностных схем // Изв. вузов. Математика. 1994. № 9. С. 11–15.

7. *Вабищевич П.Н.* Векторные аддитивные разностные схемы для эволюционных уравнений первого порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 3. С. 44–51.

8. *Вабищевич П.Н.* Разностные схемы для задач гидродинамики в переменных "функция тока – вихрь скорости"// Докл. РАН. 1996. Т. 346. С. 441–444.

9. *Вабищевич П.Н.* Параллельные алгоритмы декомпозиции области для параболических задач // Мат. моделирование. 1997. Т. 9, № 5. С. 77–86.

10. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии // Зарубеж. радиоэлектрон. Успехи соврем. радиоэлектрон. 1997. № 1. С. 72–86.

11. *Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г.* Методы расчета нестационарных несжимаемых течений в естественных переменных на неразнесенных сетках // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 7. С. 81–108.

12. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Устойчивость проекционно-разностных схем для нестационарных задач математической физики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. С. 1011–1021.

13. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Об устойчивости разностных схем для задач конвекции–диффузии // Там же. 1997. Т. 37. С. 182–186.

14. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Разностные схемы для нестационарных задач конвекции–диффузии // Там же. 1998. Т. 38. С. 207–219.

15. *Гавич И.К.* Гидрогеодинамика. М.: Недра, 1988.

16. *Голант Е.И.* О сопряженных семействах разностных схем для уравнений параболического типа с младшими членами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. С. 1162–1169.

17. *Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В.* О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями // Там же. 1974. Т. 14. С. 246–250.

18. *Гулин А.В.* Необходимые и достаточные условия устойчивости трехслойных разностных схем // Там же. 1968. Т. 8. С. 899–902.

19. *Дьяконов Е.Г.* Разностные методы решения краевых задач. Вып.2. Нестационарные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1972.

20. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Методы расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.

21. *Коновалов А.Н.* Метод дробных шагов решения задачи Коши для многомерного уравнения колебаний // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. С. 25–27.

22. *Коновалов А.Н.* Применение метода расщепления к численному решению динамических задач теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4. С. 760–764.

23. *Латтес Р., Лионс Ж.Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир. 1970.

24. *Ломакин Е.А., Мироненко В.А., Шестаков В.М.* Численное моделирование геофильтрации. М.: Недра, 1988.

25. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1970.

26. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

27. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1989.

28. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1979.

29. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

30. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.

31. *Самарский А.А.* Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т. 2. С. 787–811.

32. *Самарский А.А.* О сходимости метода дробных шагов для уравнения теплопроводности // Там же. 1962. Т. 2. С. 1117–1121.

33. *Самарский А.А.* Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках // Там же. 1963. Т. 3. С. 431–466.

34. *Самарский А.А.* Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области // Там же. 1964. Т. 4. С. 638–643.

35. *Самарский А.А.* Экономичные разностные схемы для систем уравнений параболического типа // Там же. 1964. Т. 4. С. 927–930.

36. *Самарский А.А.* Экономичные разностные схемы для уравнений параболического типа со смешанными производными // Там же. 1964. Т. 4. С. 753–759.

37. *Самарский А.А.* О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора // Там же. 1965. Т. 5. С. 548–551.

38. *Самарский А.А.* О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. С. 1253–1256.

39. *Самарский А.А.* О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики // Aplikace matematiky. 1965. Т. 10. С. 146–164.

40. *Самарский А.А.* Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. С. 34–43.

41. *Самарский А.А.* О регуляризации разностных схем // Там же. 1967. Т. 7. С. 62–93.

42. *Самарский А.А.* Классы устойчивых схем // Там же. 1967. Т. 7. С. 1096–1133.

43. *Самарский А.А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. С. 801–811.

44. *Самарский А.А.* Лекции по теории разностных схем. М.: ВЦ АН СССР, 1969.

45. *Самарский А.А.* Об устойчивости трехслойных разностных схем // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. С. 998–1001.

46. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

47. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

48. *Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.

49. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Разностные схемы для неустойчивых задач // Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 89–98.

50. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Векторные аддитивные схемы декомпозиции области для параболических задач // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. С. 1563–1569.

51. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Итерационные методы кластерного агрегирования для систем линейных уравнений // Докл. РАН. 1996. Т. 349. С. 22–25.

52. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Устойчивость трехслойных проекционно-разностных схем // Мат. моделирование. 1996. Т. № 9. С. 74–84.

53. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Итерационные методы многокомпонентного расщепления // Докл. РАН. 1997. Т. 354. С. 310–312.

54. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Разностные методы решения обратных задач математической физики// Фундаментальные основы математического моделирования. М.: Наука, 1997. С. 5–97.

55. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Факторизованные разностные схемы декомпозиции области для задач конвекции–диффузии // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. С. 967–974.

56. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Разностные схемы для уравнения переноса. I // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. С. 1675–1685.

57. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Регуляризованные аддитивные схемы полной аппроксимации // Докл. РАН. 1998. Т. 358. С. 461–464.

58. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

59. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. Минск: ЦОТЖ, 1998.

60. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Устойчивость векторных аддитивных схем // Докл. РАН. 1998. Т. 361. С. 746–748.

61. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

62. *Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А.* и др. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Критерий, 1996.

63. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

64. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.

65. *Самарский А.А., Фрязинов И.В.* О разностных методах аппроксимации задач математической физики // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, вып. 6. С. 167–197.

66. *Саульев В.К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматгиз, 1960.

67. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

68. *Фрязинов И.В.* Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8. С. 1436–1443.

69. *Фрязинов И.В.* Экономичные схемы повышенного порядка точности для решения многомерного уравнения параболического типа // Там же. 1969. Т. 9. С. 1316–1326.

70. *Фрязинов И.В.* Об одном классе схем для уравнения параболического типа // Там же. 1975. Т. 15. С. 114–125.

71. *Яненко Н.Н.* Об одном методе счета многомерного уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125. С. 1207–1210.

72. *Яненко Н.Н.* О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т. 2. С. 933–937.

73. *Яненко Н.Н.* О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5. С. 1431–1434.

74. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

75. *Abrashin V.N., Zhadaeva N.G.* Multicomponent alternating direction method for solving problems of mathematical physics// Second international conference Finite–difference methods: theory and applications (CFDM98): Proceeding. Minsk: IM NAB, 1998. Vol.1. P. 12–20.

76. *Anderson D., Tannenhill J., Pletcher R.* Computational fluid mechanics and heat transfer. N.Y.: Hemisphere, 1984.

77. *Birkhoff G., Varga R., Young D.* Alternating direction implicit methods// Advances in computers. N.Y.: Acad. press, 1962. P.189–273.

78. *Chan T.F., Mathew T.P.* Domain decomposition algorithms // Acta Numerica. 1994. T. 5. P. 61–143.

79. *Chudanov V.V., Popkov A.G., Churbanov A.G., Vabishchevich P.N.* Operator-splitting schemes for the stream function — vorticity formulation // Computers and Fluids. 1995. Vol. 24. P. 771–786.

80. *Churbanov A.G., Pavlov A.N., Vabishchevich P.N.* Operator-splitting methods for the incompressible Navier–Stokes equations on nonstaggered grids. Part 1: first-order schemes // Intern. J. Numer. Meth. Fluids. 1995. Vol. 21. P. 617–640.

81. *Dekker K., Verwer J.G.* Stability of Runge–Kutta Methods for stiff nonlinear differential equations. Amsterdam: North-Holland, 1984.

82. *Desoer C., Haneda H.* The measure of a matrix as a tool to analyze computer algorithms for circuit analysis // IEEE Trans. Circuit Theory. 1972. Vol. 19. P. 480–486.

83. *Dongarra J.J., Duff I.S., Sorensen D., van der Vorst H.A.* Solving linear systems on vector and shared memory computers. Philadelphia: SIAM, 1991.

84. *Douglas Jr.J., Rachford H.H.* On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 82. P. 421–439.

85. *Ewing R.* The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations // SIAM J. Math. Anal. 1975. Vol. 6. P. 283–294.

86. *Fletcher C.A.J.* Computational techniques for fluid dynamics. Berlin: Springer, 1988.

87. *Forsythe G.E., Wasow W.R.* Finite difference methods for partial differential equations. New York: Wiley, 1960.

88. *Hageman L.A., Young D.M.* Applied Iterative Methods. N.Y.: Acad. press, 1981.

89. *Hairer E., Norsett S.P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. Berlin: Springer, 1987.

90. *Hubbard B.* Some locally one-dimensional difference schemes for parabolic equations in an arbitrary region // Math. Comp. 1966. Vol. 20. P. 53–59.

91. *Johnson G.M.* Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Cambridge: Cambridge Univ. press, 1987.

92. *Jovanović B.* On the convergence of a multicomponent alternating direction difference scheme // Publ. de L'Inst. Math. 1994. Vol. 56 (70). P.129–134.

93. *Kreiss H.O., Lorenz J.* Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations. San Diego: Acad. press, 1989.

94. *Lax P.D., Richtmyer R.D.* Survey of the stability of linear finite difference equations // Comm. Pure Appl. Math. 1956. Vol. 9. P. 267–293.

95. *Mitchell A.R., Griffiths D.F.* The finite difference method in partial differential equations. Chichester: Wiley, 1980.

96. *Ortega J.M.* Introduction to parallel and vector solution of linear systems. N.Y.: Plenum press, 1988.

97. *Peaceman D.W., Rachford H.H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. SIAM. 1955. Vol. 3. P. 28–41.

98. *Peyret R., Taylor T.D.* Computational methods for fluid flow. Berlin: Springer, 1983.

99. *Quarteroni A., Valli A.* Numerical approximation of partial differential equations. Berlin: Springer, 1994.

100. *Richtmyer R.D., Morton K.W.* Difference methods for initial-value problems. N.Y.: Wiley, 1967.

101. *Roache P.J.* Computational fluid dynamics. Albuquerque (N. M.): Hermosa, 1982.

102. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Regularized difference schemes for evolutionary second order equations // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 1992. Vol. 3. P. 295–315.

103. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational heat transfer. Chichester: Wiley, 1995.

104. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Domain decomposition algorithms for time-dependent problems of mathematical physics// Numerical Methods in Engineering'96: Proc. of the Second ECCOMAS conf. on numerical methods in engineering, 9–13 Sept. 1996, Paris, France. Chichester: Wiley, 1996. P. 464–468.

105. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Additive difference schemes for problems of mathematical physics// 15th World congr. on scientific computation, modeling and applied mathematics. Vol.2. Numerical mathematics. Berlin: Wissenschaft & Technik Verlag, 1997. P. 123–126.

106. *Shishkin G.I., Vabishchevich P.N.* Parallel domain decomposition methods with the overlapping of subdomains for parabolic problems // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 1996. Vol. 6. P. 1169–1185.

107. *Showalter R.E.* Final value problem for evolution equations // J. Math. Anal. Appl. 1974. Vol. 47. P. 563–572.

108. *Smith G.D.* Numerical solution of partial differential equations: Finite difference method. Oxford: Clarendon press, 1992.

109. *Sod G.A.* Numerical methods in fluid dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. press, 1985.

110. *Strang G.* Accurate partial difference methods. I: linear Cauchy problems // Arch. Rat. Mech. Anal. 1963. Vol. 12. P. 392–402.

111. *Strang G.* On the construction and comparison of difference schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1968. Vol. 5. P. 506–517.

112. *Strang G., Fix G.J.* An Analysis of the finite element method. Englewood Cliffs: Prentice–Hall, 1973.

113. *Strikwerda J.C.* Finite difference schemes and partial differential equations. Pacific Grove: Wadsworth & Brooks Cole, 1989.

114. *Le Tallec P.* Domain decomposition methods in computational mechanics // Comput. Mech. Adv.. 1994. Vol. 1. P. 121–220.

115. *Thomas J. W.* Numerical partial differential equations: Finite difference methods. Berlin: Springer, 1995.

116. *Quarteroni A.* Domain decomposition and parallel processing for the numerical solution of partial differential equations // Surv. Math. Industry. 1991. Vol. 1. P. 75–118.

117. *Vabishchevich P.N.* On a class of iterative DD methods with overlapping// Iterativ Methods in Linear Algebra. II. Blagoevgrad: IMACS, 1996. P. 281–291.

Предметный указатель

Вихрь скорости 258

Границы оператора 27

Диагональное преобладание
по столбцам 57
по строкам 57
Дифференциально-операторное уравнение
второго порядка 32
первого порядка 27

Задача
условно корректная 227

Итерационный метод
асинхронный 186
кластерного агрегирования 184
— неизвестных 188

Каноническая форма
двухслойного итерационного метода 165
трехслойного итерационного метода 170
Квадратный корень из оператора 26

Лемма
Гронуолла 28
— разностная 36
Келлога 71
Линейная независимость 22

Метод
Адамса явный 156
декомпозиции области 275
итерационный 165
— вариационный 169
— двухслойный 165
— минимальных поправок 169
— переменных направлений 171
— простой итерации 166
— скорейшего спуска 169
— сопряженных градиентов170
— стационарный 167
— трехслойный 165
квазиобращения 228
попеременно-треугольный 78

Неравенство
Коши–Буняковского 23
— обобщенное 26

Шварца 23
— обобщенное 26
Норма 22
вектора 56
матрицы 56
— логарифмическая 57
оператора 24

Оператор 24
кососимметричный 25
линейный 24
множество значений 24
неотрицательный 26
невырожденный 24
область определения 24
обратный 24
ограниченный 24
перехода 34
положительный 26
положительно определенный 26

самосопряженный 25
сопряженный 25
Операторы
перестановочные 25
энергетически эквивалентные 27

Параметр
регуляризации 229
Подпространство 22
Попеременно-треугольный итерационный метод 179
Принцип регуляризации разностных схем 72
Пространство
k-мерное 22
банахово 23
гильбертово 23
линейное 21
нормированное 22
полное 23
энергетическое 26
Прямая сумма пространств 45

Разностная производная
левая 30
правая 30
центральная 30
Разностная схема
ρ-устойчивость 35
аддитивная регуляризованная 151
двухслойная 34
— каноническая форма 34
— с весами 42
Дугласа–Рекфорда 67
Кранка–Николсона 81
переменных направлений 63
Писмена–Рекфорда 63
покомпонентного расщепления 98
продольно-поперечная 64
регионально-аддитивная 273
симметричная 81
стабилизирующей поправки 67
трехслойная 43
— каноническая форма 43
— с весами 53
устойчивость 34
— по начальным данным 35
— по правой части 35
Разностные схемы
аддитивные 11
— векторные 119
— с целыми шагами 92

покомпонентного расщепления 98
— аддитивно-усредненные 107
регионально-аддитивные 12
экономичные 13
Расщепление
по подобластям 12
по пространственным переменным 12
по физическим процессам 12
Регуляризация разностных схем
аддитивная 74
мультипликативная 148

Сетка
равномерная 30
Символ Кронекера 23
Система
ортогональная 23
Суммарная аппроксимация 93

Уравнение
гиперболическое второго порядка 221
конвекции–диффузии 236
параболическое с обратным временем 226
переноса 199
Уравнения Навье–Стокса 264

Фильтрация в многопластовых системах 249
Функция тока 258

Оглавление

Предисловие **3**

Основные обозначения **5**

Введение **7**

Теория разностных схем 7

Аддитивные разностные схемы 9

Основные результаты теории аддитивных разностных схем 13

О содержании книги 17

Глава 1. Устойчивость операторно-разностных схем **21**

1.1. Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения 21

1.1.1. Гильбертовы пространства 21

1.1.2. Линейные операторы в конечномерном линейном пространстве 24

1.1.3. Операторы в конечномерном гильбертовом пространстве 25

1.1.4. Задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка 27

1.1.5. Система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 29

1.1.6. Краевая задача для одномерного параболического уравнения 29

1.1.7. Уравнения второго порядка 32

1.2. Двухслойные операторно-разностные схемы 33

1.2.1. Основные понятия 33

1.2.2. Устойчивость по начальным данным 36

1.2.3. Устойчивость по правой части 39

1.2.4. Схемы с весами 42

1.3. Трехслойные операторно-разностные схемы 43

1.3.1. Устойчивость по начальным данным 43

1.3.2. Переход к двухслойной схеме 45

1.3.3. ρ-устойчивость трехслойных схем 48

1.3.4. Оценки в более простых нормах 50
1.3.5. Устойчивость по правой части 52
1.3.6. Схемы с весами для уравнений первого порядка 53
1.3.7. Схемы с весами для уравнений второго порядка 54
1.4. Устойчивость в конечномерных банаховых пространствах . 56
1.4.1 Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 56
1.4.2. Схема с весами 58
1.4.3. Разностные схемы для одномерного параболического уравнения 60

Глава 2. Аддитивные схемы двухкомпонентного расщепления 62
2 1. Схемы переменных направлений 62
2.1 1. Постановка задачи 62
2 1.2. Схема Писмена-Рекфорда 63
2.1.3. Устойчивость схемы переменных направлений 64
2.1.4. Точность схемы переменных направлений 66
2.1.5. Другие схемы переменных направлений 67
2.2. Факторизованные схемы 68
2.2.1. Общее рассмотрение 68
2.2 2. Схемы переменных направлений как факторизованные схемы 69
2 2 3 Устойчивость и точность факторизованных схем 70
2 2.4. Принцип регуляризации для построения факторизованных схем 72
2.2.5. Факторизованные схемы многокомпонентного расщепления 75
2.3. Попеременно-треугольный метод 78
2.3.1. Общее описание попеременно-треугольного метода . . . 78
2.3.2. Исследование устойчивости и сходимости 80
2.3.3. Трехслойные аддитивные схемы 81
2.3.4. Задачи с несамосопряженными операторами 83
2 4. Уравнения второго порядка 85
2.4.1. Модельная задача 85
2.4.2 Факторизованные схемы 87
2.4.3. Схемы попеременно-треугольного метода 88

Глава 3. Схемы суммарной аппроксимации 90
3.1. Аддитивные формулировки для дифференциальной задачи . 90
3.1 1. Модельная задача 90
3.1.2. Промежуточные задачи 91
3.1.3 Понятие суммарной аппроксимации 93
3.1.4 Схемы суммарной аппроксимации второго порядка . . 95
3.2. Схемы суммарной аппроксимации 97

3.2.1. Схемы покомпонентного расщепления 97
3.2.2. Оценки решений промежуточных задач 99
3.2.3. Устойчивость схем покомпонентного расщепления . . . 100
3.2.4. Сходимость схем покомпонентного расщепления 102
3.2.5. Сходимость аддитивных схем в банаховых пространствах 103
3.3. Аддитивно-усредненные схемы 105
3.3.1. Дифференциальная задача 105
3.3.2. Аддитивные разностные схемы 106
3.3.3. Устойчивость аддитивно-усредненных схем 107
3.4. Другие варианты схем покомпонентного расщепления 109
3.4.1. Чисто неявные аддитивные схемы 109
3.4.2. Схемы переменных направлений как аддитивные схемы 110
3.4.3. Аддитивные схемы второго порядка точности 112
3 4.4. Сходимость схем повышенной точности 113

Глава 4. Векторные аддитивные схемы 117
4.1. Векторные схемы для уравнений первого порядка 117
4.1.1. Векторная дифференциальная задача 117
4.1.2. Устойчивость векторных аддитивных схем 120
4.1.3. Устойчивость по правой части 123
4.2. Устойчивость схем в банаховых пространствах 125
4.2.1. Постановка задачи 125
4.2.2. Векторная аддитивная схема 127
4.2.3. Исследование устойчивости 127
4.3. Схемы второго порядка точности 130
4.3.1. Постановка задачи 130
4.3.2. Трехслойные векторные схемы 131
4.3.3. Схемы попеременно-треугольного метода 133
4.4. Векторные схемы для уравнений второго порядка 135
4.4.1. Задача Коши для уравнения второго порядка 135
4.4.2. Векторная задача 136
4.4.3. Разностная схема с весами 138
4.4.4. Аддитивные схемы 139
4.4.5. Устойчивость аддитивных схем 142

Глава 5. Регуляризованные аддитивные схемы 144
5.1. Мультипликативная регуляризация разностных схем 144
5.1.1. Принцип регуляризации разностных схем 144
5.1.2. Аддитивная регуляризация 146
5.1.3. Мультипликативная регуляризация 148
5.2. Мультипликативная регуляризация аддитивных схем 148
5.2.1. Задача Коши для уравнения первого порядка 149
5.2.2. Регуляризация аддитивных схем 150

5.2.3. Устойчивость и сходимость 152
5.2.4. Регуляризованные и аддитивно-усредненные схемы . . 154
5.3. Схемы повышенного порядка точности 155
5.3.1. Постановка задачи 155
5.3.2. Явная трехслойная схема 156
5.3.3. Регуляризованные схемы 157
5.3.4. Аддитивно-усредненная схема 159
5 4. Регуляризованные схемы для уравнений второго порядка . . . 160
5.4.1. Модельная задача 160
5.4.2. Регуляризованная схема 161
5.4.3. Аддитивно-усредненные схемы для уравнений второго порядка 162

Глава 6. Итерационные методы 164
6.1. Элементы теории итерационных методов 164
6.1.1. Постановка задачи 164
6.1.2. Метод простой итерации 166
6.1.3. Чебышевский набор итерационных параметров 167
6.1.4. Двухслойные методы вариационного типа 168
6.1.5. Метод сопряженных градиентов 170
6.2. Итерационный метод переменных направлений 171
6.2.1 Итерационный метод при двухкомпонентном расщеплении 171
6.2.2. Исследование сходимости 172
6.2.3. Модифицированный метод переменных направлений . 175
6.2.4. Многокомпонентное расщепление 176
6.3. Попеременно-треугольный итерационный метод 179
6.3.1. Итерационный метод 179
6.3.2. Скорость сходимости 180
6.3.3. Модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод 182
6.4. Итерационные методы кластерного агрегирования 182
6.4.1. Переход к системе уравнений 183
6.4.2. Итерационный метод 184
6.4.3. Параллельный вариант 186
6.4.4. Агрегация неизвестных 188

Глава 7. Расщепление по пространственным переменным 191
7.1. Краевая задача для параболического уравнения 191
7.1.1. Дифференциальная задача 191
7.1.2. Дифференциально-разностная задача 194
7.1.3. Локально-одномерная схема 196
7.1.4. Сходимость схем в банаховых пространствах 197
7.2. Аддитивные схемы для уравнения переноса 198

7.2 1. Уравнение переноса 198
7.2.2. Свойства решений дифференциальной задачи 201
7.2.3. Разностные операторы конвективного переноса 205
7.2.4. Двухслойные разностные схемы 212
7.2.5. Аддитивные схемы 215
7.2.6. Схемы с направленными разностями для уравнений переноса 217
7.3. Гиперболическое уравнение второго порядка 220
7.3.1. Постановка задачи 220
7 3.2. Аппроксимация по пространству 222
7.3.3. Разностные схемы с весами 223
7.3.4. Аддитивная разностная схема 224
7.4. Обратные эволюционные задачи 225
7.4.1. Задача с обратным временем для параболического уравнения 226
7.4.2. Условная корректность 227
7.4.3. Приближенное решение некорректных задач 228
7.4 4. Регуляризованные разностные схемы 230
7 4.5. Аддитивные разностные схемы 232

Глава 8. Расщепление по физическим процессам 235
8.1. Нестационарные задачи конвекции–диффузии 235
8.1.1. Модельные задачи 236
8.1.2. Оценки устойчивости решения дифференциальной задачи 239
8.1.3. Дифференциально-разностная задача 241
8.1.4. Разностные схемы для задач конвекции–диффузии . . 244
8.1.5. Схемы расщепления 247
8.2. Моделирование фильтрации в многопластовых системах . . 249
8.2.1. Постановка задачи 249
8.2.2. Дифференциально-разностная задача 252
8.2.3. Разностные схемы 254
8.3. Разностные схемы для задач гидродинамики в переменных "функция тока, вихрь скорости" 257
8.3.1. Дифференциальная задача 257
8.3.2. Дискретизация по пространству 260
8.3.3. Разностные схемы расщепления 262
8.4. Задачи гидродинамики в естественных переменных 264
8.4.1. Особенности задач гидродинамики 264
8.4.2. Априорная оценка для дифференциальной задачи . . . 266
8.4.3. Аппроксимация по пространству 268
8.4.4. Аддитивные разностные схемы 270

Глава 9. Схемы декомпозиции области **272**
9.1. Методы декомпозиции области 272
9.1.1. Общее описание 272
9.1.2. Модельная параболическая задача 274
9.1.3. Декомпозиция области 275
9.2. Схемы двухкомпонентного расщепления 277
9.2.1. Операторы декомпозиции области 277
9.2.2. Регионально-аддитивные схемы 279
9.2.3. Точность разностного решения 282
9.3. Схемы многокомпонентного расщепления 284
9.3.1. Модельная задача 284
9.3.2. Регионально-аддитивные схемы 285
9.3.3. Сходимость схем декомпозиции 288
9.4. Схемы декомпозиции области для уравнений второго порядка 292
9.4.1. Уравнение колебаний 292
9.4.2. Векторные схемы декомпозиции области 293
9.4.3. Сходимость векторных регионально-аддитивных схем . 296

Литература **298**

Предметный указатель **306**

Contents

Pferace 3

Nomenclature 5

Introduction 7
Theory of difference schemes 7
Additive difference schemes 9
The basic results of the theory of additive difference schemes . 13
On the book material 17

Chapter 1. Stability of operator-difference schemes 21
1.1. The Cauchy problem for a differential-operator equation 21
1.1.1. Hilbert spaces 21
1.1.2. Linear operators in a finite-dimensional linear space 24
1.1.3. Operators in a finite-dimensional Hilbert space . . 25
1.1.4. The Cauchy problem for an evolutionary equation of first order 27
1.1.5. A system of linear ordinary differential equations . 29
1.1.6. A boundary value problem for a one-dimensional parabolic equation 29
1.1.7. Equations of second order 32
1.2. Two-level operator-difference schemes 33
1.2.1. Basic concepts 33
1.2.2. Stability with respect to initial data 36
1.2.3. Stability with respect to the right hand side 39
1.2.4. Schemes with weights 42
1.3. Three-level operator-difference schemes 43
1.3.1. Stability with respect to initial data 43
1.3.2. Transition to a two-level scheme 45

1.3.3. ρ–stability of three-level schemes 48
1.3.4. Estimates in a more simple norms 50
1.3.5. Stability with respect to the right hand side 52
1.3.6. Schemes with weights for equations of first order . 53
1.3.7. Schemes with weights for equations of second order 54
1.4. Stability in finite-dimensional Banach spaces 56
1.4.1. The Cauchy problem for a system of ordinary differential equations 56
1.4.2. Weighted scheme 58
1.4.3. Difference schemes for a one-dimensional parabolic equation 60

Chapter 2. Additive schemes of two-component splitting 62
2.1. Schemes of alternating directions 62
2.1.1. Problem formulation 62
2.1.2. The Peaceman-Rachford scheme 63
2.1.3. Stability of the alternating directions scheme . . . 64
2.1.4. Accuracy of the alternating directions scheme . . . 66
2.1.5. Other schemes of alternating directions 67
2.2. Factorized schemes 68
2.2.1. General consideration 68
2.2.2. Alternating directions schemes as factorized schemes 69
2.2.3. Stability and accuracy of factorized schemes 70
2.2.4. The regularization principle for constructing factorized schemes 72
2.2.5. Factorized schemes with multi-component splitting 75
2.3. Alternating triangles method 78
2.3.1. General description of the alternating triangles method 78
2.3.2. Study on stability and convergence 80
2.3.3. Three-level additive schemes 81
2.3.4. Problems with non-selfadjoint operators 83
2.4. Equations of second order 85
2.4.1. Model problem 85
2.4.2. Factorized schemes 87
2.4.3. Schemes of the alternating triangles method 88

Chapter 3. Schemes of summarized approximation 90
3.1. Additive formulations for a differential problem 90
3.1.1. Model problem 90
3.1.2. Intermediate problems 91

3.1.3. Concept of summarized approximation 93
3.1.4. Schemes of summarized approximation with the second order 95
3.2. Schemes of summarized approximation 97
3.2.1. Schemes of component-wise splitting 97
3.2.2. Estimates for intermediate problem solutions . . . 99
3.2.3. Stability of component-wise splitting schemes . . . 100
3.2.4. Convergence of component-wise splitting schemes . 102
3.2.5. Convergence of additive schemes in Banach spaces 103
3.3. Additively-averaged schemes 105
3.3.1. Differential problem 105
3.3.2. Additive difference schemes 106
3.3.3. Stability of additively-averaged schemes 107
3.4. Other variants of component-wise splitting schemes 109
3.4.1. Fully implicit additive schemes 109
3.4.2. Alternating directions schemes as additive ones . . 110
3.4.3. Additive schemes with the second order of accuracy 112
3.4.4. Convergence of schemes with increased accuracy . 113

Chapter 4. Vector additive schemes **117**
4.1. Vector schemes for equations of second order 117
4.1.1. Vector differential problem 117
4.1.2. Stability of vector additive schemes 120
4.1.3. Stability with respect to the RHS 123
4.2. Stability of vector additive schemes in Banach spaces . . 125
4.2.1. Problem formulation 125
4.2.2. Vector additive scheme 127
4.2.3. Investigation of stability 127
4.3. Schemes with the second order of accuracy 130
4.3.1. Problem formulation 130
4.3.2. Three-level vector schemes 131
4.3.3. Schemes of the alternating triangles method 133
4.4. Vector schemes for equations of second order 135
4.4.1. The Cauchy problem for equations of second order 135
4.4.2. Vector problem 136
4.4.3. Weighted difference scheme 138
4.4.4. Additive schemes 139
4.4.5. Stability of additive schemes 142

Chapter 5. Regularized additive schemes **144**
5.1. Multiplicative regularization of difference schemes 144
5.1.1. The regularization principle for difference schemes 144
5.1.2. Additive regularization 146
5.1.3. Multiplicative regularization 148
5.2. Multiplicative regularization of additive schemes 148
5.2.1. The Cauchy problem for an equation of second order 149
5.2.2. Regularization of additive schemes 150
5.2.3. Stability and convergence 152
5.2.4. Regularized schemes and additively-averaged schemes 154
5.3. Schemes with accuracy of increased order 155
5.3.1. Problem formulation 155
5.3.2. Explicit three-level scheme 156
5.3.3. Regularized schemes 157
5.3.4. Additively-averaged scheme 159
5.4 Regularized schemes for equations of second order 160
5.4.1. Model problem 160
5.4.2. Regularized scheme 161
5.4.3. Additevely-averaged schemes for equations of second order 162

Chapter 6. Iterative methods **164**
6.1. Elements of iterative methods theory 164
6.1.1. Problem formulation 164
6.1.2. Method of the simple iteration 166
6.1.3. The Chebyshev set of iterative parameters 167
6.1.4. Two-level methods of variational type 168
6.1.5. The conjugate gradients method 170
6.2. The iterative method of alternating directions 171
6.2.1. The iterative method at two-component splitting . 171
6.2.2. Analysis of convergence 172
6.2.3. A modified method of alternating directions 175
6.2.4. Multi-component splitting 176
6.3. Alternating triangles iterative method 179
6.3.1. Iterative method 179
6.3.2. Convergence rate 180
6.3.3. A modified alternating triangles iterative method . 182
6.4. Iterative method of claster aggregation 182
6.4.1. Transition to an equation system 183
6.4.2. Iterative method 184
6.4.3. A parallel variant 186

6.4.4. Aggregation of unknowns 188

Chapter 7. Splitting with respect to spatial variables 191

7.1. A boundary value problem for a parabolic equation 191
7.1.1. Differential problem 191
7.1.2. Differential-difference problem 194
7.1.3. Locally-onedimensional scheme 196
7.1.4. Convergence of schemes in Banach spaces 197
7.2. Additive schemes for the transport equation 198
7.2.1. The transport equation 198
7.2.2. Properties of the differential problem solution . . . 201
7.2.3. Difference operators of convective transport 205
7.2.4. Two-level difference schemes 212
7.2.5. Additive schemes 215
7.2.6. Upwind difference schemes for transport equations 217
7.3. Hyperbolic equations of second order 220
7.3.1. Problem formulation 220
7.3.2. Approximation in space 222
7.3.3. Weighted difference schemes 223
7.3.4. Additive difference scheme 224
7.4. Inverse evolutionary problems 225
7.4.1. Problems with the inverse time for a parabolic equation 226
7.4.2. Conditional well-posedness 227
7.4.3. Approximate solution of ill-posed problems 228
7.4.4. Regularized difference schemes 230
7.4.5. Additive difference schemes 232

Chapter 8. Splitting with respect to physical processes 235

8.1. Time-dependent convection-diffusion problems 235
8.1.1. Model problems 236
8.1.2. Stability estimates for the solution of the differential problem 239
8.1.3. Differential-difference problem 241
8.1.4. Difference schemes for convection-diffusion problems 244
8.1.5. Operator-splitting schemes 247
8.2. Numerical simulation of fluid filtration in multi-layer systems 249
8.2.1. Problem formulation 249
8.2.2. Differential-difference problem 252
8.2.3. Difference schemes 254

8.3. Hydrodynamics problems in the "stream function-vorticity" formulation 257
8.3.1. Differential problem 257
8.3.2. Discretization in space 260
8.3.3. Operator-splitting difference schemes 262
8.4. Hydrodynamics problems in the primitive variables 264
8.4.1. Peculiarities of hydrodynamics problems 264
8.4.2. A priori estimate for the differential problem . . . 266
8.4.3. Approximation in space 268
8.4.4. Additive difference schemes 270

Chapter 9. Schemes of domain decomposition 272
9.1. Domain decomposition methods 272
9.1.1. General description 272
9.1.2. Model parabolic problem 274
9.1.3. Domain decomposition 275
9.2. Schemes of two-component splitting 277
9.2.1. Operators of domain decomposition 277
9.2.2. Regionally-additive schemes 279
9.2.3. Accuracy of the difference solution 282
9.3. Regionally-additive schemes of multi-component splitting 284
9.3.1. Model problem 284
9.3.2. Regionally-additive schemes 285
9.3.3. Convergence of domain decomposition schemes . . 288
9.4. Domain decomposition schemes for equations of second order 292
9.4.1. Wave equation 292
9.4.2. Vector schemes of domain decomposition 293
9.4.3. Convergence of vector regionally-additive schemes 296

References 298

Index 306

Научное издание

Самарский Александр Андреевич

Вабищевич Петр Николаевич

АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Утверждено к печати Ученым советом Института математического моделирования Российской академии наук

Зав. редакцией *Н.А. Степанова*

Редактор-организатор *Н.В. Заяц*

Художественный редактор *Е.А. Быкова*

Оригинал-макет выполнен в Институте математического моделирования РАН *П.Н. Вабищевичем*

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Налоговая льгота – общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953000 – книги, брошюры

Подписано к печати 17.11.1999

Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Печать офсетная

Усл.печ.л. 20,0. Усл.кр.-отт. 20,4. Уч.-изд.л. 16,5

Доп. тираж 330 экз. Тип. зак. 4399

Издательство "Наука"

117997 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru

Internet: www.naukaran.ru

Санкт-Петербургская типография "Наука"

199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12

ISBN 5-02-006505-6

9 785020 065055