Российская Академия наук

Институт математического моделирования

Самарский А.А., Колдоба А.В.,

Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф.,

Фаворский А.П.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ

Минск 1996

АННОТАЦИЯ

Монография посвящена разработке и исследованию разностных схем на нерегулярных сетках, на топологическую и геометрическую структуру которых наложены минимальные разумные ограничения. Рассматриваются разностные схемы метода опорных операторов для эллиптических уравнений и вариационно-разностные схемы для уравнений лагранжевой газовой динамики в двумерной (как правило плоской) геометрии. Указанные подходы позволяют аппроксимировать уравнения математической физики, записанные в терминах инвариантных операторов первого порядка div, grad, rot и их комбинаций. Основное внимание уделено разработке математического аппарата для исследования разностных схем, не опирающегося на какие-либо предположения о структуре расчетной сетки. Рассматриваются вопросы программной реализации соответствующих вычислительных алгоритмов с динамической организацией памяти ЭВМ.

CONTEND

The monograph is devoted to constructing and investigating of difference schemes on irregular grids provided that topological and geometrical structure is imposed by minimal reasonable restrictions. We considerate difference schemes of support operator method for elliptic equations and variational-difference schemes for Lagrangian gas dynamics in two-dimensional (plant as a rule) geometry. Mentioned approaches permit to approximate equations of mathematical physics described in terms of invariant first order differential operators div, grad, rot and their combinations. Special attention is spared to development of mathematical instrument for investigation of difference schemes without assumption about structure of designed grid. The problems of programming of computational algorithms with dynamic arrangement of computer memory.

Оглавление

Предисловие

Предлагаемая книга посвящена построению и исследованию разностных схем на нерегулярных сетках в двумерной геометрии. Под нерегулярными мы понимаем сетки не имеющие какой-либо регулярной структуры. В широком смысле под регулярной структурой может иметься в виду следующее: сетка образована двумя семействами параллельных прямых (регулярная четырехугольная сетка); сетка образована двумя семействами пересекающихся кривых (неортогональная сетка); сетка составлена из одинаковых треугольников (регулярная треугольная сетка); сетка получена из регулярной гладким преобразованием координат (квазирегулярная сетка). Единственное ограничение, которое мы накладываем на расчетную сетку, состоит в том, что ее ячейки имеют сравнимые размеры во всех направлениях. Другими словами ячейки сетки не имеют очень острых или очень тупых углов и отношение длин соседних сторон ограничено снизу и сверху. Употребляя термин «разностная схема на нерегулярной сетке» мы подчеркиваем, что при построении и исследовании таких разностных схем не делалось никаких предположений о топологической и геометрической структурах расчетной сетки, кроме вышеуказанных, и доказанные в тексте книги утверждения справедливы для любых сеток. Безусловно, на сетках, обладающих той или иной степенью регулярности, полученные оценки точности разностных схем могут быть улучшены, но разбор возможных частных случаев не входил в наши планы.

Работа носит чисто теоретический характер и отражает результаты, полученные авторами в течение нескольких последних лет. Для построения и исследования разностных схем на нерегулярных сетках могут быть применены различные подходы, в частности метод конечных элементов. В этой книге по понятным причинам используются методы, предложенные авторами. Применительно к разностным схемам для эллиптических уравне-

ний — метод опорных операторов, для уравнений лагранжевой газовой динамики — вариационный метод. Эти методы не используют предположения о структуре расчетной сетки и содержат в своей основе близкие идеи. Нерегулярность сетки делает невозможной аппроксимацию производных по координатам, играющую центральную роль в традиционной теории разностных схем. Здесь на первый план выходит аппроксимация инвариантных дифференциальных операторов первого порядка div, grad, rot. К счастью, класс задач, допускающих формулировку в терминах этих операторов, весьма широк. Излагаемые в этой книге методы позволили построить разностные схемы на нерегулярных сетках для многих уравнений из этого класса, в том числе и нелинейных. Вопросы исследования и обоснования этих схем менее разработаны. Мы ограничились рассмотрением с одной стороны достаточно простых, а с другой весьма показательных примеров: эллиптических уравнений Пуассона и стационарной теории упругости; гиперболических уравнений акустики. Все уравнения линейны и, более того, с постоянными коэффициентами. Такой выбор объясняется стремлением выделить проблемы, связанные исключительно с нерегулярностью сетки, и показать общие подходы к их решению для различных типов уравнений.

Авторы благодарят Н.А.Симус — за помощь при работе над главой V и О.А.Дремова — за помощь при работе над главой VIII. Мы глубоко признательны профессору П.П.Матусу, много сделавшему для выхода этой книги; С.Э.Ананичу, проделавшему огромную работу по подготовке книги к печати; директору ЗАО «Критерий» А.Я.Михайлюку, спонсировавшему ее издание.

Авторы

Введение

В настоящее время идеи и методы вычислительного эксперимента являются общепризнанными [1]. С точки зрения теории численных методов ключевым элементом этого подхода к организации научных исследований является звено «математическая модель» — «вычислительный алгоритм». Проблема состоит в том, как сопоставить выбранной (на данном этапе исследований) математической модели явления или процесса эффективный и гибкий вычислительный алгоритм. Под этим имеется в виду следующее. Современные вычислительные мощности не позволяют, как правило, проводить расчеты на подробных разностных сетках в случаях, когда эти расчеты носят многовариантный характер. Если, кроме того, проводимые расчеты генерируют изменения и уточнения самой математической модели, то отдельные блоки вычислительного алгоритма должны быть легко заменяемы и стыкуемы друг с другом.

При этом, с одной стороны, создание эффективных вычислительных алгоритмов возможно лишь на основе достаточно глубоко проработанной теории, а с другой стороны, отсутствие таковой привело к формулировке полуэмпирических принципов и подходов, позволяющих получить качественное решение на достаточно грубых реальных сетках. Утрируя, можно сказать, что произошло расщепление теории численных методов для уравнений математической физики на два направления. Одно из направлений делает упор на обоснование вычислительных алгоритмов (аппроксимация, устойчивость, сходимость) не интересуясь происхождением исходных дифференциальных уравнений и рассматривая проблему абстрактно-математически [2, 3, 5, 6, 8—10, 12—14]. Другое направление основное внимание уделяет физическому смыслу аппроксимируемых уравнений [4, 7, 11, 15, 16] и на этой основе формулирует принципы построения разностных схем, выходящие за рамки собственно теории численных методов, такие, как консервативность [34] и полная

консервативность [35].

Дальнейшая эволюция физического направления к построению разностных схем привела к идее замены сплошной среды, обладающей континуальным числом степеней свободы, ее дискретной моделью, обладающей конечным или счетным числом степеней свободы, и применению к последней тех или иных общефизических принципов. В рамках такого подхода указанные выше принципы консервативности и полной консервативности получили естественное развитие и привели к формулировке вариационного метода [41, 53—55], метода опорных операторов [37—41]. Сами по себе эти методы не решают проблему построения разностных схем для уравнений математической физики, так как содержат феноменологические коэффициенты не определяемые свойствами исходной дифференциальной модели.

Указанные направления исследований, взаимно дополняя и обогащая друг друга, позволили разработать высокоэффективные численные методы для широкого круга естественнонаучных и технологических задач. Одной из областей наиболее широкого применения методов вычислительного эксперимента является механика сплошных сред, в частности, газовая динамика [23] и теория упругости [24]. Для задач такого рода развиты многочисленные методы, позволяющие провести высокоточное численное интегрирование соответствующих уравнений, если сама модель не содержит каких-либо специфических особенностей. Одной из таких особенностей может быть геометрический фактор, связанный с необходимостью проведения расчетов в областях, форма которых заранее не известна, а определяется в результате расчетов. Следствием этого обстоятельства является использование разностных схем на нерегулярных разностных сетках, топологическая и геометрическая структуры которых, вообще говоря, не фиксированы.

Исторически, использование нерегулярных сеток связано с разработкой вычислительных алгоритмов, содержащих блок интегрирования двумерных уравнений лагранжевой газовой динамики. Узлы расчетной сетки при

этом могут образовывать достаточно произвольные и непредсказуемые заранее конфигурации. Если при этом на фоне рассматриваемого газодинамического течения протекают дополнительные физические процессы (например, диффузия), то возникает необходимость интегрирования на нерегулярной сетке соответствующих уравнений. Возможны и другие ситуации, в которых возникаёт необходимость использования нерегулярных сеток, например в областях сложной формы.

В связи с этим возникла проблема построения и обоснования разностных схем для уравнений математической физики на нерегулярных сетках. В настоящей работе рассматривается более узкая проблема обоснования разностных схем метода опорных операторов для эллиптических уравнений [37—41, 56—57] и вариационно-разностных схем для уравнений лагранжевой газовой динамики [41, 53—55] . Вопрос, на который мы попытаемся ответить, состоит в следующем: возможно ли построение содержательной теории разностных схем, в которой не делается каких-либо предположений относительно структуры разностной сетки. Существует естественный класс задач, для которых такая теория, по-видимому, может быть развита. Это задачи, которые формулируются в терминах инвариантных операторов векторного анализа div, grad, rot и их комбинаций. Отметим, что ни вариационно-разностный метод, ни метод опорных операторов никоим образом не апеллируют к предположениям о структуре разностной сетки и поэтому представляются адекватными подходами к построению разностных схем для указанного класса задач.

Проблему обоснования разностных схем на нерегулярных сетках можно рассматривать на двух уровнях. На первом уровне, который мы условно назовем геометрическим, исследуется сходимость разностных схем в зависимости от степени согласования геометрии сетки с шаблонными функционалами, определяющими конкретный вид разностной схемы. При этом предполагается достаточная гладкость решения исходной дифференциальной задачи. На втором уровне, который мы назо-

вем аналитическим, вопросы сходимости исследуются с учетом гладкости решения и выясняется какой степени указанного выше согласования следует добиваться при заданной гладкости.

Техника построения разностных схем для инвариантных уравнений математической физики была развита в работах школы А.А.Самарского. Это и вариационный подход [41, 53—55] и метод опорных операторов [37—41, 56—57].

Метод опорных операторов, в том виде как он используется в данной работе, был предложен А.А.Самарским, В.Ф.Тишкиным, А.П.Фаворским, М.Ю.Шашковым в 1981 г. [37—38]. Применительно к уравнению Пуассона идея этого метода состоит в том, что один из операторов div или grad аппроксимируется непосредственно, а второй таким образом, чтобы удовлетворить разностному аналогу интегрального тождества

$$\int\limits_{\mathcal{O}} u \operatorname{div} \mathbf{p} \mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} u \mathbf{p} \mathrm{d}\mathbf{s} - \int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \operatorname{grad} u) \mathrm{d}V. \qquad (1)$$

В последующих работах этих и других авторов были построены и исследованы разностные схемы метода опорных операторов для различных уравнений математической физики [46, 51—52, 59—71]. Часть этих работ была суммирована в [41].

Отметим, что аналогичная идея, применительно к прямоугольным сеткам, была высказана в [47].

Вариационный подход к построению разностных схем для уравнений лагранжевой газовой динамики был предложен в работах Самарского А.А., Головизнина В.М., Фаворского А.П. в конце 70-х годов и в дальнейшем интенсивно развивался этими и другими авторами [41, 53—55]. Идея метода состоит в замене непрерывной среды дискретной и применении к последней принципа наименьшего действия, считая независимыми переменными координаты узлов сетки. Построенные таким образом схемы оказались консервативными и, более того, — полностью консервативными [4].

Наряду с указанными подходами существуют и другие методы построения разностых схем для эллиптических и параболических уравнений на нерегулярных сетках, например [42—45, 48—50]. Однако в настоящей работе эти разностные схемы не рассматриваются.

Что касается аналитического уровня исследования разностных схем для эллиптических уравнений, то в этом направлении в 80-е годы был достигнут значительный прогресс благодаря работам А.А.Самарского, Р.Д.Лазарова, В.Л.Макарова, суммированным в [5]. Были установлены согласованные с гладкостью решения оценки точности конкретных разностных схем на равномерных прямоугольных сетках. Под согласованными оценками точности, согласно [5], имеются в виду неравенства вида

$$\|y - u_h\|_{s,\Omega} \leq Ch^{k-s}\|u\|_{k,\mathcal{O}}. \tag{2}$$

Здесь: h — параметр, характеризующий подробность разбиения расчетной области $\mathcal{O}$ разностной сеткой; u — решение исходной дифференциальной задачи, u_h — проекция этого решения в пространство сеточных функций, y — разностное решение; $\|\cdot\|_{k,\mathcal{O}}$ — норма в соболевском пространстве H^k, $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ — сеточный аналог нормы в H^s. При этом числа k и s могут принимать ограниченное множество значений. Оценки точности в L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ получены методом разностных мультипликаторов, который существенно опирается на условие равномерности сетки.

Вопросам сходимости разностных схем для эллиптических уравнений на обобщенных решениях посвящена также монография [17]. Здесь рассматриваются сетки, составленные из прямоугольников и треугольников, на которых аппроксимируются указанные уравнения. Показана сходимость построенных разностных схем на обобщенных решениях в энергетической, L^2 и C — нормах.

Согласно первоначальной версии [53—54] процедура построения вариационно-разностных схем для лагранжевой газовой динамики предполагает, что топологическая структура сетки не изменяется, каждой ячейке сетки приписаны неизменная во времени масса и объем — функция координат вершин ячейки, а каждому узлу — мас-

са, также неизменная во времени. Аппроксимация таких схем в акустическом приближении исследована либо для треугольных сеток [70], либо квазирегулярных четырехугольных сеток [53]. Для произвольных сеток вопрос об аппроксимации остается открытым, более того высказываются сомнения в ее существовании [71].

Между тем реальные расчеты зачастую приходится проводить на существенно нерегулярных сетках. Даже если сетка в начальный момент являлась регулярной, она может потерять регулярность в результате движения сплошной среды (и вмороженной в нее сетки) с сильными сдвиговыми деформациях. В этом случае происходит потеря аппроксимации и полный «развал» сетки, после чего дальнейший счет становится невозможным.

Указанные обстоятельства приводят к необходимости расширения семейства полностью консервативных разностных схем. Возможных путей для этого несколько, вопрос в том какой из них ведет к более простым и эффективным вычислительным алгоритмам.

Один из подходов предложен в [72] и состоит в построении разностных схем с мультиплетным числом термодинамических степеней свободы, когда каждой ячейке сетки приписывается несколько масс, объемов и соответственно плотностей, давлений. В основе этого подхода лежит следующее соображение: чем больше в разностной схеме термодинамических степеней свободы, тем более жесткой является сетка (по аналогии с треугольной сеткой).

Другой подход состоит в построении более сложного оператора, определяющего кинетическую энергию дискретной среды [73]. При таком подходе наиболее простой вариант — считать массы узлов симметричными тензорами, определяемыми конфигурацией сетки [74—76].

Альтернативным подходом к численному моделированию динамики газа в рамках лагранжева способа описания является использование свободно-лагранжевых сеток и соответствующих разностных схем. Такие схемы получили широкое распространение в вычислительной практике, т.к., в отличие от традиционных лагранжевых мето-

дов, позволяют проводить расчеты течений с сильными сдвиговыми деформациями.

Построению и исследованию свободно-лагранжевых разностных схем посвящено значительное число работ [77—83]. Идея построения полностью консервативных схем такого типа состоит в следующем. Каждому узлу сетки ставится в соответствие некоторая часть расчетной области, как функция координат узлов сетки. Постулируется, что области соответствия являются жидкими частицами, т.е. между ними отсутствуют конвективные потоки массы, импульса и энергии. Уравнения движения для такой дискретной модели получаются, например, путем варьирования функционала действия при наложенных кинематических и термодинамических связях [77]. Из сказанного ясно, что весь произвол при построении полностью консервативных разностных схем такого типа заключается в выборе областей соответствия для узлов сетки.

Поскольку разработка методов вычислительного эксперимента опирается на использование результатов теории алгоритмов и на инструментальные средства их реализации, постольку успешное применение вычислительного эксперимента в значительной мере определяется эффективностью используемых вычислительных алгоритмов и качеством их программной разработки. Иными словами, создание эффективных вычислительных алгоритмов возможно лишь на основе достаточно глубоко проработанной теории. В свою очередь, широкое распространение программных средств, опирающихся на эффективные алгоритмы и ориентированных на конкретные прикладные области, возможно лишь при условии их реализации в виде программных комплексов, для создания которых необходимы соответственно развитые инструментальные средства.

Значительная доля трудозатрат при решении сложных (многомерных, учитывающих большое количество физических процессов) задач вычислительной физики на ЭВМ идет на программирование алгоритмов. С другой стороны, различные физические процессы часто описыва-

ются одними и теми же уравнениями. В связи с этим актуальными являются исследования в области математической физики и системного программирования, результаты которых ведут к созданию специализированного математического обеспечения в виде пакетов программ, проблемно-ориентированных на специальные классы задач математической физики.

Пакет прикладных программ — это комплекс взаимосвязанных прикладных программ и средств системного обеспечения, предназначенный для автоматизации решения определенного класса задач [25, 26]. Проблемная ориентация пакета прикладных программ определяется совокупностью предметной области, т.е. классом задач, и дисциплиной работы, т.е. системой правил, принятых при разработке, отладке и эксплуатации программ.

Процесс разработки и совершенствования пакетов прикладных программ обычно идет по двум взаимосвязанным направлениям. С одной стороны, необходимо проводить работы по обоснованию предметной области уже существующих пакетов, так как используемые пакетом алгоритмы должны быть теоретически обоснованы. С другой стороны, поскольку желательно, чтобы область применения пакета прикладных программ охватывала возможно больший класс задач, постольку актуальными являются исследования, выполненные в рамках работ по расширению предметной области пакета программ. Однако, расширение и появление принципиально новых классов решаемых задач, а также использование новых типов ЭВМ приводит к необходимости создания новых пакетов прикладных программ или новых версий уже существующих пакетов с расширенной предметной областью. Для того, чтобы в известной степени автоматизировать решение указанных проблем необходимы универсальные инструментальные средства, позволяющие на своей основе создавать проблемно-ориентированные пакеты программ.

Исторически одним из первых пакетов программ такого сорта являлся пакет программ ТЕКОН [29]. Этот пакет позволял рассчитывать нестационарные темпера-

турные режимы для нелинейных сред в пространственно трехмерных областях сложной формы с граничными условиями общего вида на ЭВМ с ограниченными ресурсами быстродействия и памяти.

Расширение предметной области этого пакета фактически связано с реализацией некоторых абстрактных типов данных (представление скалярных, векторных и тензорных объектов на структурных элементах нерегулярной сетки) и совокупности операций над ними (например, divgrad, rotrot, вычисление гравитационных, магнитогидродинамических или вязких сил в сплошной среде и т.д.) [84, 85]. Такие задачи возникают, например, при изучении процессов, сопровождающих термоядерную реакцию, в астрофизических и других приложениях. Другими словами, в отличие от первоначальной версии ТЕКОНа, которая ориентировалась на тепловые задачи, новые его версии имеют дело с принципиально новой предметной областью и новыми классами задач.

Следует особо отметить, что при создании системы ТЕКОН использовалась идеология операторного подхода и, поэтому, инструментальные средства системы ориентированы прежде всего на решение вычислительных задач этого типа, что, впрочем, никак не ограничивает рамки применимости системы для решения других классов задач.

Целью настоящей работы является разработка математического аппарата для исследования разностных схем на произвольных нерегулярных сетках, обоснование и модификация схем уже используемых в вычислительной практике. Авторы не ставили своей целью построение разностных схем в смысле выписывания разностных уравнений (хотя таковые и присутствуют в тексте). Тем более выписывание шаблонных функционалов, задающих элементы матрицы разностной схемы, эту весьма трудоемкую работу может выполнить компьютер. Мы постарались на достаточно простых примерах проиллюстрировать технику построения разностных схем на нерегулярных сетках и обозначить возможные подходы к их анализу и модификации (на основе этого анализа).

В работе исследуются разностные схемы для модельных задач: эллиптических уравнений Пуассона и линейной стационарной теории упругости, а также гиперболических уравнений акустики.

Несмотря на существенно различные свойства эллиптических и гиперболических уравнений и различные подходы к их аппроксимации, оказывается, что исследование сходимости соответствующих разностных схем на нерегулярных сетках демонстрирует ряд общих черт.

1) Чтобы сравнивать решение, полученное численно, с решением исходной дифференциальной задачи в теории разностных схем осуществляется проектирование последнего в пространство сеточных функций. На регулярной сетке или сетке, обладающей той или иной симметрией, способ проектирования, как правило, не вызывает вопросов. На нерегулярных сетках выбор проектора неочевиден. Это приводит к необходимости классификации проекторов и описания их в терминах моментов (см. §2.3).

2) В обоих случаях разностные схемы, вообще говоря, не аппроксимируют уравнений в локальном смысле, поэтому доказательство сходимости возможно после анализа структуры погрешности аппроксимации. Исследование этого вопроса приводит к идее расщепления пространства векторных сеточных функций в ортогональную прямую сумму подпространств потенциальных и вихревых полей.

3) Условия сходимости в «сильных» нормах в обоих случаях аналогичны: спроектированный на сетку метрический тензор δ_{ik} должен быть потенциальной сеточной функцией. Если это условие не выполнено, имеет место сходимость в «слабых» нормах.

Перейдем к краткому изложению содержания работы.

Глава I посвящена построению разностной схемы метода опорных операторов для уравнения Пуассона и вариационно-разностной схемы для уравнений лагранжевой газовой динамики.

В §1.1 вводится разностная сетка и обсуждаются возможные варианты задания на ней сеточных функций.

В §1.2 формулируется идея метода опорных опера-

торов и строится разностная схема для уравнения Пуассона и показывается ее консервативность. На основе анализа разностных уравнений вводятся операторы div_h и grad_h, являющиеся разностными аналогами соответствующих дифференциальных операторов.

В §1.3 в рамках лагранжева способа описания сплошной среды рассматривается процедура получения уравнения движения жидких частиц из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Повторение этой процедуры на разностном уровне приводит к вариационно–разностной схеме. Вводятся разностные операторы div_h и grad_h, но уже иные, чем в §1.2. Обсуждаются вопросы выполнения законов сохранения в вариационно–разностной схеме, устанавливается ее полная консервативность.

В §1.4 обсуждаются разностные схемы, построенные в §1.2 и §1.3. Выявляются общие черты операторного и вариационного подходов к построению разностных схем, а также «лишние» величины и несущественные моменты, которые могут быть опущены.

Глава II посвящена формулировке и описанию математического аппарата метода опорных операторов, а также построению и исследованию алгебраических свойств разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на классических решениях.

В §2.1 описывается разностная сетка и пространства сеточных функций.

В §2.2 даются основные понятия о методе опорных операторов в виде, удобном для последующего изложения.

Рассматривается уравнение Пуассона в ограниченной области $\mathcal{O}$ переменных (x_1, x_2), которое интерпретируется как стационарное уравнение теплопроводности. В области $\mathcal{O}$ вводится сетка, состоящая из узлов, образованных ими ячеек-многоугольников и граней — сторон ячеек. Относительно взаимного расположение узлов никаких предположений не делается. Метод опорных операторов рассматривается в варианте, когда сеточная функция температур относится к ячейкам сетки, а сеточная функция тепловых потоков к граням. Такая дискрети-

зация физических полей позволяет естественным образом ввести разностный оператор div_h и аппроксимировать уравнение баланса тепла. Для применения метода опорных операторов пространство векторных сеточных функций снабжается скалярным произведением $\langle p, q\rangle$ (аппроксимирующим интегралы вида $\int_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V$). Вводится метрический оператор $\mathcal{G}$, на который накладываются ограничения $\gamma_1 I \leq \mathcal{G} \leq \gamma_2 I$. Использование разностного аналога интегрального тождества (1) позволяет ввести разностный оператор grad_h, который формально сопряжен оператору $-\mathrm{div}_h$ в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Кроме того вводятся разностные операторы rot_h и rot_h^*, такие что $\mathrm{div}_h\,\mathrm{rot}_h = 0$, $\mathrm{rot}_h^*\mathrm{grad}_h = 0$. Впрочем эти обозначения для разностных операторов там уже не используются.

В §2.3 вводятся проекторы из пространств функций непрерывного аргумента в пространства сеточных функций. Обсуждается вопрос о классификации и описании проекторов в терминах их моментов.

В §§2.4—2.6 доказывается несколько теорем вложения для сеточных пространств. Под теоремами вложения для сеточных функций как правило понимают оценки вида

$$\|F\|_1 \leq M\|F\|_2 \tag{3}$$

с константой M, не зависящей от функции F и сетки из некоторого рассматриваемого семейства. Здесь $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ сеточные аналоги норм некоторых соболевских пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Однако, возможна ситуация, когда вложение $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ не имеет места. Тем не менее оценки вида (3) для сеточных функций справедливы с модификацией $M = M(h)$. Например, слабое вложение (weak imbedding) сеточных пространств $\overset{\circ}{H}{}^2$ в L^∞ не имеет аналога в континуальном случае.

В теории разностных схем имеется достаточно хорошо развитый аппарат доказательства теорем вложения для случая прямоугольных сеток [3]. Для нерегулярных сеток специального вида (ячейки сетки — треугольники

или прямоугольники) в [17] показано слабое вложение сеточных пространств $\overset{\circ}{H}{}^2$ в L^∞. Соответствующая оценка, аналогична оценкам, характерным для метода конечных элементов [7—8].

В §2.4 получен разностный аналог интегрального представления функций из $\overset{\circ}{H}{}^2(\mathcal{O})$, на базе которого строится кусочно-постоянная функция непрерывного аргумента, совпадающая в ячейках с исходной сеточной функцией. В дальнейшем оценивается норма именно этой функции в L^p, которая равна соответствующей сеточной норме исходной функции. В §2.5 показано, что имеют место вложения сеточных пространств L^p в $\overset{\circ}{H}{}^2$ при $1 \le p < \infty$, а в §2.6 показано слабое вложение L^∞ в $\overset{\circ}{H}{}^2$ с константой $M \propto |\ln h|^{\frac{1}{2}}$.

Глава III посвящена исследованию сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на классических решениях.

Результаты этого исследования можно сформулировать следующим образом. Разностная дивергенция ошибки вычисления потоков равна нулю. Следовательно эта ошибка есть разностный ротор некоторой сеточной функции ζ. Функция ζ удовлетворяет уравнению вида

$$\mathrm{rot}_h^* \mathrm{rot}_h\, \zeta = -\,\mathrm{rot}_h\,(\Pi\,\mathrm{grad}\,u), \tag{4}$$

где rot_h^*, rot_h — разностные аналоги оператора rot ; Π — проектор, преобразующий векторные функции непрерывного аргумента в сеточные векторные функции.

Разлагая правую часть этого уравнения в окрестности некоторого узла, получаем

$$\mathrm{rot}_h\,(\Pi\,\mathrm{grad}\,u) = A_i u_i + A_{ik} u_{ik} + \dots$$

где $u_i = \partial u/\partial x_i$, $u_{ik} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_k$, ...;

A_i — разностный аналог интеграла $\oint \mathrm{d}x_i \equiv 0$,

A_{ik} — разностный аналог интеграла $\oint (x_i \mathrm{d}x_k + x_k \mathrm{d}x_i) \equiv 0$.

Таким образом, отличие от нуля правой части уравнения (4) обусловлено рассогласованием между разностным ротором и проекцией на сетку потенциального векторного

поля. Очевидно, что чем больше коэффициентов A_i, A_{ik}, ... обратится в ноль, тем меньше будет ζ и соответственно выше точность вычисления потоков.

Коэффициенты A_i, A_{ik}, ... определяются моментами проектора Π, т.е. геометрическими характеристиками сетки, и метрическим оператором $\mathcal{G}$, задающим скалярное произведение в пространстве векторных сеточных функций. Если ограничиться рассмотрением только A_i, то геометрические свойства сетки сводятся к ориентированным площадям $\mathbf{s}$ граней, и задача состоит в построении оператора $\mathcal{G}$ по этим площадям так, чтобы $A_i = 0$ для всех узлов сетки, и выяснения, какая точность вычисления потоков при этом достигается.

Оказывается однако, что условие $A_i = 0$ недостаточно для сходимости разностных схем. Необходимо дополнительно потребовать, чтобы разностные аналоги дифференциалов $\mathrm{d}x_i$, которые суть $\mathcal{G}s_i$, были согласованы с размерами ячеек.

Вводится разложение пространства сеточных векторных функций в ортогональную прямую сумму подпространств потенциальных и вихревых полей, таким образом, что ошибка вычисления потока является вихревой функцией.

Ошибка вычисления самой температуры z удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{div}_h\ \mathrm{grad}_h\, z = \mathrm{div}_h\, \eta\ , \tag{5}$$

где div_h и grad_h — разностные аналоги соответствующих дифференциальных операторов. Если выполнены вышеупомянутые условия, то величина η есть $\mathrm{O}(h)$, и устанавливается оценка для z в энергетической норме $\|z\|_{\mathrm{A}} = \mathrm{O}(h)$. Оказывается, тот факт, что ошибка в потоке есть вихревая функция, позволяет ослабить эти условия и, при выполнении некоторых условий, показать сходимость при $\eta = \mathrm{O}(1)$.

В §3.1 исследуются вопросы сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на геометрическом уровне. Цель этого исследования — сформулировать условия сходимости рассматри-

ваемых разностных схем и показать их естественность. При этом предполагается достаточная гладкость решения исходной дифференциальной задачи.

В §3.2 устанавливается, что полученные в §3.1 условия сходимости в ряде случаев связаны с аппроксимацией интегралов $\int_{\mathcal{O}}(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathrm{d}V$ по ячейкам сетки билинейными формами $g_{ab}p^a q^b$. Формулируются соответствующие условия аппроксимации, связывающие матричные элементы g_{ab} метрического оператора с геометрическими характеристиками сетки.

В §3.3 для треугольных и четырехугольных ячеек построены семейства билинейных форм (метрических операторов), удовлетворяющих сформулированным в §3.1—3.2 критериям.

Глава IV посвящена исследованию сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях.

Основная идея этого исследования состоит в следующем. Пространство векторных сеточных функций $\mathcal{H}$ расщепляется в ортогональную прямую сумму подпространств $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ таким образом, что подпространство $\mathcal{A}$ содержит функции вида $a = \mathrm{GRAD}f$, а подпространство $\mathcal{B}$ — функции такие, что $\mathrm{DIV}b = 0$. При таком расщеплении разностный градиент ошибки температур лежит в $\mathcal{A}$, а ошибка потока лежит в $\mathcal{B}$. Следствием этого обстоятельства является тот факт, что разностное решение минимизирует ошибку потоков в подпространстве $\mathcal{A}$.

В §4.1 показано, что если выполнены условия сходимости, сформулированные в главе III, то можно указать сеточную функцию из $\mathcal{A}$, отклоняющуюся на $\mathrm{O}(h)$ от спроектированного на сетку решения исходной дифференциальной задачи, которое предполагается элементом соболевского пространства $H^2(\mathcal{O})$.

В §4.2 исследуется сходимость разностных схем метода опорных операторов относительно «температуры». Рассматривается первая краевая задача для уравнения Пуассона. Показано, что если выполнены указанные выше условия, то имеет место сходимость со скоростью $\mathrm{O}(h)$ в энергетической норме. Более того, используя раз-

ложение $\mathcal{H} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ можно в ряде случаев ослабить условия сходимости.

В §4.3 исследуется сходимость разностных схем метода опорных операторов для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях. Устанавливаются условия сходимости, для треугольной сетки строится метрический оператор, удовлетворяющий этим условиям.

Глава V посвящена построению и исследованию разностных схем метода опорных операторов на нерегулярных сетках для уравнений линейной теории упругости [24]. Искомой функцией является вектор смещения частиц деформируемого упругого тела. При этом сеточная функция смещений отнесена к узлам расчетной сетки.

В связи с этим в §5.1 предварительно рассматриваются разностные схемы метода опорных операторов для уравнения Пуассона в варианте, когда сеточная функция «температур» определена в узлах сетки. В этом случае в качестве опорного оператора естественно принять оператор grad [60]. Сформулированы условия сходимости на обобщенных решениях. Эти условия по своему смыслу полностью аналогичны условиям полученным в главах III, IV, для случая, когда в качестве опорного брался оператор div. Они имеют характер связей между метрическим оператором и геометрическими характеристиками сетки.

В §5.2 рассматривается первая краевая задача для стационарных уравнений линейной теории упругости, для которых строится семейство разностных схем метода опорных операторов. Скалярное произведение в пространстве тензорных сеточных функций — компонент тензора деформаций выбирается согласованно с энергией деформированного тела.

В §5.3 формулируются критерий сходимости, построенных в §5.2 разностных схем, и условия аппроксимации введенным скалярным произведением соответствующей континуальной билинейной формы. Построены метрические операторы, удовлетворяющие этим условиям.

В §5.4 устанавливается разностный аналог первого не-

равенства Корна [18].

В §5.5 дается другой подход к построению и исследованию разностных схем метода опорных операторов для стационарных уравнений линейной теории упругости. Рассматриваются граничные условия произвольного вида. Сходимость показывается на обобщенных решениях из соболевского класса H^2.

Главы VI—VII посвящены исследованию вариационно-разностных схем для уравнений лагранжевой газовой динамики в двумерной плоской геометрии. Рассматриваются разностные схемы как на сетках с фиксированной топологией, так и на свободно-лагранжевых сетках с областями соответствия — ячейками Дирихле. Несмотря на различия в деталях, указанные схемы обладают рядом общих свойств.

Во-первых, эти схемы полностью консервативны, т.е. не обладают схемной диссипацией энергии.

Во-вторых, эти схемы, вообще говоря, не аппроксимируют уравнений газовой динамики (в акустическом приближении). Точнее, разностные схемы с фиксированной топологией не аппроксимируют уравнения движения жидких частиц, а разностные схемы на свободно-лагранжевых сетках не аппроксимируют уравнение неразрывности. В силу бездиссипативности этих схем отсутствует и сходимость в энергетической норме.

В-третьих, и в том и в другом случае главный член погрешности аппроксимации $= O(1)$ имеет специальный «градиентный» («дивергентный») вид, причем «градиентом» («дивергенцией») стоит сеточная функция $= O(h)$. Это означает, что действие этих членов на связное множество узлов носит поверхностный характер и приводит к возбуждению коротковолновых возмущений. Это обстоятельство позволяет показать сходимость этих схем в более слабых, чем энергетическая, нормах.

В-четвертых, отсутствие в разностных схемах численной диссипации энергии и наличие значительных паразитных возмущений, связанных с погрешностью аппроксимации, приводит к необходимости введения в уравнения искусственной диссипации. Для эффективного по-

давления этих возмущений искусственные диссипаторы должны быть согласованы со структурой главного члена погрешности аппроксимации.

В главе VI рассматривается семейство разностных схем с ячеисто-узловой дискретизацией, которая предполагает, что часть переменных (координаты и скорости жидких частиц) отнесена к узлам сетки, другая часть (термодинамические величины: плотность, давление, ...) — к ячейкам-многоугольникам, образованным узлами сетки.

Основное внимание сосредоточено на вопросах аппроксимации. Более точно, исследуется только пространственная аппроксимация, поэтому дискретизация по времени не проводится и рассматриваются дифференциально-разностные схемы.

В §6.1 дается описание вариационно-разностных схем для уравнений лагранжевой газовой динамики и их акустического приближения.

В §6.2 рассматриваются вопросы аппроксимации указанными разностными схемами уравнений акустики. Показано, что уравнение неразрывности аппроксимируется с первым порядком точности на произвольных сетках, а уравнение движения, вообще говоря, нет. Получен критерий аппроксимации уравнения движения: для аппроксимации необходимо и достаточно, чтобы движения, сохраняющие объемы всех ячеек, имели нулевой импульс. Если сетка четырехугольная, то имеющихся свободных параметров схемы недостаточно, чтобы удовлетворить этим условиям.

В §6.3—6.5 рассматривается подход к построению сходящихся (в акустическом приближении) разностных схем лагранжевой газовой динамики, связанный с введением в разностные уравнения искусственных диссипаторов. Отправной точкой служит представление главного члена погрешности аппроксимации уравнения движения = O(1) в «градиентном» виде. Правильнее было бы сказать, что погрешность аппроксимации имеет «почти вихревую» структуру, так как она «почти ортогональна» (в интегральном смысле) всем потенциальным сеточным

функциям. Здесь мы, однако, опираемся не на физическую интерпретацию, а на формальную структуру соответствующей конструкции. Смысл терминов, взятых в кавычки, будет раскрыт в указанных параграфах. «Градиентность» означает, что результирующая сил, действующих со стороны ячейки на ее вершины-узлы, равна нулю. Следовательно, сила, действующая на связное множество N узлов имеет поверхностный характер и, нормированная на единицу массы, убывает как $N^{-\frac{1}{2}}$. Это в свою очередь означает, что движения, вызываемые этими силами носят хаотический характер и содержат в основном коротковолновые возмущения. Так как в полностью консервативных разностных схемах нет численной диссипации эти возмущения не могут быть подавлены и следует констатировать, что такие схемы не обеспечивают сходимость, если отсутствует локальная аппроксимация. Ясно, что диссипативные члены, вводимые в уравнения для подавления этих коротковолновых возмущений, должны быть согласованы с погрешностью аппроксимации, точнее со структурой ее главного члена. Действительно, так как погрешность аппроксимации и вызываемые ей движения имеют «почти вихревой» характер, т.е. не изменяют объемов ячеек, то очевидно подавить их скалярной вязкостью (добавкой к давлению), пропорциональной дивергенции скорости, невозможно.

В §6.3 устанавливается, что погрешность аппроксимации уравнения движения имеет «почти вихревой» вид, что позволит показать сходимость разностных схем относительно давлений.

В §6.4 рассматривается структура главного члена погрешности аппроксимации и устанавливается его явный «градиентный» вид.

В §6.5 предлагается искусственный диссипатор для подавления главного члена погрешности аппроксимации и показана сходимость соответствующих разностных схем в энергетической норме со скоростью $O(h^{\frac{1}{2}})$. Построена нелинейная консервативная разностная схема с предложенными диссипаторами.

В §6.6—6.7 рассматривается другой вариант расши-

рения семейства разностных схем для двумерных уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных. Построены разностные схемы с тензорными массами узлов и показана их полная консервативность.

В §6.8 рассмотрен вопрос об инвариантности полученных разностных схем относительно преобразования Галилея. Показано, что инвариантность будет иметь место, если существует «потенциал масс» Λ_i, такой что

$$m_{ik,\omega} = \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_{k,\omega}},$$

где $m_{ik,\omega}$ — тензорная масса узла ω, $x_{k,\omega}$ — координаты узла ω. Вышеуказанное условие аппроксимации уравнения движения заключается в постоянстве потенциала Λ_i на движениях, сохраняющих объемы всех ячеек.

Глава VII посвящена исследованию сходимости разностных схем для уравнений газовой динамики в двумерной плоской геометрии на свободно-лагранжевых сетках. Рассматривается случай, когда областью соответствия узла является его ячейка Дирихле [77].

Как уже отмечалось, в этом случае уравнение движения узлов аппроксимируется локально с первым порядком по шагу пространственной сетки h, а аппроксимация уравнения неразрывности в локальном смысле отсутствует. Идея доказательства сходимости в негативной норме состоит в представлении главного члена погрешности аппроксимации уравнения неразрывности, имеющего порядок $O(1)$, в «дивергентном» виде, при этом поток, стоящий под «дивергенцией», имеет порядок $O(h)$. «Дивергентность» в данном случае означает, что сумма «дивергентных» слагаемых по связному множеству узлов сводится к сумме по границе этого множества. В то же время такая «дивергенция» (в кавычках) не имеет ничего общего с дивергенцией, фигурирующей в разностном уравнении неразрывности. Однако из того, что главный член погрешности аппроксимации имеет специальный «дивергентный» вид не следует сходимость в какой-либо «сильной» норме (например, в энергетической). В некотором смысле можно сказать, что отсутствие схо-

димости является следствием полной консервативности разностной схемы, более конкретно — отсутствия схемной диссипации энергии. Тем не менее можно показать, что имеет место сходимость к решению дифференциальной задачи в некоторой негативной норме. На качественном уровне это означает, что ошибка имеет «дивергентный» вид и разностное решение осциллирует около спроектированного на сетку решения дифференциальной задачи. При этом «амплитуда осцилляций», вообще говоря, есть $O(1)$, а «амплитуда» сеточной функции под «дивергенцией» есть $O(h)$. Подавить эти осцилляции можно вводя в схему искусственную вязкость порядка $O(h)$. Тогда решение разностной задачи будет сходится к решению исходной дифференциальной со скоростью $O(h^{\frac{1}{2}})$.

В §7.1 описывается семейство полностью консервативных разностных схем на свободно-лагранжевой сетке с областями соответствия — ячейками Дирихле и исследуется вопрос об аппроксимации этими схемами уравнений акустики.

В §7.2 установлен вид главного «дивергентного» члена ошибки аппроксимации уравнения неразрывности и показывается сходимость акустического приближения рассматриваемых разностных схем в негативной норме.

В §7.3 разностные уравнения модифицируются, путем добавления диссипативных членов, таким образом, чтобы получить сходящуюся (в акустическом приближении) разностную схему.

В главе VIII рассмотрены некоторые вопросы построения сопряженных операторов в дискретных алгоритмах путем организации ссылок в список с использованием структурно-динамических инструментальных средств системы ТЕКОН.

В §8.1 описаны иерархическая структура и дисциплина работы с инструментальными средствами этой системы.

В §8.2 приводится краткая характеристика основных понятий, используемых в описании системы.

В §8.3 дается краткое описание открытия работы с системой и печать ее состояния в момент аварийного ос-

танова.

В §8.4 представлена информация об архиве массивов — нетекстовом, многотомном (есть возможность работы с параллельным процессором применительно к декомпозиционной алгебре).

В §8.5 описаны типы данных внешнего индекса массива. Представлены структура и назначение однородного линейного массива (ОЛМ), который представляет собой часть массива и может быть интерпретирован как однородный массив байтов. ОЛМ дает возможность осуществлять работу в режиме виртуальной памяти.

В §8.6 представлены динамические типы данных (деревья, очереди), которые являются важными структурами данных, и наиболее часто используются для моделирования конкретных физических процессов.

В §8.7 показано, что элементы динамической структуры (ОЛМ-стрелки) также являются сложной структурой и представляют собой очередь из D-айтемов (структуризованных массивов). D-айтемы можно интерпретировать как элементы внутренней виртуальной памяти.

В §8.8 продемонстрированы средства создания дескрипторов сетки, после чего возникают сеточные типы данных.

В §8.9 описаны нециклические операции на сетке — виды прямого доступа к элементам сетки.

В §8.10 представлены циклические операции на сетке.

В Приложения вынесены выкладки, имеющие вспомогательное значение и затруднившие бы чтение основного текста.

Нумерация формул своя в пределах каждого параграфа, а рисунков в пределах главы. Если не оговорено противное, ссылки относятся к той же главе, в которой они делаются.

Сеточные функции, как правило, обозначаются теми же буквами, что и функции непрерывного аргумента. Мы надеемся, что такие обозначения вызовут не больше недоразумений, чем если бы мы скорость обозначали буквой $\mathbf{u}$, а соответствующую сеточную функцию, скажем буквой α. Какая функция имеется в виду в большинстве слу-

чаев ясно из контекста, в других случаях это указывается аргументом, например: $f(x)$ — функция непрерывного аргумента, $f(\omega)$ — соответствующая сеточная функция, $\Pi_\omega f$ — проекция $f(x)$ на сетку.

Глава I

Разностные схемы на неортогональных сетках

§1.1. Сетки и сеточные функции

1°. Настоящая глава посвящена построению разностных схем на нерегулярных сетках для эллиптического уравнения Пуассона и гиперболической системы уравнений лагранжевой газовой динамики. В первом случае используется метод опорных операторов, во втором — вариационный принцип Гамильтона–Остроградского. На первый взгляд ни сами уравнения, ни методы построения разностных схем для них не имеют ничего общего. Однако это не так. Обсуждением этой темы мы займемся в §1.4. Здесь отметим лишь следующее. Как уравнение Пуассона, так и уравнения лагранжевой газовой динамики могут быть записаны в терминах инвариантных дифференциальных операторов div и grad и попадают, таким образом, в класс задач, для которого мы предполагаем построить теорию разностных схем на произвольных нерегулярных сетках. Однако в этой главе мы ограничимся сетками, элементы которых можно занумеровать двумя индексами (напомним, что рассматриваются только двумерные задачи). Будут описаны процедуры, позволяющие не только получить для указанных уравнений разностные схемы на нерегулярных сетках, но и построить разностные операторы, которые следует интерпретировать как разностные аналоги дифференциальных операторов div и grad.

2°. Для построения разностных операторов необходимо заменить область $\mathcal{O}$ изменения непрерывного аргумента некоторым дискретным множеством (расчетной сеткой), а также ввести соответствующие пространства сеточных функций. При этом мы ограничимся обсуждением случая, когда все величины зависят только от двух пространственных переменных. Отметим, что такое рас-

смотрение не будет снижать общности проводимых рассмотрений, и, кроме того, представляет самостоятельный интерес. Сразу подчеркнем, что на самом деле расчетная сетка всегда располагается в трехмерном пространстве и когда мы говорим двумерной сетке, то имеется в виду «проекция вдоль циклической координаты» трехмерной сетки на плоскость существенных переменных. При этом часть элементов трехмерной сетки проектируется на один элемент двумерной. Такие ситуации, по мере их возникновения, будут оговариваться специально.

Пусть в расчетной области $\mathcal{O}$, лежащей в плоскости декартовых координат (x, y), введена некоторая четырехугольная сетка, которая по своей топологической структуре аналогична прямоугольной сетке в квадрате (см. рис.1.1). В данном случае циклической переменной является координата z, от которой рассматриваемые функции предполагаются не зависящими. Узлы такой сетки занумеруем двумя целочисленными индексами (i, j) подобно тому, как это делается на прямоугольной сетке. Четырехугольники, вершинами которых служат узлы сетки, назовем ячейками, и занумеруем полуцелыми индексами. Отрезок, соединяющий узлы (i, j) и $(i+1, j)$, занумеруем индексами $(i+\frac{1}{2}, j)$, а отрезок, соединяющий узлы (i, j) и $(i, j+1)$, — индексами $(i, j+\frac{1}{2})$.

Рассмотрим теперь трехмерную сетку, проекцией которой является сетка в плоскости (x, y). Удобно считать, что трехмерная сетка состоит из прямых призм, основаниями которым служат ячейки двумерной сетки. Правильнее сказать, что ячейками являются эти призмы. Каждая такая ячейка имеет восемь вершин, двенадцать ребер и шесть граней. Рассмотрим трехмерную ячейку $ABCDA'B'C'D'$ (см. рис.1.2). При взгляде на нее сверху вдоль оси z узлы A и A' сливаются в один, но это не существенно, т.к. значения сеточных функций в этих узлах (если таковые будут определены) одинаковы. Кроме того, с этими узлами сливается ребро AA'. В данной главе не будут рассматриваться ситуации, когда на таких ребрах определены сеточные функции, поэтому это

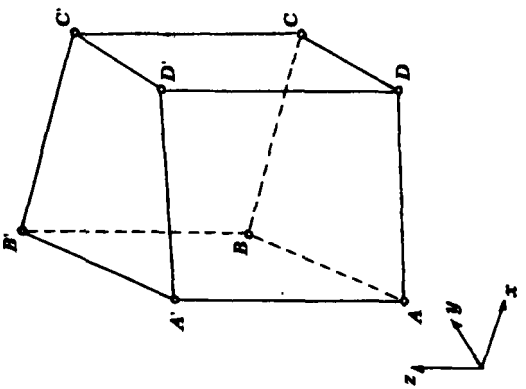


Рис.1.2

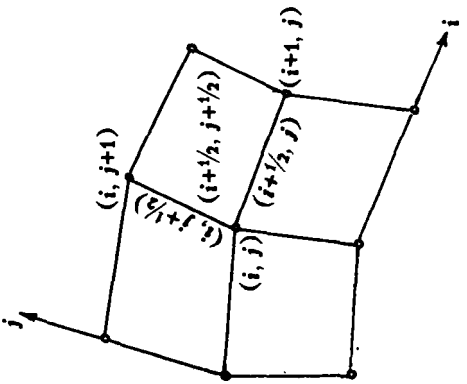


Рис.1.1

обстоятельство мы игнорируем. Кроме того, сливаются грани $ABCD$, $A'B'C'D'$ и сама трехмерная ячейка. В данной главе также не будут рассматриваться ситуации, когда на таких гранях определены сеточные функции, поэтому это обстоятельство также игнорируется. Наконец сливаются, например, ребра AB, $A'B'$ и грань $AA'B'B$ (аналогично другие ребра и грани), на плоскости (x, y) они изображаются отрезком, соединяющим узлы A и B. Сеточные функции, определенные на трехмерных ребрах и гранях, суть различные объекты. Поэтому мы будем рассматривать множество отрезков на плоскости (x, y) как объекты двух типов и говорить о сеточных функциях, заданных на ребрах, и сеточных функциях, заданных на гранях сетки.

3°. При использовании метода конечных разностей наиболее часто используются два способа дискретизации скалярных величин. Первый способ: значения сеточной функции, аппроксимирующей скалярную функцию $u(x)$, считаются заданными в узлах (i, j) и обозначаются $u_{i,j}$ соответственно. Второй способ: значения сеточной функции, аппроксимирующей скалярную функцию $u(x)$, считаются отнесенными ячейкам $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$ и обозначаются $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ соответственно.

Перейдем теперь к описанию способов дискретизации векторных величин. Для простоты будем временно считать, что векторные поля имеют только две компоненты, которые лежат в плоскости (x, y). Здесь способов дискретизации больше. Заметим сразу, что по построению на множестве узлов задана вектор-функция радиус-векторов узлов $\mathbf{r}_{i,j}$. Там же, следовательно, будут заданы и производные этого поля по времени, если сетка подвижна. Таким образом в качестве представления векторного поля $\mathbf{u}(x)$ на сетке может быть выбрана сеточная функция, отнесенная к узлам сетки и являющаяся в каждом узле вектором $\mathbf{u}_{i,j}$.

При рассмотрении криволинейных сеток более удобным может оказаться использование компонент вектора, вычисленных в местных, связанных с сеткой, системах координат. Для этого удобно интерпретировать расчет-

ную сетку как аппроксимацию сетки, образованной пересечением координатных линий некоторой криволинейной системы координат (ξ, η). Ломанные, соединяющие узлы с меняющимся индексом i ($j = \text{const}$), будут соответствовать линии ξ ($\eta = \text{const}$), меняющемуся же индексу j ($i = \text{const}$) соответствуют линии η ($\xi = \text{const}$). На каждом отрезке расчетной сетки определим касательную к этому отрезку проекцию вектор-функции $\mathbf{u}(x)$. Очевидно, такие проекции распадаются на два семейства. Первое семейство связано с отрезками, соединяющие узлы с меняющимся индексом i ($j = \text{const}$). Обозначим семейство этих проекций u_ξ, очевидно оно нумеруется индексами $(i + \frac{1}{2}, j)$. Второе семейство связано с отрезками, соединяющие узлы с меняющимся индексом j ($i = \text{const}$). Обозначим семейство этих проекций u_η, очевидно оно нумеруется индексами $(i, j + \frac{1}{2})$. Смысл сеточных функций u_ξ, u_η состоит в том, что они аппроксимируют ковариантные компоненты векторного поля $\mathbf{u}(x)$ в криволинейной системе координат (ξ, η).

Возможен другой подход к дискретизации векторных полей заданием их компонент в локальных системах координат. На каждом отрезке сетки задается нормальная к этому отрезку компонента поля. Так же как и в предыдущем случае такие проекции распадаются на два семейства. Первое семейство u^ξ связано с отрезками, соединяющие узлы с меняющимся индексом i ($j = \text{const}$). Второе семейство u^η связано с отрезками, соединяющие узлы с меняющимся индексом j ($i = \text{const}$). Смысл сеточных функций u^ξ, u^η состоит в том, что они аппроксимируют контравариантные компоненты векторного поля $\mathbf{u}(x)$ в криволинейной системе координат (ξ, η).

Теперь можно почувствовать разницу между сеточными функциями на ребрах и сеточными функциями на гранях. На ребрах естественно задавать ковариантные компоненты полей, так чтобы конструкция $u_{AB}AB$ аппроксимировала интеграл $\int\limits_{AB} \mathbf{u}d\mathbf{l}$, взятый вдоль ребра AB. На гранях естественно задавать контравариантные компоненты полей, так чтобы конструкция $u_{AB}AB$ аппрок-

симировала интеграл $\int\limits_{ABB'A'} \mathbf{u}d\mathbf{s}$, взятый по поверхности грани $ABB'A'$ и имеющий смысл потока поля $\mathbf{u}(x)$ через эту поверхность. Таким образом, когда мы будем говорить, что сеточная функция задана на ребрах мы будем иметь в виду, что ее значение на некотором отрезке сетки имеет смысл касательной к этому отрезку компоненты поля. Аналогично, когда мы будем говорить, что сеточная функция задана на гранях мы будем иметь в виду, что ее значение на некотором отрезке сетки имеет смысл нормальной к этому отрезку компоненты поля.

Этими вариантами мы ограничим наше описание возможных способов задания сеточных функций. Для целей настоящей главы этих способов достаточно. Способы дискретизации более сложных полей (тензорных) будут описываться в последующих главах по мере надобности.

§1.2. Разностная схема метода опорных операторов для уравнения Пуассона

1°. В этом параграфе будет рассмотрен один из вариантов построения разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона.

Уравнение Пуассона в области $\mathcal{O}$ с границей $\partial\mathcal{O}$ запишем в виде системы

$$\operatorname{div}\mathbf{q} = f(x),$$

$$\mathbf{q} = -\operatorname{grad} u \tag{2.1}$$

и рассмотрим для определенности первую краевую задачу

$$u\Big|_{\partial\mathcal{O}} = u_*(x). \tag{2.2}$$

Как уже отмечалось применительно к уравнению Пуассона идея метода опорных операторов состоит в том, что один из операторов div или grad аппроксимируется непосредственно, а второй таким образом, чтобы удовле-

творить разностному аналогу интегрального тождества

$$\int\limits_{\mathcal{O}} u \operatorname{div} \mathbf{p} \mathrm{d}V + \int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \operatorname{grad} u) \mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} u \mathbf{p} \mathrm{d}\mathbf{s}$$

с произвольными $u(x)$ и $\mathbf{p}(x)$.

Прежде чем приступать к построению разностной схемы необходимо ввести в расчетной области разностную сетку и на ней определить сеточные функции, аппроксимирующие функции непрерывного аргумента. Способ выбора сетки и задания сеточных функций неявно учитывает какой из операторов div или grad будет опорным, а какой определяемым. Метод опорных операторов допускает здесь большую свободу выбора. В иллюстративных целях мы ограничимся в этой главе следующим вариантом.

Будем считать, что сетка состоит из узлов, соединенных двумя семействами ребер, которые образуют четырехугольные ячейки (см. рис.1.3). Узлы сетки, которые будем нумеровать двумя целочисленными индексами (i, j), образуют множество ω. Узлы, лежащие на границе расчетной области, образуют множество γ. Ячейки будем нумеровать полуцелыми индексами $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$. В дальнейшем (для краткости) символ $\sum$ без индексов будет обозначать суммирование либо по всем узлам, либо по всем ячейкам сетки в зависимости от того целые или полуцелые индексы содержит выражение под знаком суммы.

К узлам сетки отнесем сеточную функцию температур $u_{i,j}$. В этом случае естественным образом аппроксимируется оператор grad. Будем интерпретировать линии узлов $i = \text{const}$ ($j = \text{const}$) как координатные линии $\xi = \text{const}$, ($\eta = \text{const}$). Пусть $\Delta\xi_{i+\frac{1}{2}}$, $\Delta\eta_{j+\frac{1}{2}}$ — шаги сетки в направлениях ξ, η. Тогда величины

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta\xi_{i+\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta\eta_{j+\frac{1}{2}}}$$

можно интерпретировать как производные $\partial u/\partial\xi$ и $\partial u/\partial\eta$ отнесенные к соответствующим ребрам сетки. А именно

$\dfrac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta\xi_{i+\frac{1}{2}}} \approx (\partial u/\partial\xi)_{i+\frac{1}{2},j}$ — относится к ребрам соответствующим $\eta = \text{const}$;

$\dfrac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta\eta_{j+\frac{1}{2}}} \approx (\partial u/\partial\eta)_{i,j+\frac{1}{2}}$ — относится к ребрам соответствующим $\xi = = \text{const}$.

Таким образом элементами сетки наряду с узлами являются ребра, на которых определен разностный аналог вектор-функции $\operatorname{grad} u$ своими ковариантными компонентами.

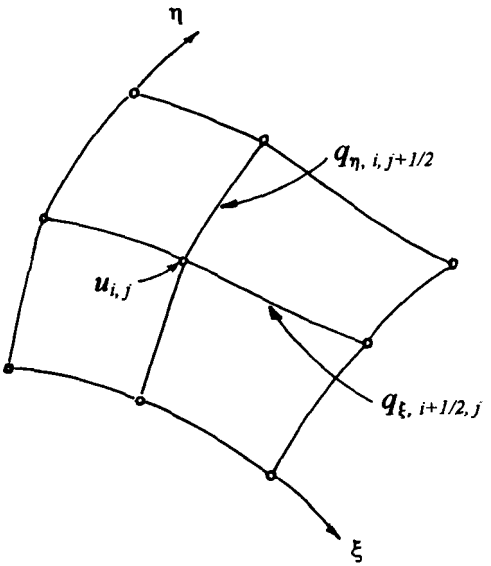


Рис.1.3

Пусть $h_{i+\frac{1}{2},j}$ и $h_{i,j+\frac{1}{2}}$ расстояния между узлами $(i+1,j)$ — (i,j) и $(i,j+1)$ — (i,j) соответственно. Тогда величины

$$q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} = -\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2},j}},$$

$$q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_{i,j+\frac{1}{2}}}$$

имеют смысл физических компонент вектора $\mathbf{q} = -\operatorname{grad} u$ в криволинейной системе координат (ξ,η). Легко видеть,

что

$$q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2},j}} \int\limits_{(i,j)}^{(i+1,j)} (\mathbf{q}, \mathrm{d}\mathbf{l}) = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2},j}} \int\limits_{(i,j)}^{(i+1,j)} (\mathbf{q}, \mathbf{e}_\xi)\mathrm{d}l,$$

$$q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_{i,j+\frac{1}{2}}} \int\limits_{(i,j)}^{(i,j+1)} (\mathbf{q}, \mathrm{d}\mathbf{l}) = \frac{1}{h_{i,j+\frac{1}{2}}} \int\limits_{(i,j)}^{(i,j+1)} (\mathbf{q}, \mathbf{e}_\eta)\mathrm{d}l,$$

где $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ — единичные векторы, касательные к координатным линиям ξ, η соответственно. Таким образом q_ξ и q_η являются усредненными проекциями векторного поля $\mathbf{q}(x)$ на ребра сетки.

На следующем этапе построения разностной схемы метода опорных операторов следует аппроксимировать интеграл — $\int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \operatorname{grad} u)\mathrm{d}V$. Для этого функция $\mathbf{p}(x)$ должна быть спроектирована на сетку по алгоритму, аналогичному проектированию вектор-функции $\operatorname{grad} u$. Т.е. на сетке функция $\mathbf{p}(x)$ будет относится к ребрам сетки и описываться своими проекциями (так или иначе усредненными) на ребра. Другими словами, функция $\mathbf{p}(x)$ будет описываться набором своих проекций на направления координатных линий ξ или η в зависимости от направления ребра.

Перейдем теперь к аппроксимации интеграла $\int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \times$ $\times \mathrm{d}V$, где, как и выше, для однородности записи $-\operatorname{grad} u$ обозначен через $\mathbf{q}$. Для наших целей удобно выразить его через ковариантные компоненты векторных полей $\mathbf{p}(x)$ и $\mathbf{q}(x)$.

Пусть p_ξ, p_η и q_ξ, q_η — проекции полей $\mathbf{p}(x)$, $\mathbf{q}(x)$ на координатные линии ξ и η в некоторой точке M. Пусть $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ — векторы единичной длины, касательные координатным линиям ξ, η в этой точке. Тогда (см. рис.1.4)

$$\mathbf{p}(M) = p_\xi \mathbf{e}^\xi + p_\eta \mathbf{e}^\eta,$$

$$\mathbf{q}(M) = q_\xi \mathbf{e}^\xi + q_\eta \mathbf{e}^\eta,$$

где векторы $\{\boldsymbol{e}^\xi, \boldsymbol{e}^\eta\}$ образуют взаимный базис с векторами $\{\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta\}$, т.е.

$$(\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}^\xi) = (\boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}^\eta) = 1,$$

$$(\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}^\eta) = (\boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}^\xi) = 0.$$

Так что

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_\xi q_\xi (\boldsymbol{e}^\xi, \boldsymbol{e}^\xi) + (p_\xi q_\eta + p_\eta q_\xi)(\boldsymbol{e}^\xi, \boldsymbol{e}^\eta) + q_\xi q_\eta (\boldsymbol{e}^\eta, \boldsymbol{e}^\eta).$$

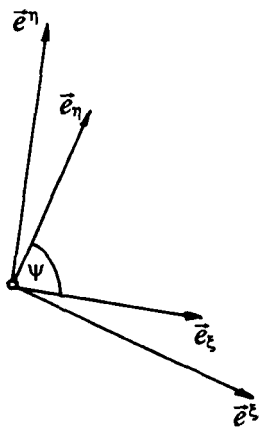


Рис.1.4

Пусть ψ — угол между векторами $\boldsymbol{e}_\xi$ и $\boldsymbol{e}_\eta$, тогда длины векторов e^ξ и e^η суть $1/\sin\psi$, а угол между ними есть $\pi - \psi$. Соответственно

$$(\boldsymbol{e}^\xi, \boldsymbol{e}^\xi) = (\boldsymbol{e}^\eta, \boldsymbol{e}^\eta) = \frac{1}{\sin^2\psi},$$

$$(\boldsymbol{e}^\xi, \boldsymbol{e}^\eta) = -\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi}.$$

Таким образом

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\sin^2\psi}\Big[p_\xi q_\xi + p_\eta q_\eta - (p_\xi q_\eta + p_\eta q_\xi)\cos\psi\Big],$$

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V = \int\limits_{\mathcal{O}} \Big[p_\xi q_\xi + p_\eta q_\eta - (p_\xi q_\eta + p_\eta q_\xi)\cos\psi\Big]\frac{\mathrm{d}V}{\sin^2\psi}.$$

Будем теперь аппроксимировать последний интеграл, считая что векторные функции $\mathbf{p}(x)$ и $\mathbf{q}(x)$ спроектированы на ребра сетки указанным выше способом. Рассмотрим некоторую ячейку $ABCD$ сетки (см. рис.1.5). Координатные линии будем аппроксимировать отрезками прямых, соединяющими соответствующие узлы. Отметим, что углы между векторами $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ вообще говоря не совпадают с углами ячеек-четырехугольников.

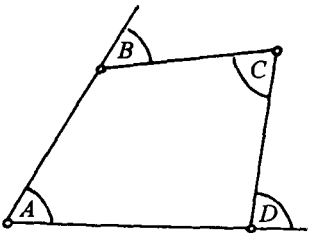


Рис.1.5

В окрестности вершины A

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \approx (\mathbf{p},\mathbf{q})_A = \frac{1}{\sin^2 A}\Big[p_{AB}q_{AB} + p_{AD}q_{AD} - \\ -(p_{AB}q_{AD} + p_{AD}q_{AB})\cos A\Big], \tag{2.3}$$

где A — угол при вершине A (см. рис.1.5).
Аналогично в окрестности вершины B и др.

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \approx (\mathbf{p},\mathbf{q})_B = \frac{1}{\sin^2 B}\Big[p_{AB}q_{AB} + p_{BC}q_{BC} - \\ -(p_{AB}q_{BC} + p_{BC}q_{AB})\cos B\Big],$$

где B — угол, дополнительный к углу в вершине B (см. рис.1.5).
Приписывая вершинам ячейки объемы $V_A, V_B, V_C, V_D \geq 0$, так что $V_A + V_B + V_C + V_D = V_{ABCD}$ получаем

$$\int\limits_{ABCD}(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathrm{d}V \approx V_A(\mathbf{p},\mathbf{q})_A + V_B(\mathbf{p},\mathbf{q})_B + V_C(p,q)_C + V_D(\mathbf{p},\mathbf{q})_D, \tag{2.4}$$

где $(\mathbf{p}, \mathbf{q})_A$, ... — выражения вида (2.3).

Переходя к индексным обозначениям и считая, что узлы A, B, C, D имеют номера соответственно (i, j), $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$, $(i, j+1)$, перепишем (2.4) в виде

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{ABCD} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V \approx S_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \\
&= (V_A/\sin^2 A)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big[p_{\xi,i+\frac{1}{2},j} q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} + \\
&+ p_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} - \\
&- (p_{\xi,i+\frac{1}{2},j} q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} + \\
&+ p_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} q_{\xi,i+\frac{1}{2},j}) \cos A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Big] + \\
&+ (V_B/\sin^2 B)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big[p_{\xi,i+\frac{1}{2},j} q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} + \\
&+ p_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} - \\
&- (p_{\xi,i+\frac{1}{2},j} q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} + \\
&+ p_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} q_{\xi,i+\frac{1}{2},j}) \cos B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Big] + \\
&+ (V_C/\sin^2 C)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big[p_{\xi,i+\frac{1}{2},j} q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} + \\
&+ p_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} - \\
&- (p_{\xi,i+\frac{1}{2},j} q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} + \\
&+ p_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} q_{\xi,i+\frac{1}{2},j}) \cos C_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Big] + \\
&+ (V_D/\sin^2 D)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big[p_{\xi,i+\frac{1}{2},j} q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} + \\
&+ p_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} - \\
&- (p_{\xi,i+\frac{1}{2},j} q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} + \\
&+ p_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} q_{\xi,i+\frac{1}{2},j}) \cos D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Аппроксимация интеграла по расчетной области $\mathcal{O}$ получается суммированием (2.5) по всем ячейкам сетки

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathrm{d}V \approx \sum S_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

Пусть теперь сеточная функция $\{p_\xi, p_\eta\}$ является разностным градиентом, т.е.

$$p_{\xi, i+\frac{1}{2}, j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2},j}},$$

$$p_{\eta, i, j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{i,j+\frac{1}{2}}},$$

Подставляя эти выражения в (2.6) и собирая множители при $v_{i,j}$, получим

$$\sum S_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \sum v_{i,j} d_{i,j}, \tag{2.7}$$

где для внутренних узлов $d_{i,j}$ имеет вид

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= s_{i+\frac{1}{2},j} q^{\xi}_{i+\frac{1}{2},j} - s_{i-\frac{1}{2},j} q^{\xi}_{i-\frac{1}{2},j} + \\ &+ s_{i,j+\frac{1}{2}} q^{\eta}_{i,j+\frac{1}{2}} - s_{i,j-\frac{1}{2}} q^{\eta}_{i,j-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь обозначены:

$$\begin{aligned} q^{\xi}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{s_{i+\frac{1}{2},j} h_{i+\frac{1}{2},j}} \Big[& (V_A / \sin^2 A)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times \\ & \times (q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} - q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} \cos A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + \\ & + (V_B / \sin^2 B)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times \\ & \times (q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} - q_{\eta,i+1,j+\frac{1}{2}} \cos B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + \\ & + (V_C / \sin^2 C)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times \\ & \times (q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} - q_{\eta,i+1,j-\frac{1}{2}} \cos C_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) + \\ & + (V_D / \sin^2 D)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \times \\ & \times (q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} - q_{\eta,i,j-\frac{1}{2}} \cos D_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) \Big]; \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
q^{\eta}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{s_{i,j+\frac{1}{2}} h_{i,j+\frac{1}{2}}} \Big[& (V_A/\sin^2 A)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times \\
& \times (q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} - q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} \cos A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + \\
& + (V_D/\sin^2 D)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times \\
& \times (q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} - q_{\xi,i+\frac{1}{2},j+1} \cos D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + \\
& + (V_C/\sin^2 C)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times \\
& \times (q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} - q_{\xi,i-\frac{1}{2},j+1} \cos C_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + \\
& + (V_B/\sin^2 B)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times \\
& \times (q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} - q_{\xi,i-\frac{1}{2},j} \cos B_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) \Big];
\end{aligned}
\tag{2.8'}
$$

$s_{i+\frac{1}{2},j}$, $s_{i,j+\frac{1}{2}}$, ... — площади некоторых поверхностей, ассоциирующихся с ребрами $(i+\frac{1}{2},j)$, $(i,j+\frac{1}{2})$, ... Пусть для определенности (см. рис.1.6) поверхность, ассоциирующаяся с ребром $(i+\frac{1}{2},j)$ соединяет центры тяжести O_3, O_4 ячеек $(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$, $(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})$ и имеет единичную высоту в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Аналогичный вид имеют поверхности, ассоциирующиеся с ребрами $(i,j+\frac{1}{2})$, ... Пусть $V_{i,j}$ — объем фигуры, ограниченной поверхностями $(i+\frac{1}{2},j)$, $(i,j+ +\frac{1}{2})$, $(i-\frac{1}{2},j)$, $(i,j-\frac{1}{2})$, т.е. объем прямой призмы $O_1O_2O_3O_4O_1'O_2'O_3'O_4'$ единичной высоты, в основании которой лежит четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ (см. рис.1.7). При этом $s_{i+\frac{1}{2},j}$ — площадь грани $O_3O_4O_4'O_3'$ и т.п. Тогда конструкцию

$$
d_{i,j}\{q_\xi, q_\eta\}/V_{i,j} = (\operatorname{div}_h \{q_\xi, q_\eta\})_{i,j} \tag{2.9}
$$

естественно считать разностным аналогом $\operatorname{div}\mathbf{q}$ в узле (i,j), а сеточные функции $q^{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}$, $q^{\eta}_{i,j+\frac{1}{2}}$ контравариантными компонентами векторного поля $\mathbf{q}(x)$ на ребрах сетки. Действительно, соотношение (2.7) при такой интерпретации выражает теорему Гаусса для домена $O_1O_2O_3O_4$, $s_{i+\frac{1}{2},j}q^{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}$ — поток поля через сторону O_1O_2 домена наружу, $q^{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}$ — компонента плотности потока, нормальная

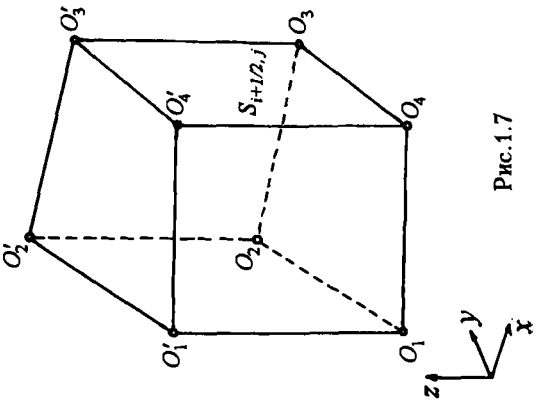


Рис.1.7

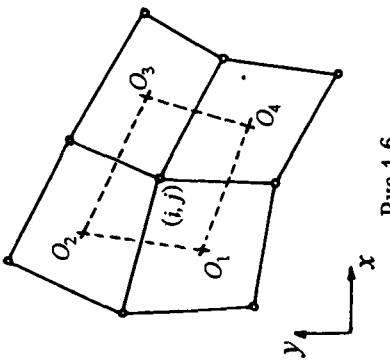


Рис.1.6

к координатной линии ξ, т.е. контравариантная компонента в криволинейной системе координат (ξ, η). Аналогичный смысл имеют и другие величины, входящие в (2.7).

Окончательно, разностная схема метода опорных операторов для краевой задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{div}_h \{q_\xi, q_\eta\})_{i,j} = f(x_{i,j}), && (i,j) \in \omega \setminus \gamma, \\
&q_{\xi,i+\frac{1}{2},j} = -(\operatorname{grad}_h u)_{\xi,i+\frac{1}{2},j} = -\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2},j}}, \\
&q_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} = -(\operatorname{grad}_h u)_{\eta,i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_{i,j+\frac{1}{2}}}, \\
&u_{i,j} = u_*(x_{i,j}), && (i,j) \in \gamma,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

где разностный оператор div_h определен формулами (2.9), (2.7), (2.8), (2.8′); предполагается, что величины $f(x_{i,j})$ и $u_*(x_{i,j})$ имеют смысл.

Разностная схема (2.10) консервативна в том смысле, что имеет место разностный аналог баланса

$$
\int\limits_{\Sigma} \mathbf{q}\, \mathrm{d}\mathbf{s} = \int\limits_{\Omega} f\, \mathrm{d}V, \tag{2.11}
$$

где Ω — произвольная часть области $\mathcal{O}$ с границей Σ. Действительно, умножая первое из уравнений (2.10) на $V_{i,j}$ и суммируя по i, j в пределах $i_1 \le i \le i_2$, $j_1 \le j \le j_2$ получаем

$$
\sum_{i,j} \Big(s_{i+\frac{1}{2},j} q^{\xi}_{i+\frac{1}{2},j} - s_{i-\frac{1}{2},j} q^{\xi}_{i-\frac{1}{2},j} +
$$

$$
+ s_{i,j+\frac{1}{2}} q^{\eta}_{i,j+\frac{1}{2}} - s_{i,j-\frac{1}{2}} q^{\eta}_{i,j-\frac{1}{2}} \Big) = \sum_{i,j} V_{i,j} f(x_{i,j}).
$$

Но в сумму в левой части выражения вида $s_{i+\frac{1}{2},j} q^{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}$ входят дважды с противоположными знаками за исключением тех, у которых либо $i = i_1$, либо $i = i_2$. Аналогичным образом обстоят дела с выражениями вида

$s_{i,j+\frac{1}{2}} q^{\eta}_{i,j+\frac{1}{2}}$. В итоге получаем

$$\sum_i s_{i+\frac{1}{2},j_2} q^{\xi}_{i+\frac{1}{2},j_2} - \sum_i s_{i-\frac{1}{2},j_1} q^{\xi}_{i+\frac{1}{2},j_1} +$$
$$+ \sum_j s_{i_2,j+\frac{1}{2}} q^{\eta}_{i_2,j+\frac{1}{2}} - \sum_j s_{i_1,j+\frac{1}{2}} q^{\eta}_{i_1,j+\frac{1}{2}} =$$
$$= \sum_{i,j} V_{i,j} f(x_{i,j}).$$

Это соотношение и есть разностный аналог (2.11), выражающего «закон сохранения энергии»: количество энергии, уходящей через границу Σ, равно ее количеству, производимому источниками в Ω.

§1.3. Вариационно–разностные схемы для уравнений лагранжевой газовой динамики

1°. Настоящий параграф посвящен построению разностных схем для уравнений лагранжевой газовой динамики исходя из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Разностные схемы такого типа получили название вариационно-разностных. Как и в предыдущих параграфах мы не будем здесь стремиться к максимальной общности, а наоборот постараемся подробно описать процедуру построения вариационно-разностных схем в наиболее простой модели сплошной среды.

Как известно, лагранжев способ описания служит основой аналогии сплошной среды с континуальной системой частиц. Эту связь механики континуума с механикой конечного числа материальных точек целесообразно использовать при построении дискретных моделей механики сплошных сред.

Рассмотрим адиабатическое движение произвольного конечного объема $V(t)$, состоящего из одних и тех же континуальных частиц (см. рис.1.8). Следуя принятой аналогии, лагранжиан $\mathcal{L}$ такой системы можно представить в виде

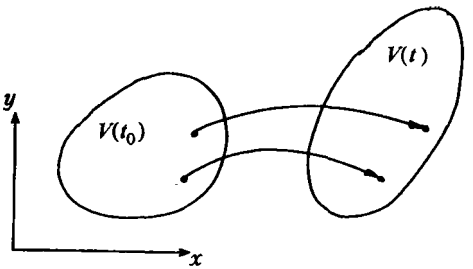


Рис.1.8

$$\mathcal{L}(t) = \int\limits_{V(t)} \left[\frac{\mathbf{u}^2}{2} - e\right] \mathrm{d}m.$$

Здесь и далее: t — время, $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор жидкой частицы, $\mathbf{u}$ — вектор скорости частицы, e — удельная внутренняя энергия, p — давление, ρ — плотность, $v = 1/\rho$ — удельный объем, $\mathrm{d}m$ — элемент массы, $\mathrm{d}V$ — элемент объема.

Согласно принципу наименьшего действия Гамильтона-Остроградского, движение среды как механической системы доставляет стационарное значение функционалу действия

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t)\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

При варьировании функционала (3.1) в качестве независимой выступает вариация радиус-вектора $\delta\mathbf{r}$, такая что $\delta\mathbf{r}(t_0) = \delta\mathbf{r}(t_1) = 0$. Вариации остальных величин должны быть выражены через $\delta\mathbf{r}$. Варьирование функционала (3.1) должно проводиться с учетом:
закона сохранения массы

$$\delta(\mathrm{d}m) = \delta(\rho \mathrm{d}V) = 0, \tag{3.2}$$

условия адиабатичности

$$\delta e = -p\delta v, \tag{3.3}$$

кинематической связи

$$\delta\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.4}$$

Используя (3.2), (3.3) и закон сохранения объема, записанный в виде

$$\delta(\mathrm{d}V) = \mathrm{d}V \operatorname{div} \delta\mathbf{r},$$

получаем связь между δe и $\delta\mathbf{r}$

$$\delta e = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} \delta\mathbf{r}. \tag{3.5}$$

Опишем процесс варьирования, с целью повторить его на дискретном уровне. С учетом (3.2) вариация действия есть

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int\limits_{V(t)} \Big[(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \delta e\Big] \mathrm{d}m. \tag{3.6}$$

Подставляя в (3.6) выражения вариаций $\delta\mathbf{u}$ и δe через $\delta\mathbf{r}$, в соответствии с (3.4), (3.5), получаем

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int\limits_{V(t)} \Big[(\mathbf{u}, \frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}) + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \delta\mathbf{r}\Big] \mathrm{d}m.$$

Используя $\delta\mathbf{r}(t_0) = \delta\mathbf{r}(t_1) = 0$ и $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$, после интегрирования по частям первого члена в квадратных скобках приходим к формуле

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int\limits_{V(t)} \Big[-(\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}, \delta\mathbf{r}) + p \operatorname{div} \delta\mathbf{r}\Big] \mathrm{d}V.$$

Наконец, применяя известную формулу

$$\operatorname{div}(f\mathbf{A}) = f \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{A}, \operatorname{grad} f)$$

после преобразования выражения $p \operatorname{div} \delta\mathbf{r}$ будем иметь

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int\limits_{V(t)} \Big[(\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \operatorname{grad} p, \delta\mathbf{r}) + \int\limits_{S(t)} p(\delta\mathbf{r}, d\mathbf{s})\Big]. \tag{3.7}$$

Для случая, когда движение границы задано $(\mathbf{n}, \delta\mathbf{r}) = 0$ и поверхностный интеграл в (3.7) обращается в ноль. В силу произвольности остальных $\delta\mathbf{r}$ из (3.7) следует уравнение движения жидких частиц

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \operatorname{grad} p = 0.$$

Если на границе или ее части задано давление p_*, то для учета этого граничного условия можно мыслить рассматриваемую систему погруженной в некий резервуар, энергия которого E_* варьируется по формуле $\delta E_* = -p_* \times \delta V_*$, где V_* — объем резервуара. К исходному функционалу функционалу действия в этом случае следует добавить слагаемое

$$-\int_{t_0}^{t_1} E_* \mathrm{d}t,$$

описывающее резервуар.

Окончательно полная система уравнений адиабатической газовой динамики имеет вид

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \operatorname{grad} p = 0, \tag{3.8}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{3.9}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u}, \tag{3.11}$$

$$F(\rho, e, p) = 0.$$

Уравнение движения (3.8), как мы установили, следует из вариационного принципа. Уравнение энергии (3.9) представляет собой условие адиабатичности и использовалось в качестве связи при варьировании. Уравнение неразрывности (3.10), выражающее закон сохранения массы, и кинематическое соотношение (3.11) также использовались в качестве связи. Замыкает систему уравнение состояния.

2. Перейдем теперь к построению уравнений, описывающих эволюцию дисретной среды на основе вариационного подхода. Варьирование функционала действия показывает, что для получения вариационно-разностной схемы уравнения связи следует аппроксимировать непосредственно. Аппроксимация уравнения движения при этом получится автоматически в соответствии с вариационным принципом. Аппроксимация соотношений (3.2), (3.4) труда не представляет. Для учета (3.3), как следует из (3.5), фактически следует аппроксимировать оператор div. Необходимость непосредсвенной аппроксимации этого оператора также связана с наличием в уравнениях (3.9), (3.10) членов, содержащих $\operatorname{div}\mathbf{u}$.

В расчетной области введем разностную сетку, элементы которой можно пронумеровать двумя индексами. Узлы сетки будем нумеровать целочисленными индексами (i,j), ячейки-четырехугольники — полуцелыми $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$. К узлам сетки естественно отнести сеточные функции координат и скоростей жидких частиц. Термодинамические функции: плотность, давление, ... будем относить к ячейкам. Такой способ дискретизации переменных получил название ячеечно-узловой.

В соответствии с лагранжевым способом описания движения сплошной среды будем считать, что каждой ячейке сетки приписана масса $M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, неизменная во времени. Кроме того будем считать, что каждому узлу также приписана неизменная во времени масса $m_{i,j}$, вычисляемая например по формуле

$$m_{i,j} = \frac{1}{2}\Big(M_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + M_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + M_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Big).$$

Если индекс одного из слагаемых в правой части, скажем $M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, выходит за допустимые пределы, можно положить $M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0$.

Каждой ячейке сетки припишем объем $V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, численно равный площади прямоугольного четырехугольника с вершинами в узлах, образующих эту ячейку. Для ячейки с вершинами в точках A, B, C, D при ориента-

ции, указанной на рис.1.9, объем дается формулой

$$V = \frac{1}{2}\Big[(x_C - x_A)(y_D - y_B) + (x_B - x_D)(y_C - y_A)\Big].$$

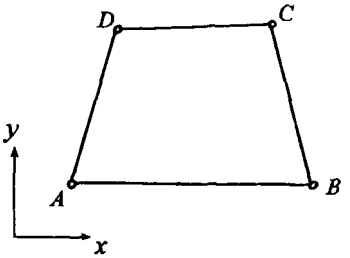


Рис.1.9

Таким образом, объем всякой ячейки есть функция четырех векторных переменных — радиус-векторов ее вершин.

Лагранжиан дискретной системы частиц, моделирующих сплошную среду, естественно записать в виде

$$\mathcal{L} = \sum (m\mathbf{u}^2/2)_{i,j} - \sum (Me)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

Здесь в первом члене суммирование проводится по всем узлам сетки, а во втором по всем ячейкам. В таких суммах мы не будем указывать множество, по которому проводится суммирование.

Пусть узлы сетки получают бесконечно малые вариации $\delta\mathbf{r}_{i,j}$. Тогда вариации объемов ячеек $V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ есть

$$\begin{aligned}\delta V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(\delta\mathbf{r}) = \\ &= \Big(\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j}}, \delta\mathbf{r}_{i,j}\Big) + \Big(\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i+1,j}}, \delta\mathbf{r}_{i+1,j}\Big) + \\ &+ \Big(\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i+1,j+1}}, \delta\mathbf{r}_{i+1,j+1}\Big) + \Big(\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j+1}}, \delta\mathbf{r}_{i,j+1}\Big),\end{aligned} \tag{3.12}$$

где через $\partial V/\partial\mathbf{r}$ (индексы для краткости опущены) обозначен вектор с компонентами $(\partial V/\partial x, \partial V/\partial y)$. Сравнивая это соотношение с $\delta(\mathrm{d}V) = \mathrm{d}V \operatorname{div}\delta\mathbf{r}$ и имея в виду

соответствие между ячейками и «физически бесконечно-малыми» объемами, заключаем, что разностный аналог выражения $\operatorname{div}\mathbf{A}$ есть

$$(\operatorname{div}_h \mathbf{A})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(\mathbf{A})/V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}.$$

Условие адиабатичности применительно к ячейке сетки имеет вид

$$(M\delta e)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\delta V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}. \tag{3.13}$$

Поставляя в (3.12) и (3.13) вместо виртуальных вариаций истинные $\delta\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{u}_{i,j}\mathrm{d}t$ и $\delta V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\times$ $\times\mathrm{d}v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ получаем разностные аналоги уравнения неразрывности

$$\left(\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (\operatorname{div}_h \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

и уравнения энергии

$$\left(\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (p\operatorname{div}_h \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.$$

Кинематическое соотношение имеет естественный вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{i,j}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u}_{i,j}.$$

Вариация функционала действия в дискретном случае есть

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\Big[\sum m_{i,j}(\mathbf{u}_{i,j}, \delta\mathbf{u}_{i,j}) - \sum(M\delta e)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Big],$$

где мы в соответствии с лагранжевым подходом полагаем

$$\delta M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0, \qquad \delta m_{i,j} = 0.$$

Из связей (3.12), (3.13) вытекает

$$(M\delta e)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(V\operatorname{div}_h \delta\mathbf{r})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

так что с учетом $\delta\mathbf{u}_{i,j} = \mathrm{d}\delta\mathbf{r}_{i,j}/\mathrm{d}t$

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \Big[\sum m_{i,j} (\mathbf{u}_{i,j}, \frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}_{i,j}}{\mathrm{d}t}) + \\ + \sum p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} (V \operatorname{div}_h \delta\mathbf{r})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big].$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части. С учетом $\delta\mathbf{r}(t_0) = \delta\mathbf{r}(t_1) = 0$, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \sum_{\omega} m_{i,j} (\mathbf{u}_{i,j}, \frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}_{i,j}}{\mathrm{d}t}) = - \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \sum_{\omega} m_{i,j} (\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{i,j}}{\mathrm{d}t}, \delta\mathbf{r}_{i,j}).$$

Преобразуем теперь последнее слагаемое в правой части, считая для определенности, что на границе расчетной области заданы давления. Имеем

$$\sum p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} (V \operatorname{div}_h \delta\mathbf{r})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \sum (\delta\mathbf{r}_{i,j}, \mathsf{F}_{i,j}),$$

где векторы $\mathsf{F}_{i,j}$ равны

$$\mathsf{F}_{i,j} = p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial x_{i,j}} + p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\partial V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial x_{i,j}} + \\ + p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{\partial V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\partial x_{i,j}} + p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\partial x_{i,j}}.$$

Собирая эти преобразования вместе окончательно получаем

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \sum (-m_{i,j} \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{i,j}}{\mathrm{d}t} + \mathsf{F}_{i,j}, \delta\mathbf{r}_{i,j}).$$

Из последнего равенства следует, что условие $\delta W = 0$ приводит к уравнению движения узлов

$$m_{i,j} \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{i,j}}{\mathrm{d}t} = \mathsf{F}_{i,j}. \tag{3.14}$$

Рассмотрим подробнее структуру выражения для $\mathsf{F}_{i,j}$. Выясним сначала геометрический смысл векторов $\partial V/\partial\mathbf{r}$.

Напомним, что ячейка $ABCD$ (см. рис.1.10) имеет объем V численно равный площади прямолинейного четырехугольника с вершинами в узлах A, B, C, D. Для определенности рассмотрим вектор $\partial V/\partial \mathbf{r}_A$. Вариация объема связана с вариацией радиус-вектора узла A соотношением $\delta V = (\partial V/\partial \mathbf{r}_A, \delta \mathbf{r}_A)$. Ясно, что если вариация $\delta \mathbf{r}_A$ параллельна диагонали BD, то $\delta V = 0$, и следовательно вектор $\partial V/\partial \mathbf{r}_A$ перпендикулярен этой диагонали. Пусть теперь $\delta \mathbf{r}_A$ перпендикулярен BD и равен δh, тогда очевидно $\delta V = BD\delta h/2$. Из этого заключаем, что вектор $\partial V/\partial \mathbf{r}_A$ перпендикулярен диагонали BD ячейки $ABCD$ равен половине длины этой диагонали и направлен из ячейки наружу (см. рис.1.11). Другими словами, вектор $\partial V/\partial \mathbf{r}_A$ есть ориентированная площадь поверхности, опирающейся на середины сторон AB и AD и имеющей единичную высоту по координате, перпендикулярной плоскости рисунка. Поэтому конструкция $p\partial V/\partial \mathbf{r}_A$, где p — давление в ячейке $ABCD$, есть сила, действующая со стороны ячейки $ABCD$ на узел A по указанной поверхности. Таким образом $\mathbf{F}_{i,j}$ есть сила давления, действующая на узел (i,j) со стороны окружающих его ячеек, а (3.14) есть второй закон Ньютона, записанный для этого узла.

Чтобы придать (3.14) форму уравнения Эйлера (3.8), припишем каждому узлу (i,j) сетки некоторый объем $V_{i,j}$ достаточно произвольным образом. Поделив (3.14) на $V_{i,j}$ и введя величину $\rho_{i,j} = m_{i,j}/V_{i,j}$, которую будем интерпретировать как плотность, отнесенную к узлу сетки, получим уравнение

$$\rho_{i,j}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{i,j}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_{i,j}(p)/V_{i,j} = -(\operatorname{grad}_h p)_{i,j}. \qquad (3.15)$$

которое является разностным аналогом (3.8). Сравнивая (3.15) с (3.8) заключаем, что конструкцию, стоящую в правой части (с обратным знаком) естественно считать разностным аналогом $\operatorname{grad} p$ и обозначать $\operatorname{grad}_h p$.

Окончательно дифференциально–разностную схему для уравнений лагранжевой газовой динамики запишем в виде

$$\rho_{i,j}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{i,j}}{\mathrm{d}t} = -(\operatorname{grad}_h p)_{i,j}, \qquad (3.16)$$

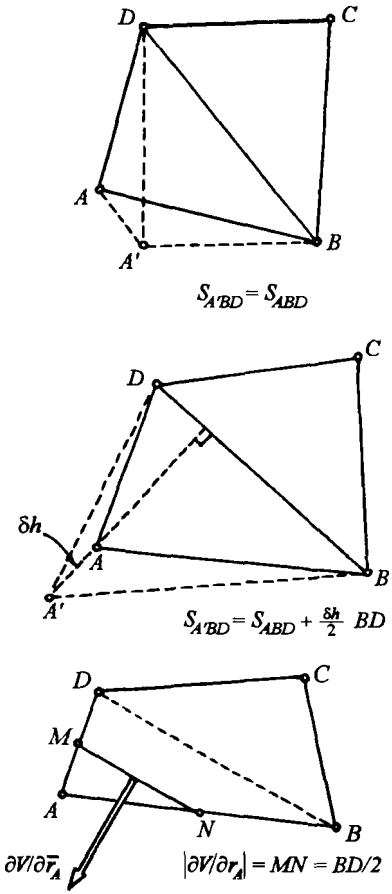


Рис.1.10

Рис.1.11

$$(\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (p\,\mathrm{div}_h\,\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0, \tag{3.17}$$

$$(\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (\,\mathrm{div}_h\,\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{i,j}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u}_{i,j}, \tag{3.19}$$

$$F(\rho_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) = 0.$$

3°. Рассмотрим теперь вопрос о выполнении законов сохранения для модели сплошной среды и ее дискретного аналога. Начнем естественно с континуальной среды. Под законом сохранения имеется в виду соотношение вида

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} U\mathrm{d}m + \int\limits_{\Sigma} \mathbf{Q}\mathrm{d}\mathbf{s} = 0, \tag{3.20}$$

где U — удельное значение сохраняющейся величины, $\mathbf{Q}$ — плотность потока этой величины. Первый интеграл в левой части есть количество величины U в области $\Omega(t)$, занятой фиксированными жидкими (лагранжевыми) частицами. Второй интеграл есть поток через границу Σ области Ω этой величины. Смысл закона сохранения (3.20) состоит в том, что количество величины U в области занятой жидкими частицами изменяется лишь за счет взаимодействия с другими частицами на границе области и не имеет внутренних источников и стоков.

В дифференциальной форме закон сохранения имеет форму

$$\rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \mathrm{div}\,\mathbf{Q} = 0,$$

Здесь $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + (\mathbf{u}, \nabla)$ — лагранжева производная по времени. Интегральная форма (3.20) следует из дифференциальной после интегрирования по Ω с учетом

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} U\mathrm{d}m = \int\limits_{\Omega}(\partial U/\partial t + (\mathbf{u}, \nabla U))\mathrm{d}m.$$

В системе (3.8)—(3.11) уравнения неразрывности и движения уже имеют вид законов сохранения объема и импульса. Интегральные формы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} v\mathrm{d}m + \int\limits_{\Sigma}(-\mathbf{u}, \mathrm{d}\mathbf{s}) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} \mathbf{u}\mathrm{d}m + \int\limits_{\Sigma} p\mathrm{d}\mathbf{s} = 0,$$

Уравнение энергии с учетом термодинамического тождества $\mathrm{d}e = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v$ принимает форму закона сохранения энтропии жидкой частицы

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Из уравнений движения и энергии следует закон сохранения полной энергии. Для этого (3.8) умножается на $\mathbf{u}$ и складывается с (3.9), что дает

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e\right) + \operatorname{div}(p\mathbf{u}) = 0,$$

или в интегральной форме

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e\right)\mathrm{d}m + \int\limits_{\Sigma} p(\mathbf{u}, \mathrm{d}\mathbf{s}) = 0.$$

4°. Перейдем теперь к уравнениям, описывающим динамику дискретной среды. В этом случае мы не можем дать единообразного определения закона сохранения, т.к. сеточные функции относятся, вообще говоря, к различным элементам сетки. Тем не менее имеют место разностные аналоги соотношений (3.20), к получению которых мы переходим.

Пусть $\mathfrak{a}$ — множество узлов, таких что: $i_1 \le i \le i_2$, $j_1 \le j \le j_2$. Множество ячеек, образованных этими узлами, обозначим $\mathfrak{A}$, а множество узлов на границе — $\partial\mathfrak{a}$. Рассмотрим систему, состоящую из узлов $\mathfrak{a}$ и ячеек $\mathfrak{A}$.

Под законами сохранения для разностной схемы (3.16)—(3.19) мы будем понимать то ее свойство, что масса, объем, энтропия, импульс и полная энергия такой системы (при произвольном выборе множества $\mathfrak{a}$) не имеют внутренних источников, т.е. изменяются только за счет взаимодействия с другими элементами сетки (или границы) по своей поверхности. Разностные схемы, удовлетворяющие в том или ином смысле указанным законам сохранения, получили название полностью консервативных [4].

Сохранение массы и энтропии в разностной схеме (3.16)—(3.19) не вызывает вопросов, они постулировались при ее получении.

Рассмотрим баланс объема. Умножая (3.18) на $V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ и внося $M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \rho_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \mathrm{const}$ под знак дифференцирования по t, имеем

$$\frac{\mathrm{d}V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}t} = (V \operatorname{div}_h \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}.$$

Суммируя теперь эти соотношения по $\mathfrak{A}$ получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\mathfrak{A}} V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \sum_{\mathfrak{A}} (V \operatorname{div}_h \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}.$$

В правой части группируем члены так, чтобы получить сумму по узлам системы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\mathfrak{A}} V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \sum_{\mathfrak{a}} (\mathbf{A}_{i,j}, \mathbf{u}_{i,j}) - \sum_{\partial\mathfrak{a}} (\mathbf{A}^*_{i,j}, \mathbf{u}_{i,j}) \qquad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,j} &= \frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j}} + \frac{\partial V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j}} + \\ &+ \frac{\partial V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j}} + \frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j}}, \end{aligned}$$

а выражение для $\mathbf{A}^*_{i,j}$ имеет аналогичный вид, но в него входят объемы лишь тех ячеек, которые не принадлежат $\mathfrak{A}$. Но при выбранном выше способе вычисления объемов векторы $\mathbf{A}_{i,j} = 0$, т.к. очевидно суммарный объем

ячеек, окружающих узел не зависит от положения этого узла. Таким образом в правой части (3.21) остаются лишь слагаемые, связанные с границей $\partial\mathfrak{a}$ рассматриваемой системы. С учетом выражения для $\mathbf{A}^*_{i,j}$ (3.21) может быть переписано в форме

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\mathfrak{A}} V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \sum_{\partial\mathfrak{a}}\left(\frac{\partial V^*}{\partial \mathbf{r}_{i,j}}, \mathbf{u}_{i,j}\right),$$

где V^* — объем, незанятый ячейками $\mathfrak{A}$. Последнее соотношение выражает закон сохранения объема для разностной схемы (3.16)—(3.19) в указанном выше смысле.

Рассмотрим теперь баланс импульса выделенной системы. Импульс узла (i,j) есть $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{u}_{i,j} = m_{i,j}\mathbf{u}_{i,j}$. Умножая (3.16) на $V_{i,j}$ и суммируя по множеству $\mathfrak{a}$, имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\mathfrak{a}} m_{i,j}\mathbf{u}_{i,j} = -\sum_{\mathfrak{a}}(V\,\mathrm{grad}_h\, p)_{i,j}.$$

В правой части перейдем от суммирования по узлам к суммированию по ячейкам системы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\mathfrak{a}} m_{i,j}\mathbf{u}_{i,j} = \sum_{\partial\mathfrak{a}}\mathbf{F}^*_{i,j} + \sum_{\mathfrak{A}} p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\mathbf{B}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}. \qquad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{i,j} &= \frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j}} + \frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i+1,j}} + \\ &+ \frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i+1,j+1}} + \frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j+1}},\end{aligned}$$

а выражение для $\mathbf{F}^*_{i,j}$ аналогично $\mathbf{F}_{i,j}$,но в нем следует оставить лишь те ячейки, которые не входят в $\mathfrak{A}$.

Как легко видеть величина $(\mathbf{B}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \mathbf{c})$ есть изменение объема ячейки $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$ при одновременном сдвиге ее вершин на вектор $\mathbf{c}$. При выбранном способе вычисления объемов ячеек эта величина равна нулю при любом $\mathbf{c}$, так что $\mathbf{B}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0$ для всех ячеек. Таким образом второй член в правой части (3.22) изчезает и остается

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\mathfrak{a}} m_{i,j}\mathbf{u}_{i,j} = \sum_{\partial\mathfrak{a}}\mathbf{F}^*_{i,j}.$$

Величина $\mathbf{F}^*_{i,j}$ есть сила, с которой внешняя (по отношению к рассматриваемой системе) среда действует на граничный узел (i,j). Таким образом, последнее соотношение выражает закон сохранения импульса для рассматриваемой системы узлов и ячеек.

Баланс кинетической энергии системы получается после умножения (3.16) на $\mathbf{u}_{i,j}$ и суммирования по $(i,j) \in \mathfrak{a}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\mathfrak{a}}(m\mathbf{u}^2/2)_{i,j} + \sum_{\mathfrak{a}} V_{i,j}(\mathbf{u},\, \mathrm{grad}_h\, p)_{i,j} = 0.$$

Баланс внутренней энергии для рассматриваемой системы получается после умножения (3.17) на $V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ и суммирования по множеству $\mathfrak{A}$, что дает

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\mathfrak{A}}(Me)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \sum_{\mathfrak{A}} V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(p\,\mathrm{div}_h\,\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.$$

Суммируя последние соотношения, получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{\mathfrak{a}}(m\mathbf{u}^2/2)_{i,j} + \sum_{\mathfrak{A}}(Me)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right] = \sum_{\mathfrak{a}}(\mathbf{u}_{i,j}, \mathbf{F}_{i,j}) + \sum_{\mathfrak{A}} p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}.$$

где $D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ и $\mathbf{F}_{i,j}$ даются формулами:

$$D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j}}, \mathbf{u}_{i,j}\right) + \left(\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i+1,j}}, \mathbf{u}_{i+1,j}\right) + \left(\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i+1,j+1}}, \mathbf{u}_{i+1,j+1}\right) + \left(\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{r}_{i,j+1}}, \mathbf{u}_{i,j+1}\right),$$

$$\mathbf{F}_{i,j} = p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial x_{i,j}} + p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\frac{\partial V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\partial x_{i,j}} + p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\frac{\partial V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\partial x_{i,j}} + p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\frac{\partial V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\partial x_{i,j}}.$$

В правой части этого соотношения вектор $\partial V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}/\partial \mathbf{r}_{i,j}$ в первой сумме скалярно множится на $p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i,j}$, а во второй сумме на тот же вектор с обратным знаком. Поэтому такие слагаемые взаимно сокращаются; за исключением тех, которые связаны с производными от объемов ячеек не принадлежащих $\mathfrak{A}$ и входящих только в первую сумму. В итоге имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{\mathfrak{a}}(m\mathbf{u}^2/2)_{i,j}+\sum_{\mathfrak{A}}(Me)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right]=\sum_{\partial\mathfrak{a}}(\mathbf{u}_{i,j},\mathbf{F}^*_{i,j}). \quad (3.23)$$

Сумма в правой части есть работа, совершаемая над системой внешней (по отношению к ней) средой. Соотношение (3.23) таким образом выражает закон сохранения энергии в разностной схеме (3.16)—(3.19).

Итак, в вариационно-разностной схеме (3.16)—(3.19) имеют место разностные аналоги законов сохранения массы, объема, энтропии, импульса и полной энергии, т.е. эта схема является полностью консервативной в указанном выше смысле.

§1.4. Обсуждение и обобщения

1°. В предыдущих параграфах были построены разностые схемы для уравнения Пуассона и уравнений лагранжевой газовой динамики. В первом случае мы воспользовались методом опорных операторов, во втором принципом наименьшего действия, примененным к дискретной среде. Как сами уравнения (эллиптической — Пуассона, гиперболические — газовой динамики), так и способы их аппроксимации существенно различны. В настоящем параграфе мы постараемся понять, какие шаги при построении указанных разностных схем являются существенными, а какие имеют второстепенное значение и могут быть пропущены или изменены. Мы также постараемся увидеть то общее, что присуще обоим подходам, и на основании этого перейти к построению теории разностных схем на нерегулярных сетках.

Прежде всего мы отметим, что в процессе построения разностных схем были произвольным образом введе-

ны величины не имеющие прямого отношения к вычислительному алгоритму. В случае разностной схемы метода опорных операторов для уравнения Пуассона к таким величинам следует отнести площади, отнесенные к ребрам сетки, и объемы, отнесенные к узлам. В случае вариационно-разностной схемы для уравнений лагранжевой газовой динамики к таким величинам следует отнести объемы и плотности, приписанные узлам сетки. Появление этих величин обусловленно исключительно желанием записать разностную схему в форме, аналогичной исходному дифференциальному уравнению, где дифференциальные операторы заменены на разностные. Такое желание является естественным, но не представляется разумным ни с теоретической, ни с практической (алгоритмической) точек зрения.

С теоретической точки зрения это означает введение в разностную схему величин, которые не являются независимыми, а входят только в определенных комбинациях. Например, плотности и объемы узлов входят только в виде произведения, имеющего смысл массы узла. При анализе разностной схемы представляется целесообразным рассматривать только те параметры, которые существенно влияют на ее свойства. Массы узлов сетки также могут быть выбраны достаточно произвольным образом, но именно их выбор определяет качество разностной схемы.

Кроме того, принципиальное отличие дискретной среды от сплошной состоит в том, что в ней невозможен предельный переход. Скажем, дифференциальные уравнения для физических полей могут быть получены в результате процедуры: выписывается уравнение для произвольного объема V; совершается предельный переход при $V \to 0$. При дискретном моделировании вторая часть процедуры невозможна. Поэтому разумно отказаться от аппроксимации величин, полученных предельным переходом, а аппроксимировать лишь интегральные характеристики: массу, объем, поток и пр. По той же причине аппроксимации подлежит не $\operatorname{div} \mathbf{q}$, а интеграл $\oint \mathbf{q} d\mathbf{s}$. Поэтому разностные операторы, вводимые в следующих гла-

вах, аппроксимируют дифференциальные с точностью до нормировочных множителей, которые могут равняться объемам ячеек, площадям граней и т.д. Говорить же о таких величинах как плотность, удельная энергия и т.п. в дискретной модели можно лишь после того, как элементарные объекты сплошной среды приравниваются в свои свойствах к «физически бесконечномалым» объемам, площадям и т.д. сплошной среды. Тогда отношение M/V можно трактовать как плотность объекта, E/M как удельную энергию и т.д.

С практической стороны введение в разностную схему плотностей узлов означает заведение «лишних» массивов и выполнение «лишних» операций с ними, т.е. напрасную трату вычислительных ресурсов.

Следующее замечание, которое мы можем сделать, состоит в том, что в обоих случаях использование сеток, топологически эквивалентных равномерной сетке в прямоугольнике, не является принципиальным. Удобство таких сеток имеет как теоретический, так и практический аспект. При теоретических исследованиях такие сетки могут ассоциироваться с некоторой криволинейной системой координат (ξ, η), в которой расчетная сетка прямоугольна и равномерна. На такой сетке удобно исследовать аппроксимацию дифференциальных уравнений разностными. Но при этом следует предполагать, что отображение $(\xi, \eta) \to (x, y)$ является достаточно гладким, так что производные $\partial x/\partial \xi$ и т.п. ограничены. Геометрически это означает, что ячейки сетки являются почти параллелеграммами, причем соседние ячейки «почти одинаковы». Это ограничение на сетку представляется нам обременительным, тем более, что в реальных расчетах оно может быть не выполнено. При реализации вычислительных алгоритмов такие сетки безусловно являются удобными, так как легко находятся соседи элементов сетки. Например, для ячейки $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$ вершины-узлы имеют координаты (i, j), $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$, $(i, j+1)$.

Чтобы компенсировать при теоретических исследованиях отказ от таких сеток мы всюду в дальнейшем будем использовать суммирование по шаблонам. В зави-

симости от рассматриваемой ситуации шаблоны эти будут различны и каждом конкретном случае будут описаны специально. Элементы шаблона будут нумероваться начальными буквами латинского алфавита, а суммирование по шаблону $\sum\limits_a$ и т.п. В некоторых случаях знак суммы будет опускаться (см. главу II).

Введение таких обозначений позволит существенно сократить формулы, которые даже в простейших рассмотренных здесь случаях приобретают необозримые размеры.

В последующих главах буквами середины латинского алфавита i, j, k, ... $= 1, 2$ будут нумероваться компоненты векторов и тензоров в индексных обозначениях. Отметим, что будут рассматриваться только декартовы координаты, поэтому различия между верхними и нижними индексами не делается. По повторяющимся дважды индексам предполагается суммирование. Везде далее: δ_{ij} — единичный тензор (символ Кронеккера), ε_{ij} — антисимметричный тензор ($\varepsilon_{12} = 1$). Круглые скобки у индексов тензора обозначают симметризацию, например: $t_{(ij)} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji})$.

2°. От вопросов обозначений перейдем к более существенным моментам.

При построении разностной схемы метода опорных операторов для уравнения Пуассона мы выполнили следующие действия. Зафиксировав сетку и способ дискретизации переменных:

1. ввели разностный аналог оператора grad, который превращает функцию, заданную в узлах сетки, в функцию, заданную на ребрах;
2. в пространстве сеточных функций, заданных на ребрах, ввели скалярное произведение;
3. построили разностный аналог оператора div, как сопряженный разностному оператору grad (с обратным знаком).

При построении вариационно-разностной схемы для уравнений лагранжевой газовой динамики мы, зафиксировав сетку и способ дискретизации переменных:

1. ввели разностный аналог оператора div, который превращает функцию, заданную в узлах сетки, в функцию, заданную в ячейках;
2. из вариационного принципа получили уравнения движения узлов сетки, при этом:
   (а) ввели массы узлов,
   (б) построили разностный аналог оператора grad, как сопряженный разностному оператору div (с обратным знаком), что выразилось в преобразовании

$$\int\limits_{\mathcal{O}} p \operatorname{div} \delta\mathbf{r} \mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} p(\delta\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{s}) - \int\limits_{\mathcal{O}} (\operatorname{grad} p, \delta\mathbf{r}) \mathrm{d}V,$$

   выполненом на разностном уровне.

Таким образом мы видим, что построение разностной схемы в обоих случаях включало три этапа:

1. непосредственное построение разностного аналога дифференциального оператора первого порядка (опорный оператор);
2. введение в пространстве сеточных функций, аппроксимирующих векторные поля, скалярного произведения, другими словами задание в этом пространстве положительного симметричного оператора (метрический оператор);
3. построение оператора, сопряженного опорному (определяемый оператор).

3°. В построениях §§1.2—1.3 два последних этапа как бы слиты в один, а при построении вариационно-разностной схемы для уравнений лагранжевой газовой динамики второй этап совсем скрыт. Поэтому рассмотрим это трехэтапное построение разностных схем подробнее. Начнем с метода опорных операторов. Мы говорим, что разностный оператор div сопряжен разностному оператору $-\operatorname{grad}$ на соответствующих пространствах сеточных функций. Пусть, для определенности, оператор $\mathrm{A} =$

$= -\operatorname{grad}$ действует в пространстве X функций, обращающихся в ноль в граничных узлах по формуле

$$p(\lambda) = \mathrm{A}v = -\frac{v(\omega') - v(\omega)}{h_\lambda}.$$

Здесь λ — ребро расчетной сетки, применительно к §1.2 λ либо пара индексов $(i+\frac{1}{2}, j)$, либо пара индексов $(i, j+\frac{1}{2})$; h_λ — длина этого ребра; ω, ω' — узлы, которые соединяет ребро λ; применительно к §1.2 узел ω это (i, j). При этом на всех ребрах задана ориентация, началом ребра считается узел ω, у которого один из индексов меньше, чем у узла ω', который считается концом ребра.

Областью значений оператора A является пространство Y функций, заданных на ребрах (точнее подпространство этого пространства) $\mathrm{A} : X \to Y$. Сопряженный оператор действует из Y^* в X^* по правилу

$$(q, \mathrm{A}v)_Y = (\mathrm{A}^* q, v)_X. \tag{4.1}$$

Здесь $v \in X$, $\mathrm{A}v \in Y$, $q \in Y^*$, $\mathrm{A}^* q \in X^*$, $(\cdot,\cdot)_X$, $(\cdot,\cdot)_Y$ — функционалы в пространствах X и Y. Общий вид функционалов в X и Y

$$(w, v)_X = \sum_\omega V_\omega w(\omega) v(\omega), \tag{4.2}$$

$$(q, p)_Y = \sum_\lambda V_\lambda q(\lambda) p(\lambda), \tag{4.3}$$

где $\sum\limits_\omega$, $\sum\limits_\lambda$ — суммы по узлам и ребрам сетки, множители V_ω, V_λ введены для соответствия с формулами §1.2. Отметим, что здесь опять возникли «лишние» величины V_ω и V_λ, наиболее естественно было бы положить их равными единице.

Подставляя в (4.1)—(4.3) выражение для $p = \mathrm{A}v$, получаем

$$\mathrm{A}^* q = \frac{1}{V_\omega} \sum_a \pm V_a / h_a q(a),$$

где $\sum\limits_a$ — суммирование по ребрам, выходящим из узла ω, а знак «плюс» или «минус» выбирается в зависимости

от того является ли рассматриваемый узел началом или концом ребра a. Но это выражение с точностью до обозначений $(V/h \to s)$ совпадает с формулой (2.9) для разностной дивергенции. Однако подставить сюда $\mathrm{A}u$ вместо q мы не можем, так как $\mathrm{A}u \in Y$, а $q \in Y^*$. Чтобы преобразовать $\mathrm{A}u$ в q используется метрический оператор, действие которого в §1.2 дается формулами (2.8), (2.8′). В этих формулах величины с нижними индексами ξ и η принадлежат Y, а величины с верхними индексами Y^*. Сеточные функции из Y представляют ковариантные компоненты векторных полей, а из Y^* контравариантные.

Итак, в соответствии с тремя этапами построения разностной схемы метода опорных операторов, разностный оператор $\mathrm{div}_h\,(\mathrm{grad}_h)$ тоже действует в три этапа: при помощи опорного оператора grad_h вычисляется сеточная функция ковариантных компонент «теплового потока»; при помощи метрического оператора ковариантные компоненты преобразуются в контравариантные; к контравариантным компонентам применяется определяемый оператор div_h.

Рассмотрим теперь с этой точки зрения вариационно-разностную схему для уравнений лагранжевой газовой динамики. В узлах сетки задан вектор скорости, который мы будем считать описывается своими контравариантными компонентами. Опорный оператор div_h превращает векторную сеточную функцию, заданную в узлах, в скалярную функцию, заданную в ячейках. Сопряженный ему определяемый оператор — grad_h, превращает скалярную функцию, заданную в ячейках, опять в векторную, заданную в узлах, но уже своими ковариантными компонентами. Это делается особенно наглядным, если вектору описывать не в декартовой системе координат, а в произвольной аффинной. Чтобы получить контравариантные компоненты следует подействовать метрическим оператором. Но в данном случае удобнее действовать метрическим оператором на сеточную функцию ускорений и роль метрического выполняет диагональный оператор масс узлов.

Аналогия между разностными схемами метода опор-

ных операторов и вариационно-разностными схемами, установленная в настоящем параграфе, является еще более полной. Однако эта более полная аналогия может быть вскрыта только на основе исследования сходимости разностных схем.

Глава II

Математический аппарат метода опорных операторов

§2.1. Дискретная модель сплошной среды

1°. Настоящая глава посвящена построению разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на произвольных нерегулярных сетках и установлению ряда неравенств типа вложения для сеточных функций, которые потребуются в дальнейшем при исследовании сходимости указанных разностных схем в L^p–нормах $(1 \leq p \leq \infty)$. В отличие от §1.2, в качестве опорного принят оператор div. Это сделано с целью продемонстрировать гибкость метода опорных операторов. К разностным схемам с опорным оператором grad мы вернемся в главе V.

Расчетную область $\mathcal{O}$ покроем семейством разностных сеток, каждая из которых состоит из узлов ω, образованных ими ячеек-многоугольников Ω и граней σ — сторон ячеек (см. рис.2.1). Каждой граничной грани сопоставим фиктивную ячейку Ω_*. Во множествах (ω) и (σ) выделим те элементы, которые лежат на границе расчетной облас-

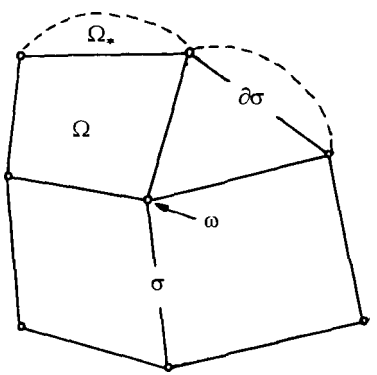


Рис.2.1

ти и будем помечать их символом ∂, например, $\partial\omega$ — граничный узел.

Будем предполагать, что сетка является связной в следующем смысле: 1) из каждой ячейки в любую другую можно попасть переходя через грани; 2) любые два узла можно соединить ломаной, проходящей по граням.

Введем параметр h, характеризующий подробность разбиения расчетной области $\mathcal{O}$ сеткой, и имеющий смысл линейных размеров элементов сетки. Будем предполагать, что размеры элементов сетки (ячеек, граней) равномерно оценивается для всего семейства сеток $a_1h^2 \leq \leq V(\Omega) \leq a_2h^2$, $b_1h \leq s(\sigma) \leq b_2h$, где $V(\Omega)$ — объем ячейки Ω, $s(\sigma)$ — площадь грани σ. При этом подразумевается, что сетка расположена в трехмерном пространстве и все ее элементы имеют единичную высоту по координате, перпендикулярной плоскости рисунка (см. §1.1).

2°. В настоящей главе будет рассмотрен вариант метода опорных операторов, в рамках которого скалярные сеточные функции задаются в ячейках, а векторные на гранях. Пространство сеточных функций, заданных на множестве (Ω) будем обозначать $\mathcal{R}$, на множестве (Ω_*) — $\mathcal{R}_*$, на множестве (σ) — $\mathcal{H}$, на множестве (ω) — $\mathcal{S}$.

Обозначим через a пару (Ω, σ), где Ω — ячейка сетки, σ — грань этой ячейки. Определим коэффициенты σ_a следующим образом:

$\sigma_a = +1$, если положительная сторона грани σ является внешней для ячейки Ω;

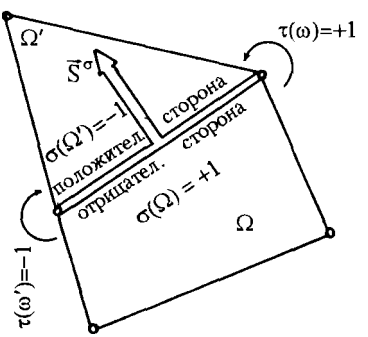


Рис.2.2

$\sigma_a = -1$, если внутренней.

Наряду с коэффициентами $\sigma_a(\Omega)$ введем коэффициенты $\tau^a(\omega)$ и оператор $\delta : \mathcal{S} \to \mathcal{H}$ следующим образом (см. рис.2.2):

$\tau^a(\omega) = +1$, если переход от отрицательной стороны грани a к положительной происходит против часовой стрелки относительно узла ω;

$\tau^a(\omega) = -1$ в противном случае;

$\delta^a\zeta = \tau^a(\omega)\zeta(\omega) + \tau^a(\omega')\zeta(\omega')$.

Легко видеть, что $\sigma_a\delta^a \equiv 0$ и, если $\sigma_a Y^a = 0$ для некоторой сеточной функции Y, то существует $\zeta \in \mathcal{S}$, такая что $Y = \delta\zeta$.

§2.2. Метод опорных операторов

1°. В двумерной области $\mathcal{O}$ с границей $\partial\mathcal{O}$ рассмотрим уравнение Пуассона, записав его в виде системы:

$$\operatorname{div}\mathbf{q} = f(x), \qquad \mathbf{q} = -\operatorname{grad} u \tag{2.1}$$

с некоторыми граничными условиями.

Будем предполагать, что входные данные задачи (область $\mathcal{O}$, граничные условия, правая часть) таковы, что решение $u(x) \in C^2(\bar{\mathcal{O}})$.

К ячейкам отнесем сеточную функцию температур U. У каждой грани каким-либо образом выделим положительную сторону (см.рис.2.2) и отнесем к ним сеточную функцию тепловых потоков Q^σ, аппроксимирующих интегралы $\int\limits_\sigma \mathbf{q}d\mathbf{s}$.

При описанном способе дискретизации физических полей естественным образом аппроксимируется оператор дивергенции и первое из уравнений (2.1)

$$\sum_a \sigma_a Q^a = F = \int\limits_\Omega f dV, \tag{2.2}$$

где суммирование производится по граням a ячейки Ω. В дальнейшем для сокращения формул будем опускать

символ $\sum\limits_a$ и считать, что по повторяющемуся верхнему и нижнему индексу производится суммирование, когда индекс пробегает по всем граням ячейки. Формула (2.2) принимает вид: $\sigma_a Q^a = F$. При этом мы считаем, что интеграл $\int\limits_\Omega f \mathrm{d}V$ вычисляется точно.

2°. Согласно методу опорных операторов разностный аналог оператора градиент строится таким образом, чтобы выполнялся сеточный аналог интегрального тождества

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathcal{O}} u \operatorname{div} \mathbf{p} \mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} u\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{s} + \int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V, \\ \mathbf{q} = -\operatorname{grad} u.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Интеграл $\int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V$ представим в виде $\sum\limits_\Omega \int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V$, а интегралы по ячейкам будем аппроксимировать билинейными формами $g_{ab}p^a q^b$, где $g_{ab} = g_{ab}(\Omega)$ — симметричные матрицы (по a, b — суммирование).

Таким образом получаем

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V \cong \sum_\Omega g_{ab}p^a q^b.$$

Левую часть (2.3) аппроксимируем суммой $\sum\limits_\Omega U\sigma_a P^a$.

Имеем тождественно

$$\begin{aligned}\sum_\Omega U\sigma_a P^a = &\sum_{\partial\sigma} U_* P^\sigma + \\ &+ \sum_\sigma P^\sigma[\sigma(\Omega)U(\Omega) + \sigma(\Omega')U(\Omega')].\end{aligned} \tag{2.4}$$

Первый член в правой части (2.4) аппроксимирует $\int\limits_{\partial\mathcal{O}} u\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{s}$, а второй таким образом интеграл $\int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \operatorname{grad} u)\times$ $\times \mathrm{d}V = \int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V$.

С другой стороны интегралу $\int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathrm{d}V$ соответствует сумма $\sum\limits_{\Omega} g_{ab} P^a Q^b$, откуда, ввиду произвольности P^σ имеем

$$g_{\sigma a}(\Omega) Q^a + g_{\sigma a}(\Omega') Q^a = \sigma(\Omega) U(\Omega) + \sigma(\Omega') U(\Omega'). \qquad (2.5)$$

Оператор в левой части (2.5), действующий на сеточную функцию Q, в дальнейшем будем обозначать $\mathcal{G}$ и называть метрическим. Так как $\sigma = \pm 1$, то в правой части (2.5) стоит $-\Delta U = U(\Omega) - U(\Omega')$, где Ω' — та ячейка, для которой положительная сторона грани является внутренней, для Ω эта сторона является внешней. Таким образом, операторный метод приводит к соотношению $\mathcal{G} Q = -\Delta U$.

3°. Относительно метрических операторов будем предполагать выполненными следующие равномерные (по семейству рассматриваемых сеток и ячейкам этих сеток) оценки:

$$\text{а) } \mathcal{G} \geq \beta I \ (\beta > 0); \qquad \text{б) } \sum_a |g_{ab}| \leq \gamma. \qquad (2.6)$$

Метрический оператор $\mathcal{G}$ позволяет естественным образом снабдить пространство $\mathcal{H}$ скалярным произведением $\langle X, Y \rangle = \sum\limits_{\Omega} g_{ab} X^a Y^b$ и нормой $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$.

4°. С учетом вышесказанного разностная схема метода опорных операторов для уравнения Пуассона имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_a Q^a &= F && \text{на } (\Omega), \\ \mathcal{G} Q &= -\Delta U && \text{на } (\sigma). \end{aligned}$$

Если рассматривается первая краевая задача, то эта система замыкается граничными условиями $U(\Omega_*) = U_*$, если вторая условиями — $\mathcal{G}^{-1} \Delta U = Q_*$, где заданные сеточные функции на (Ω_*) и $(\partial\sigma)$ соответственно.

§2.3. Проекторы и их моменты

1°. Основным для теории численных методов является вопрос о соотношении между решением, полученным

численно, и решением исходной дифференциальной задачи, о сходимости и скорости сходимости. Для того, чтобы сравнение этих решений стало возможным в теории разностных схем осуществляется проектирование решения исходной задачи в пространство сеточных функций при помощи некоторых операторов проектирования Π, после чего ошибка оценивается в некоторой норме $\|\cdot\|$. Относительно проекторов сделаем следующее замечание. Пусть мы интересуемся сходимостью разностной схемы со скоростью $O(h)$ и два проектора Π_1 и Π_2 таковы, что $\|\Pi_1 u - \Pi_2 u\| = O(h)$. Тогда эти два проектора для нас эквивалентны. Если же мы будем интересоваться сходимостью со скоростью $O(h^2)$, то эквивалентность этих проекторов ,вообще говоря, не будет иметь места. Таким образом множество всех возможных проекторов распадается на классы эквивалентности (первого порядка): два проектора эквивалентны, если $\|(\Pi_1 - \Pi_2)u\| = O(h)$. Каждый класс эквивалентности в свою очередь тоже распадается на классы эквивалентности (второго порядка): два проектора эквивалентны, если $\|(\Pi_1 - \Pi_2)u\| = O(h^2)$, и т.д. При каждом конкретном исследовании мы доходим до той или иной ступени этой иерархии.

Возникает вопрос: как описать класс эквивалентности проекторов. В настоящей работе предлагается описывать их при помощи моментов проекторов. Поясним этот подход на примере. Рассмотрим проекторы, преобразующие векторную функцию $\mathbf{f}(x)$ непрерывного аргумента в сеточную функцию f_α (α — индекс на сетке). Зафиксируем α и будем интерпретировать f_α как функционал φ на некотором пространстве $\mathcal{H}$, которому принадлежит $\mathbf{f}(x)$, предполагая его линейность. Пусть $\mathcal{H}$ — подпространство постоянных векторных функций $f_i = \text{const}$, тогда на этом подпространстве φ имеет вид $f^\alpha = \varphi(f_i) = m_i^\alpha \times \times f_i$. Пусть $\mathcal{H}$ — подпространство линейных (по координатам) векторных функций $f_i = F_{ik}x_k$, тогда на этом подпространстве φ имеет вид $f^\alpha = \varphi(F_{ik}x_k) = M_{ik}^\alpha F_{ik}$. Векторы m_i и тензоры M_{ik} определяются проектором и являются его моментами. Аналогично можно определить и моменты более высокого порядка.

§2.4. Сеточный аналог интегрального представления функций из $\overset{\circ}{H}{}^2$

1°. В последующих параграфах установливаются разностные аналоги вложений пространства $\overset{\circ}{H}{}^1$ в L^p $(1 \leq \leq p < \infty)$ и слабое вложение в L^∞ на нерегулярных сетках. Рассматривается случай двумерной плоской геометрии. На сетку накладываются минимальные разумные ограничения (см. §2.1).

В континуальном случае доказательство вложений $\overset{\circ}{H}{}^2(\mathcal{O})$ в $L^p(\mathcal{O})$ основано на интегральном представлении функций из $\overset{\circ}{H}{}^2(\mathcal{O})$ в виде [20]:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{O}} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} \frac{\partial f}{\partial y_i} \mathrm{d}V_y = \int\limits_{\mathcal{O}} (\Psi, \nabla f) \mathrm{d}V_y \tag{4.1}$$

и доказательства ограниченности интегрального оператора в правой части (4.1) из $L^2(\mathcal{O})$ в $L^p(\mathcal{O})$. Для получения разностных аналогов теорем вложения реализуем аналогичную процедуру на разностном уровне. На первом этапе получим разностный аналог интегрального представления (4.1) , и на втором покажем равномерную (на семействе сеток) ограниченность возникающих при этом операторов, действующих в сеточные пространства L^p. Исключение составляет случай , когда оператор действует в сеточное пространство L^∞. В этом случае константа непрерывности зависит от сетки, хотя и достаточно слабо.

2°. Прежде чем переходить к получению разностного аналога интегрального представления (4.1) введем сеточные нормы L^p и $\overset{\circ}{H}{}^1$.

В дальнейшем будут рассматриваться только функции, обращающиеся в ноль на (Ω_*). Поэтому будем считать, что все функции $F \in \mathcal{R}$ доопределены нулем (если это необходимо) на (Ω_*).

Сеточную норму L^p введем естественным образом.

Пусть $F \in \mathcal{R}$, тогда

$$\|F\|_p = \Big[\sum_{\Omega} V|F|^p\Big]^{1/p},$$

где V — объем ячейки Ω.

Под сеточной нормой $\overset{\circ}{H}{}^1$ будем понимать сеточный аналог выражения $\Big[\int\limits_{\mathcal{O}} |\operatorname{grad} f|^2 \mathrm{d}V\Big]^{1/2}$, которому согласно методу опорных операторов соответствует

$$\|F\|_{\mathrm{A}} = \Big[\sum_{\sigma} (\mathcal{G}^{-1}\Delta F)^{\sigma}\Delta_{\sigma}F\Big]^{1/2}. \tag{4.2}$$

Здесь $\mathcal{G}$ — метрический оператор, задающий скалярное произведение в пространстве векторных сеточных функций $\mathcal{H}$ и удовлетворяющий условиям $\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$, $\beta I \leq \mathcal{G} \leq \leq \beta I$, $\beta \geq 0$. В силу этих неравенств норма $\|F\|_{\mathrm{A}}$ эквивалентна норме

$$\|F\| = \Big[\sum_{\sigma} |\Delta_{\sigma}F|^2\Big]^{1/2},$$

которая в дальнейшем будет использоваться в качестве сеточного аналога нормы $\overset{\circ}{H}{}^2$.

3°. Получим разностный аналог представления (4.1). Для этого спроектируем ядро интегрального оператора на сетку, т.е. образуем сеточную функцию следующего вида

$$\psi^{\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2}\mathrm{d}s_{y,i}.$$

Геометрический смысл $\psi^{\sigma}(x)$ очевиден — это деленный на 2π угол, под которым из точки x видна грань σ. Угол положителен, если видна отрицательная сторона σ, и отрицателен в противном случае. Из этих же соображений ясно, что разностная дивергенция $\psi^{\sigma}(x)$ есть

$$\sigma_a\psi^a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ лежит внутри } \Omega, \\ 0, & \text{если } x \text{ лежит вне } \Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Теперь можно получить разностный аналог интегрального представления (4.1). Пусть $F = F(\Omega)$ и $F(\Omega_*) = 0$. В расчетной области $\mathcal{O}$ образуем функцию

$$f(x) = \sum_{\Omega} F\sigma_a\psi^a(x) = -\sum_{\sigma} \psi^\sigma(x)\Delta_\sigma F. \tag{4.4}$$

С учетом (4.3) легко видеть, что $f(x) = F(\Omega)$, где Ω — ячейка, содержащая точку x. Если точка x лежит на границе ячеек, будем считать, что $f(x)$ не определена. Множество таких точек имеет нулевую меру, поэтому для наших дальнейших целей такое определение корректно. Очевидно, что $f(x) \in L^p(\mathcal{O})$ при всех $1 \le p \le \infty$ и $\|f(x)\|_p = \|F\|_p$, где $\|f(x)\|_p$ определена стандартным образом. В дальнейшем будем оценивать именно $\|f(x)\|_p$.

Согласно методу опорных операторов выражение $\sum\limits_{\sigma} \psi^\sigma(x)\Delta_\sigma F$ следует интерпретировать как сеточный аналог интеграла $\int\limits_{\mathcal{O}} (\Psi, \nabla f)\mathrm{d}V_y$, где F — проекция $f(x)$ в пространство сеточных функций $\mathcal{R}$, $\psi^\sigma(x)$ — проекция Ψ в пространство сеточных функций $\mathcal{H}$: $\psi^\sigma(x) = \int\limits_{\sigma} \Psi(x,y)\mathrm{d}s_y$.

Таким образом можно считать, что формула (4.4) является разностным аналогом интегрального представления (4.1).

§2.5. Сеточные вложения $\overset{\circ}{H}{}^2$ в L^p

1°. Установим сеточные аналоги вложений $\overset{\circ}{H}{}^2(\mathcal{O})$ в $L^p(\mathcal{O})$ с $1 \le p < \infty$. Соответствующие оценки наиболее просто получаются в случае $1 \le p < 2$.

В силу (4.4):

$$\begin{aligned} \|F\|_p^p &= \int\limits_{\mathcal{O}} |f(x)|^p \mathrm{d}V = \int\limits_{\mathcal{O}} |f(x)|^{p-1} \Big|\sum_{\sigma} \psi^\sigma(x)\Delta_\sigma F\Big| \mathrm{d}V \le \\ &\le \sum_{\sigma} |\Delta_\sigma F| \int\limits_{\mathcal{O}} |f(x)|^{p-1} |\psi^\sigma(x)| \mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Применяя к последнему интегралу неравенство Гельдера имеем

$$\int\limits_{\mathcal{O}} |f(x)|^{p-1}|\psi^\sigma(x)|\mathrm{d}V \le$$
$$\le \Big[\int\limits_{\mathcal{O}} |f(x)|^{(p-1)p'}\mathrm{d}V\Big]^{1/p'}\Big[\int\limits_{\mathcal{O}} |\psi^\sigma(x)|^p\mathrm{d}V\Big]^{1/p} = \tag{5.2}$$
$$= \|F\|_p^{p-1}\Big[\int\limits_{\mathcal{O}} |\psi^\sigma(x)|^p\mathrm{d}V\Big]^{1/p}.$$

Здесь p' сопряженный с p показатель: $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. Объединяя (5.1) и (5.2), получаем

$$\|F\|_p \le \sum_\sigma |\Delta_\sigma F|\Big[\int\limits_{\mathcal{O}} |\psi^\sigma(x)|^p\mathrm{d}V\Big]^{1/p} \le$$

$$\le \|F\|\Big\{\sum_\sigma\Big[\int\limits_{\mathcal{O}} |\psi^\sigma(x)|^p\mathrm{d}V\Big]^{2/p}\Big\}^{1/2}.$$

Так как $\int\limits_{\mathcal{O}} |\psi^\sigma(x)|^p\mathrm{d}V \le M_1|\mathbf{s}^\sigma|^p$ (см. *Приложение А*) имеем

$$\|F\|_p \le M_1^{1/p}\Big\{\sum_\sigma |\mathbf{s}^\sigma|^2\Big\}^{1/2}\|F\| \le M\|F\|.$$

2°. Покажем теперь сеточное вложение $\overset{\circ}{H}{}^2$ в L^p при $2 \le$ $\le p < \infty$. Положим $q = \dfrac{2p}{p+2} < 2$ и представим $|f(x)|$ в виде

$$|f(x)| = \Big|\sum_\sigma \psi^\sigma(x)\Delta_\sigma F\Big| \le$$
$$\sum_\sigma\Big[|\psi^\sigma(x)|^q|\Delta_\sigma F^2|\Big]^{1/p}|\Delta_\sigma F|^{1-2/p}|\psi^\sigma(x)|^{q/2}. \tag{5.3}$$

Применив к (5.3) неравенство Гельдера с показателями $p_1 = p$, $p_2 = q' = \dfrac{2p}{p-2}$, $p_3 = 2$ $(p_1^{-1}+p_2^{-1}+p_3^{-1} = 1)$,

получаем

$$|f(x)|^p \le \Big[\sum_\sigma |\psi^\sigma(x)|^q |\Delta_\sigma F|^2\Big] \Big[\sum_\sigma |\Delta_\sigma F|^2\Big]^{\frac{p-2}{2}} \Big[\sum_\sigma |\psi^\sigma(x)|^q\Big]^{\frac{p}{2}}.$$

Так как $\sum\limits_\sigma |\psi^\sigma(x)|^q \le M_2 h^{q-2}$ (см. *Приложение B*) имеем

$$\|F\|_p^p \le \sum_\sigma |\Delta_\sigma F|^2 \int\limits_{\mathcal{O}} |\psi^\sigma(x)|^q \mathrm{d}V \ \|F\|^{p-2} (M_2 h^{q-2})^{p/2} \le$$
$$\le M_1 M_2^{p/2} b_2^q \|F\|^p.$$

Окончательно

$$\|F\|_p \le M\|F\| \quad \text{с} \quad M = M_1^{1/p} M_2^{1/2} b_2^{2/(p+2)}.$$

Таким образом показано, что для $F \in \mathcal{R}$ (и продолженных нулем на Ω_*) имеют место оценки $\|F\|_p \le M\|F\|$ с константой M, зависящей только от p при фиксированных области $\mathcal{O}$ и семействе разностных сеток (определяющих константы b_1 и b_2).

3°. Из хода доказательства вложений видно, что требования, наложенные на сетку в §1.2 можно ослабить. Во-первых: следует потребовать, чтобы для всех сеток рассматриваемого семейства выполнялась оценка $\sum\limits_\sigma |\mathbf{s}^\sigma|^2 \le$ $\le M_1$ с константой M_1 независящей от сетки. Во-вторых: следует потребовать, чтобы круги, построенные на каждой грани сетки как на диаметре, покрывали любую точку расчетной области $\mathcal{O}$ не более n раз с числом n не зависящем от сетки из рассматриваемого семейства.

Оба эти требования будут выполнены, если все ячейки сеток имеют соизмеримые размеры во всех направлениях. Другими словами: нет вытянутых ячеек.

§2.6. Слабое сеточное вложение $\overset{\circ}{H}{}^1$ в L^∞

1°. Как уже отмечалось, для функций непрерывного аргумента $\overset{\circ}{H}{}^2$ не вкладывается в L^∞, поэтому нет оснований

считать, что такое вложение будет иметь место для сеточных функций. В разностном случае под вложением $\overset{\circ}{H}{}^2$ в L^∞ понимаются оценки вида

$$\|F\|_\infty \le M(h)\|F\|,$$

где величина $M(h)$ зависит только от сетки. Для метода конечных элементов характерна логарифмическая зависимость M от h.

2°. Воспользовавшись представлением (4.4) и неравенством Коши-Буняковского имеем

$$|f(x)| = \Big[\sum_\sigma |\psi^\sigma(x)|^2\Big]^{\frac{1}{2}}\|F\|.$$

Оценим $\sum\limits_\sigma |\psi^\sigma(x)|^2$ при произвольном $x \in \mathcal{O}$. Для этого каждой грани как на диаметре построим окружность, а также построим круг $K(x)$ с центром в точке x и радиуса $\rho = ch$. Множество граней разобъем на два подмножества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Грань $\sigma \in \mathfrak{A}$, если круг $K(x)$ и соответствующая грани σ окружность не имеют общих точек. К подмножеству $\mathfrak{B}$ отнесем остальные грани. Очевидно, что в силу сделанных предположений относительно сетки, число элементов $\mathfrak{B}$ ограничено некоторым $n = O(1)$.

Оценим $\sum\limits_\sigma |\psi^\sigma(x)|^2$ для $\sigma \in \mathfrak{A}$. Пусть R — расстояние от точки x до середины грани, $r = \frac{1}{2}|\mathbf{s}^\sigma|$ — радиус круга K, построенного на σ как на диаметре. Тогда с одной стороны

$$|\psi^\sigma(x)| \le \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{r}{R} \le \frac{r}{\pi R},$$

с другой

$$\int\limits_K \frac{\mathrm{d}V_y}{|x-y|^2} = -\pi\ln\Big(1-\frac{r^2}{R^2}\Big) \ge \frac{\pi r^2}{R^2}.$$

Следовательно

$$|\psi^\sigma(x)|^2 \le \frac{1}{\pi^3}\int\limits_K \frac{\mathrm{d}V_y}{|x-y|^2}.$$

Для $\sigma \in \mathfrak{B}$ положим $|\psi^\sigma(x)| \le \frac{1}{2}$. Таким образом

$$\sum_\sigma |\psi^\sigma(x)|^2 = \sum_{\mathfrak{A}} |\psi^\sigma(x)|^2 + \sum_{\mathfrak{B}} |\psi^\sigma(x)|^2 \le$$
$$\le \sum_{\mathfrak{A}} \frac{1}{\pi^3} \int\limits_K \frac{\mathrm{d}V_y}{|x-y|^2} + \frac{n}{4}.$$

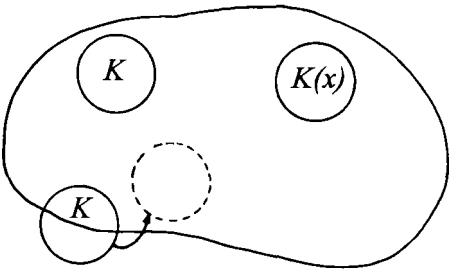


Рис.2.3

По построению круги K лежат в области $\mathcal{D} = \mathcal{O} - K(x)$; если K выходит за пределы области $\mathcal{O}$, его можно «передвинуть» внутрь области, при этом соответствующий интеграл не уменьшится (см. рис.2.3). Кроме того каждая точка области $\mathcal{D}$ покрыта не более чем m кругами K. Поэтому

$$\sum_\sigma |\psi^\sigma(x)|^2 \le \frac{m}{\pi^3} \int\limits_K \frac{\mathrm{d}V_y}{|x-y|^2} + \frac{n}{4} \le$$

$$\le \frac{2m}{\pi^2} \int\limits_\rho^R \frac{\mathrm{d}r}{r} + \frac{n}{4} = \frac{2m}{\pi^2} \ln\frac{R}{\rho} + \frac{n}{4} = M_0^2 \ln\frac{L}{h}$$

с

$$M_0 = \left(\frac{2m}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad L = \frac{R}{c}\exp\left(\frac{\pi^2 n}{8m}\right), \qquad \pi R^2 = \operatorname{mes}\mathcal{O}.$$

Окончательно

$$\|F\|_\infty \le M_0 |\ln(L/h)|^{1/2} \|F\|.$$

Таким образом установлены вложения сеточных пространств $\overset{\circ}{H}{}^1$ в L^p при $1 \le p < \infty$ и слабое вложение $\overset{\circ}{H}{}^1$ в L^∞ на нерегулярных сетках.

Глава III

Сходимость разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на классических решениях

§3.1. Качественное исследование разностных схем метода опорных операторов

1°. В этом параграфе исследуется аппроксимация уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = f(x), \tag{1.1}$$

$$\mathbf{q} = -\operatorname{grad} u \tag{1.2}$$

разностными схемами метода опорных операторов на достаточно гладких решениях.

Для уравнений (1.1)—(1.2) рассмотрим вторую краевую задачу с граничным условием $(\mathbf{q}, \mathbf{n})\Big|_{\partial\mathcal{O}} = q_*(x)$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе области $\mathcal{O}$ в точке x, $q_*(x)$ — известная функция. Решение задачи существует, если выполнено условие разрешимости

$$\int\limits_{\mathcal{O}} f \mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} q_* \mathrm{d}s.$$

В этом случае температура $u(x)$ определена с точностью до константы, а тепловой поток $\mathbf{q}(x)$ определен однозначно.

Разностная схема метода опорных операторов имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_a Q^a = F && \text{на } (\Omega), \\ &\mathcal{G} Q = -\Delta U && \text{на } (\sigma), \\ &Q = Q_* && \text{на } (\partial\sigma). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $\mathcal{G}$ — метрический оператор, $F = \int\limits_{\Omega} f \mathrm{d}V$, $Q_* = \int\limits_{\partial\sigma} q_* \mathrm{d}s$. В силу сделанных в §1.3 предположений суще-

ствует оператор $\mathcal{G}^{-1}$ и, исключая Q из уравнений (1.3), получим

$$AU = \left\{ \begin{array}{ll} -\sigma(\mathcal{G}\Delta U) & \text{на } (\Omega) \\ \mathcal{G}^{-1}\Delta U & \text{на } (\Omega_*) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} F & \text{на } (\Omega) \\ -Q_* & \text{на } (\Omega_*) \end{array} \right\}. \tag{1.4}$$

Оператор $A : \mathcal{R} + \mathcal{R}_* \to \mathcal{R} + \mathcal{R}_*$ в ячейках (Ω) является разностным аналогом оператора $-\operatorname{div}\operatorname{grad}$.

Исследуем свойства оператора A. Для этого рассмотрим скалярное произведение

$$(T, AU) = \sum_{\Omega,\Omega_*} TAU = \sum_{\sigma} \Delta_\sigma T(\mathcal{G}^{-1}\Delta U)^\sigma.$$

Отсюда, в силу свойств оператора $\mathcal{G}$, следует, что $A = A^* \geq \geq 0$ в смысле скалярного произведения $(U, T) = \sum\limits_{\Omega,\Omega_*} UT$ и $(U, AU) = 0$ лишь в том случае, когда все $\Delta U = 0$, соответственно $U = \text{const}$.

Так как единственным решением однородной сопряженной системы $A^*T = 0$ является функция $T(\Omega) = \text{const}$, то условием разрешимости уравнений (1.4) является по теореме Фредгольма [22] равенство

$$\sum_{\Omega} F = \sum_{\partial\sigma} Q_*,$$

которое предполагается выполненным.

2°. Рассмотрим теперь вопрос о точности разностной схемы (1.3). Интегрируя (1.1) по Ω находим

$$\sigma_a q^a = F,$$

где $q^\sigma = \int\limits_\sigma \mathbf{q}d\mathbf{s}$, и, вычитая из первого уравнения (1.3), получаем

$$\sigma_a(q - Q)^a = 0 \qquad \text{на } (\Omega). \tag{1.5}$$

Очевидно

$$q - Q = 0 \qquad \text{на } (\partial\sigma). \tag{1.5'}$$

Условия (1.5) означают, что существует сеточная функция $\zeta(\omega)$ такая, что $q - Q = \delta\zeta$. Условия (1.5′) дают $\zeta = = \text{const}$ на $(\partial\omega)$, для определенности положим $\text{const} = 0$.

Получим уравнение, которому удовлетворяет функция ζ. Имеем

$$\delta\zeta = q - Q,$$

$$\mathcal{G}\delta\zeta = \mathcal{G}q + \Delta U.$$

Суммируя последнее равенство по граням, содержащим узел ω, с множителями τ^a, получим

$$\tau^a(\mathcal{G}\delta\zeta)_a = \tau^a(\mathcal{G}q)_a. \tag{1.6}$$

Так как $q - Q = \delta\zeta$, то исследование ошибки $\|q - Q\|$ сводится к оценке решения уравнения (1.6) в соответствующей норме.

Оператор в левой части (1.6) можно интерпретировать как разностный аналог оператора rot rot по следующим соображениям. Для сеточной функции $p = \delta\eta$ при любой $\eta(\omega)$ справедливо тождество $\sigma_a p^a \equiv 0$, что соответствует $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta} \equiv 0$. Введем фиктивные грани (σ_*), разъединяющие фиктивные ячейки, и положим (см. рис.3.1)

$$(\mathcal{G}p)_* = \int\limits_{ABC} \mathbf{p}\,\mathbf{dl}.$$

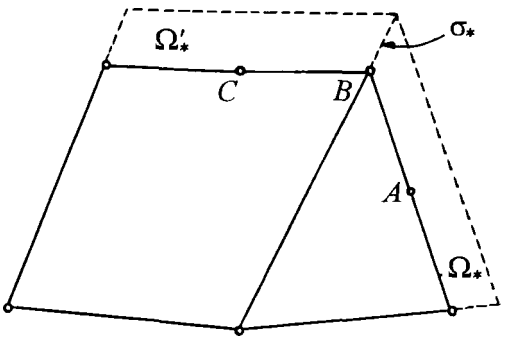


Рис.3.1

Тогда имеет место тождество

$$\begin{aligned}\sum_{\omega}\eta\tau^a(\mathcal{G}p)_a &= \sum_{\partial\omega}\eta(\mathcal{G}p)_* + \sum_{\sigma}(\mathcal{G}p)_\sigma\delta^\sigma\eta = \\ &= \sum_{\partial\omega}\eta(\mathcal{G}p)_* + \sum_{\Omega}g_{ab}p^a\delta^b\eta,\end{aligned} \tag{1.7}$$

которое является разностным аналогом интегрального тождества

$$\int\limits_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{p}\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\mathcal{O}}[\mathbf{p},\boldsymbol{\eta}]\mathrm{d}\mathbf{s} + \int\limits_{\mathcal{O}}(\mathbf{p},\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}V$$

($\boldsymbol{\eta}$ имеет только одну компоненту, перпендикулярную плоскости рисунка).

Правую часть (1.6) следует интерпретировать как $\mathrm{rot}\,(\Pi\,\mathrm{grad}\,u)$. Можно сказать, что источником ошибки в разностной схеме (1.3) является то, что разностный аналог оператора rot, действуя на проекцию потенциального поля $\mathbf{q} = -\,\mathrm{grad}\,u$, дает ненулевую сеточную функцию.

3°. Рассмотрим подробнее правую часть уравнения (1.6). Пусть ω — внутренний узел сетки, $\mathbf{r}_\omega$ — его радиус-вектор. В окрестности узла ω поле $q_i(x)$ представим в виде

$$q_i(x) = q_i + Q_{ik}(x_k - x_{k,\omega}) + \dots .$$

Заметим, что $Q_{ik} = Q_{ki}$, т.к. поле $q_i(x)$ потенциально. Тогда

$$q^\sigma = q_i s_i^\sigma + Q_{ik}S_{ik}^\sigma + \dots ,$$

$$(\mathcal{G}q)_\sigma = q_i(\mathcal{G}s_i)_\sigma + Q_{ik}(\mathcal{G}S_{ik})_\sigma + \dots = q_i l_{i,\sigma} + Q_{ik}L_{ik,\sigma} + \dots ,$$

$$\psi = \tau^a(\mathcal{G}q)_a = q_i\tau^a l_{i,a} + Q_{ik}\tau^a L_{ik,a} + \dots .$$

Здесь

$$s_i^\sigma = \int\limits_{\sigma}\mathrm{d}s_i, \qquad S_{ik}^\sigma = \int\limits_{\sigma}(x_k - x_{k,\omega})\mathrm{d}s_i.$$

Очевидно $|s_i| = \mathrm{O}(h)$, $|S_{ik}| = \mathrm{O}(h^2)$, ... Первый член невязки ψ обращается в нуль, если $\tau^a l_{i,a} = 0$; следующий,

если $\tau^a L_{ik,a} = 0$ и т.д. Таким образом получается цепочка уравнений

$$\tau^a l_{i,a} = 0, \qquad \tau^a L_{ik,a} = 0, \qquad \ldots \tag{1.8}$$

Равенства (1.8) имеют простой геометрический смысл, они являются разностными аналогами интегральных тождеств

$$\oint \mathrm{d}x_i \equiv 0, \quad \oint (x_i \mathrm{d}x_k + x_k \mathrm{d}x_i) \equiv 0, \quad \ldots$$

Очевидно, что чем больше равенств в цепочке (1.8) выполнено, тем выше точность схемы (1.3) в норме $\|\delta\zeta\|$.

4°. После сделанных замечаний вернемся к уравнению (1.6)

$$\begin{aligned} &\tau^a(\mathcal{G}\delta\zeta)_a = \tau^a(\mathcal{G}q)_a && \text{на } (\omega), \\ &\zeta = 0 && \text{на } (\partial\omega). \end{aligned}$$

Оператор в левой, обозначим его B, действует в пространстве $\mathcal{S}_0$ — сеточных функций определенных на (ω) и равных нулю на $(\partial\omega)$. Положим $\mathrm{B}\zeta = 0$ на $(\partial\omega)$, так что $\mathrm{B} : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$.

Из тождества (1.7) при $p = \delta\zeta$ и $\zeta, \eta \in \mathcal{S}_0$ очевидно следует, что оператор B самосопряженный и положительный в смысле скалярного произведения $(\eta, \zeta) = \sum\limits_{\omega} \eta\zeta$. Следовательно, существует обратный оператор B^{-1} и уравнение (1.6) имеют единственное решение.

Чтобы оценить $\|\delta\zeta\| = \|q - Q\|$, воспользуемся тем обстоятельством, что правая часть (1.6) имеет специальный вихревой вид $\psi = \tau^a(\mathcal{G}q)_a$. Имеем

$$\|\delta\zeta\|^2 = \sum_{\omega} \zeta\tau^a(\mathcal{G}q)_a = \langle\delta\zeta, q\rangle \le \|\delta\zeta\|\|q\|, \tag{1.9}$$

откуда $\|\delta\zeta\| \le \|q\| = \mathrm{O}(1)$, если не делать каких-либо предположений относительно сетки и метрического оператора $\mathcal{G}$. Естественно ожидать, что если будет выполнено первой из условий цепочки (1.8), т.е. $\tau^a \mathbf{l}_a = 0$, то $\|\delta\zeta\| = \mathrm{O}(h)$.

Прежде чем оценивать $\|\delta\zeta\|$ сделаем следующее замечание, которое будет играть ключевую роль в получении оценок точности разностных схем. Разобьем пространство $\mathcal{H}$ в ортогональную прямую сумму подпространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Функции из $\mathcal{A}$ имеют вид $X = \mathcal{G}^{-1}\Delta T$, где $T \in \mathcal{R}+\mathcal{R}_*$. Подпространство $\mathcal{B}$ состоит из функций ортогональных $\mathcal{A}$ в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Изучим структуру функций из $\mathcal{B}$. Пусть $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{B}$, тогда

$$0 = \langle X, Y\rangle = \sum_{\sigma} Y^{\sigma}(\mathcal{G}X)_{\sigma} = \sum_{\sigma} Y^{\sigma}\Delta_{\sigma}T =$$

$$= \sum_{\partial\sigma} T_* Y^{\sigma} - \sum_{\Omega} T\sigma_a Y^a.$$

Отсюда, в силу произвольности T, заключаем, что подпространство $\mathcal{B}$ состоит из сеточных функций таких, что:

$$1)\ \sigma_a Y^a = 0 \text{ на } (\Omega), \qquad 2)\ Y^{\sigma} = 0 \text{ на } (\partial\sigma).$$

Таким образом $\delta\zeta \in \mathcal{B}$. Сеточные функции из подпространства $\mathcal{A}$ будем называть потенциальными, а из подпространства $\mathcal{B}$ — вихревыми.

Вернемся теперь к энергетическому равенству (1.9)

$$\|\delta\zeta\|^2 = \sum_{\omega} \zeta\tau^a(\mathcal{G}q)_a = \langle\delta\zeta, q\rangle.$$

Так как $\delta\zeta \in \mathcal{B}$, то к сеточной функции q в правой части можно добавить произвольную функцию из $\mathcal{A}$, при этом равенство не нарушится. Поэтому

$$\|\delta\zeta\|^2 = \langle\delta\zeta, q+a\rangle \le \|\delta\zeta\| \inf_{a\in\mathcal{A}} \|q+a\|,$$

$$\|\delta\zeta\| \le \inf_{a\in\mathcal{A}} \|q+a\|. \tag{1.10}$$

Пусть теперь выполнено $\tau^a \mathbf{l}_a = 0$. Тогда существует сеточная функция $\mathbf{r} \in \mathcal{R}+\mathcal{R}_*$, такая что $\mathbf{l} = \mathcal{G}\mathbf{s} = \Delta\mathbf{r}$. Функция $\mathbf{r}(\Omega)$ очевидно определена с точностью до постоянного вектора и удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\mathbf{r} = 0 && \text{на } (\Omega),\\ &\mathcal{G}^{-1}\Delta\mathbf{r} = \mathbf{s} && \text{на } (\partial\sigma), \end{aligned} \tag{1.11}$$

которая является разностным аналогом тождеств

$$\Delta \mathbf{r} = 0 \text{ при } \mathbf{r} \in \mathcal{O}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} = \mathbf{n} \text{ при } \mathbf{r} \in \partial\mathcal{O}.$$

Предположим, что существует решение системы (1.11), отклоняющееся на $O(h)$ от центров тяжести $\bar{\mathbf{r}}(\Omega)$, соответствующих ячеек, т.е. удовлетворяющее условию

$$\|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}\|_\infty = \max_{\Omega,\Omega_*} |\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}| = O(h).$$

Положим в (1.10) $a = \mathcal{G}^{-1}\Delta u(\Omega)$, где $u(\Omega) = u(\mathbf{r}(\Omega))$, а $\mathbf{r}(\Omega)$ — указанное решение (1.11). Тогда

$$\|\delta\zeta\|^2 \le \|q + \mathcal{G}^{-1}\Delta u\|^2 \le \frac{1}{\beta}\sum_\sigma |\mathcal{G}q + \Delta u|^2, \tag{1.12}$$

где β — нижняя граница спектра метрического оператора $\mathcal{G}$. Если $u(x) \in C^2(\bar{\mathcal{O}})$, то с учетом $\mathcal{G}\mathbf{s} = \Delta\mathbf{r}$, все слагаемые $|\mathcal{G}q + \Delta u|^2$ в правой части последнего неравенства суть $O(h^4)$. Так как таких слагаемых $O(h^{-2})$, получам оценку $\|\delta\zeta\| = O(h)$.

5°. Рассмотрим теперь вопрос о сходимости разностных схем метода опорных операторов для задачи Дирихле. В этом случае разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_a Q^a = F && \text{на } (\Omega), \\ &\mathcal{G}Q = -\Delta U && \text{на } (\sigma), \\ &U = U_* && \text{на } (\Omega_*). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Легко показать, аналогично п.1° данного параграфа, что система (1.13) имеет единственное решение.

Введем проектор Π, преобразующий функции непрерывного аргумента $u(x)$ в сеточные функции $\Pi u(\Omega)$, такой что $\Pi u(\Omega_*) = U_*$ (точнее сказать $U_* = \Pi u(\Omega_*)$). Пусть моменты этого проектора $\{1, \mathbf{R}(\Omega), ...\}$. Рассмотрим сеточную функцию p^σ: $\mathcal{G}p = -\Delta(\Pi u)$. Тогда из (1.13) следует

$$\mathcal{G}(Q - p) = -\Delta(U - \Pi u).$$

Введем сеточную функцию $z = U - \Pi u$, характеризующую погрешность разностной схемы по температурам, и получим уравнение для нее. Обозначая $Q - p = Z$ и учитывая, что $\sigma_a(q - Q)^a = 0$, можно написать

$$\mathcal{G}Z = -\Delta z,$$

$$\sigma_a Z^a = \sigma_a(Q - p)^a = \sigma_a(q - p)^a.$$

Исключив отсюда Z, находим

$$\begin{aligned} &\Lambda z = -\sigma_a(\mathcal{G}^{-1}\Delta z)^a = \sigma_a(q - p)^a \text{ на } (\Omega), \\ &z(\Omega_*) = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Умножая (1.14) на z и суммируя по ячейкам Ω, получим

$$\|\mathcal{G}^{-1}\Delta z\|^2 = \sum_{\Omega} z\sigma_a(q - p)^a = (\mathcal{G}^{-1}\Delta z, q - p\rangle.$$

Так как $\mathcal{G}^{-1}\Delta z \in \mathcal{A}$, то к разности $q - p$ в правой части последнего равенства можно прибавить любую функцию $b \in \mathcal{B}$, при этом оно не нарушится:

$$\|\mathcal{G}^{-1}\Delta z\|^2 = \langle \mathcal{G}^{-1}\Delta z, q - p + b\rangle \le \|\mathcal{G}^{-1}\Delta z\| \inf_{b\in\mathcal{B}} \|q - p + b\|.$$

Следовательно,

$$\|z\|_{\mathrm{A}} = \|\mathcal{G}^{-1}\Delta z\| \le \inf_{b\in\mathcal{B}} \|q - p + b\|. \tag{1.15}$$

6°. Рассмотрим $\mathbf{s}$ как векторную сеточную функцию на (σ). Очевидно, в силу разложения $\mathcal{H} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, возможно представление $\mathbf{s} = \mathcal{G}^{-1}\Delta\mathbf{r} + \delta\boldsymbol{\zeta}$. Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Omega)$ — радиус-векторы «центров» ячеек, а $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\omega)$ будем интерпретировать как площади некоторых ориентированных поверхностей, отнесенных к узлам. Для простоты считаем, что «центры» фиктивных ячеек совпадают с серединами соответствующих граничных граней. Будем также предполагать, что векторные сеточные функции $\boldsymbol{\eta}(\omega) = \mathbf{r}(\omega) - \bar{\mathbf{r}}(\omega)$ и $\boldsymbol{\zeta}(\omega)$ имеют первый порядок малости по h:

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\eta}\|_\infty = \max_{\Omega} |\boldsymbol{\eta}| = \mathrm{O}(h), \\ &\|\boldsymbol{\zeta}\|_\infty = \max_{\omega} |\boldsymbol{\zeta}| = \mathrm{O}(h). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Второе требование, очевидно, является ослабленным условием $\tau^a \mathbf{l}_a = 0$, которое означало $\|\zeta\|_\infty = 0$.

Оценим правую часть неравенства (1.15), считая что решение $u(x) \in C^2(\bar{\mathcal{O}})$. Положим $\Pi u = u(x(\Omega))$, $b = -\delta \int\limits_\zeta \mathbf{q} \times$ $\times \mathrm{d}\mathbf{s}$, тогда

$$\begin{aligned} \|z\|_{\mathrm{A}}^2 &\leq \|q + \mathcal{G}^{-1}\Pi\Delta u - \delta \int\limits_\zeta \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s}\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\beta}\sum_\sigma |\mathcal{G}q + \Delta\Pi u - \mathcal{G}\delta \int\limits_\zeta \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s}|^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение под модулем в окрестности грани σ. Имеем

$$q^\sigma = (\mathbf{q}, \mathbf{s}^\sigma) + \mathrm{O}(h^2),$$

$$\Delta_\sigma \Pi u = -(\mathbf{q}, \Delta_\sigma \mathbf{r}) + \mathrm{O}(h^2),$$

$$\delta \int\limits_\zeta \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s} = (\mathbf{q}, \zeta) + \mathrm{O}(h^2).$$

Отсюда

$$\mathcal{G}q + \Delta\Pi u - \mathcal{G}\delta \int\limits_\zeta \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathcal{G}(\mathbf{q}, \mathbf{s} - \mathcal{G}^{-1}\Delta\mathbf{r} - \delta\zeta) + \mathrm{O}(h^2).$$

Так как первое слагаемое в правой части равно нулю на всех гранях, разностная схема опорных операторов имеет первый порядок точности в энергетической норме, если выполнены условия (1.16).

В силу установленных в §§1.6—1.7 вложений разностная схема (1.13) сходится со скоростью $\mathrm{O}(h)$ в L^p-нормах $(1 \leq p < \infty)$ и со скоростью $\mathrm{O}(h|\ln h|^{1/2})$ в L^∞-норме.

§3.2. Аппроксимация скалярного произведения

1°. В этом параграфе будут рассмотрены вопросы аппроксимации интегралов $\int\limits_\Omega (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V$ билинейными форма-

ми $g_{ab}p^a q^b$, где

$$p^a = \int\limits_a \mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{s}, \qquad q^b = \int\limits_b \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s},$$

и связанная с этой аппроксимацией оценка норм $\|\eta\|_\infty$, $\|\zeta\|_\infty$.

Рассмотрим, какие условия на матрицы g_{ab} налагает это требование.

a) Потребуем, чтобы $g_{ab}p^a q^b = \int\limits_\Omega (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V$ при любых $\mathbf{p}, \mathbf{q} = \mathrm{const}$, т.е.

$$g_{ab}(p_i s_i^a)(q_k s_k^b) = V\delta_{ik}p_i q_k.$$

отсюда

$$g_{ab}s_i^a s_k^b = V\delta_{ik} \tag{2.1}$$

b) Пусть x — координаты центра тяжести ячейки Ω. Потребуем, чтобы $g_{ab}p^a q^b = \int\limits_\Omega (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V$ при любых $p_i = \mathrm{const}$, $q_i = Q_{ij}(x_j - \bar{x}_j)$, $Q_{ij} = \mathrm{const}$. Отсюда получаем условие

$$g_{ab}S_{ij}^a s_k^b = 0 \tag{2.2}$$

где тензоры S_{ij} вычисляются относительно центра тяжести ячейки Ω.

Произвольные векторные функции $p_i(x)$, $q_i(x)$ в ячейке Ω представим в виде рядов Тейлора

$$p_i(x) = p_i + P_{ij}(x_j - \bar{x}_j) + \mathrm{O}(h^2),$$
$$q_i(x) = q_i + Q_{ij}(x_j - \bar{x}_j) + \mathrm{O}(h^2),$$

тогда

$$g_{ab}p^a q^b - \int\limits_\Omega (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V = (g_a b s_i^a s_k^b - V\delta_{ik})p_i q_k \; +$$
$$+ \; g_{ab}S_{ij}^a s_k^b(P_{ij}q_k + Q_{ij}p_k) + \mathrm{O}(h^4).$$

Отсюда видно, что если выполнено (2.1)

$$g_{ab}p^a q^b - \int\limits_\Omega (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V = \mathrm{O}(h^3),$$

а если выполнены (2.1), (2.2)

$$g_{ab}p^a q^b - \int\limits_{\Omega} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V = \mathrm{O}(h^4).$$

Соответственно

$$\langle p, q\rangle - \int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V = \mathrm{O}(h) \text{ и } \mathrm{O}(h^4).$$

Отметим здесь следующее обстоятельство. Совместное выполнение условий (2.1) и (2.2) возможно лишь в специальных случаях. В самом деле, тензоры S^a_{ij}, вообще говоря, линейно-независимы в четырехмерном пространстве тензоров второго ранга. Равенство нулю их линейной комбинации означает, что $g_{ab}\mathbf{s}^b_k = 0$, что очевидно несовместно с (2.1). Поэтому в дальнейшем условия (2.2) рассматриваться не будут.

2°. Покажем теперь, что оценки $\|\eta\|_\infty = \mathrm{O}(h)$ и $\|\zeta\|_\infty = \mathrm{O}(h)$ в ряде случаев следуют из условия (2.1).

Пусть $\mathbf{p}(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция, $m(x) = \operatorname{div}\mathbf{p}$, $\mathbf{n}$ — вектор единичной длины. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}} m(\mathbf{n}, \mathbf{r})\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} (\mathbf{n}, \mathbf{r})\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{s} - \int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{n})\mathrm{d}V.$$

С другой стороны, пусть $\mathbf{r}(\Omega)$ — векторная сеточная функция «центров» ячеек , $\mathbf{r}_*=\mathbf{r}(\Omega_*)$. Обозначая $M=\int\limits_{\Omega} m\times$ $\times\mathrm{d}V$, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{\Omega} M(\mathbf{n}, \mathbf{r}) &= \sum_{\Omega} (\mathbf{n}, \mathbf{r})\sigma_a p^a = \\ &= \sum_{\partial\sigma} (\mathbf{n}, \mathbf{r}_*)p^\sigma - \sum_{\Omega} g_{ab}p^a(\mathbf{n}, \mathbf{s}^b),\end{aligned}$$

где $p^\sigma = \int\limits_{\sigma} \mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{s}$.

Из двух последних равенств следует

$$\sum_{\Omega}\Big[M(\mathbf{n},\mathbf{r})-\big(\mathbf{n},\int\limits_{\Omega} m\mathbf{r}\mathrm{d}V\big)\Big]+\langle p,(\mathbf{n},-\mathbf{s}+\mathcal{G}^{-1}\Delta\mathbf{r})\rangle+$$
$$+\sum_{\partial\sigma}[\ldots]=\int\limits_{\mathcal{O}}(\mathbf{n},\mathbf{p})\mathrm{d}V-\sum_{\Omega}g_{ab}p^a(\mathbf{s}^b,\mathbf{n}). \tag{2.3}$$

Заметим, что $-\mathbf{s}+\mathcal{G}^{-1}\Delta\mathbf{r}=-\delta\zeta$ и преобразуем второе слагаемое в левой части (2.3)

$$-\langle p,\delta(\mathbf{n},\zeta)\rangle=$$
$$=\sum_{\partial\omega}(\mathbf{n},\zeta)(\mathcal{G}p)_*-\sum_{\omega}(\mathbf{n},\zeta)\tau^a(\mathcal{G}p)_a=\sum_{\omega}L(\mathbf{n},\zeta).$$

Здесь, не нарушая общности, мы положили $(\mathcal{G}p)_*=0$ и обозначили $\tau^a(\mathcal{G}p)_a=-L$. Очевидно при этом $\sum\limits_{\omega}L=\sum\limits_{\partial\omega}(\mathcal{G}\times\times p)_*=0$.

Предположим, что все грани сетки являются отрезками прямых. Рассмотрим пространство $\mathfrak{P}$ векторных функций таких, что $p(x)\in\mathfrak{P}$:

i) линейна внутри каждой ячейки Ω,

ii) имеет непрерывную нормальную компоненту на всех внутренних гранях,

iii) имеет постоянную нормальную компоненту на каждой граничной грани.

Для функций из $\mathfrak{P}$ справедлива формула (2.3), при этом:

i) $m(x)$ постоянна внутри каждой ячейки Ω, $M(\Omega)=m(\Omega)V$,

ii) $\int\limits_{\Omega} mx_i\mathrm{d}V=M\bar{x}_i$, $\int\limits_{\sigma} x_i\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{s}=\bar{x}_ip^{\sigma}_*$.

Внутри ячейки Ω функция из $\mathfrak{P}$ может быть представлена в виде $p_i(x)=p_i(\Omega)+P_{ij}(\Omega)(x_j-\bar{x}_j)$, так что

$$\int\limits_{\Omega}p_k\mathrm{d}V-g_{ab}p^as^b_k=-(g_{ab}s^a_is^b_k-V\delta_{ik})p_i-g_{ab}S^a_{ij}s^b_kP_{ij}.$$

Если выполнено (2.1), то (2.3) принимает вид

$$\sum_{\Omega} M n_k \eta_k + \sum_{\omega} L n_k \zeta_k = -\sum_{\Omega} g_{ab} S_{ij}^a s_k^b P_{ij} n_k, \tag{2.4}$$

где $S_{ij}(\Omega) = \int\limits_{\sigma} (x_i - \bar{x}_i(\Omega)) \mathrm{d}s_j$.

3°. Пару сеточных функций $\xi = \{\eta, \zeta\}$ будем интерпретировать как функционал, определенный на пространстве $\mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$, элементами которого являются пары сеточных функций $K = \{M, L\}$, и действующий по правилу, задаваемому соотношениями (2.4).

Задача сводится к оценке нормы функционала ξ, которая очевидным образом связана с проекциями векторов $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ на направление, задаваемое вектором $\mathbf{n}$. Так как нас интересует $\|\xi\|_\infty$, то пространство $\mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ следует снабдить нормой

$$\|K\|_1 = \sum_{\Omega} |M| + \sum_{\omega} |L|.$$

Тогда

$$\|\xi\|_\infty = \sup_K \frac{|(\xi, K)|}{\|K\|_1}. \tag{2.5}$$

Отметим следующее обстоятельство. По своему смыслу сеточная функция $\boldsymbol{\zeta}(\omega)$ определена с точностью до произвольного вектора. Оценка $\|\boldsymbol{\zeta}\|_\infty = \mathrm{O}(h)$ означает на самом деле, что

$$\rho = \inf_{\mathbf{a}} \max_{\omega} |\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{a}| = \mathrm{O}(h). \tag{2.6}$$

Соотношения (2.4), (2.5) в принципе дают возможность оценить проекции векторов $\boldsymbol{\eta}(\Omega)$, $\boldsymbol{\zeta}(\omega)$ на произвольное направление $\mathbf{n}$. Связь между этими величинами и ρ можно установить из простых геометрических соображений. Пусть в (2.6) infimum достигается при $\mathbf{a} = 0$. Тогда, очевидно, существуют векторы $\boldsymbol{\zeta}_1 = \boldsymbol{\zeta}(\omega_1)$ и $\boldsymbol{\zeta}_2 = \boldsymbol{\zeta}(\omega_2)$, такие что $|\boldsymbol{\zeta}_1| = |\boldsymbol{\zeta}_2| = \rho$ и угол между ними $\geq 120^\circ$. Если $\mathbf{n}$ единичный вектор в направлении $\boldsymbol{\zeta}_1 - \boldsymbol{\zeta}_2$, то

$$\inf_{\mathbf{a}} \max_{\omega} |(\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{a})| \geq \frac{|\boldsymbol{\zeta}_1 - \boldsymbol{\zeta}_2|}{2} \geq \rho\sqrt{3/4}.$$

Кроме того,

$$\inf_{\mathbf{a}} \max_{\omega} |\zeta + \mathbf{a}| = \sup_{\mathcal{S}_0} \frac{|\sum_\omega L\zeta|}{\sum_\omega |L|}.$$

где $\mathcal{S}_0$ — подпространство $\mathcal{S}$, выделяемое условием $\sum\limits_{\omega} L = 0$. Таким образом, окончательно,

$$\|\xi\|_\infty \le \sqrt{\frac{4}{3}} \sup_{|\mathbf{n}|=1} \sup_{\mathcal{S}+\mathcal{R}_0} \left| \frac{\sum_\Omega g_{ab} S^a_{ij} s^b_k P_{ij} n_k}{\sum_\Omega |M| + \sum_\omega |L|} \right|.$$

4°. С учетом сделанных замечаний задача сводится к следующему: достаточно ли богато пространство $\mathfrak{P}$ функциями, чтобы для любых $M \in \mathcal{R}$, $L \in \mathcal{S}_0$ нашлась $\mathbf{p}(x) \in \mathfrak{P}$ такая, что $M = \sigma_a p^a$, $L = -\tau^a(\mathcal{G}p)_a$ $(p^\sigma = \int\limits_\sigma \mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{s})$.

Условия непрерывности нормальной компоненты $\mathbf{p} \in \mathfrak{P}$ на гранях имеют вид:

i) равенство производных вдоль грани от нормальных компонент $\mathbf{p}(x)$ с двух сторон грани

$$\varepsilon_{ik} s_j s_k \Delta P_{ij} = 0, \tag{2.7}$$

ii) равенство потоков $\mathbf{p}(x)$ через грань с двух сторон грани

$$s_i p_i + S_{ij} P_{ij} = p^\sigma. \tag{2.8}$$

Здесь ε_{ik} — антисимметричный тензор,

$$S_{ij}(\Omega) = \int\limits_\sigma (x_i - \bar{x}_i(\Omega)) \mathrm{d}s_j.$$

При этом по построению пространства $\mathfrak{P}$ в фиктивных ячейках следует полагать $P_{ij}(\Omega_*) = 0$.

Добавляя к этим уравнениям условия

$$\sigma_a p^a = M, \tag{2.9}$$

$$\tau^a(\mathcal{G}p)_a = -L, \tag{2.10}$$

получаем систему линейных уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты $p_i(\Omega)$, $P_{ij}(\Omega)$. Вопрос о «полноте» пространства $\mathfrak{P}$ сводится к вопросу о разрешимости этой системы при любых $M \in \mathcal{R}$, $L \in \mathcal{S}_0$.

Ограничимся рассмотрением сеток, все ячейки которых суть треугольники. В этом случае тензоры $P_{ij}(\Omega)$ можно выбирать в виде $\frac{m(\Omega)}{2}\delta_{ij}$. При этом условие (2.7) выполнится автоматически, а (2.8) примет вид

$$(\mathbf{s}, \mathbf{p}) - p^\sigma = -\frac{m}{2}\mathrm{sp}\mathbb{S}.$$

Соотношение (2.4) примет вид

$$(\xi, K) = -\sum_{\Omega} \frac{m}{2} g_{ab}\mathrm{sp}\mathbb{S}^a(\mathbf{s}^b, \mathbf{n}). \tag{2.11}$$

Условие (2.9) будет очевидно выполнено, если положить $m = M/V$, где V — объем ячейки Ω.

Таким образом задача сводится к разрешимости системы

$$\begin{aligned} &(\mathbf{s}, \mathbf{p}) - p^\sigma = -(M/2V)\mathrm{sp}\mathbb{S} && \text{на } (\Omega, \sigma), \\ &\tau^a(\mathcal{G}p)_a = -L && \text{на } (\omega) \end{aligned} \tag{2.12}$$

при любой правой части, такой что $\sum\limits_{\omega} L = 0$.

Воспользуемся теоремой Фредгольма [22]. Умножая левые части системы (2.12) на ψ_a и $\varphi(\omega)$, суммируя по соответствующим множествам и собирая множители при $\mathbf{p}(\omega)$, p^σ, получаем однородную сопряженную систему

$$\begin{aligned} &\psi_a \mathbf{s}^a = 0 && \text{на } (\Omega), \\ &\mathcal{G}\delta\varphi - \psi_\sigma(\Omega) - \psi_\sigma(\Omega') = 0 && \text{на } (\sigma). \end{aligned} \tag{2.13}$$

В фиктивных ячейках следует положить $\psi_\sigma(\Omega_*) = 0$.

Первое из уравнений (2.13) есть равенство нулю линейной комбинации векторов $\mathbf{s}^a$. Для треугольных ячеек существует единственная (с точностью до произвольного множителя) обращающаяся в нуль линейная комбинации

векторов $\mathbf{s}^a$: $\sigma_a \mathbf{s}^a = 0$. Отсюда $\psi_a(\Omega) = \Psi(\Omega)\sigma_a$, причем $\Psi(\Omega_*) = 0$. Второе уравнение (2.13), принимает вид

$$\mathcal{G}\delta\varphi - \sigma_a(\Omega)\Psi(\Omega) - \sigma_a(\Omega')\Psi(\Omega') = 0.$$

Здесь последние два слагаемых есть $\Delta\Psi$, поэтому $\delta\varphi + \mathcal{G}^{-1}\Delta\Psi = 0$.

Но $\delta\varphi \in \mathcal{B}$, а $\mathcal{G}^{-1}\Delta\Psi \in \mathcal{A}$. Это может быть только в случае, если $\delta\varphi = \mathcal{G}^{-1}\Delta\Psi = 0$. Следовательно, $\varphi = \mathrm{const}$, $\Psi = 0$. Очевидно эти решения ортогональны правой части (2.12). Следовательно, система (2.12) совместна.

С учетом (2.11) легко оценить норму $\|\xi\|_\infty$. Имеем

$$(\xi, K) = \sum_{\Omega} M n_k \eta_k + \sum_{\omega} L n_k \zeta_k = \sum_{\Omega} M g_{ab}(\mathrm{sp}\mathbb{S}^a/2V)(\mathbf{s}^b, \mathbf{n}),$$

откуда

$$\|\xi\|_\infty \le \sqrt{1/3}\max_{\Omega}|g_{ab}(\mathrm{sp}\mathbb{S}^a/V)\mathbf{s}^b| = \mathrm{O}(h),$$

т.к. $\mathrm{sp}\mathbb{S} = \mathrm{O}(h^2)$, $|\mathbf{s}| = \mathrm{O}(h)$, $V = \mathrm{O}(h^2)$.

5°. Таким образом, на треугольных сетках разностные схемы метода опорных операторов для уравнения Пуассона в двумерной плоской геометрии на классических решениях имеют точность $\mathrm{O}(h)$ в энергетической и L^p-нормах $(1 \le p < \infty)$ и точность $\mathrm{O}(h|\ln h|^{1/2})$ в L^∞–норме, если $g_{ab}s_i^a s_k^b = V\delta_{ik}$ во всех ячейках.

§3.3. Построение метрических операторов

1°. Построим метрические операторы, точнее матрицы g_{ab}, удовлетворяющие сформулированным выше критериям сходимости.

Напомним, что для треугольных ячеек эти критерии сводятся к условиям аппроксимации интегралов $\int\limits_{\Omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\times$ $\times \mathrm{d}V$ билинейными формами $g_{ab}p^a q^b$ и имеют вид

$$g_{ab}s_i^a s_k^b = V\delta_{ik} \tag{3.1}$$

Условия (3.1) гарантируют аппроксимацию соответствующего интеграла с первым порядком и первый порядок сходимости разностных схем метода опорных операторов в L^p $(1 \le p < \infty)$. В норме L^∞ точность разностных схем соответственно $O(h|\ln h|^{1/2})$. Для произвольных ячеек достаточные условия первого порядка сходимости в L^p (с соответствующей модификацией для L^∞) можно записать в виде

$$g_{ab}s_k^b = \sigma_a(x_k(a) - X_k(\Omega)) \tag{3.2}$$

где $x_k(a)$ — координата середины грани a. Следствием (3.2) является условие первого порядка аппроксимации интеграла (3.1).

Соотношения (3.1) можно рассматривать как систему линейных уравнений для определения неизвестных величин g_{ab}, а (3.2) для определения $X_k(\Omega)$.

Рассмотрим два наиболее интересных для практики случая треугольных и четырехугольных ячеек. Найдем коэффициенты g_{ab}, удовлетворяющие (3.1), (3.2). Каждый раз естественно начинать с условия (3.1), т.к. оно должно быть выполнено в любом случае.

2°. Треугольная ячейка.

Рассмотрим систему (3.1) на треугольной ячейке. В этом случае для 6 неизвестных g_{ab} (g_{ab} — симметричная матрица) имеем 3 уравнения (соотношение (3.1) симметрично по i, k), так что общее решение должно содержать 3 свободных параметра.

Частное решение системы (3.1) легко выписывается в виде

$$g_{ab} = \sum_\varphi V_\varphi(\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b)_\varphi. \tag{3.3}$$

Здесь φ — индекс, нумерующий вершины ячейки, V_φ — объем, приписанный φ-вершине ячейки. На выбор V_φ накладывается единственное ограничение: $\sum\limits_\varphi V_\varphi = V$.

Вектора $\{\mathbf{s}'_p, \mathbf{s}'_q\}$ образуют базис, сопряженный с $\{\mathbf{s}^p, \mathbf{s}^q\}$, где p, q — номера граней, сходящихся в вершине φ ячейки Ω. Очевидно, что вектор $\mathbf{s}'_a$ определяется

не только ребром a, но и вершиной, которую он образует, т.е. парой $\{\mathbf{s}^p, \mathbf{s}^q\}$, образующей базис, связанный с вершиной φ. Таким образом $(\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b)_\varphi$ — матрица Грама составленная из векторов $\{\mathbf{s}'_p, \mathbf{s}'_q\}$ и обратная матрице $(\mathbf{s}^a, \mathbf{s}^b)_\varphi$. Индекс φ подчеркивает, что a, b пробегают значения p, q. Каждое слагаемое вида «заполняет» строки и столбцы с номерами p, q матрицы g_{ab}.

Выражение (3.3) содержит очевидно два свободных параметра, так как на три величины V_φ накладывается одно условие $\sum\limits_\varphi V_\varphi = V$.

Можно указать набор решений однородной системы (3.1). Он имеет вид $A_a\sigma_b + A_b\sigma_a$, где A_a — произвольный набор чисел, отнесенных к граням ячейки. Таким образом семейство решений системы (3.1) можно записать в виде

$$g_{ab} = \sum_\varphi V_\varphi(\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b)_\varphi + A_a\sigma_b + A_b\sigma_a. \tag{3.4}$$

Мы не обсуждаем вопрос о линейной независимости полученных решений однородной системы, так как это не является целью работы.

3°. Четырехугольная ячейка.

Рассмотрим систему (3.1) на четырехугольной ячейке. В этом случае для 10 неизвестных g_{ab} имеем 3 уравнения, так что общее решение должно содержать 7 свободных параметров. Частное решение (3.1) так же, как и в п.2° имеет вид

$$g_{ab} = \sum_\varphi V_\varphi(\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b)_\varphi \tag{3.5}$$

и фактически содержит три свободных параметра, т.к. на четыре величины V_φ накладывается одно условие $\sum\limits_\varphi V_\varphi = V$. Здесь все величины имеют тот же смысл, что и в (3.3) п.2°.

Дополнительные решения однородной системы (3.1) получим следующим образом. Из четырех векторов $\mathbf{s}^a$ можно образовать две линейные комбинации, равные ну-

лю:

$$\sigma_a \mathbf{s}^a = 0, \qquad \rho_a \mathbf{s}^a = 0,$$

и из коэффициентов σ_a, ρ_a составить два набора решений однородной системы, симметричные по a, b:

$$A_a\sigma_b + A_b\sigma_a, \qquad B_a\rho_b + B_b\rho_a,$$

где, так же как и в п.2°, A_a, B_a — произвольные наборы чисел, отнесенных к граням ячейки.

Таким образом получаем семейство решений (3.1)

$$g_{ab} = \sum_{\varphi} V_\varphi(\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b)_\varphi + A_a\sigma_b + A_b\sigma_a + B_a\rho_b + B_b\rho_a.$$

В дальнейшем ограничимся этим семейством. Имеющиеся в нашем распоряжении параметры используем для того, чтобы удовлетворить (3.2) . Легко видеть, что

$$g_{ab}\mathbf{s}^b = \sum_{\varphi} V_\varphi \mathbf{s}'_{a,\varphi} = -\mathbf{t}_a,$$

где $s'_{a,\varphi}$ — вектор, сопряженный с $\mathbf{s}^a$ в базисе вершины φ, а суммирование производится по вершинам, образованным гранью a.

Пусть в четырехугольной ячейке $ABCD$: $a = AB$, $|\mathbf{s}^a| = AB$, площади граней ориентированы как показано на рис.3.2 ;

$$\varphi \in \{A, B, C, D\};$$

$$V_A = V_{ABD}, \qquad V_B = 0,$$

$$V_C = V_{BCD}, \qquad V_D = 0;$$

где V_{ABD}, V_{BCD} — площади треугольников ABD и BCD соответственно. В этом случае

$$\mathbf{t}_a = -V_{ABD}\mathbf{s}'_{a,A} = -V_{ABD}\frac{\mathbf{l}_{AD}}{(\mathbf{s}_{AB}, \mathbf{l}_{AD})}.$$

Но $(\mathbf{s}_{AB}, \mathbf{l}_{AD}) = 2V_{ABD}$, поэтому $\mathbf{t}_a = -\frac{1}{2}\mathbf{l}_{AD}$.

Этот вектор, отложенный от середины грани AB заканчивается на середине диагонали BD. Проведя аналогичные выкладки и для других граней, находим, что

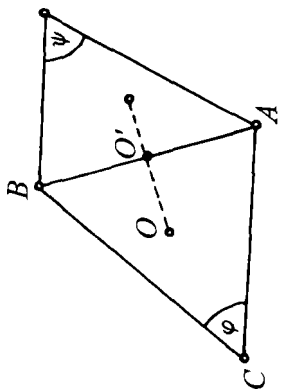


Рис.3.2

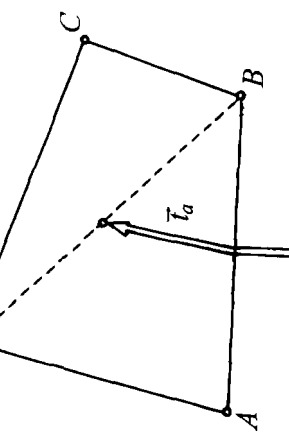


Рис.3.3

вектора $\mathbf{t}_a$ отложены от середины соответствующей грани, заканчивающейся на середине диагонали BD.

Аналогично можно рассмотреть случай

$$V_A = 0, \qquad V_B = V_{ABC},$$
$$V_C = 0, \qquad V_D = V_{ACD}.$$

Здесь вектора $\mathbf{t}_a$ заканчиваются на середине диагонали AC.

Взяв линейную комбинацию построенных g_{ab} с весами соответственно ν и $(1-\nu)$, найдем, что при выборе V_φ в виде

$$V_A = \nu V_{ABD}, \qquad V_B = (1-\nu)V_{ABC},$$
$$V_C = \nu V_{BCD}, \qquad V_D = (1-\nu)V_{ACD},$$

вектора $\mathbf{t}_a = -\sum\limits_\varphi V_\varphi \mathbf{s}'_{a,\varphi}$, отложенные от середин соответствующих граней заканчиваются в точке с координатами

$$\mathbf{R} = \frac{\nu}{2}(\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D) + \frac{1-\nu}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C)$$

4°. Отметим, что для треугольных сеток при выборе g_{ab} в виде (3.4), вектора $\mathbf{t}_a = -\sum\limits_\varphi V_\varphi \mathbf{s}'_{a,\varphi}$, отложенные от середин соответствующих граней, заканчиваются в точке с координатами

$$\mathbf{R} = \frac{V_B + V_C}{2V}\mathbf{r}_A + \frac{V_C + V_A}{2V}\mathbf{r}_B + \frac{V_A + V_B}{2V}\mathbf{r}_C.$$

Таким образом, для треугольных ячеек из условий (3.1) следуют условия (3.2) с $\mathbf{R}$, определяемыми по последней формуле.

5°. Возможен другой вариант выбора метрического оператора для случая треугольных ячеек — g^{ab} берется в виде диагональной матрицы. В качестве элемента g^{aa}, соответствующего стороне AB, следует взять отношение $\dfrac{OO'}{AB}$, где O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности, O' — середина стороны AB (рис.3.3).

Требование положительной определенности оператора $\mathcal{G}$ накладывает ограничение на форму треугольников — сумма противоположенных углов должна удовлетворять условию: $\varphi + \psi \leq \vartheta < \pi$ (см. рис.3.3).

6°. Установим справедливость неравенств (2.6)

$$\mathcal{G} \geq \beta I, \qquad \sum_b |g_{ab}| \leq \gamma$$

для построенных метрических операторов с матрицами g_{ab} вида (3.3), (3.5). Относительно расчетной сетки будем предполагать следующее.

i) Отношение площадей граней (длин соответствующих отрезков на плоскости), входящих в один базис, ограничено числом $\alpha = O(1)$. На рис.3.2 грани AB и AD входят в базис при вершине A и указанное требование означает, что

$$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{s_{AB}}{s_{AD}} \leq \alpha.$$

ii) Среди углов ячеек нет очень острых и очень тупых, т.е. все они заключены в пределах от θ до $\pi - \theta$ с $\theta = O(1)$. Очевидно, что если выполнены условия §2.1, то выполнены и i), ii).

Рассмотрим четырехугольную ячейку $ABCD$ (треугольная ячейка получается отождествлением вершин C и D) и базис при вершине A этой ячейки (см. рис.3.2). «Элемент» метрического оператора, связанный с этим базисом, есть

$$V_\varphi(\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b),$$

где $\varphi = A$; $a, b \in \{AB, AD\}$.

Несложно показать, что

$$(\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b) \geq \frac{1}{s_{AB}^2 + s_{AD}^2}\delta_{ab}.$$

Положим $V_A = \eta_A S_{ABD}$, где S_{ABD} — площадь треугольника ABD, $0 \leq \eta_A \leq 1$. Тогда

$$V_\varphi(\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b) \geq \frac{\sin\theta}{2(\alpha + 1/\alpha)}\eta_\varphi \delta_{ab}.$$

Суммируя эти неравенства по всем базисам сетки получаем

$$\mathcal{G} \geq \frac{\sin\theta}{2(\alpha + 1/\alpha)}\mathcal{D}.$$

Здесь $\mathcal{D}$ — диагональный оператор с элементами $d_\sigma = \sum \eta_\varphi$, где суммирование производится по базисам, содержащим грань σ. Таким образом

$$\beta = \frac{\sin\theta}{2(\alpha + 1/\alpha)}\min d_\sigma$$

и $\beta > 0$, если всякая грань входит хотя бы в один базис с положительным весом V_φ. Заметим, что для четырехугольной сетки условия (3.6) дают $d_\sigma = 2$ для внутренних граней, $d_\sigma = 1$ для граничных граней.

Перейдем ко второму неравенству. Пусть $a = AB$, тогда

$$g_{AB,AB} = \frac{V_A}{(s_{AB}\sin A)^2} + \frac{V_B}{(s_{AB}\sin B)^2},$$

$$g_{AB,AD} = \frac{V_A \cos A}{s_{AB}s_{AD}\sin^2 A},$$

$$g_{AB,BC} = \frac{V_B \cos B}{s_{AB}s_{BC}\sin^2 B},$$

$$g_{AB,CD} = 0.$$

Суммируя модули этих величин с учетом i), ii), получаем

$$\sum_b |g_{ab}| \leq \frac{\eta_A + \eta_B}{2\sin\theta}(\alpha + \cos\theta).$$

Так как $\eta_A + \eta_B \leq 1$, окончательно находим $\gamma = \dfrac{\alpha + \cos\theta}{2\sin\theta}$.

Глава IV

Сходимость разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях

§4.1. Оценка скорости сходимости разностных схем в потоковой норме

1°. В этом параграфе будет рассмотрен вопрос о сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях. Предполагается, что входные данные задачи: расчетная область $\mathcal{O}$, граничные условия, правая часть (см. *Приложение G*) таковы, что решение $u \in H^2(\mathcal{O})$, соответственно $\mathbf{q} = -\operatorname{grad} u \in H^1(\mathcal{O})$.

Рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения Пуассона. Разностная схема метода опорных операторов в этом случае имеет вид (см. §2.2)

$$\begin{aligned} &\sigma_a Q^a = F = \int\limits_{\Omega} f(x)\mathrm{d}V && \text{на } (\Omega), \\ &\mathcal{G}Q = -\Delta U && \text{на } (\sigma), \\ &Q = Q_* = \int\limits_{\partial\sigma} q_* \mathrm{d}s && \text{на } (\partial\sigma). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $U \in \mathcal{R} + \mathcal{R}_*$ аппроксимирует функцию $u(x)$, а $Q \in \mathcal{H}$ аппроксимирует потоки вектора $\mathbf{q}$ через грани сетки: $q^\sigma = \int\limits_{\sigma} \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s}$.

В главе III было показано, что разностная схема (1.1) имеет первый порядок точности по потокам в норме $\|\cdot\|$ при выполнении следующих условий:

i) $u \in C^2(\bar{\mathcal{O}})$;

ii) существует векторная сеточная функция $x_i(\Omega)$, такая что $\mathcal{G}s_i = \Delta x_i$ покомпонентно и $x_i(\Omega_*) = \bar{x}_i(\Omega_*)$;

iii) $\|x - \bar{x}\|_\infty = \max\limits_{\Omega} |x_i - \bar{x}_i| = \mathrm{O}(h)$.

Последнее условие для треугольных сеток имеет место, если

$$\langle p, q\rangle - \int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathrm{d}V = \mathrm{O}(h).$$

Покажем, что можно ослабить условие i), сохранив соответствующую оценку для разностной схемы (1.1) на решениях $u \in H^2(\mathcal{O})$.

Интегрируя первое из уравнений (1.1) по Ω находим

$$\sigma_a q^a = F, \tag{1.2}$$

где $q^\sigma = \int\limits_\sigma \mathbf{q}\mathrm{ds}$. Отметим, что в силу вложения $H^2(\mathcal{O})$ в $L^1(\sigma)$, где σ — произвольный отрезок прямой, лежащий в $\mathcal{O}$, указанные интегралы имеют смысл (см. *Приложение G*).

Вычитая теперь (1.2) из первого уравнения (1.1), получаем

$$\sigma_a(q - Q)^a = 0 \text{ на } (\Omega). \tag{1.3}$$

Кроме того, очевидно,

$$q - Q = 0 \text{ на } (\partial\sigma). \tag{1.4}$$

Пространство $\mathcal{H}$ разобьем в ортогональную прямую сумму подпространств $\mathcal{H} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ (см. §2.1). Подпространство $\mathcal{A}$ состоит из функций, имеющих вид $X = \mathcal{G}^{-1}\Delta T$ с произвольной функцией $T \in \mathcal{R} + \mathcal{R}_*$. Подпространство $\mathcal{B}$ ортогонально $\mathcal{A}$ в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и состоит из функций, таких что $\sigma_a Y^a = 0$ на (Ω), $q - Q = 0$ на $(\partial\sigma)$.

Согласно (1.3)—(1.4) сеточная функция $q - Q \in \mathcal{B}$. Пусть теперь p — произвольная функция из $\mathcal{A}$. Тогда

$$||q - p||^2 = ||(q - Q) - (p - Q)||^2 \geq ||q - Q||^2,$$

т.к. $q - Q \in \mathcal{B}$, а $p - Q \in \mathcal{A}$. Отсюда, в силу произвольности p

$$||q - Q|| = \inf_{p\in\mathcal{A}} ||q - p||. \tag{1.5}$$

Пусть теперь выполнены условия ii), iii) и $u(x) \in H^2(\mathcal{O})$. Функцию $u(x)$ продолжим на всю плоскость (x_1, x_2) таким образом, чтобы продолженная функция, которую также назовем $u(x)$, удовлетворяла соотношению: $|u|_{2,R} \leq \leq B|u|_{2,\mathcal{O}}$.

Положим в (1.5) $p = \mathcal{G}^{-1}\Delta u(\Omega)$, где $u(\Omega) = u(\mathbf{r}(\Omega))$. $\mathbf{r}(\Omega)$ — сеточная функция, фигурирующая в условиях ii), iii). Выражение $u(\mathbf{r}(\Omega))$ имеет смысл в силу вложения $H^2(\mathcal{O})$ в $C(\bar{\mathcal{O}})$. Таким образом

$$||q - Q||^2 = ||q + \mathcal{G}^{-1}\Delta u||^2 \leq \frac{1}{\beta}\sum_{\sigma}|\mathcal{G}q + \Delta u|^2 \qquad (1.6)$$

где β — нижняя граница спектра метрического оператора $\mathcal{G}$.

Оценим отдельные слагаемые $|\mathcal{G}q+\Delta u|^2$ в правой части последнего неравенства.

Пусть K — круг радиуса $\rho = O(h)$, содержащий ячейки Ω, Ω' (соприкасающиеся по грани σ) и их «центры» (см. рис.4.1). Проведем преобразование переменных $y = = x/\rho$, $v(y) = u(\rho y)$. При этом

$$\mathbf{p}(y) = -\operatorname{grad}_y v = \rho\mathbf{q}(\rho y), \qquad \int_{\sigma}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{s}_y = \int_{\sigma}\mathbf{q}\,\mathrm{d}\mathbf{s}_x.$$

В результате преобразования круг K отобразится на круг единичного радиуса K_1.

Рассмотрим функционал $\varphi = \Delta v + \mathcal{G}p$ и покажем его ограниченность на $H^2(K_1)$. Имеем

$$|\varphi| \leq 2||v||_{C(K_1)} + 2\gamma\max_{\sigma}\left|\int_{\sigma}\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{s}_y\right|.$$

В силу вложений $H^2(K_1)$ в $C(\bar{K}_1)$ и $H^1(K_1)$ в $L^1(S)$, где S — произвольное многообразие в K_1, получаем

$$|\varphi| \leq 2(M_1 + \gamma M_2)||v||_{2,K_1}.$$

По построению функционал φ обращается в нуль на подпространстве $P_1(K_1)$ полиномов первой степени и в силу

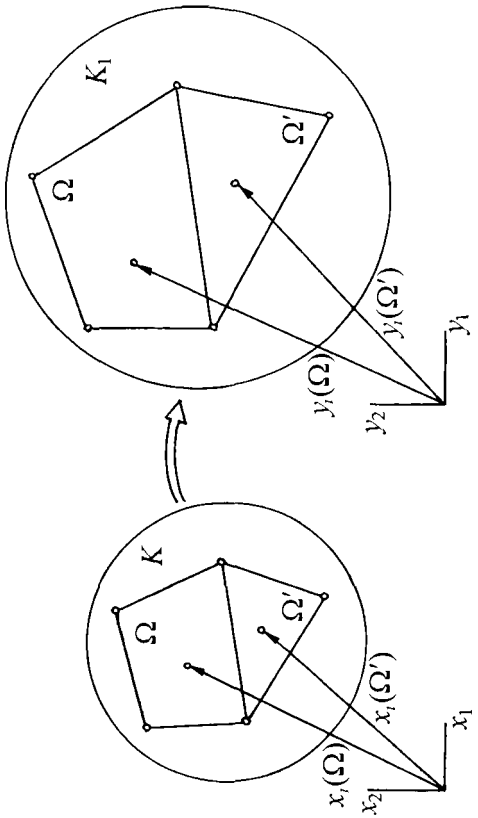

K_1
Ω
Ω'
$y_1(\Omega)$
$y_1(\Omega')$
y_1
y_2
K
Ω
Ω'
$x_1(\Omega)$
$x_1(\Omega')$
x_1
x_2

Рис.4.1

эквивалентности полунормы H^2 и фактор-нормы H^2/P_1 получаем

$$|\varphi| \le 2(M_1+\gamma M_2)\inf_{p\in P_1}\|v+p\|_{2,K_1} \le$$
$$\le 2(M_1+\gamma M_2)M_4|v|_{2,K_1} = M|v|_{2,K_1}.$$

Возвращаясь теперь к переменным x, находим

$$|\mathcal{G}q+\Delta u| \le M\rho|u|_{2,K}.$$

Таким образом

$$\|q-Q\|^2 \le \frac{M^2\rho^2}{\beta}\sum_K |u|^2_{2,K},$$

где суммирование ведется по кругам, построенным указанным выше способом для каждой грани. В силу сделанных предположений любая точка плоскости (x_1, x_2) покрыта не более чем n кругами K, поэтому

$$\|q-Q\|^2 \le \frac{M^2\rho^2}{\beta}n|u|^2_{2,R} \le \frac{M^2\rho^2B^2n}{\beta}|u|^2_{2,\Theta}.$$

Окончательно, с учетом $\rho \le c\,h$, $\|q-Q\| \le O(h)|u|_{2,\Theta}$.

§4.2. Оценка скорости сходимости разностных схем в энергетической норме

1°. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона. Во введенных обозначениях разностная схема метода опорных операторов для задачи Дирихле имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_a Q^a = F && \text{на } (\Omega),\\ &\mathcal{G}Q = -\Delta U && \text{на } (\sigma),\\ &U = U_* && \text{на } (\Omega_*). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь, как и ранее, $U \in \mathcal{R}+\mathcal{R}_*$ аппроксимирует функцию $u(x)$, а $Q \in \mathcal{H}$ аппроксимирует потоки вектора $\mathbf{q}$ через грани сетки $q^\sigma = \int\limits_\sigma \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s}$; $F = \int\limits_\Omega f(x)\mathrm{d}V$.

Так же как и в §2.1 для сеточной функции $z=U-\Pi u$, характеризующей погрешность разностной схемы по «температурам», получим уравнение

$$\begin{aligned} &\Lambda z = -\sigma_a(\mathcal{G}^{-1}\Delta z)^a = \sigma_a(q-p)^a, \\ &z(\Omega_*) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\mathcal{G}p = \Delta\Pi u$.

Из (2.2), с учетом разложения $\mathcal{H} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, следует неравенство

$$\|z\|_{\mathrm{A}} = \|\mathcal{G}^{-1}\Delta z\| \le \inf_{b\in\mathcal{B}} \|q-p+b\|. \tag{2.3}$$

2°. Так же как и в §2.1 представим векторную сеточную функцию ориентированных площадей граней (σ) в виде $\mathbf{s} = \mathcal{G}^{-1}\Delta\mathbf{r} + \delta\zeta$. Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Omega)$ — радиус-векторы «центров» ячеек, а $\zeta = \zeta(\omega)$ площади некоторых ориентированных поверхностей, отнесенных к узлам. Будем предполагать, что векторные сеточные функции $\eta(\omega) = \mathbf{r}(\omega) - \bar{\mathbf{r}}(\omega)$ и $\zeta(\omega)$ имеют первый порядок малости по h.

Оценим правую часть неравенства (2.3) на обобщенных решениях. Для этого функцию $u(x) \in H^2(\mathcal{O})$ продолжим на всю плоскость (x_1, x_2) таким образом, чтобы продолженная функция, которую также назовем $u(x)$, удовлетворяла соотношению: $|u|_{2,R} \le B|u|_{2,\mathring{\mathcal{O}}}$.

Положим в (2.3) $\Pi u = u(x(\Omega))$, $b = -\delta\int\limits_{\zeta}\mathbf{q}d\mathbf{s}$ (эти выражения имеют смысл в силу соответствующих теорем вложения), тогда

$$\|z\|_{\mathrm{A}} \le \left\|q + \mathcal{G}^{-1}\Delta u - \delta\int\limits_{\zeta}\mathbf{q}d\mathbf{s}\right\|.$$

Далее имеем

$$\left\|q + \mathcal{G}^{-1}\Delta u - \delta\int\limits_{\zeta}\mathbf{q}d\mathbf{s}^2\right\| \le \frac{1}{\beta}\sum_{\sigma}\left|\mathcal{G}q + \Delta u - \mathcal{G}\delta\int\limits_{\zeta}\mathbf{q}d\mathbf{s}\right|^2.$$

Оценка отдельных слагаемых $\left|\mathcal{G}q + \Delta u - \mathcal{G}\delta \int\limits_{\zeta} \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s}\right|^2$ в правой части последнего неравенства полностью аналогична §4.1

$$\left|\mathcal{G}q + \Delta u - \mathcal{G}\delta \int\limits_{\zeta} \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s}\right| \leq M\rho|u|_{2,K}.$$

где K — круг радиуса $\rho = \mathrm{O}(h)$, содержащий ячейки Ω, Ω' (соприкасающиеся по грани σ), их «центры» и поверхности ζ, построенные для узлов, являющихся вершинами ячеек Ω, Ω'.

Таким образом

$$\|z\|_{\mathrm{A}}^2 \leq \frac{M^2\rho^2}{\beta} \sum_{K} |u|_{2,K}^2,$$

где суммирование ведется по указанным кругам.

В силу сделанных предположений любая точка плоскости (x_1, x_2) покрыта не более чем n кругами, поэтому

$$\|z\|_{\mathrm{A}}^2 \leq \frac{M^2\rho^2}{\beta} n|u|_{2,R}^2 \leq \frac{M^2\rho^2 B^2 n}{\beta}|u|_{2,\mathcal{O}}^2.$$

Окончательно, с учетом $\rho \leq c\,h$, $\|z\|_{\mathrm{A}} \leq \mathrm{O}(h)|u|_{2,\mathcal{O}}$.

3°. Отметим, что в силу установленных в §2.5—2.6 разностных аналогов теорем вложения для сеточных пространств разностные схемы метода опорных операторов сходятся в L^p-нормах и имеют место оценки

$$\|z\|_p \leq \mathrm{O}(h)|u|_{2,\mathcal{O}} \text{ при } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|z\|_\infty \leq \mathrm{O}(h|\ln h|^{1/2})|u|_{2,\mathcal{O}}.$$

§4.3. Сходимость разностных схем метода опорных операторов для осесимметричного уравнения Пуассона

1°. Рассмотрим трехмерную область $\mathcal{O}$ с границей $\partial\mathcal{O}$ и

в ней — уравнение Пуассона, записанное в виде системы

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q} &= f(x), \\ \mathbf{q} &= -\operatorname{grad} u \end{aligned} \tag{3.1}$$

с некоторыми граничными условиями. Здесь $f(x)$ — заданная функция, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка в трехмерном пространстве.

Будем предполагать, что задача обладает осевой симметрией, т.е. область $\mathcal{O}$ — результат вращения вокруг оси симметрии двумерной области $\mathcal{D}$; функции u, f не зависят от азимутальной координаты λ, а зависят только от переменных (r, z). Кроме того, будем считать, что входные данные задачи (область, правая часть f и граничные условия) таковы, что решение задачи $u(x) \in H^2(\mathcal{O})$.

В области $\mathcal{D}$ на плоскости (r, z) рассмотрим семейство нерегулярных сеток. Каждая сетка состоит из ячеек (Ω) и граней (σ). Во множестве (σ) выделим те элементы, которые лежат на границе расчетной области, и будем обозначать их $\partial\sigma$. Кроме того, введем множество приграничных фиктивных ячеек (Ω_*), которые будем использовать при постановке краевых условий.

Сетка в трехмерной области $\mathcal{O}$ получается путем поворота построенной двумерной сетки вокруг оси симметрии на единичный угол. Заметаемые при таком повороте плоскими ячейками и гранями тела и поверхности также будем называть ячейками и гранями (см. рис.4.2).

Так же как и в предыдущих параграфах, будем считать сетку связной в том смысле, что из любой ячейки в любую другую можно попасть, переходя через грани. Подробность разбиения области сеткой будем характеризовать параметром h, вычисленным, например, по формуле

$$h = \left(\frac{\operatorname{mes} \mathcal{D}}{N}\right)^{1/2},$$

где N — число ячеек сетки.

Так как по предположению $u(x) \in H^2(\mathcal{O})$, то поток $\mathbf{q}(x) \in [H^1(\mathcal{O})]^3$. В пространстве $[H^1(\mathcal{O})]^3$ выделим линейную оболочку следующих его элементов:

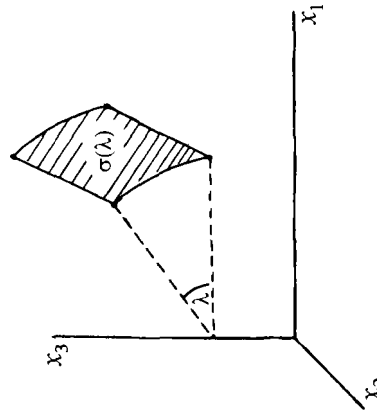


Рис.4.3

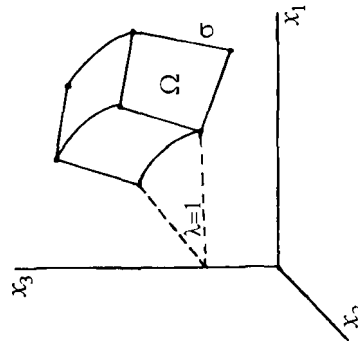


Рис.4.2

1) постоянных функций,

2) азимутально-симметричных функций, т.е. векторов $\mathbf{q}(r, z, \lambda)$, получаемых из векторов $\mathbf{q}(r, z, 0)$ поворотом на угол λ вокруг оси симметрии.

Введем оператор проектирования функций из определенного выше многообразия на сетку следующим образом. Рассмотрим ориентированную поверхность $\sigma(\lambda)$, заметаемую в пространстве (x_1, x_2, x_3) гранью σ при повороте на угол λ (см. рис.4.3, на котором эта поверхность показана штриховкой), и введем величину

$$q(\lambda) = \int\limits_{\sigma(\lambda)} \mathbf{q} d\mathbf{s}.$$

Ориентация поверхности может быть выбрана произвольным образом; для определенности будем считать, что граничные грани ориентированы так же, как и граница области $\mathcal{O}$. Интеграл имеет смысл в силу вложения $H^1(\mathcal{O})$ в $L^1(\mathcal{S})$ на произвольной гладкой поверхности $\mathcal{S}$ в области $\mathcal{O}$. Проекцией векторной функции $\mathbf{q}(x)$ на сетку будем называть сеточную функцию q, определенную на (σ) по формуле

$$q = \left(\frac{d\hat{q}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0}.$$

Проекция функции $\mathbf{q} = \text{const}$, очевидно, имеет вид $q^\sigma = (\mathbf{q}, \mathbf{s}^\sigma)$. Векторы $\mathbf{s}^\sigma$ будем называть площадями граней. Для аксиально-симметричных функций

$$q^\sigma = \int\limits_{\sigma(1)} \mathbf{q} d\mathbf{s}.$$

Как уже отмечалось, осесимметричное уравнение Пуассона мы рассматриваем как систему (3.1) в трехмерной области $\mathcal{O}$ с функцией $u(x)$, не зависящей от азимутальной переменной. С этой точки зрения ось симметрии не является границей, поэтому лежащие на ней грани не являются граничными и к ним не присоединяются фиктивные ячейки. Так как потоки через эти грани равны нулю, в последующих выкладках все члены, содержащие

эти потоки множителями, исчезают. Поэтому будем считать, что граней, лежащих на оси, не существует, т.е. не будем включать их в множество (σ).

Пространство сеточных функций, заданных на (σ), будем обозначать $\mathcal{H}$.

Каждой грани σ припишем целое число $m(\sigma)$ такое, что часть грани, лежащая в секторе с углом $2\pi/m$, может быть помещена в шар радиуса $O(h)$. Введем диагональный оператор $m : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ элементами $m(\sigma)$. Относительно матриц g_{ab} будем предполагать выполненной равномерную (по сеткам, ячейкам и граням) оценку

$$\sum_b |g_{ab}| \le \frac{\gamma}{mh}, \tag{3.2}$$

а относительно операторов $\mathcal{G}$ — равномерную оценку

$$\mathcal{G} \ge \frac{\beta}{h} m^{-1}. \tag{3.3}$$

Наложим также ограничения на геометрические размеры элементов сетки:

$$a_1 h^3 \le V(\Omega)/m \le a_2 h^3, \qquad b_1 h^2 \le s(\sigma) \le b_2 h^2$$

в первом неравенстве под m понимается число, соответствующее любой из граней ячейки Ω.

2°. Для уравнений (3.1) рассмотрим вторую краевую задачу. Будем предполагать, что решение $u(x)$ этой задачи существует и принадлежит соболевскому классу $H^2(\mathcal{O})$. Тогда $\mathbf{q}(x) \in H^1(\mathcal{O})$ покомпонентно и имеет смысл сеточная функция q^σ, введенная в п.**1°**.

Будем сравнивать сеточную функцию q^σ с сеточной функцией Q^σ, полученной в качестве решения разностной задачи

$$\begin{aligned} &\sigma_a Q^a = F && \text{на } (\Omega), \\ &\mathcal{G} Q = -\Delta U && \text{на } (\Omega), \\ &Q = Q_* && \text{на } (\Omega), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\mathcal{G}$ — метрический оператор, $Q_* = \int\limits_{\partial\sigma(1)} \mathbf{q}_* \mathrm{d}\mathbf{s}$.

Система уравнений имеет решение при выполнении условий разрешимости

$$\sum_{\Omega} F = \sum_{\partial\sigma} Q_*.$$

Пространство $\mathcal{H}$ разложим в ортогональную прямую сумму $\mathcal{H} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, где подпространства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определены так же, как и в главе II.

В §4.1 было показано, что

$$\|q - Q\| = \inf_{p \in \mathcal{A}} \|q - p\|. \tag{3.5}$$

Доказательство этого утверждения без изменений переносится на осесимметричный случай, т.к. все геометрические особенности задачи «скрыты» в метрическом операторе $\mathcal{G}$.

Условия сходимости разностных схем метода опорных операторов для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях аналогичны полученным в §4.1 условиям сходимости для плоского случая. Чтобы сформулировать эти условия, рассмотрим введенную выше сеточную функцию $\mathbf{s}$ на (σ).

Потребуем, чтобы для этой функции выполнялись следующие условия:

i) Функция $\mathbf{s}$ принадлежит подпространству $\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{G}s_i = \Delta x_i$ (покомпонентно).

Очевидно, векторная функция x_i определена на (Ω) с точностью до постоянного вектора. В каждой ячейке выделим какую-либо точку, например центр тяжести (в фиктивных ячейках это будет середина соответствующей грани), координаты которой обозначим $\bar{x}_i(\Omega)$.

ii) Существует $x_i(\Omega)$, удовлетворяющая условию i) и отстоящая от $\bar{x}_i(\Omega)$ на расстояние порядка h в норме

$$\|z\|_\infty = \max_{\Omega, \Omega_*} |z(\Omega)|,$$

т.е. $\inf \|x - \bar{x}\|_\infty = O(h)$, где infimum берется по векторным сеточным функциям $x_i(\Omega)$, удовлетворяющих условию i).

Доказательство сходимости на решениях из $H^2(\mathcal{O})$ со скоростью $O(h)$ во многом повторяет соответствующее доказательство для случая плоской геометрии, но имеет свои особенности. Функция $u(x) \in H^2(\mathcal{O})$ продолжим на все пространство R, таким образом, что выполнено неравенство

$$|u|_{2,R} \leq B|u|_{2,\mathcal{O}}.$$

В силу вложения $H^2(\mathcal{O})$ в $C(\bar{\mathcal{O}})$ образуем сеточную функцию $u(\Omega) = u(x(\Omega))$ и положим в (3.3) $p = -\mathcal{G}^{-1}\Delta u$. Тогда

$$\|q - Q\|^2 \leq \|\mathcal{G}^{-1}\Delta u + q\|^2 \leq \frac{h}{\beta}\sum_{\sigma} m|\mathcal{G}q + \Delta u|^2.$$

Оценим величину $|\mathcal{G}q + \Delta u|$ для отдельной грани. Для этого рассмотрим сектор с углом $2\pi/m$ и построим шар Ш радиуса ρ такой, что внутри него лежат отсекаемые указанным сектором часть грани, части ячеек, граничащих по этой грани, и центры этих ячеек $\bar{x}(\Omega)$.

В силу условия ii) можно выбрать $\rho \leq ch$, где c не зависит от сетки и грани на ней.

Проведем преобразование переменных $y_i = x_i/\rho$, $v(y) = u(\rho y)$. При этом $p_i = -\partial v/\partial y_i = \rho q_i$. В результате такого преобразования шар Ш отобразится на шар $Ш_1$ единичного радиуса в пространстве (y_1, y_2, y_3). Будем в дальнейшем обозначать функцию $\mathbf{s}$ в пространстве (x_1, x_2, x_3) через $\mathbf{s}_x$, а соответствующую ей функцию в пространстве (y_1, y_2, y_3) — через $\mathbf{s}_y$. Легко видеть, что эти две величины связаны соотношением $\mathbf{s}_y = \mathbf{s}_x/\rho^2$. Аналогично: $V_y = V_x/\rho^3$.

Функционал $\varphi(u) = \mathcal{G}q + \Delta u$ преобразуется в функционал $\psi(v) = \rho\mathcal{G}p + \Delta v$. Здесь функционалы p определяются аналогично q из §4.1. Легко показать, что на многообразии в пространстве $H^2(Ш_1)$, натянутом на полиномы первой степени и аксиально-симметричные функции, p определены и имеют место оценки

$$|p| \leq mM_1\|v\|_{2,Ш_1},$$

где $M_1 = O(1)$ и одинакова для всех p. По теореме Хана–Банаха, функционалы p можно продолжить на все пространство $H^2(Ш_1)$ без увеличения их нормы.

Используя вложение $H^2(Ш_1)$ в $C(Ш_1)$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |\psi| &\leq 2mM_1\rho\sum_b |g_{ab}|\|v\|_{2,\,Ш_1} + 2M_2\|v\|_{2,\,Ш} \leq \\ &\leq 2(c\gamma M_1 + M_2)\|v\|_{2,\,Ш_1}. \end{aligned}$$

Условие i) означает, что функционал ψ обращается в нуль на полиномах первой степени. Поэтому, в силу эквивалентности фактор-нормы H^2/P_1 и полунормы H^2 получаем

$$|\psi| \leq 2M_3(c\gamma M_1 + M_2)|v|_{2,\,Ш_1}.$$

Переходя обратно к координатам x, имеем

$$|\varphi| \leq 2M_3\rho^{\frac{1}{2}}(c\gamma M_1 + M_2)|u|_{2,\,Ш},$$

где Ш — прообраз шара $Ш_1$ в пространстве (x_1, x_2, x_3).

Построенные таким образом шары покрывают некоторую окрестность полуплоскости $\lambda = 0$. Чтобы покрыть всю область $\mathcal{O}$, представим $|\varphi|^2$ в виде

$$|\varphi|^2 = m^{-1}\sum_{\alpha=1}^{m} |\varphi_\alpha|^2,$$

где φ_α — функционал, построенный так же, как и φ, с той лишь разницей, что $q = (\mathrm{d}q/\mathrm{d}\lambda)_{\lambda=2\pi\alpha/m}$. Очевидно, для задач с осевой симметрией $\varphi_\alpha = \varphi$.

Таким образом, имеем

$$\|q - Q\|^2 \leq \frac{h}{\beta}\sum_\sigma\sum_{\alpha=1}^{m} |\varphi_\alpha|^2 \leq \frac{4ch^2}{\beta}M_3^2(c\gamma M_1 + M_2)^2\sum_{Ш} |u|^2_{2,\,Ш}.$$

Здесь суммирование проводится по шарам, покрывающим всю область $\mathcal{O}$.

Поскольку существует число n такое, что любая точка в пространстве (x_1, x_2, x_3) покрывается не более чем n шарами Ш, то окончательно

$$\|q - Q\| \leq O(h)|u|_{2,\,\mathcal{O}}.$$

3°. Для иллюстрации изложенного выше подхода построим метрический оператор, удовлетворяющий условиям сходимости i), ii) и установим для него справедливость оценок (3.2), (3.3).

Рассмотрим сетку, все ячейки которой — треугольники в плоскости (r, z). Вершины ячейки будем нумеровать индексом φ. Каждой вершине припишем объем V_φ и рассмотрим метрический оператор, построенный из матриц вида

$$g_{ab} = \sum_\varphi V_\varphi (\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b)_\varphi. \tag{3.6}$$

Здесь смысл всех величин тот же, что и в §3.3 .

При таком выборе g_{ab} имеем

$$\mathcal{G}\mathbf{s} = \sum_\varphi V_\varphi \mathbf{s}'_\varphi.$$

Здесь суммирование производится по вершинам, образованным гранью σ, $\mathbf{s}'_\varphi$ — вектор, сопряженный с $\mathbf{s}$ в вершине φ.

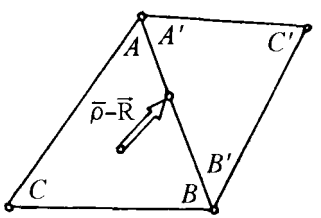


Рис.4.4

Рассмотрим грань, образующую вершины A, B, A', B' (см. рис.4.4). Легко видеть, что

$$\mathbf{s}'_A = \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C}{S_{ABC}(r_A + r_B)}, \qquad \mathbf{s}'_B = \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C}{S_{ABC}(r_A + r_B)},$$

где S_{ABC} — площадь треугольника ABC в плоскости (r, z); r_A, r_B — расстояния от соответствующих вершин

до оси z; $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ — радиус-векторы вершин треугольника ABC. В (3.6) положим $V_A = r_A S_{ABC}/3$. Тогда

$$\sum_{\varphi=A,B} V_\varphi \mathbf{s}'_\varphi = \frac{1}{3}\left[\frac{r_A(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C)}{r_A + r_B} + \frac{r_B(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C)}{r_A + r_B}\right] = \rho - \mathbf{R}.$$

Очевидно, что конец вектора

$$\rho = \frac{2r_A + r_C}{3(r_A + r_B)}\mathbf{r}_A + \frac{2r_B + r_C}{3(r_A + r_B)}\mathbf{r}_B$$

лежит на стороне AB; $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C)/3$ — радиус-вектор центра масс треугольника ABC, вектор $\rho - \mathbf{R}$ соединяет две эти точки. Выполнив аналогичные построения для треугольника $A'B'C'$ и учтя, что ρ определяется только положением вершин A, B получим, что вектор $\mathcal{G}\mathbf{s}$ соединяет центры масс треугольников ABC и $A'B'C'$.

Таким образом, под $x_i(\Omega)$ в условии i) следует понимать координаты центров масс соответствующих треугольников. Для фиктивных ячеек под $x_i(\Omega)$ следует понимать координаты конца вектора ρ. Условие ii) очевидно, выполнено.

Установим теперь справедливость оценок (3.2), (3.3) для оператора $\mathcal{G}$, построенного из матриц g_{ab} вида (3.6). Рассмотрим произвольную ячейку Ω. Ее вершины будем обозначать вновь A, B, C противостоящие им стороны — соответственно BC, CA, AB. В этих обозначениях элементы строки матрицы g_{ab}, соответствующей стороне AB, имеют вид (остальные элементы выписываются аналогично)

$$g_{AB,AB} = \frac{1}{s_{AB}^2}\left(\frac{V_A}{\sin^2 A} + \frac{V_B}{\sin^2 B}\right),$$

$$g_{AB,CA} = \frac{V_A}{s_{AB}s_{CA}}\frac{\cos A}{\sin^2 A},$$

$$g_{AB,BC} = \frac{V_B}{s_{AB}s_{BC}}\frac{\cos B}{\sin^2 B}.$$

Напомним, что по своему смыслу число m выбирается таким образом, чтобы все линейные размеры части трехмерной ячейки, заключенной в сектор с углом $2\pi/m$, были

порядка h. С учетом этого имеем

$$|g_{AB,AB}| + |g_{AB,CA}| + |g_{AB,BC}| =$$

$$= \frac{2\pi a_2}{b_1^2 mh}\left(\frac{1+|\cos A|}{\sin^2 A} + \frac{1+|\cos B|}{\sin^2 B}\right).$$

Если на углы ячеек наложить ограничение $\varphi \geq \vartheta > 0$, то выражение в скобках ограничено величиной $\sin^{-1}\vartheta$. При этом условие (3.2) выполнено с $\gamma = 8\pi\times\ \times a_2/(b_1\sin\vartheta)^2$. Можно также показать (оценив минимальное собственное значение матрицы g_{ab}), что условие (3.3) выполнено с $\beta = 4\pi a_1/(3b_2)^2$.

Из всего сказанного заключаем, что разностная схема метода опорных операторов (3.4) на треугольных сетках с метрическим оператором (3.6) сходится в сеточной норме H^1 с первым порядком.

Глава V

Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений линейной теории упругости

§5.1. Семейство разностных схем с опорным оператором grad

1°. Настоящая глава посвящена построению и исследованию разностных схем метода опорных операторов для уравнений равновесия упругого тела. Предварительно исследуется вопрос о сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона при иной, чем в главах III, IV дискретизации переменных, а именно сеточная функция «температур» считается заданной в узлах сетки. В этом случае в качестве опорного естественно принять оператор grad.

Для предложенных разностных схем сформулированы достаточные условия сходимости на обобщенных решениях. Эти условия по своему смыслу полностью аналогичны условиям, полученным в §3.1 для случая, когда в качестве опорного оператора брался оператор div. Они имеют характер связей между метрическим оператором и геометрическими характеристиками сетки.

2°. В области $\mathcal{O}$ с границей $\partial\mathcal{O}$ рассмотрим уравнение Пуассона

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q} &= f(x), \\ \mathbf{q} &= -\operatorname{grad} u \end{aligned} \tag{1.1}$$

с граничными условиями первого рода $u\big|_{\partial\mathcal{O}} = u_*(x)$.

В области $\mathcal{O}$ введем семейство разностных сеток. Сетка состоит из ячеек (Ω), узлов (ω) и ребер (λ) (рис.5.1). В множествах (ω) и (λ) выделим те элементы, которые лежат на границе расчетной области и будем помечать их символом «∂». Относительно геометрических размеров элементов сетки предполагается тоже, что и в главах II, III.

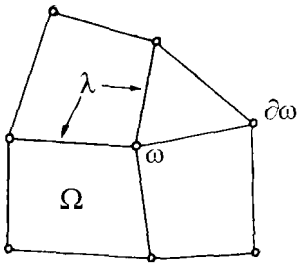


Рис.5.1

Пространство сеточных функций, определенных на (λ) будем обозначать $\mathcal{H}$, пространство сеточных функций, определенных на (ω) – $\mathcal{S}$.

К узлам отнесем искомую сеточную функцию u. На ребрах каким-либо образом выделим положительное направление и отнесем к ним сеточную функцию Q_λ, аппроксимирующую выражение $\int\limits_\lambda \mathbf{q}\,\mathrm{d}\mathbf{l}$, где интегрирование ведется в положительном направлении. При таком способе дискретизации скалярных и векторных полей естественным образом аппроксимируется второе из уравнений (1.1)

$$Q_\lambda = -\Delta_\lambda u = -\sigma_a(\omega')u(\omega') - \sigma_a(\omega)u(\omega).$$

Здесь $\sigma_a(\omega) = \pm 1$ в зависимости от того, куда направлено положительное направление на ребре a — от узла ω или к нему. Тем самым введен разностный аналог оператора grad, действующий из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{H}$.

В соответствии с идеологией метода опорных операторов снабдим пространство векторных сеточных функций $\mathcal{H}$ скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой по формулам

$$\langle P, Q\rangle = \sum_\Omega g^{ab} P_a Q_b, \qquad \|P\|^2 = \langle P, P\rangle, \tag{1.2}$$

где внутреннее суммирование по повторяющимся индексам a, b, как и в предыдущих главах, ведется по ребрам

ячейки Ω; $g^{ab} = g^{ab}(\Omega)$ — элементы симметричной матрицы, конкретный вид которых будет определен ниже; P_a и Q_b — разностные аналоги интегралов $\int\limits_a \mathbf{p}d\mathbf{l}$, $\int\limits_b \mathbf{q}d\mathbf{l}$.

Разностный аналог оператора div, действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{S}$, строится как сопряженный разностному оператору grad (с точностью до знака) в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Во внутренних узлах он имеет вид $\sigma_a P^a$, где

$$P^\lambda = g^{\lambda b}(\Omega)P_b + g^{\lambda b}(\Omega')P_b.$$

Так же как и в предыдущих главах оператор в правой части будем обозначать $\mathcal{G}$ и называть метрическим. Относительно матриц g^{ab} будем предполагать выполненной равномерную (по сеткам, ячейкам и ребрам) оценку

$$\sum_a |g^{ab}| \le \gamma,$$

а относительно метрического оператора $\mathcal{G}$ — равномерную оценку $\mathcal{G} \ge \beta I$.

Разобъем $\mathcal{H}$ в ортогональную прямую сумму подпространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Функции $X \in \mathcal{A}$ имеют вид $X_\lambda = \Delta_\lambda T$, где T — произвольная функция из $\mathcal{R}$, обращающаяся в ноль на $(\partial\omega)$. Подпространство $\mathcal{B}$ состоит из функций, ортогональных к $\mathcal{A}$ в смысле скалярного произведения (1.2). Изучим структуру функций из $\mathcal{B}$. Пусть $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{B}$, тогда

$$0 = \langle X, Y\rangle = \sum_\lambda Y^\lambda \Delta_\lambda T = \sum_\omega T\sigma_a Y^a.$$

Отсюда в силу произвольности T следует, что подпространство $\mathcal{B}$ состоит из таких функций, для которых выполнены соотношения

$$\sigma_a Y^a = 0 \text{ на } (\omega) - (\partial\omega).$$

3°. Пусть входные данные задачи (1.1) таковы, решение $u(x) \in H^2(\mathcal{O})$. Тогда $\mathbf{q} \in H^1(\mathcal{O})$ покомпонентно. Вследствие вложения $H^1(\mathcal{O})$ в $L^1(\lambda)$ [20] имеют смысл интегралы $q_\lambda = \int\limits_\lambda \mathbf{q}d\mathbf{l}$.

Будем сравнивать сеточную функцию $q = q_\lambda$ с сеточной функцией Q_λ, полученной в результате решения разностной задачи

$$\begin{aligned} &\sigma_a Q^a = F && \text{на } (\omega) - (\partial\omega), \\ &Q = -\mathcal{G}\Delta u && \text{на } (\lambda), \\ &u = u_*(\partial\omega) && \text{на } (\partial\omega), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\mathcal{G}$ — метрический оператор, $u_*(\partial\omega) = u_*(\mathbf{r}(\partial\omega))$. Вид правой части F будет определен ниже.

Аналогично §4.1 доказывается следующее утверждение. Пусть Q — решение (1.3), тогда имеет место равенство

$$\|q - Q\| = \inf_{\sigma_a p^a = F} \|q - p\|. \tag{1.4}$$

Действительно, интегрируя второе из уравнений (1.1) по λ, находим $q_\lambda = -\Delta_\lambda(\Pi u)$, где $\Pi u(\omega) = u(\mathbf{r}(\omega))$ имеет смысл в силу вложения $H^2(\mathcal{O})$ в $C(\bar{\mathcal{O}})$. Вычитая отсюда $Q_\lambda = -\Delta_\lambda u$, получаем $q_\lambda - Q_\lambda = -\Delta_\lambda z$, где $z(\omega) = \Pi u(\omega) - u(\omega)$ — погрешность разностной схемы. Очевидно, что $z(\partial\omega) = 0$, поэтому $q - Q \in \mathcal{A}$.

Пусть p таково, что $\sigma_a p^a = F$, тогда в силу первого из уравнений (1.3), справедливо $\sigma_a(p - Q)^a = 0$, т.е. $b = p - Q \in \mathcal{B}$. Так как подпространства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ортогональны, имеем

$$\|q - p\|^2 = \|q - Q - b\|^2 = \|q - Q\|^2 + \|b\|^2 \geq \|q - Q\|^2.$$

В силу произвольности p отсюда следует сделанное утверждение.

Введем вектора $\mathbf{l}_\lambda = \Delta_\lambda \mathbf{r}$, соединяющие соседние узлы. Подействовав на сеточную функцию $\mathbf{l}_\lambda$ оператором $\mathcal{G}$ покомпонентно, получим вектора $\mathbf{s}^\lambda = (\mathcal{G}\mathbf{l})^\lambda$, которые будем интерпретировать как ориентированные площади, присоединенных к ребрам поверхностей.

Пусть вектора $\mathbf{l}_\lambda$ и метрический оператор $\mathcal{G}$ таковы, что для каждого внутреннего узла $\omega \in (\omega) - (\partial\omega)$ имеет место $\sigma_a \mathbf{s}^a = 0$. Геометрически это означает, что поверхности с ориентированными площадями $\mathbf{s}^a$, построенные

вокруг внутреннего узла ω, ограничивают некоторый домен $\mathrm{d}(\omega)$ (см. рис.5.2). Пусть построенные таким образом поверхности отстоят от соответствующих узлов на расстояния порядка h и имеют площади порядка h. Напомним, что эти поверхности имеют единичную высоту по третьей координате. Тогда, если в (1.3) положить $F = \int\limits_{\mathrm{d}(\omega)} f\mathrm{d}V$, где интегрирование ведется по домену, построенному указанным выше способом, то имеет место оценка

$$\|q - Q\| \leq Ch|u|_{2,\Theta}.$$

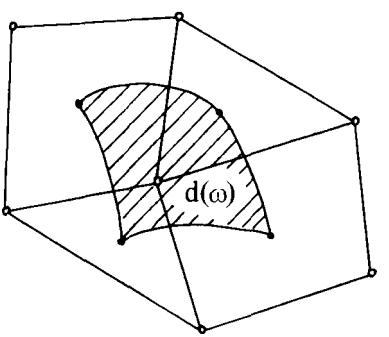


Рис.5.2

Доказательство полностью аналогично проведенному в §4.1. Положим в (1.4) $p = \mathcal{G}^{-1}\int\limits_{\sigma} \mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{s}$. Очевидно, что при этом $\sigma_a p^a = F$ и, следовательно,

$$\|q - Q\|^2 \leq \|q - p\|^2 \leq \frac{1}{\beta}\sum_{\lambda} |(\mathcal{G}q - p)^{\lambda}|^2 = \mathrm{O}(h^2),$$

т.к. выражение в круглых скобках обращается в ноль при $\mathbf{q} = \mathrm{const}$. Заметим, что $q = -\Delta(\Pi u)$, $Q = -\Delta u$, поэтому

$$\|q - Q\| = \|z\|_1 = \mathrm{O}(h)|u|_{2,\Theta},$$

где $\|z\|_1 = \langle \Delta z, \Delta z \rangle^{1/2}$ — разностный аналог нормы в $\overset{\circ}{H}{}^1(\mathcal{O})$.

Итак, сходимость разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях из $H^2(\mathcal{O})$ гарантируется выполнением равенств $\sigma_a \mathbf{s}^a = 0$ для всех внутренних узлов.

4°. Построение метрических операторов, удовлетворяющих сформулированным выше требованиям осуществляется аналогично §3.3 с точностью до обозначений.

а) Для треугольной ячейки ABC матричные элементы $g^{ab}(\Omega)$ могут быть выбраны в виде

$$g^{ab} = \sum_{\varphi} V_\varphi (\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b)_\varphi + A^a \tau^b + A^b \tau^a.$$

Здесь $\varphi = (A, B, C)$ — индекс, нумерующий вершины ячейки, V_φ — вес, приписанный φ — вершине ячейки; $(\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b)_\varphi$ — матрица Грама составленная из векторов сопряженного базиса в вершине φ; коэффициенты τ^a удовлетворяют условию $\tau^a \mathbf{l}_a = 0$ (суммирование производится по ребрам ячейки Ω); A^a — произвольные числа, отнесенные к ребрам ячейки. На выбор V_φ накладывается единственное ограничение: $\sum\limits_{\varphi} V_\varphi = V$.

При таком выборе вектора $\mathbf{s}$ имеют вид

$$\mathbf{s}^\lambda = \sum_{\varphi} V_\varphi \mathbf{l}^\lambda_\varphi.$$

Здесь суммирование производится по вершинам, образованным ребром λ; $\mathbf{l}^\lambda_\varphi$ — вектор, сопряженный с вектором $\mathbf{l}_\lambda$ в вершине φ.

Присоединенные к ребрам поверхности опираются на точки с координатами

$$\mathbf{R} = \frac{V_B + V_C}{2V}\mathbf{r}_A + \frac{V_C + V_A}{2V}\mathbf{r}_B + \frac{V_A + V_B}{2V}\mathbf{r}_C.$$

Возможен другой вариант выбора метрического оператора для случая треугольных ячеек: g^{ab} берется в виде

диагональной матрицы, которая полностью аналогична построенной в §3.3.

b) Для четырехугольной ячейки $ABCD$ матричные элементы $g^{ab}(\Omega)$ могут быть выбраны в виде

$$g^{ab} = \sum_{\varphi} V_{\varphi}(\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b)_{\varphi} + A^a\tau^b + A^b\tau^a + B^a\rho^b + B^b\rho^a.$$

Здесь все величины имеют тот же смысл, что и в разделе a), кроме того $\rho_a \mathbf{l}^a = 0$. Аналогично a)

$$\mathbf{s}^{\lambda} = \sum_{\varphi} V_{\varphi}\mathbf{l}^{\lambda}_{\varphi}.$$

Условие сходимости $\sigma_a \mathbf{s}^a = 0$ будет выполнено при выборе V_{φ} в виде

$$V_A = \nu V_{ABD}, \quad V_B = (1-\nu)V_{ABC},$$
$$V_C = \nu V_{BCD}, \quad V_D = (1-\nu)V_{ACD},$$

где $0 \le \nu \le 1$ — свободный параметр. При этом присоединенные к ребрам поверхности опираются на точки с координатами

$$\mathbf{R} = \frac{\nu}{2}(\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D) + \frac{1-\nu}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C).$$

Константы γ, β для построенных метрических операторов оцениваются так же, как и в §3.3.

§5.2. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости

1°. В этом и последующих параграфах будут рассмотрены вопросы построения и обоснования разностных схем метода опорных операторов для уравнений теории упругости.

Пусть в недеформированном состоянии упругое тело занимает область $\mathcal{O}$. Под действием внешних сил объемной плотности f_i частицы тела совершают перемещения

$u_i(x)$, где x — координаты частицы в недеформированном состоянии. В рамках линейной теории упругости деформация тела характеризуется тензором деформаций

$$q_{kq} = \frac{\partial u_k}{\partial x_q},$$

точнее его симметричной частью

$$q_{(kq)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_k}\Big).$$

Упругие напряжения, возникающие в теле, описываются тензором напряжений t_{ij}, так что уравнения равновесия имеют вид [24]

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0.$$

Если деформируемое тело изотропно, то его упругие свойства описываются коэффициентами Ламе λ, μ, которые входят в выражение для плотности энергии

$$U = \frac{1}{2}\big(2\mu q^2_{(kq)} + \lambda q^2_{kk}\big).$$

В дальнейшем считаем, что $\lambda, \mu = \mathrm{const}$. Соответственно

$$t_{ij} = \frac{\partial U}{\partial q_{ij}} = 2\mu q_{(ij)} + \lambda q_{kk}\delta_{ij} = \Lambda_{ijkq} q_{kq}.$$

где $\Lambda_{ijkq} = \mu\delta_{ik}\delta_{jq} + \mu\delta_{iq}\delta_{jk} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kq}$.

Квадратичной форме, заключенной в скобки в выражении для плотности энергии,соответствует билинейная форма

$$K(p,q) = 2\mu p_{(kq)} q_{(kq)} + \lambda p_{(kk)} q_{(qq)}$$

и скалярное произведение в пространстве тензорных функций

$$\int\limits_{\mathcal{O}} K(p,q)\mathrm{d}V.$$

Операции $\dfrac{\partial \Lambda_{ijkq} q_{kq}}{\partial x_j}$ и $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ сопряжены в смысле интегрального тождества

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{O}} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} v_i \mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} v_i t_{ij} \mathrm{d}s_j - \int\limits_{\mathcal{O}} t_{ij} p_{ij} \mathrm{d}V = \\
&= \int\limits_{\partial\mathcal{O}} v_i t_{ij} \mathrm{d}s_j - \int\limits_{\mathcal{O}} (2\mu p_{(ij)} q_{(ij)} + \lambda p_{ii} q_{jj}) \mathrm{d}V = \\
&= \int\limits_{\partial\mathcal{O}} v_i t_{ij} \mathrm{d}s_j - \int\limits_{\mathcal{O}} K(p,q) \mathrm{d}V.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Для смещений $u_i(x)$, обращающихся в ноль на границе области $\mathcal{O}$, имеет место первое неравенство Корна [18]

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \mu(\partial u_i/\partial x_j)^2 \mathrm{d}V \le \int\limits_{\mathcal{O}} (2\mu q_{(ij)} q_{(ij)} + \lambda q_{ii} q_{jj}) \mathrm{d}V. \tag{2.2}$$

Нетривиальность этого неравенства заключается в том, что слева присутствуют все производные от смещений, а справа только симметричная часть тензора деформаций.

2°. В расчетной области $\mathcal{O}$ введем сетку, также как и в §5.1. Пространство сеточных функций, определенных в узлах сетки, будем обозначать $\mathcal{S}$, пространство сеточных функций, определенных на ребрах — $\mathcal{H}$.

Сеточную функцию смещений $\mathbf{u}$ будем относить к узлам сетки, т.е. $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$. Сеточный тензор деформаций определим на (λ) по формуле

$$\mathbf{Q}_\lambda = -\sigma_a(\omega)\mathbf{u}(\omega) - \sigma_a(\omega')\mathbf{u}(\omega') = \Delta_\lambda \mathbf{u},$$

где выражение справа является разностным аналогом

$$\int\limits_{\lambda} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k$$

проекции тензора деформации на ребро λ.

Согласно методу опорных операторов для аппроксимации дивергенции $\partial t_{ij}/\partial x_j$ следует воспользоваться раз-

ностным аналогом интегрального тождества (2.1). Аналогично §5.1 билинейную форму в правой части интегрального тождества будем аппроксимировать конструкцией

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = \sum_{\Omega} g_{ij}^{ab} P_{i,a} Q_{j,b},$$

где g_{ij}^{ab} определены на (Ω) и удовлетворяют условиям симметрии $g_{ij}^{ab}(\Omega) = g_{ji}^{ba}(\Omega)$.

С учетом $P_{i,a} = \Delta_a v_i$ имеем

$$\sum_{\Omega} g_{ij}^{ab} P_{i,a} Q_{j,b} = \sum_{\partial\omega} T_i v_i - \sum_{\omega} v_i \sigma_a T_i^a,$$

$$T_i^\lambda = (\mathcal{G}_{ij} Q_j)^\lambda = g_{ij}^{\lambda b}(\Omega) Q_{j,b} + g_{ij}^{\lambda b}(\Omega') Q_{j,b},$$

где Ω, Ω' —ячейки, разделенные ребром λ; $T_i(\partial\omega)$ — сила, действующая на граничный узел $\partial\omega$.

Относительно матриц g_{ij}^{ab}, так же как и везде выше, будем предполагать выполненной равномерную (по сеткам, ячейкам и ребрам) оценку

$$\sum_{i,a} |g_{ij}^{ab}| \le \gamma,$$

а относительно оператора $\mathcal{G}$ — равномерную (по рассматриваемому семейству сеток) оценку

$$\varkappa \sum_{\lambda} |\Delta \mathbf{z}|^2 \le \sum_{\lambda} (\Delta \mathbf{z}, \mathcal{G} \Delta \mathbf{z}), \tag{2.3}$$

для сеточных функций $\mathbf{z}(\omega)$, таких что $\mathbf{z}(\partial\omega) = 0$. Условия, при которых это неравенство имеет место, будут установлены в §5.4. Там же будет объяснено, почему (2.3) является разностным аналогом первого неравенства Корна (2.2).

3°. Таким образом, дивергенция $\partial t_{ij}/\partial x_j$, точнее интеграл этой величины по некоторому приузловому объему, аппроксимируется выражением $\sigma_a T_i^a$. Механический смысл отдельного слагаемого в этой сумме — сила, действующая на узел ω со стороны узла ω', расположенного

на другом конце ребра. Условия механического равновесия внутреннего узла ω имеют вид

$$\sigma_a T_i^a + F_i = 0, \qquad T_i^a = (\mathcal{G}_{ij}\Delta u_j)^a, \tag{2.4}$$

где F_i — внешняя сила, действующая на узел ω, способ выбора которой будет указан в дальнейшем.

§5.3. Условия сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнений теории упругости

1°. Установим условия сходимости разностной схемы (2.4), считая, что на границе области $\mathcal{O}$ заданы смещения $u_{i,*}(x)$. Естественно ожидать, что условия сходимости разностной схемы (2.4) будут аналогичны установленным в §5.1 для уравнения Пуассона. Пусть каждому ребру сетки соответствует вектор $\mathbf{s}^\sigma$, причем $\sigma_a \mathbf{s}^a = 0$. Если интерпретировать векторы $\mathbf{s}^\sigma$ как ориентированные площади некоторых поверхностей, то для каждого внутреннего узла ω (см. рис.5.1) эти поверхности ограничивают некоторый домен $\mathrm{d}(\omega)$ на плоскости (x_1, x_2). Пусть построенные таким образом поверхности отстоят от соответствующего узла на расстояния порядка h и имеют размеры порядка h.

Положим в (2.4)

$$F_i = \int\limits_{\mathrm{d}(\omega)} f_i \mathrm{d}V = \sigma_a t_i^a, \text{ где } t_i = \int\limits_a t_{ij}\mathrm{d}s_j.$$

Очевидно при таком выборе F_i

$$\sigma_a T_i^a = \sigma_a t_i^a. \tag{3.1}$$

Положим теперь $p_i = \mathcal{G}_{ij}\Delta(\Pi u_j)$, где Π — оператор проектирования из пространства функций непрерывного аргумента в пространство сеточных функций $\mathcal{S}$, определенный например по формуле $\Pi_\omega u_j(x) = u_j(\mathbf{r}_\omega)$. Вычитая из обеих частей (3.1) конструкцию $\sigma_a p_i^a$, получаем

$$\sigma_a(\mathcal{G}_{ij}\Delta z_j)^a = \sigma_a(t_i - \mathcal{G}_{ij}\Delta(\Pi u_j))^a, \tag{3.2}$$

где $z_j(\omega) = u_j(\omega) - (\Pi_\omega u_j)$ — ошибка разностной схемы (2.4) в смещениях.

Умножая (3.2) на $z_i(\omega)$ и суммируя по ω, имеем слева

$$\sum_\omega z_i \sigma_a (\mathcal{G}_{ij} \Delta z_j)^a = \sum_\lambda \Delta_\lambda z_i (\mathcal{G}_{ij} \Delta z_j)^\lambda = \langle \Delta \mathbf{z}, \Delta \mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{z}\|_1^2,$$

а справа

$$\sum_\omega z_i \sigma_a (t_i - \mathcal{G}_{ij} \Delta(\Pi u_j))^a = \sum_\lambda \Delta_\lambda z_i (t_i - \mathcal{G}_{ij} \Delta(\Pi u_j))^\lambda \leq$$
$$\leq \left[\sum_\lambda |\Delta \mathbf{z}|^2 \sum_\lambda |\mathbf{t} - \mathcal{G}\Delta(\Pi \mathbf{u})|^2 \right]^{1/2}. \tag{3.3}$$

Согласно сделанному в §5.2 предположению относительно метрического оператора $\mathcal{G}$ из (3.3) следует

$$\|\mathbf{z}\|_1^2 \leq \frac{1}{\beta} \sum_\lambda |\mathbf{t} - \mathcal{G}\Delta(\Pi \mathbf{u})|^2. \tag{3.4}$$

Для сходимости разностной схемы (2.4) в энергетической норме достаточно потребовать, чтобы выражение под модулем обращалось ноль на каждом ребре λ, если деформация (в окрестности ребра) однородна, т.е. $q_{ik} = \mathrm{const}$, при этом

$$q_{i,\lambda} = \int_\lambda q_{ik} \mathrm{d}x_k = q_{ik} l_{k,\lambda}, \qquad p_i^\lambda = \int_\lambda t_{ij} \mathrm{d}s_j = \Lambda_{ijkq} s_j^\lambda q_{kq}.$$

Здесь вектора $l_{k,\lambda} = \Delta_\lambda x_k$ соединяют соседние узлы.

Условие выполнения равенства $\mathcal{G}_{ik} q_k = t_i$ при любых $q_{kq} = \mathrm{const}$ дает критерий сходимости

$$\mathcal{G}_{ik} l_q = \Lambda_{ijkq} s_j \text{ на } (\lambda) - (\partial\lambda).$$

Свертка по индексам k и q с учетом $\Lambda_{ijkk} = 2(\lambda + \mu)\delta_{ij}$ позволяет указать явное выражение для площади присоединенной к ребру поверхности $2(\lambda + \mu) s_i = \mathcal{G}_{ij} l_j$.

2°. Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимации скалярного произведения в пространстве тензорных функций

билинейными формами

$$\sum_{\Omega} g_{ij}^{ab} p_{i,a} q_{j,b},$$

где

$$p_{i,a} = \int_a p_{ik} \mathrm{d}x_k, \qquad q_{i,b} = \int_b q_{ik} \mathrm{d}x_k.$$

Как и выше будем исследовать локальную аппроксимацию, т.е. сравнивать интеграл

$$\int_{\Omega} (2\mu p_{(ik)} q_{(ik)} + \lambda p_{ii} q_{kk}) \mathrm{d}V$$

и конструкцию $g_{ij}^{ab}(\Omega) p_{i,a} q_{j,b}$.

Потребуем, чтобы эти выражения совпадали при произвольных p_{ik}, $q_{ik} = \mathrm{const}$, т.е.

$$g_{ij}^{ab} p_{ij} l_{k,a} q_{jq} l_{q,b} = V(2\mu p_{(ik)} q_{(ik)} + \lambda p_{ii} q_{kk}).$$

Отсюда (см. *Приложение F*) получаем условия, которым должны удовлетворять матричные элементы g_{ij}^{ab}

$$\begin{aligned} g_{ij}^{ab} l_{k,a} l_{q,b} &= V(\mu\delta_{ij}\delta_{kq} + \mu\delta_{iq}\delta_{jk} + \lambda\delta_{ik}\delta_{jq}) = \\ &= V\Lambda_{ikjq}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Отметим, что если смещения узлов таковы, что ячейка Ω совершает поворот без изменения формы, то упругая энергия такой ячейки равна нулю. Действительно, в этом случае

$$u_{i,\omega} = c\varepsilon_{ik}(x_{k,\omega} - x_k), \qquad q_{ik} = c\varepsilon_{ik} = \mathrm{const},$$

где ε_{ik} — антисимметричный тензор. Соответственно $q_{(ik)} = 0$ и

$$U_{\Omega} = \frac{1}{2} g_{ij}^{ab} q_{i,a} q_{j,b} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2\mu q_{(ik)}^2 + \lambda q_{kk}^2) \mathrm{d}V = 0.$$

Условия (3.5) представляют собой систему линейных уравнений относительно g_{ij}^{ab}. Частное решение этой системы выписывается аналогично §5.1

$$\begin{aligned} g_{ij}^{ab} &= \sum_{\varphi} V_{\varphi} \Lambda_{ikjq} (l_k^a l_q^b)_{\varphi} = \\ &= \sum_{\varphi} V_{\varphi} \left[\mu \delta_{ij} (l_k^a l_k^b)_{\varphi} + \mu (l_j^a l_i^b)_{\varphi} + \lambda (l_i^a l_j^b)_{\varphi} \right], \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\sum\limits_{\varphi} V_{\varphi} = V$. Условия симметрии $g_{ij}^{ab} = g_{ji}^{ba}$ очевидно выполнены. Так же как и в §5.1 возможно построение дополнительных решений (3.5).

3°. Установим при каком выборе весов V_{φ} можно удовлетворить условию сходимости $\mathcal{G}_{ik} l_q = \Lambda_{ijkq} s_j$ на (λ) – $(\partial\lambda)$. Подставляя вместо g_{ij}^{ab} их выражения согласно (3.6), получаем

$$\begin{aligned} &(\mathcal{G}_{ik} l_q)^a = \\ &= \sum_{\varphi} V_{\varphi} \left[\mu \delta_{ik} (l_j^a l_j^b)_{\varphi} l_{q,b} + \mu (l_k^a l_i^b)_{\varphi} l_{q,b} + \lambda (l_i^a l_k^b)_{\varphi} l_{q,b} \right], \end{aligned}$$

где суммирование по b проводится по векторам соответствующего базиса. С учетом соотношений вида $l_{k,\varphi}^b l_{q,b} = \delta_{kq}$ получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_{ik} l_q)^a &= \sum_{\varphi} V_{\varphi} \left[\mu \delta_{ik} l_{q,\varphi}^a + \mu \delta_{iq} l_{k,\varphi}^a + \lambda \delta_{kq} l_{i,\varphi}^a \right] = \\ &= \sum_{\varphi} V_{\varphi} \left[\mu \delta_{ik} \delta_{jq} + \mu \delta_{iq} \delta_{jk} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kq} \right] l_{j,\varphi}^a = \\ &= \Lambda_{ijkq} \sum_{\varphi} V_{\varphi} l_{j,\varphi}^a. \end{aligned}$$

Таким образом вопрос о выполнении критерия сходимости сводится к следующему: образуют ли вектора $s_j = \sum\limits_{\varphi} V_{\varphi} l_{j,\varphi}^a$ замкнутую поверхность вокруг узла ω. Ответ на этот вопрос уже был получен в §5.1.

a) Для треугольных ячеек ABC выбор V_φ ($\varphi = A, B, C$) может быть произвольным, удовлетворяющим условию

$$V_A + V_B + V_C = V. \tag{3.7}$$

При этом присоединенные к ребрам поверхности опираются на точки с координатами

$$\mathbf{R} = \frac{V_B + V_C}{2V}\mathbf{r}_A + \frac{V_C + V_A}{2V}\mathbf{r}_B + \frac{V_A + V_B}{2V}\mathbf{r}_C.$$

Возможен также выбор метрического оператора в виде диагональной матрицы, при этом присоединенные к ребрам поверхности опираются на отрезки, соединяющие центры окружностей, описанных вокруг соответствующих ячеек (см. §5.1).

b) Для четырехугольных ячеек $ABCD$ веса V_φ ($\varphi = A$, B, C, D) могут быть выбраны следующим образом

$$\begin{aligned} V_A &= \nu V_{ABD}, \quad & V_B &= (1-\nu)V_{ABC}, \\ V_C &= \nu V_{BCD}, \quad & V_D &= (1-\nu)V_{ACD}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $0 \le \nu \le 1$ — свободный параметр. При этом присоединенные к ребрам поверхности опираются на точки с координатами

$$\mathbf{R} = \frac{\nu}{2}(\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D) + \frac{1-\nu}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C).$$

§5.4. Разностный аналог первого неравенства Корна

1°. В §5.2 было указано, что для векторных функций $u_i(x)$, обращающихся в ноль на границе области $\mathcal{O}$, имеет место первое неравенство Корна (2.2). Дадим вывод этого неравенства в виде удобном для получения его разностного аналога. Пусть $q_{ij} = \partial u_i/\partial x_j$ — тензор дефор-

мации. Имеем

$$
\begin{aligned}
J &= \int\limits_{\mathcal{O}} (2\mu q_{(ij)} q_{(ij)} + \lambda q_{ii} q_{jj}) \mathrm{d}V = \\
&= \int\limits_{\mathcal{O}} \Big[\frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 + \lambda\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)^2\Big] \mathrm{d}V = \\
&= \int\limits_{\mathcal{O}} \Big[\mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \lambda\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)^2\Big] \mathrm{d}V.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Далее

$$
\begin{aligned}
J &= \int\limits_{\mathcal{O}} \Big[\mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 + (\lambda+\mu)\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)^2\Big] \mathrm{d}V + \\
&+ \int\limits_{\mathcal{O}} \mu(\delta_{iq}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jq}) \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_q} \mathrm{d}V = \\
&= J_0 - \int\limits_{\mathcal{O}} \mu \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kq} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_q} \mathrm{d}V = J_0 - \mu J_1.
\end{aligned}
$$

Покажем, что интеграл J_1 в правой части обращается в ноль, если $u\big|_{\partial\mathcal{O}} = 0$. Действительно

$$
J_1 = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kq} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_q} \mathrm{d}s_k - \int\limits_{\mathcal{O}} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kq} u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_q} \mathrm{d}V.
$$

Первый интеграл справа обращается в ноль в силу граничных условий, а второй в силу свертки антисимметричного по индексам k, q тензора ε_{kq} и симметричного $\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_q}$.

Таким образом

$$
\begin{aligned}
J &= \int\limits_{\mathcal{O}} \Big[\mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 + (\lambda+\mu)\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)^2\Big] \mathrm{d}V \geq \\
&\geq \int\limits_{\mathcal{O}} \mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 \mathrm{d}V.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

2°. Покажем теперь, что имеет место разностный аналог первого неравенства Корна (2.3), который в §5.2 мы записали в виде

$$\varkappa \sum_{\lambda} |\Delta \mathbf{z}|^2 \leq \sum_{\lambda} (\Delta \mathbf{z}, \mathcal{G} \Delta \mathbf{z}),$$

для сеточных функций $\mathbf{z}(\omega)$, таких что $\mathbf{z}(\partial\omega) = 0$. Достаточным условием выполнения (2.3) является требование, чтобы метрический оператор имел вид (3.6) с V_φ выбранными по (3.7) или (3.8).

Правая часть неравенства (2.3) в подробной записи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\langle \Delta \mathbf{z}, \Delta \mathbf{z} \rangle = \sum_{\lambda} (\Delta \mathbf{z}, \mathcal{G} \Delta \mathbf{z}) = \sum_{\Omega} g_{ij}^{ab} \Delta_a z_i \Delta_b z_j = \\
&= \sum_{\Omega} \sum_{\varphi} V_\varphi \Big[\mu (\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b)_\varphi (\Delta_a \mathbf{z}, \Delta_b \mathbf{z})_\varphi + \mu (\mathbf{l}^a, \Delta_b \mathbf{z})_\varphi (\mathbf{l}^b, \Delta_a \mathbf{z})_\varphi + \\
&+ \lambda (\mathbf{l}^a, \Delta_a \mathbf{z})_\varphi (\mathbf{l}^b, \Delta_b \mathbf{z})_\varphi \Big].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Сравнивая (4.1) с (4.3) находим соответствие:

первое слагаемое в квадратных скобках $\to \mu \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2$,

третье слагаемое $\to \lambda \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2$,

таким образом *второе* $\to \mu \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$.

Из второго слагаемого выделим часть соответствующую $\mu \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2$, после чего для остатка имеем (индекс φ временно опускаем)

$$\begin{aligned}
&\mu (\mathbf{l}^a, \Delta_b \mathbf{z})(\mathbf{l}^b, \Delta_a \mathbf{z}) - \mu (\mathbf{l}^a, \Delta_a \mathbf{z})(\mathbf{l}^b, \Delta_b \mathbf{z}) = \\
&= \mu (l_i^b l_j^a - l_i^a l_j^b) \Delta_a z_i \Delta_b z_j = \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kq} l_k^b l_q^a \Delta_a z_i \Delta_b z_j = \\
&= -\mu [\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b] [\Delta_a \mathbf{z}, \Delta_b \mathbf{z}],
\end{aligned}$$

где $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \varepsilon_{ij} A_i B_j$ — компонента векторного произведения векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, лежащих в плоскости (x_1, x_2), пер-

пендикулярная этой плоскости. Таким образом

$$\begin{aligned}\langle \Delta \mathbf{z}, \Delta \mathbf{z}\rangle &= \sum_{\Omega}\sum_{\varphi} V_\varphi \Big[\mu(\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b)_\varphi(\Delta_a \mathbf{z}, \Delta_b \mathbf{z})_\varphi + \\ &\qquad +(\mu+\lambda)(\mathbf{l}^a, \Delta_a \mathbf{z})_\varphi(\mathbf{l}^b, \Delta_b \mathbf{z})_\varphi\Big] - \\ &- \mu \sum_{\Omega}\sum_{\varphi} V_\varphi [\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b]_\varphi [\Delta_a \mathbf{z}, \Delta_b \mathbf{z}]_\varphi .\end{aligned}$$

Если последнее слагаемое обратится в ноль, то, с учетом положительности второго, получим

$$\langle \Delta \mathbf{z}, \Delta \mathbf{z}\rangle \geq \mu \sum_{\Omega}\sum_{\varphi} V_\varphi (\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b)_\varphi (\Delta_a \mathbf{z}, \Delta_b \mathbf{z})_\varphi .$$

Но справа компоненты $\mathbf{z}$ «не зацеплены» и сумма расподается на аналогичные суммы для каждой компоненты $\mathbf{z}$ в отдельности. Эти суммы могут быть оценены снизу (см. §§3.3, 5.1), поэтому

$$\langle \Delta \mathbf{z}, \Delta \mathbf{z}\rangle \geq \mu\beta \sum_{\lambda} |\Delta \mathbf{z}|^2,$$

так что справедливо (2.3) с $\varkappa = \mu\beta$.

Покажем теперь, что

$$\sum_{\Omega}\sum_{\varphi} V_\varphi [\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b]_\varphi [\Delta_a \mathbf{z}, \Delta_b \mathbf{z}]_\varphi = 0, \tag{4.4}$$

если $\mathbf{z}(\partial\omega) = 0$, и при выполнении некоторых условий, которые совпадают с условиями сходимости.

Предварительно отметим следующее. В пределах каждой ячейки ориентацию ребер можно выбирать произвольно, при этом величина суммы (4.4) не изменится, т.к. при изменении ориентации ребра a одновременно $\mathbf{l}_a \to -\mathbf{l}_a$ и $\Delta_a \mathbf{z} \to -\Delta_a \mathbf{z}$. Воспользовавшись этим произволом, будем считать, что в пределах каждой ячейки ребра ориентированы в положительном направлении (против часовой стрелки). При этом следует иметь в виду, что при такой точке зрения величины $\mathbf{l}_a$ и $\Delta_a \mathbf{z}$ имеют смысл только в конкретной ячейке. При переходе в соседнюю (по ребру a) ячейку они меняют знак (см. рис.5.3).

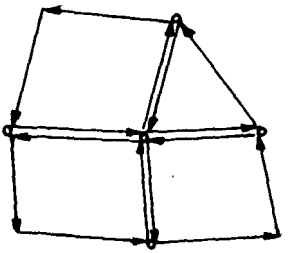


Рис.5.3

Положим для удобства $w_i = \varepsilon_{ij} z_j$, тогда $[\Delta_a \mathbf{z}, \Delta_b \mathbf{z}] = (\Delta_a \mathbf{z}, \Delta_b \mathbf{w})$ и преобразуем (4.4) к виду $\sum\limits_{\omega} (\mathbf{M}, \mathbf{z})$. Собирая в (4.4) множители при $\mathbf{z}(\omega)$, имеем

$$\mathbf{M}(\omega) = -\sum_{\Omega}{}' \sigma_a \Big\{ \sum_{\varphi} V_\varphi [\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b]_\varphi \Delta_b \mathbf{w} \Big\}^a . \qquad (4.5)$$

Здесь $\sum\limits_{\Omega}{}'$ — суммирование по ячейкам, вершиной которых является узел ω; $\sigma_a\{...\}^a$ — суммирование с учетом ориентации по ребрам фиксированной ячейки, выходящим из узла ω, σ_a имеет противоположный знак для одного ребра в соседних ячейках; $\sum\limits_{\varphi}$ — суммирование по базисам с участием ребра a.

Рассмотрим конструкцию $V_\varphi [\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b]_\varphi$. Пусть базис φ образован ребрами с ориентированными длинами $\mathbf{l}_1 = \mathbf{AB}$, $\mathbf{l}_2 = \mathbf{BC}$. Заметим, что (см. рис.5.4)

$$[\mathbf{l}^1, \mathbf{l}^1]_\varphi = [\mathbf{l}^2, \mathbf{l}^2]_\varphi = 0,$$

$$|\mathbf{l}^1_\varphi| = (|\mathbf{l}_1| \sin\varphi)^{-1}, \quad |\mathbf{l}^2_\varphi| = (|\mathbf{l}_2| \sin\varphi)^{-1},$$

$$[\mathbf{l}^1, \mathbf{l}^2]_\varphi = (|\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2| \sin\varphi)^{-1} = -[\mathbf{l}^2, \mathbf{l}^1]_\varphi .$$

Вес базиса V_φ представим в виде $V_\varphi = \eta_\varphi S_{ABC}$, где S_{ABC} — площадь треугольника ABC, так что

$$V_\varphi [\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b]_\varphi = \frac{1}{2} \eta_\varphi \varepsilon^{ab},$$

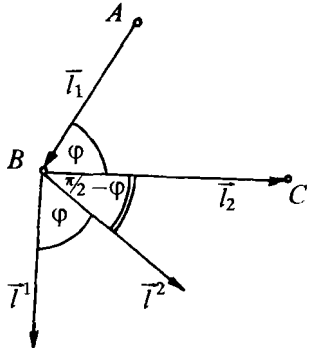


Рис.5.4

где

$$\varepsilon^{ab} = \begin{cases} +1, & \text{если ребро } a \text{ предшествует ребру } b, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На рис.5.4 ребро 1 предшествует ребру 2.

Рассмотрим теперь конструкцию, которая с учетом предыдущих выкладок имеет вид

$$\sigma_a\Big\{\sum_\varphi V_\varphi[\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b]_\varphi \Delta_b \boldsymbol{w}\Big\}^a = \frac{1}{2}\sigma_a\Big\{\sum_\varphi \eta_\varphi \varepsilon^{ab}\Delta_b \boldsymbol{w}\Big\}^a = \frac{1}{2}\mathbf{N}.$$

Пусть ячейка Ω — треугольник ABC, узел ω — вершина A этого треугольника. Тогда $\varphi = \{A, B, C\}$; $\sigma_{CA} = -1$, $\sigma_{AB} = +1$ (см. рис.5.5–a). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= -\eta_C(\boldsymbol{w}_B - \boldsymbol{w}_C) - \eta_A(\boldsymbol{w}_B - \boldsymbol{w}_A) + \\ &+ \eta_A(\boldsymbol{w}_C - \boldsymbol{w}_A) + \eta_B(\boldsymbol{w}_C - \boldsymbol{w}_B) = \\ &= (\eta_A + \eta_B + \eta_C)(\boldsymbol{w}_C - \boldsymbol{w}_B). \end{aligned}$$

Пусть ячейка Ω — четырехугольник $ABCD$, узел ω — вершина A этого четырехугольника. Тогда $\varphi = \{A, B, C, D\}$; $\sigma_{DA} = -1$, $\sigma_{AB} = +1$ (см. рис.5.5–b). Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= -\eta_D(\boldsymbol{w}_C - \boldsymbol{w}_D) - \eta_A(\boldsymbol{w}_B - \boldsymbol{w}_A) + \\ &+ \eta_A(\boldsymbol{w}_D - \boldsymbol{w}_A) + \eta_B(\boldsymbol{w}_C - \boldsymbol{w}_B) = \\ &= -(\eta_A + \eta_B)\boldsymbol{w}_B - (\eta_D - \eta_B)\boldsymbol{w}_C + (\eta_A + \eta_D)\boldsymbol{w}_D. \end{aligned}$$

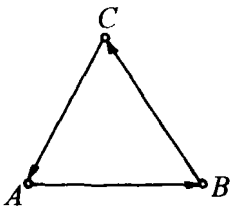


Рис.5.5–a

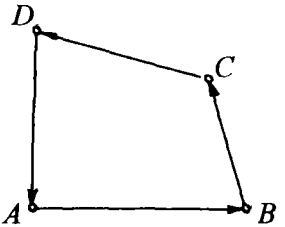


Рис.5.5–b

Рассмотрим наконец (4.5). Если в треугольной ячейке положить $\eta_A + \eta_B + \eta_C = 1$, то $\mathbf{N}(\Omega) = \boldsymbol{w}_C - \boldsymbol{w}_B$ (см. рис.5.5–a). Ясно, что суммирование таких разностей по замкнутому контуру вокруг узла ω даст ноль. Но условие $\eta_A + \eta_B + \eta_C = 1$, как легко видеть, эквивалентно (3.7)

$$\sum_{\varphi} V_\varphi = V.$$

Если в четырехугольной ячейке положить $\eta_B = \eta_D$, $\eta_A + \eta_B = 1$, т.е. коэффициенты η, противоположные по диагонали, равны, а сумма соседних равна 1, то $\mathbf{N}(\Omega) = \boldsymbol{w}_D - \boldsymbol{w}_B$ (см. рис.5.5–b). Суммирование таких разностей по замкнутому контуру вокруг узла ω даст ноль. Но указанные условия эквивалентны (3.8)

$$V_A = \nu V_{ABD}, \quad V_B = (1-\nu)V_{ABC},$$

$$V_C = \nu V_{BCD}, \quad V_D = (1-\nu)V_{ACD}, \quad 0 \le \nu \le 1.$$

Ясно, что сделанное утверждение справедливо и в случае, когда к узлу примыкают как треугольные, так и четырехугольные ячейки.

Итак, при выполнении условий сходимости (3.7) или (3.8), справедливо (4.4) и, следовательно, имеет место разностный аналог первого неравенства Корна (2.3).

§5.5. Сходимость на обобщенных решениях

1°. Настоящий параграф посвящен построению на нерегулярных сетках и исследованию сходимости разност-

ных схем метода опорных операторов на обобщенных решениях для уравнений теории упругости, записанных в смещениях в двумерной плоской геометрии. Чтобы осветить существо возникающих здесь специфических проблем, проведем некоторые рассуждения на качественном уровне.

Известно, что континуальные смещения в сплошной среде локально делятся на три группы движений

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{r}) + (\mathbb{Q}_{\mathbf{U}}, \delta\mathbf{r}) + \frac{1}{2}[\operatorname{rot}\mathbf{U}, \delta\mathbf{r}],$$

параллельный перенос $\mathbf{U}(\mathbf{r})$, деформацию $(\mathbb{Q}_{\mathbf{U}}, \delta\mathbf{r})$, определяемую симметризованным тензором смещений $\mathbb{Q}_{\mathbf{U}}$, и, наконец, твердотельное вращение на угол $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{U}$. Причем физические характеристики среды — тензор напряжений $\mathbb{T}_{\mathbf{U}} = 2\mu\mathbb{Q}_{\mathbf{U}} + \nu\operatorname{tr}(\mathbb{Q}_{\mathbf{U}})\delta$ и энергия деформации

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{O}}\Big(2\mu\operatorname{tr}(\mathbb{Q}_{\mathbf{U}}\mathbb{Q}_{\mathbf{U}}) + \nu\operatorname{tr}^2(\mathbb{Q}_{\mathbf{U}})\Big)\mathrm{d}V$$

не зависят ни от первой, ни от третьей группы движений, а определяются только деформацией. Здесь $\mu > 0$ и $\nu \geq 0$ — коэффициенты Ламе (об остальных обозначениях см. п.2).

Отнесем сеточную функцию смещений $\mathbf{u}$ к узлам ω (см. рис.5.6) и составим всевозможные приращения $\Delta_\lambda\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\omega'} - \mathbf{u}_\omega$ на ребрах λ. Полученное таким образом естественное поле инкрементов $\partial_\lambda = \Delta_\lambda\mathbf{u}$ исключает лищь первую группу движений — параллельный перенос, оставляя в себе третью — твердотельное вращение. Чтобы обеспечить на разностном уровне инвариантность физических характеристик среды к поворотам (твердотельным), из естественного поля инкрементов ∂_λ в «чистом» виде выделяется деформация, т.е. симметризованная составляющая поля $(\partial_{\|\lambda}, \Delta_\varphi\partial_\perp)$, только от которой зависит сеточный аналог симметризованного тензора смещений $Q_{\partial\cdot\varphi}$ в базисах φ (см. рис.5.6). Остановимся подробнее на структуре симметризованного поля инкрементов $(\partial_{\|\lambda}, \Delta_\varphi\partial_\perp)$. Величина $\partial_{\|\lambda}$ представляет собой продольную деформацию ребра λ (фигурирующую в законе Гу-

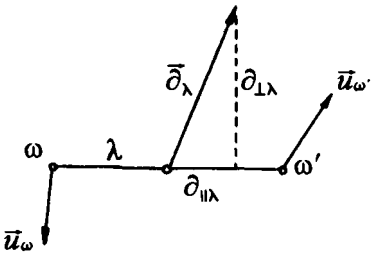


Рис.5.6

ка), в то время как $\Delta_\varphi \partial_\perp = \partial_{\perp\lambda'} - \partial_{\perp\lambda}$ суть вращательная деформация базиса φ, углы поворотов ребер которого равны $\partial_{\perp\lambda}$ и $\partial_{\perp\lambda'}$ соответственно.

В пространстве продольных и вращательных деформаций $\mathcal{H}_{\lambda\varphi}$ вводится симметризованная норма

$$\|\partial\|^2_{\lambda\varphi} = h^4\left(\sum_\lambda \partial^2_{\parallel\lambda} + \sum_\varphi \Delta^2_\varphi \partial_\perp\right).$$

Естественность введения симметризованной нормы $\|\cdot\|_{\lambda\varphi}$ может быть проиллюстрирована примером на рис.5.7 («Эффект подшипника»).

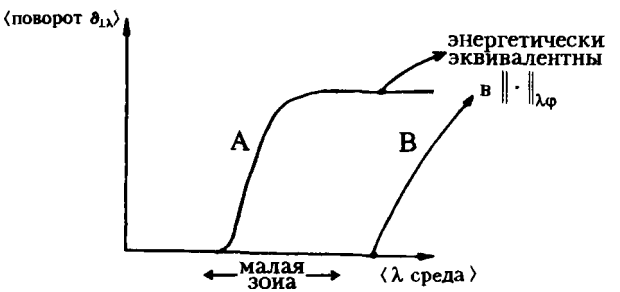


Рис.5.7

Среды (A и B) с нетвердотельностью вращений на малых пространственных мерах суммирования энергетически эквивалентны в норме $\|\cdot\|_{\lambda\varphi}$, что не имеет места, например, в разностных аналогах среднеквадратичных

норм на естественном поле инкрементов

$$\|\partial\|^2_{h\lambda} \sim h^4 \sum_{\lambda} (\partial^2_{\|\lambda} + \partial^2_{\perp\lambda}).$$

Сходимость в симметризованной норме $\|\cdot\|_{\lambda\varphi}$ есть сходимость в среднеквадратичном смысле по «чистым» деформациям, только от которых зависит симметризованный тензор смещений $Q_{\partial}.\varphi$ и, следовательно, это есть обобщенная сходимость по физическим процессам в сплошной среде (полю напряжений и энергии деформации).

В настоящем параграфе на нерегулярных сетках построены и исследованы инвариантные к поворотам разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости в смещениях в двумерной плоской геометрии. Доказана сходимость этих схем на обобщенных решениях с первым порядком в среднеквадратичном смысле по компонентам симметризованного тензора смещений.

2°. Семейство разностных схем метода опорных операторов.

В пространственно-двумерной плоской области $\mathcal{O}$ с границей $\partial\mathcal{O}$ рассмотрим уравнения теории упругости в смещениях [24]:

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \mathbb{T}\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0, \\ \mathbb{T}\mathbf{u} = 2\mu\mathbb{Q}\mathbf{u} + \nu \operatorname{tr}(\mathbb{Q}\mathbf{u})\delta, \quad \mathbb{Q}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\Big(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} + \nabla\mathbf{u}\Big), \end{gathered} \tag{5.1}$$

(с некоторыми граничными условиями) наряду с соответствующим интегральным соотношением

$$\int_{\mathcal{O}} \operatorname{tr}(\nabla\mathbf{u}\mathbb{T}^+)dV + \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbb{T})dV = \int_{\partial\mathcal{O}} (\mathbb{T}\mathbf{u}, d\mathbf{s}),$$

$$\operatorname{tr}(\nabla\mathbf{u}\mathbb{T}^+) = \operatorname{tr}\Big(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\mathbb{T}\Big) = \operatorname{tr}(\mathbb{Q}_{\mathbf{u}}\mathbb{T})\Big|_{\mathbb{T}=\mathbb{T}^+}.$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор смещений, $\mathbb{T}$ — тензор, $\mathbb{T}\mathbf{u}$ — тензор напряжений, $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ — объемная плотность внешних сил в

пространственной точке $\mathbf{r}$, $\mu > 0$, $\nu \geq 0$ — коэффициенты Ламе, δ — метрический тензор. Символом $\mathrm{tr}\mathbb{T}$ обозначается след тензора $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}^+$ — транспонированный тензор.

В области $\mathcal{O}$ введем семейство нерегулярных разностных сеток. Ограничимся случаем, когда сетка состоит из треугольных и четырехугольных ячеек (Ω), базисов (φ), узлов (ω), ребер (λ) и связанных с ними ($\sigma(\lambda)$) — границами балансных узловых доменов $\mathrm{d}(\omega)$ (см. рис.5.8).

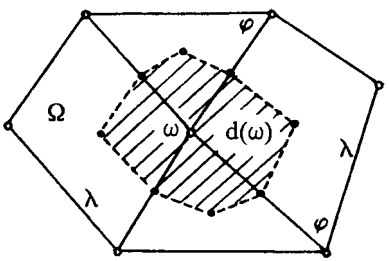


Рис.5.8

Базисы φ создаются системой исходных (ковариантных) ортов $\mathbf{l}(\lambda)$, образованных ребрами. Под центрами ячеек Ω и ребер λ будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов ω их образующих. Кривая, соединяющая эти центры (двух смежных через ребро ячеек или ячейку с граничным ребром $\partial\lambda$), представляет собой поверхность

$$\boldsymbol{\sigma}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi\, \mathbf{l}'.\varphi(\lambda),$$

ориентированную также как и орт $\mathbf{l}(\lambda)$. Здесь $\mathbf{l}'.\varphi(\lambda)$ — орты взаимных (контравариантных) базисов по отношению к исходным базисам, образованным ортами $\mathbf{l}(\lambda)$ (см. рис.5.9). Базисный объем дается формулой

$V.\varphi = 1/6|[\mathbf{l}(\lambda_1), \mathbf{l}(\lambda_2)]|$ — для треугольной ячейки Ω, содержащей базис φ;

$V.\varphi = 1/4|[\mathbf{l}(\lambda_1), \mathbf{l}(\lambda_2)]|$ — для четырехугольной ячейки,

где $\lambda_1(\varphi)$ и $\lambda_2(\varphi)$ — ребра, образующие базис φ.

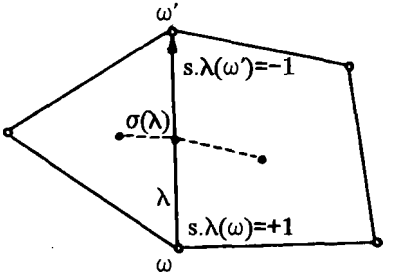


Рис.5.9

Наконец, $\sum\limits_{\varphi(\lambda)}$ — суммирование по всем базисам φ, в образовании которых приняло участие ребро λ. Замкнутые вокруг узла ω поверхности $(\sigma(\lambda(\omega)))$ образуют узловые домены $\mathrm{d}(\omega)$.

Будем считать сетку связной в следующем смысле:

1) Из любого узла в любой другой узел можно попасть, двигаясь по ребрам.

2) Существует непустое множество граничных ребер (λ_0), таких что в паре узлов $(\omega(\lambda_0))$, образующих ребро λ_0, задана нормальная компонента смещений $\mathbf{U}(\omega)-$ $-(\mathbf{U}(\omega),\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор вдоль ребра λ_0. Из любого ребра λ можно попасть в (λ_0) двигаясь от ребра к ребру по базисам $(\varphi(\lambda,(\lambda_0)))$.

Подробность разбиения области будем характеризовать параметром h, который определим как

$$h=\sqrt{\mathrm{mes}\,\mathcal{O}/N},$$

где N — число узлов сетки.

К узлам отнесем искомую сеточную функцию $\mathbf{u}$. На ребрах выделим положительное направление (см. рис. 5.9) и отнесем к ним сеточную функцию

$$\Delta_\lambda\mathbf{u}=-\sum_{\omega(\lambda)}s.\lambda(\omega)\mathbf{u}_\omega=\mathbf{u}_{\omega'}-\mathbf{u}_\omega.$$

Наконец сеточные тензорные поля T задаются своими представлениями в базисах $T.\varphi$.

Внутреннюю дивергенцию тензорного поля

$$\mathrm{DIN} : (\varphi) \to (\omega)$$

определим аппроксимируя теорему Гаусса на $\mathrm{d}(\omega)$

$$\mathrm{DIN}\, T = \sum_{\lambda(\omega)} s.\lambda(\omega)\boldsymbol{\tau}_T(\lambda),$$

$$\boldsymbol{\tau}_T(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi(\mathbf{l}'.\varphi(\lambda), T.\varphi).$$

$\sum\limits_{\lambda(\omega)}$ — суммирование по всем ребрам λ, имеющим общий узел ω. Обозначая через $(\cdot)_{\underline{\Delta}}$ аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем

$$\Big(\int\limits_{\mathcal{O}} \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{U}\mathbb{T}^+)\mathrm{d}V\Big)_{\underline{\Delta}} = -\Big(\int\limits_{\mathcal{O}} (\mathbf{U},\, \mathrm{div}\,\mathbb{T})\mathrm{d}V - \int\limits_{\partial\mathcal{O}} (\mathbb{T}\mathbf{U}, \mathrm{d}\mathbf{s})\Big)_{\underline{\Delta}} =$$
$$= -\sum_{\omega}(\mathbf{u}_\omega,\, \mathrm{DIN}\, T) = \sum_{\varphi} V.\varphi\, \mathrm{tr}\Big(\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}\mathbf{r}}.\varphi\, T.\varphi\Big) =$$
$$= \sum_{\varphi} V.\varphi\, \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{u}.\varphi T^+) \equiv \langle \nabla\mathbf{u}, T\rangle = \langle T, \nabla\mathbf{u}\rangle =$$
$$= \sum_{\varphi} V.\varphi\, \mathrm{tr}(Q_{\Delta\mathbf{u}}.\varphi\, T.\varphi)\Big|_{T.\varphi = T.\varphi^+} = \langle Q_{\Delta\mathbf{u}}, T\rangle.$$

Здесь конструкция $\langle \nabla\mathbf{u}, T\rangle$ определяется как скалярное произведение сеточных тензорных полей, аппроксимирующее $\int\limits_{\mathcal{O}} \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{U}\mathbb{T}^+)\mathrm{d}V$.

Тензорные поля $\mathrm{D}\mathbf{u}/\mathrm{D}\mathbf{r}$, $\nabla\mathbf{u}$ и $Q_{\Delta\mathbf{u}}$, а также тензорное поле напряжений $T_{\Delta\mathbf{u}}$ даются своими представлениями в базисах.

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}\mathbf{r}}.\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_\lambda\mathbf{u}\mathbf{l}'.\varphi(\lambda), \qquad \nabla\mathbf{u}.\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)} \mathbf{l}'.\varphi(\lambda)\Delta_\lambda\mathbf{u},$$

$$Q_{\Delta\mathbf{u}}.\varphi = \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}\mathbf{r}}.\varphi + \nabla\mathbf{u}.\varphi\Big),$$
$$T_{\Delta\mathbf{u}}.\varphi = 2\mu Q_{\Delta\mathbf{u}}.\varphi + \nu\mathrm{tr}(Q_{\Delta\mathbf{u}}.\varphi)\delta.$$

Под $\sum\limits_{\lambda(\varphi)}$ понимается суммирование по ребрам λ, образующим базис φ.

Вообще, произвольному сеточному векторному полю инкрементов $\partial_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda$ на ребрах λ (которому соответствует некоторое поле смещений $\partial^\&$) сопоставим поле симметризованного тензора смещений Q_∂ и поле тензора напряжений T_∂ по формулам:

$$Q_\partial.\varphi = \frac{1}{2}\sum_{\lambda(\varphi)}(\partial_\lambda \mathbf{l}'.\varphi(\lambda) + \mathbf{l}'.\varphi(\lambda)\partial_\lambda) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{D}\partial^\&}{\mathrm{D}\mathbf{r}}.\varphi + \nabla\partial^\&.\varphi\Big),$$

$$T_\partial.\varphi = 2\mu Q_\partial.\varphi + \nu\mathrm{tr}(Q_\partial.\varphi)\delta.$$

Для вариации континуального векторного поля смещений $\delta\mathbf{U}$ на расстоянии $\delta\mathbf{r}$ справедливо $\delta\mathbf{U} = (\mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}\mathbf{r}, \delta\mathbf{r})$. В силу определения взаимного базиса $(\mathbf{l}(\lambda), \mathbf{l}'.\varphi(\lambda')) = \delta_{\lambda\lambda'}$ для ребра $\lambda(\varphi)$ очевиден сеточный аналог этого соотношения

$$\Delta_\lambda \mathbf{u} = \Big(\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}\mathbf{r}}.\varphi, \mathbf{l}(\lambda)\Big).$$

Уточним также силу $\boldsymbol{\tau}_T(\lambda)$, действующую на поверхность $\sigma(\lambda)$ в поле напряжений $T_{\Delta\mathbf{u}}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_{T\Delta\mathbf{u}}(\lambda) &= \sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi(\mathbf{l}'.\varphi(\lambda), T_{\Delta\mathbf{u}}.\varphi) = \\
&= \sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi\Big\{\mu\sum\lambda'(\varphi)\Big[(\mathbf{l}'.\varphi(\lambda), \mathbf{l}'.\varphi(\lambda'))\Delta_{\lambda'}\mathbf{u} + \\
&+ (\mathbf{l}'.\varphi(\lambda), \Delta_{\lambda'}\mathbf{u})\mathbf{l}'.\varphi(\lambda')\Big] + \\
&+ \nu\mathbf{l}'.\varphi(\lambda)\sum_{\lambda'(\varphi)}(\mathbf{l}'.\varphi(\lambda'), \Delta_{\lambda'}\mathbf{u})\Big\}.
\end{aligned}$$

На поле инкрементов $\partial_\lambda \in \mathcal{H}_{\lambda 0}$, таких, что $[\partial_{\lambda 0}, \mathbf{l}(\lambda_0)] = 0$ (т.е. не вращающем среду твердотельно) эта сила определяет самосопряженный положительноопределенный метрический оператор

$$\mathcal{G}_0 : (\lambda) \to (\lambda), \qquad \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0^* > 0.$$

$$\boldsymbol{\tau}_{T\partial}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi(\mathbf{l}'.\varphi(\lambda), T_\partial.\varphi),$$

т.е.

$$\boldsymbol{\tau}_{T\partial} = \mathcal{G}_0\partial.$$

Для $\partial 1_\lambda$ и $\partial 2_\lambda$ из $\mathcal{H}_{\lambda 0}$ скалярные произведения $(\partial 1, \partial 2)_\lambda$ и $\langle\langle \partial 1, \partial 2\rangle\rangle$ определяются по формулам:

$$(\partial 1, \partial 1)_\lambda = \sum_\lambda (\partial 1_\lambda, \partial 2_\lambda),$$

$$(\partial 1, \mathcal{G}_0\partial 2)_\lambda = \sum_\varphi V.\varphi\Big[2\mu \mathrm{tr}(Q_{\partial 1}.\varphi Q_{\partial 2}.\varphi)+$$

$$+\nu \mathrm{tr}(Q_{\partial 1}.\varphi)\mathrm{tr}(Q_{\partial 2}.\varphi)\Big] = (\mathcal{G}_0\partial 1, \partial 2)_\lambda =$$

$$= \langle \nabla \partial 1^{\&}, T_{\partial 2}\rangle = \langle \nabla \partial 2^{\&}, T_{\partial 1}\rangle \equiv \langle\langle \partial 1, \partial 2\rangle\rangle.$$

Энергия деформации среды, производимой полем инкрементов ∂_λ, есть энергия метрического оператора в этом поле

$$(\mathcal{G}_0\partial, \partial)_\lambda = \langle\langle \partial, \partial\rangle\rangle.$$

Инкремент ∂_λ разложим на продольную деформацию ребра $\partial_{\|\lambda}$ и его поворот $\partial_{\perp\lambda}$

$$\partial_\lambda = \partial_{\|\lambda}\mathbf{l}(\lambda) + \partial_{\perp\lambda}\mathbf{l}_\perp(\lambda), \qquad \mathbf{l}_\perp(\lambda) = [\mathbf{k}.\mathbf{l}(\lambda)].$$

Здесь $\mathbf{k}$ — единичный орт к плоскости области $\mathcal{O}$. Надо иметь ввиду, что поскольку орты $\mathbf{l}(\lambda)$, $\mathbf{l}_\perp(\lambda)$ являются малыми порядка h, то величины $\partial_{\|\lambda}$ и $\partial_{\perp\lambda}$ получились умножением продольной и поперечной компонент ∂_λ на $1/h$.

Определим нормы:

$$\|\partial\|^2_\lambda = (\partial, \partial)_\lambda,$$

$$\|\partial\|^2_{h\lambda} = h^2(\partial, \partial)_\lambda = h^2 \sum_\lambda \mathbf{l}(\lambda)^2(\partial^2_{\|\lambda} + \partial^2_{\perp\lambda}) \leq$$

$$\leq \gamma_3 h^4 \sum_\lambda (\partial^2_{\|\lambda} + \partial^2_{\perp\lambda}),$$

$$\gamma_3 h^2 = \max_\lambda |\mathbf{l}(\lambda)|^2$$

и симметризованную норму

$$\|\partial\|^2_{\lambda\varphi} = h^4\Big(\sum_{\lambda} \partial^2_{\|\lambda} + \sum_{\varphi} \Delta^2_{\varphi}\partial_{\perp}\Big), \quad \Delta_{\varphi}\partial_{\perp} = \partial_{\perp\lambda b} - \partial_{\perp\lambda a}.$$

В базисах выделено положительное направление от a к b (см. рис.5.10).

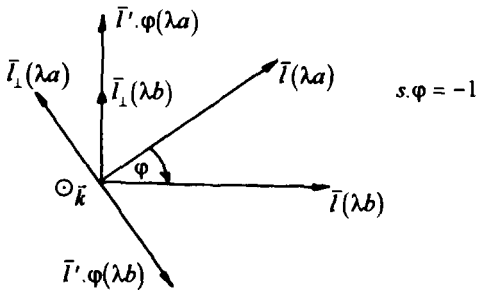


Рис.5.10

Член $\Delta^2_{\varphi}\partial_{\perp} = (\partial_{\perp\lambda b} - \partial_{\perp\lambda a})^2$ связан с тем, что поле симметризованого тензора смещений Q_{∂} зависит только от $\partial_{\|\lambda}$ и разности $\Delta_{\varphi}\partial_{\perp}$ (см. ниже).

Пространство скаляров, отнесенных ко всем ребрам и базисам (λ, φ) области $\mathcal{O}$ назовем $\mathcal{H}_{\lambda\varphi}$. Установим некоторые неравенства, характеризующие сетку. В силу связности сетки справедливо

$$\partial_{\perp\lambda} = \sum_{\varphi(\lambda,(\lambda_0))} \Delta_{\varphi}\partial_{\perp}, \quad \partial^2_{\partial\lambda} \le \gamma_4/h \sum_{\varphi(\lambda,(\lambda_0))} \Delta^2_{\varphi}\partial_{\perp},$$

$$\gamma_4/h = \max_{\lambda} \sum_{\varphi(\lambda,(\lambda_0))} 1,$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{\varphi(\lambda,(\lambda_0))} \Delta^2_{\varphi}\partial_{\perp} \le \frac{\gamma_5}{h^{1+\beta}} \sum_{\varphi} \Delta^2_{\varphi}\partial_{\perp},$$

$$\beta = \begin{cases} 0, & (\lambda) \text{ связно с } (\lambda_0) \text{ и отображается} \\ & \text{на линию из } (\lambda_0), \\ 1, & (\lambda) \text{ связно с } (\lambda_0). \end{cases}$$

Отсюда

$$\sum_{\lambda} \partial_{\perp\lambda}^2 \leq \frac{\gamma_4\gamma_5}{h^{2+\beta}} \sum_{\varphi} \Delta_{\varphi}^2 \partial_{\perp},$$

окончательно

$$\begin{gathered} \|\partial\|_{h\lambda}^2 \leq \frac{\gamma_3\gamma_6}{h^{2+\beta}} \|\partial\|_{\lambda\varphi}^2, \\ \gamma_6 = \max\Big\{h^{2+\beta}, \gamma_4\gamma_5\Big\}. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Параметры γ_3, γ_4, γ_5, γ_6 и β не зависят от h и характеризуют структуру и степень связности множества граничных ребер (λ_0) и множества всех ребер (λ) области $\mathcal{O}$.

Симметризованный тензор смещений Q_∂ может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} &Q_\partial.\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)} \partial_{\|\lambda}\delta.\varphi_\lambda + \Delta_\varphi \partial_\perp \gamma.\varphi_{\lambda b}, \\ &\delta.\varphi\lambda = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{l}(\lambda)\mathbf{l}'.\varphi(\lambda) + \mathbf{l}'.\varphi(\lambda)\mathbf{l}(\lambda)\Big), \qquad \sum_{\lambda(\varphi)} \delta.\varphi_\lambda = \delta, \\ &\gamma.\varphi_\lambda = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{l}_\perp(\lambda)\mathbf{l}'.\varphi(\lambda) + \mathbf{l}'.\varphi(\lambda)\mathbf{l}_\perp(\lambda)\Big), \\ &\sum_{\lambda(\varphi)} \gamma.\varphi_\lambda = \gamma.\varphi_{\lambda a} + \lambda.\varphi_{\lambda b} = 0. \end{aligned}$$

Зависимость тензора $Q_\partial.\varphi$ только от $\partial_{\|\lambda}$ и разности $\Delta_\varphi\partial_\perp$ является важным свойством разностной схемы. Схемы, обладающие этим свойством, будем называть нейтральными по отношению к поворотам (твердотельным вращениям). Это означает, что все силовые характеристики среды, определяемые полем тензора напряжений T_∂, и энергия деформации системы $(\mathcal{G}_0\partial, \partial)_\lambda$, определяемые только через поле симметризованного тензора смещений Q_∂ не зависят от поворотов $\partial_{\perp\lambda} = \mathrm{const}$.

Вычислим

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(Q_\partial.\varphi\, Q_\partial.\varphi) = \frac{1}{2}\Big[&\partial_{\|\lambda a}^2 + \partial_{\|\lambda b}^2 + \Delta_\varphi^2\partial_\perp + \\ &+ (\partial_{\|\lambda b} - \partial_{\|\lambda a})^2 \mathrm{ctg}^2\varphi + \end{aligned}$$

$$+ (\partial_{\|\lambda a} + \Delta_\varphi \partial_\perp \, s.\varphi \operatorname{ctg}\varphi)^2 +$$
$$+ (\partial_{\|\lambda b} + \Delta_\varphi \partial_\perp \, s.\varphi \operatorname{ctg}\varphi)^2 \Big].$$

По исходным ортам $\mathbf{l}(\lambda_a)$, $\mathbf{l}(\lambda_b)$, образующим базис φ (см. рис.5.10), определен буравчик

$$s.\varphi = \begin{cases} +1, & a \nearrow\!\searrow b \\ -1, & a \nwarrow\!\searrow b \end{cases} \qquad \odot\, \mathbf{k}.$$

Далее, поскольку

$$\operatorname{tr}(\delta.\varphi_\lambda) = 1,$$

$$\operatorname{tr}(\gamma.\varphi_{\lambda b}) = (\mathbf{l}_\perp(\lambda b), \mathbf{l}'.\varphi(\lambda b)) = s.\varphi \operatorname{ctg}\varphi,$$

имеем

$$0 \le \operatorname{tr}^2(Q_\partial.\varphi) = \Big(\sum_{\varphi(\lambda)} \partial_{\|\lambda} + \Delta_\varphi \partial_\perp s.\varphi \operatorname{ctg}\varphi\Big)^2 \le$$
$$\le 3\partial^2_{\|\lambda a} + 3\partial^2_{\|\lambda b} + 3\operatorname{ctg}^2\varphi \, \Delta^2_\varphi \partial_\perp.$$

Отсюда

$$\mu \, V.\varphi\Big(\sum_{\lambda(\varphi)} \partial^2_{\|\lambda} + \Delta^2_\varphi \partial_\perp\Big) \le V.\varphi\Big[2\mu \operatorname{tr}(Q_\partial.\varphi \, Q_\partial.\varphi) +$$
$$+ \nu \operatorname{tr}^2(Q_\partial.\varphi)\Big] \le V.\varphi\Big\{\Big[(3 + 2\operatorname{ctg}^2\varphi)\mu + 3\nu\Big] \sum_{\lambda(\varphi)} \partial^2_{\|\lambda} +$$
$$+ \Big[(1 + 4\operatorname{ctg}^2\varphi)\mu + 3\nu \operatorname{ctg}^2\varphi\Big] \Delta^2\varphi \partial_\perp\Big\}.$$

Суммируя по базисам φ, получим

$$\mu\Big[\sum_\lambda V.\lambda \, \partial^2_{\|\lambda} + \sum_\varphi V.\varphi \, \Delta^2_\varphi \partial_\perp\Big] \le \langle\langle \partial, \partial \rangle\rangle \le$$
$$\le \sum_\lambda \Big(\sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi\Big[(3 + 2\operatorname{ctg}^2\varphi)\mu + 3\nu\Big]\Big) \partial^2_{\|\lambda} +$$
$$+ \sum_\varphi V.\varphi\Big[(1 + 4\operatorname{ctg}^2\varphi)\mu + 3\nu \operatorname{ctg}^2\varphi\Big] \Delta^2_\varphi \partial_\perp,$$
$$V.\lambda = \sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi.$$

Окончательно

$$\gamma_1\|\partial\|^2_{\lambda\varphi} \le h^2\langle\langle\partial,\partial\rangle\rangle \le \gamma_2\|\partial\|^2_{\lambda\varphi},$$

$$\gamma_1 h^2 = \mu \min V.\varphi > 0,$$

$$\gamma_2 h^2 = \max_{\lambda,\varphi}\Big\{\sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi\Big[(3+2\mathrm{ctg}^2\varphi)\mu + 3\nu\Big], \tag{5.3}$$

$$V.\varphi\Big[(1+4\mathrm{ctg}^2\varphi)\mu + 3\nu\mathrm{ctg}^2\varphi\Big]\Big\}.$$

Пространства $\mathcal{H}_{\lambda 0} \subset \mathcal{H}_\lambda$ образуют в $\mathcal{H}_{\lambda\varphi}$ подпространства из элементов $(\partial_{\|\lambda}, \Delta_\varphi\partial_\perp)$ потенциальные по приращениям вращений $\Delta_\varphi\partial_\perp$. Параметры γ_1 и γ_2 не зависят от h и являются константами энергетической эквивалентности норм $\sqrt{h^2\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle}$ и $\|\cdot\|_{\lambda\varphi}$ в этих пространствах.

3°. Оценка скорости сходимости.

Пусть на множестве узлов $(\partial\omega)$ граничных в том смысле, что в направлениях α (также представляющих собой некоторое множество) заданы компоненты вектора смещений $(\mathbf{U}_\alpha)_{\partial\omega}$ (первая краевая задача). Тогда на множестве дополняющих направлений $/\alpha$ задаются некоторые балансные уравнения $(\ldots)_{/\alpha}$. Сделав это замечание, для уравнения (5.1) рассмотрим краевую задачу

$$\mathrm{DIN}\, T_{\Delta\mathbf{u}} = -\mathbf{F} = -\int\limits_{\mathrm{d}(\omega)} \mathbf{f}(\mathbf{r})\mathrm{d}V - \int\limits_{\partial\mathcal{O}\cap\mathrm{d}(\omega)} (\mathrm{d}\mathbf{s}, T_{\mathbf{U}}),$$

$$\omega \in (\omega)\setminus(\partial\omega), \tag{5.4}$$

$$(\mathbf{u}_\alpha)_\omega = (\mathbf{U}_\alpha)_{\partial\omega}, \quad (\mathrm{DIN}\, T_{\Delta\mathbf{u}} = -\mathbf{F})_{/\alpha},$$

$$\omega \in (\partial\omega).$$

Множество α в $(\omega)\setminus(\partial\omega)$ пусто, поэтому индекс $/\alpha$ подразумевается, его будем всюду опускать.

С другой стороны, обозначая континуальную силу, действующую на поверхность $\sigma(\lambda)$

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbb{T}\mathbf{u}}(\lambda) = \int\limits_{\sigma(\lambda)} (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{T}\mathbf{u}),$$

результат точного применения теоремы Гаусса на узловом домене $\mathrm{d}(\omega)$ запишем в виде

$$\sum_{\lambda(\omega)} s.\lambda(\omega)\,\boldsymbol{\tau}_{\mathbb{T}\mathbf{u}}(\lambda) = -\mathbf{F}.$$

Вычитая (5.4) и вводя в узлах вектор ошибки $\boldsymbol{z} = \mathbf{U} - \mathbf{u}$, $(\boldsymbol{z}_\alpha)_{\partial\omega} = 0$ будем иметь

$$\sum_{\lambda(\omega)} s.\lambda(\omega)\Big(\boldsymbol{\tau}_{\mathbb{T}\mathbf{u}}(\lambda) - \mathcal{G}_0\Delta\mathbf{U}(\lambda)\Big) = -\sum_{\lambda(\omega)} s.\lambda(\omega)\mathcal{G}_0\Delta\boldsymbol{z}(\lambda) =$$
$$= -\,\mathrm{DIN}\,T_{\Delta\boldsymbol{z}}.$$

Умножая на $\boldsymbol{z}_\omega$, суммируя по узлам и перегруппировывая члены, окончательно получим

$$((\mathcal{G}_0\Delta\mathbf{U} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbb{T}\mathbf{u}}), \Delta\boldsymbol{z})_\lambda = \langle\langle\Delta\boldsymbol{z}, \Delta\boldsymbol{z}\rangle\rangle.$$

Обозначая

$$\Psi = \|\mathcal{G}_0\Delta\mathbf{U} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbb{T}\mathbf{u}}\|_\lambda,$$

в силу неравенства Буняковского имеем

$$\langle\langle\Delta\boldsymbol{z}, \Delta\boldsymbol{z}\rangle\rangle \le \Psi\|\Delta\boldsymbol{z}\|_\lambda,$$

отсюда и из (5.3) следует

$$\|\Delta\boldsymbol{z}\|^2_{\lambda\varphi} \le \frac{Hh}{\gamma_1}\|\Delta\boldsymbol{z}\|_{h\lambda}.$$

Учитывая (5.2) преобразуем это неравенство к виду

$$\|\Delta\boldsymbol{z}\|_{\lambda\varphi} \le \frac{\sqrt{\gamma_3\gamma_6}}{\gamma_1}\Psi h^{\beta/2}.$$

Оценим величину Ψ в правой части последнего неравенства. Для этого представим

$$\Psi^2 = \sum_\lambda |\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{U})|^2_\lambda,$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{U}) = \mathcal{G}_0\Delta\mathbf{U} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbb{T}\mathbf{u}} = \mathcal{G}_0\int\limits_{\lambda'}(\mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\lambda') - \int\limits_{\sigma(\lambda)}(\mathrm{d}\sigma, \mathbb{T}\mathbf{u}).$$

Изучая вопросы аппроксимации будем предполагать, что решение дифференциальной задачи $U_i(\mathbf{r}) \in H^2(\mathcal{O})$. Нормы в пространствах Соболева $H^k(\mathcal{O})$ определяются формулами

$$\|\mathbf{U}\|^2_{k,\mathcal{O}} = \sum_{i=1}^{n} \|U_i\|^2_{k,\mathcal{O}} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathcal{O}} \sum_{|\alpha|\le k} |\mathrm{D}^\alpha U_i(\mathbf{r})|^2 \mathrm{d}V,$$

а полунормы

$$|\mathbf{U}|^2_{k,\mathcal{O}} = \sum_{i=1}^{n} |U_i|^2_{k,\mathcal{O}} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathcal{O}} \sum_{|\alpha|=k} |\mathrm{D}^\alpha U_i(\mathbf{r})|^2 \mathrm{d}V.$$

Здесь $n = 2$ — размерность пространства, $\mathbf{r} = (x_i)$.

Согласно [36] функции $U_i(\mathbf{r}) \in H^2(\mathcal{O})$ можно продлить на всю плоскость (x_1, x_2) таким образом, что

$$|U_i|_{2,\mathrm{R}^2} \le \gamma_0 |U_i|_{2,\mathcal{O}},$$

т.е.

$$|\mathbf{U}|_{2,\mathrm{R}^2} \le \gamma_0 |\mathbf{U}|_{2,\mathcal{O}}$$

с постоянной γ_0, не зависящей от $\mathbf{U}$.

Очевидно $\partial U_i/\partial x_j \in H^1(\mathcal{O})$ покомпонентно. Вследствие вложений $H^2(\mathcal{O})$ в $L^1(\lambda)$ и в $L^1(\sigma)$ [20] имеют смысл интегралы

$$\int\limits_{\lambda} (\mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\lambda) \quad \text{и} \quad \int\limits_{\sigma} (\mathrm{d}\sigma, \mathbb{T}\mathbf{u}).$$

Сеточная функция $\mathbf{U}_\omega$ определена в силу вложения $H^2(\mathcal{O})$ в $C(\bar{\mathcal{O}})$.

Далее тождество

$$\Delta\mathbf{U} = \int\limits_{\lambda} (\mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\lambda)$$

имеет место в силу свойства абсолютной непрерывности функций U_i по переменной x_j (имеющиш в $\mathcal{O}$ обобщенную производную $\partial U_i/\partial x_j$) [20].

Каждому ребру λ поставим в соответствие круг K с независящим от λ радиусом $\rho = \mathrm{O}(h)$, содержащий в себе:

1. ячейки $(\Omega(\lambda))$ с общим ребром λ;
2. круги $K_{\lambda'}$, построенные на ребрах $(\lambda'(\Omega(\lambda)))$ этих ячеек как на диаметрах;
3. круги K_σ, построенные как на диаметрах на отрезках поверхности $\sigma(\lambda)$, содержащихся в ячейках $(\Omega(\lambda))$.

Сделаем линейное преобразование переменных

$$\mathbf{r}_y = \mathbf{r}/\rho, \qquad \mathbf{V}(\mathbf{r}_y) = \mathbf{U}(\rho\mathbf{r}_y),$$

$$\partial V_i/\partial y_j = \partial U_i(\rho\mathbf{r}_y)/\partial y_j = \rho\partial U_i/\partial x_j,$$

$$\mathbb{Q}_{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}\mathbf{r}_y + \nabla_y\mathbf{V}) = \rho\mathbb{Q}_{\mathbf{U}},$$

$$\mathbb{T}_{\mathbf{V}} = 2\mu\mathbb{Q}_{\mathbf{V}} + \nu\mathrm{tr}(\mathbb{Q}_{\mathbf{V}})\delta = \rho\mathbb{T}_{\mathbf{U}},$$

$$\mathbf{l}_y = \mathbf{l}/\rho, \quad \mathbf{l}'.\varphi_y = \rho\mathbf{l}'.\varphi, \quad V.\varphi_y = V.\varphi/\rho^2,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi_y\mathbf{l}'.\varphi_y(\lambda) = \boldsymbol{\sigma}(\lambda)/\rho,$$

$$Q_\partial.\varphi_y = \rho Q_\partial.\varphi, \quad T_\partial.\varphi_y = \rho T_\partial.\varphi, \quad \mathcal{G}_{0y} = \mathcal{G}_0,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_y = \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}/\rho, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_y = \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}/\rho,$$

$$\int\limits_{\lambda}(\mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}\mathbf{r}_y, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_y) = \int\limits_{\lambda}(\mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}),$$

$$\int\limits_{\sigma(\lambda)}(\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_y, \mathbb{T}_{\mathbf{V}}) = \int\limits_{\sigma(\lambda)}(\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{T}_{\mathbf{U}}).$$

В результате преобразования круг K отобразится в круг единичного радиуса K_y, круги $K_{\lambda'}$ и K_σ — в круги $K_{\lambda'y}$

и $K_{\sigma y}$ радиуса меньше единицы, а функционал $\mathbf{\Phi}(\mathbf{U})$ примет вид

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{V}) = \mathcal{G}_0 \int\limits_{\lambda} (\mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}\mathbf{r}_y, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_y) - \int\limits_{\sigma(\lambda)} (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_y, \mathbb{T}\mathbf{v}).$$

Очевидна оценка

$$|\mathcal{G}_0 \partial(\lambda)| \le \gamma_7 \max_{\lambda'(\varphi(\lambda))} |\partial_{\lambda'}|,$$

$$\gamma_7 = (2\mu + \nu) \max_{\lambda} \Big[\sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi |\mathbf{l}'.\varphi(\lambda)| \sum_{\lambda'(\varphi)} |\mathbf{l}'.\varphi(\lambda')| \Big].$$

Здесь γ_7 не зависит ни от шага h, ни от положения ребер λ разностной сетки, а $\max\limits_{\lambda'(\varphi(\lambda))}$ берется по всем ребрам λ', образующим базисы φ с общим ребром λ.

Отсюда

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{V})| \le \gamma_7 \max_{\lambda'(\varphi(\lambda))} \Big| \sum_{\lambda} \int\limits_{\lambda} (\mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}\mathbf{r}_y, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_y) \Big| + \Big| \int\limits_{\sigma(\lambda)} (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_y, \mathbb{T}\mathbf{v}) \Big|.$$

Далее, пусть индексы i, j, m фиксированы, а $s_y \le 2$ — диаметр круга K_{sy}, совпадающего с кругами $K_{\lambda' y}$ ($\mathrm{d}\mathbf{s}_y$ параллельно диаметру $\mathbf{s}_y$) или с кругами $K_{\sigma y}$ ($\mathrm{d}\mathbf{s}_y$ перпендикулярно диаметру $\mathbf{s}_y$). Оценим интегралы вида $\int\limits_{s_y} \partial V_i/\partial y_j \, \mathrm{d}s_{y,m}$, к которым сводится правая часть предыдущего неравенства. Отобразим K_{sy} в круг единичного радиуса K_{sz} ($s_z = 2$) при помощи линейного отображения $\mathbf{r}_z = \mathbf{r}_y/s_y$. Положим

$$w(\mathbf{r}_z) = \partial V_i(s_y \mathbf{r}_z)/\partial y_j,$$

тогда

$$\int\limits_{s_y} \partial V_i/\partial y_j \, \mathrm{d}s_{y,m} = s_y \int\limits_{s_z} w \mathrm{d}s_{z,m}.$$

Очевидно функция $w(\mathbf{r}_z) \in H^1(K_{sz})$. В силу вложения

$H^1(K_{sz})$ в $L^1(s_z)$ имеем

$$\Big[\int\limits_{s_y} \partial V_i/\partial y_j \mathrm{d}s_{y,m}\Big]^2 \le s_y^2\Big[\int\limits_{s_z} |w|\mathrm{d}s_z\Big]^2 \le$$

$$\le s_y^2\gamma_8 \int\limits_{K_{sz}} \sum_{|\alpha|\le 1} |\mathrm{D}^\alpha w(\mathbf{r}_z)|^2 \mathrm{d}V_z =$$

$$= \gamma_8 \int\limits_{K_{sy}} \Big\{s_y^2 \sum_{l=1}^{n} \Big[\frac{\partial^2 V_i}{\partial y_j \partial y_l}\Big]^2 + \Big[\frac{\partial V_i}{\partial y_j}\Big]^2\Big\}\mathrm{d}V_y \le$$

$$\le \gamma_8 \|V_i\|^2_{2,K_y} \le \gamma_8 \|\mathbf{V}\|^2_{2,K_y}.$$

Параметр γ_8 не зависит от положения ребер λ' и поверхностей $\sigma(\lambda)$ в силу изотропности всех диаметров s_z круга K_{sz} Отсюда и из предыдущего неравенства можем заключить, что существует такая константа γ_9, не зависящая ни от шага h ни от положения ребер λ и поверхностей $\sigma(\lambda)$ разностной сетки, что

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{V})| \le \gamma_9 \|\mathbf{V}\|_{2,K_y}.$$

По построению $\mathbf{\Phi}(\mathbf{V})$ обращается в ноль на пространстве P_1 полиномов не выше первой степени $\mathbf{V} = \mathbf{p} = (p_i)$, $p_i = a_{ij}y_j + b_i \in P_1$ с произвольными постоянными a_{ij} и b_i. В самом деле (как обычно по повторяющимся индексам производим суммирование)

$$\Big[\sum_{\sigma(\lambda)} (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_y, \mathbb{T}_{\mathbf{p}})\Big]_j = \mu(a_{ij} + a_{ji})\sigma_{y,i}(\lambda) + \nu a_{ii}\sigma_{y,j}(\lambda).$$

С другой стороны, поскольку

$$\Delta_{\lambda'} p_i = \Big[\int\limits_{\lambda'} (\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}\mathbf{r}_y, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}'_y)\Big]_i = a_{ik} l_{y,k}(\lambda'),$$

$$\Big(Q_{\Delta\mathbf{p}}.\varphi_y\Big)_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda'(\varphi)} \Big[a_{ik} l_{y,k}(\lambda') l'.\varphi_{y,j}(\lambda') +$$

$$+ l'.\varphi_{y,i}(\lambda') a_{jk} l_{y,k}(\lambda')\Big] = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}),$$

$$\mathrm{tr}(Q_{\Delta\mathbf{p}}.\varphi_y) = a_{ii},$$

имеем

$$\left[\mathcal{G}_0 \int\limits_{\lambda} (\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}\mathbf{r}_y, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_y)\right]_j =$$

$$= \sum_{\varphi(\lambda)} V.\varphi_y \left[\mu(a_{ij} + a_{ji})l'.\varphi_{y,i}(\lambda) + \nu a_{ii} l'.\varphi_{y,j}(\lambda)\right] =$$

$$= \mu(a_{ij} + a_{ji})\sigma_{y,i}(\lambda) + \nu a_{ii}\sigma_{y,j}(\lambda),$$

т.е. $\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}) = 0$.

Далее, в силу линейности $\mathbf{\Phi}(\mathbf{V})$ и эквивалентности факторнормы $H^2(K_y)/P_1$ и полунормы в $H^2(K_y)$ [21] существует такая постоянная γ_{10}, что

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{V})| \le \gamma_9 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{p_i} \|V_i + p_i\|_{2,K_y} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \gamma_9\gamma_{10} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |V_i|^2_{2,K_y} \right\}^{\frac{1}{2}} = \gamma_9\gamma_{10}|\mathbf{V}|_{2,K_y}.$$

Возвращаясь к переменным x_i, получаем

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{U})| \le \gamma_9\gamma_{10}\rho|\mathbf{U}|_{2,K}.$$

Наконец

$$\Psi^2 = \sum_{\lambda} |\mathbf{\Phi}(\mathbf{U})|^2_{\lambda} \le \gamma_9^2\gamma_{10}^2\rho^2 \sum_{K} |\mathbf{U}|^2_{2,K}.$$

Здесь суммирование ведется по всем кругам K, построенным, как указано выше, для всех ребер λ. Очевидно, что в силу сделанных предположений, каждая точка плоскости будет покрыта не более чем n кругами (независимо от сетки). Поэтому

$$\Psi^2 \le \gamma_9^2\gamma_{10}^2\rho^2 n|\mathbf{U}|^2_{2,\mathbf{R}^2} \le \gamma_0^2\gamma_9^2\gamma_{10}^2\rho^2 n|\mathbf{U}|^2_{2,\mathcal{O}}$$

или

$$\Psi \le \gamma_0\gamma_9\gamma_{10}\rho\sqrt{n}|\mathbf{U}|_{2,\mathcal{O}},$$

причем $\rho = \mathrm{O}(h)$. Окончательно

$$\|\mathbf{z}\|_{\lambda\varphi} \le M\, h^{1+\beta/2}|\mathbf{U}|_{2,\mathcal{O}}.$$

Глава VI

Исследование вариационно–разностных схем лагранжевой газовой динамики на нерегулярных сетках

§6.1. Вариационно–разностные схемы для уравнений лагранжевой газовой динамики. Акустическое приближение

1°. Настоящая глава посвящена исследованию полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных в двумерной плоской геометрии. Основное внимание сосредоточено на вопросах аппроксимации. Более точно, исследуется только пространственная аппроксимация, поэтому вопросы временной дискретизации не затрагиваются.

Вариационный подход к численному моделированию уравнений лагранжевой газовой динамики состоит в замене сплошной среды дискретной и применении к последней принципа наименьшего действия. Для простоты (чтобы не касаться вопроса о граничных условиях) будем рассматривать течение на всей на всей плоскости, считая возмущения газодинамических величин финитными.

На плоскости (x_1, x_2) вводится разностная сетка (см. рис.6.1), состоящая из узлов (ω), которые являются вершинами ячеек-многоугольников (Ω). Каждой ячейке приписывается объем, как функция координат узлов сетки. В принципе для каждой ячейки эта функция может быть своя, но алгоритмически это неприемлемо. Поэтому считается, что объем n–угольной ячейки задается при помощи функции $V_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_n)$, от координат ее вершин (узлов). В дальнейшем индекс n будем опускать.

В соответствии с ячеисто–узловой дискретизацией сплошной среды, которая принята в этой главе, сеточные функции задаются следующим образом: к узлам сетки относятся векторные функции (скорость, приращение координат жидких частиц), а к ячейкам — скалярные (дав-

ление, удельный объем).

Пространство сеточных функций, заданных на множествах узлов (ω) и ячеек (Ω) будем обозначать $\mathcal{H}$ и $\mathcal{R}$; суммирование по множествам (Ω), (ω), ... соответственно $\sum\limits_{\Omega}$, $\sum\limits_{\omega}$, ... Предполагается, что все фигурирующие в дальнейшем изложении суммы, содержащие бесконечное число слагаемых, являются конечными (после вычитания, если это необходимо, фоновых значений газодинамических величин).

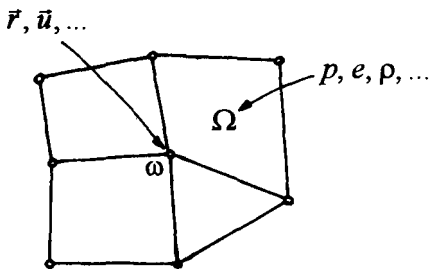


Рис.6.1

Вводятся массы ячеек M и узлов m, которые, в соответствии с лагранжевым подходом, считаются независящими от t. При этом предполагается, что m, $M = O(h^2)$.

Уравнение неразрывности получается дифференцированием соотношения $Mv = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n)$ по t, где $v = 1/\rho$ — удельный объем газа в соответствующей ячейке сетки. Это дает

$$M_\Omega v_t + \sum_\omega \left(\frac{\partial V_\Omega}{\partial \mathbf{r}_\omega}\right) \mathbf{u}_\omega = 0. \qquad (1.1)$$

Здесь суммирование производится по узлам, образующим ячейку Ω (см. рис.6.2), $\mathbf{u}_\omega$ — скорость узла ω.

Вид разностного уравнения движения узлов определяется выбором лагранжиана. Обычно принимают

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_\omega m u^2 - \sum_\Omega M e,$$

где m — масса узла ω, M — масса ячейки Ω, $u = |\mathbf{u}(\omega)|$, e — удельная внутренняя энергия ячейки Ω, а суммирование производится по всем узлам и ячейкам сетки.

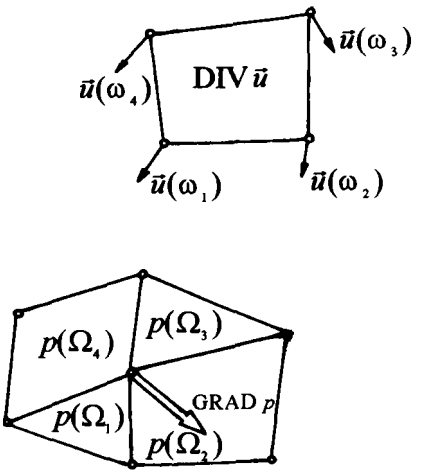


Рис.6.2

Уравнения движения для узлов, получающиеся из вариационного принципа с учетом кинематических связей

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{u} \tag{1.2}$$

и условия адиабатичности

$$Me_t + pV_t = 0 \tag{1.3}$$

имеют вид

$$m_\omega \mathbf{u}_t = \sum_\Omega p_\Omega \left(\frac{\partial V_\Omega}{\partial \mathbf{r}_\omega}\right). \tag{1.4}$$

Здесь суммирование производится по ячейкам, окружающим узел ω (см. рис.6.2), p_Ω — давление в ячейке Ω.

Для сокращения выкладок обозначим $\mathbf{S}_a = \left(\frac{\partial V_\Omega}{\partial \mathbf{r}_\omega}\right)$, где индекс a — пара (Ω, ω). Разностный оператор в (1.1), действующий на сеточную функцию $\mathbf{u}(\omega)$ по правилу

$\sum_a \mathbf{S}_a \mathbf{u}_a$, будем обозначать DIV , оператор в (1.4), действующий на сеточную функцию $p(\Omega)$ по правилу $-\sum_a p_a \mathbf{S}_a$, будем обозначать GRAD [41]. Индекс a в формулах указанного типа играет роль локального номера в шаблоне, связанном с ячейкой Ω в случае оператора DIV или узлом ω в случае оператора GRAD. В дальнейшем будем придерживаться следующего правила. Если в выражении вида $\sum_a \mathbf{S}_a \mathbf{u}_a$ множители $\mathbf{S}_a$ стоит перед аргументом, то соответствующий оператор действует из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{R}$, т.е. является оператором DIV ; а если $\mathbf{S}_a$ стоит за аргументом, то из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{H}$, т.е. является оператором GRAD.

Распространим действие операторов DIV и GRAD на тензоры по формулам

$$\mathrm{DIV}_i \mathfrak{f} = \sum_a S_{i,a} \mathfrak{f}_a,$$

где $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}$ — тензор любого ранга,

$$\mathrm{GRAD}_i \mathcal{F} = -\sum_a \mathcal{F}_a S_{i,a},$$

где $\mathcal{F} \in \mathcal{R}$ — тензор любого ранга.

Очевидно, что $\mathrm{DIV}_i : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$, $\mathrm{GRAD}_i : \mathcal{R} \to \mathcal{H}$. Когда это не будет вызывать недоразумений, будем писать просто DIV , GRAD . Таким образом при действии операторов DIV и GRAD ранг тензора может как понижаться, так и повышаться в зависимости от того производится свертка по индексу i или нет. Различие между этими операторами состоит в том, что DIV переводит сеточные функции на (ω) в сеточные функции на (Ω), а GRAD наоборот.

2°. Рассмотрим систему уравнений акустики в двумерной плоской геометрии

$$p_t + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{u}_t + \operatorname{grad} p = 0, \tag{1.6}$$

с некоторыми начальными данными. Здесь p — возмущение давления, $\mathbf{u}$ — возмущение скорости. Считаем, что на фоне плотность $\rho = 1$, скорость звука $c = 1$, скорость вещества $\mathbf{u} = 0$.

Численное интегрирования уравнений (1.5)—(1.6) будем проводить на разностной сетке введенной выше, считая что ее узлы неподвижны.

Систему уравнений (1.5)—(1.6) аппроксимируем линеаризованной полностью консервативной дифференциально-разностной схемой (1.1)—(1.4), которая во введенных обозначениях имеет вид

$$Mp_t + \mathrm{DIV}\,\mathbf{u} = 0, \tag{1.7}$$

$$m\mathbf{u}_t + \mathrm{GRAD}\,p = 0. \tag{1.8}$$

3°. Чтобы сравнивать разностное решение (1.7)—(1.8) с решением исходной задачи (1.5)—(1.6) преобразуем последнее в сеточные функции при помощи некоторых проекторов Π_Ω и $\hat{\Pi}_\omega$, которые будем считать независящими от t.

Получим уравнения для ошибок

$$q(\Omega) = p(\Omega) - \Pi_\Omega p(x), \qquad \mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{u}(\Omega) - \hat{\Pi}_\omega \mathbf{u}(x).$$

Для этого применим проектор Π_Ω к (1.5), а проектор $\hat{\Pi}_\omega$ к (1.6). Имеем

$$(\Pi p)_t + \Pi(\operatorname{div}\mathbf{u}) = 0,$$

$$(\hat{\Pi}\mathbf{u})_t + \hat{\Pi}(\operatorname{grad} p) = 0.$$

Вычитая эти соотношения из (1.7)—(1.8), находим

$$Mq_t + \mathrm{DIV}\,\mathbf{w} = -M\Pi(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \mathrm{DIV}\,(\hat{\Pi}\mathbf{u}) = M\psi, \tag{1.9}$$

$$m\mathbf{w}_t + \mathrm{GRAD}\,q = -m\hat{\Pi}(\operatorname{grad} p) + \mathrm{GRAD}\,(\Pi p) = m\boldsymbol{\varphi}. \tag{1.10}$$

4°. Уравнение (1.9) умножим на q и просуммируем по (Ω), а уравнение (1.10) умножим на в и просуммируем по (ω)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\Omega}\frac{Mq^2}{2}+\sum_{\Omega}q\,\mathrm{DIV}\,\boldsymbol{w}=\sum_{\Omega}M\psi q,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\omega}\frac{mw^2}{2}+\sum_{\omega}(\boldsymbol{w},\,\mathrm{GRAD}\,q)=\sum_{\omega}m(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{w}).$$

Суммируя два последних соотношения, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\Omega}\frac{Mq^2}{2}+\sum_{\omega}\frac{mw^2}{2}\Big)=\sum_{\Omega}M\psi q+\sum_{\omega}m(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{w}).$$

Обозначим $\sum\limits_{\Omega}Mq^2+\sum\limits_{\omega}mw^2=J^2$ и воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$\Big|\sum_{\Omega}M\psi q+\sum_{\omega}m(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{w})\Big|\le J\Big[\sum_{\Omega}M\psi^2+\sum_{\omega}m|\boldsymbol{\varphi}|^2\Big],$$

тогда окончательно получим

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\le\Big[\sum_{\Omega}M\psi^2+\sum_{\omega}m|\boldsymbol{\varphi}|^2\Big]. \tag{1.11}$$

Очевидно энергетическая норма ошибки $J=\mathrm{O}(h)$ в том случае, если $\psi=\mathrm{O}(h)$ и $\boldsymbol{\varphi}=\mathrm{O}(h)$. Эти условия означают также аппроксимацию уравнений (1.5)—(1.6) в равномерной норме.

§6.2. Условия первого порядка аппроксимации

1°. Оценим невязки в правых частях (1.9)—(1.10). Для этого воспользуемся подходом, описанным в §2.3, согласно которому проекторы характеризуются своими моментами.

Пусть моменты проектора $\Pi_\Omega=\{1,\mathbf{R}_\Omega,\ldots\}$, а моменты проектора $\hat{\Pi}_\omega=\{1,\mathbf{r}_\omega,\ldots\}$. Рассмотрим невязку в правой части (1.9)

$$M\psi=\mathrm{DIV}\,(\hat{\Pi}\mathbf{u})-M\Pi(\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}).$$

Если $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u} = \text{const}$, то $M\psi = M\psi_0 = \text{DIV}\,\mathbf{u}$.
Если $\mathbf{u} = \mathbb{U}\mathbf{r}(\mathbb{U} = \text{const})$, то $M\psi = M\psi_1 = \text{DIV}\,(\mathbb{U}\mathbf{r}) - M\text{sp}\mathbb{U}$.
Чтобы выполнялась оценка $\psi = \text{O}(h)$, следует потребовать $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 0$ при произвольных $\mathbf{u}$, $\mathbb{U}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \text{DIV}_i 1 &= \sum_a S_{i,a} 1_a = 0, \\ \text{DIV}_i x_k &= \sum_a S_{i,a} x_{k,a} = V\delta_{ik}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x_{k,\omega}$ — компонентная запись вектора $\mathbf{r}_\omega$.

Рассмотрим невязку в правой части (1.10)

$$m\boldsymbol{\varphi} = m\hat{\Pi}(\text{grad}\,p) - \text{GRAD}\,(\Pi p).$$

Если $p(x) = p = \text{const}$, то $m\boldsymbol{\varphi} = m\boldsymbol{\varphi}_0 = \text{GRAD}\,p$.
Если $p(x) = (\mathbf{p}, \mathbf{r})$ $(\mathbf{p} = \text{const})$, то

$$m\boldsymbol{\varphi} = m\boldsymbol{\varphi}_1 = \text{GRAD}\,(\mathbf{p}, \mathbf{R}) - m\mathbf{p}.$$

Чтобы выполнялась оценка $\boldsymbol{\varphi} = \text{O}(h)$, следует потребовать $\boldsymbol{\varphi}_0 = 0$, $\boldsymbol{\varphi}_1 = 0$ при произвольных p, $\mathbf{p}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \text{GRAD}_i 1 &= -\sum_a 1_a S_{i,a} = 0, \\ \text{GRAD}_i X_k &= -\sum_a X_{k,a} S_{i,a} = m\delta_{ik}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $X_{k,\Omega}$ — компонентная запись вектора $\mathbf{R}_\Omega$. При выполнении условий (2.1)—(2.2) правая часть (1.11) имеет порядок $\text{O}(h)$.

Естественно считать, что моменты $\mathbf{r}_\omega$ проекторов $\hat{\Pi}_\omega$ есть радиус–векторы узлов сетки, а объем ячейки $V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$ — площадь многоугольника с координатами вершин $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$. Можно показать, что в некотором смысле такой выбор V является единственно возможным (см. *Приложение D*). В этом случае выполнены оба условия (2.1) и первое из условий (2.2).

2°. Рассмотрим вопрос о выполнении второго из условий (2.2)

$$\sum_a X_{i,a} S_{k,a} = -m\delta_{ik}, \tag{2.3}$$

которое будем интерпретировать как систему линейных уравнений относительно векторов $\mathbf{R}_\Omega$. Сами вектора нас не интересуют, важен факт их существования. Иными словами нас интересует совместность системы (2.3). Для выяснения этого вопроса воспользуемся теоремой Фредгольма. Легко видеть, что однородная сопряженная система имеет вид

$$\sum_a S_{i,a} Y_{ik,a} = 0 \text{ на } (\Omega), \tag{2.4}$$

а условие ортогональности ее решений правой части (2.3)

$$\sum_\omega m\, Y_{ii}(\omega) = 0. \tag{2.5}$$

Таким образом для аппроксимации уравнений движения массы узлов должны быть заданы таким образом, чтобы выполнялось (2.5).

3°. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_a S_{i,a} \xi_{i,a} = 0. \tag{2.6}$$

Геометрический смысл решений этой системы понятен — они описывают движения, не изменяющие объемы ячеек, если векторы $\boldsymbol{\xi}(\omega)$ интерпретировать как скорости соответствующих узлов. Очевидно, что тензорные сеточные функции $Y_{ik}(\omega) = c_k \xi_i(\omega)$ с произвольным вектором $c_k = \text{const}$ удовлетворяют системе (2.4). Условие (2.5) для них имеет вид $(\mathbf{c}, \sum_\omega m\boldsymbol{\xi}) = 0$ или, в силу произвольности $\mathbf{c}$, в другом виде

$$\sum_\omega m\boldsymbol{\xi} = 0. \tag{2.7}$$

Таким образом для совместности системы (2.3) необходимо, чтобы движения не изменяющие объемы ячеек, не изменяли «центра тяжести» сетки или, другими словами, не имели импульса.

Покажем, что верно и обратное. Зафиксируем систему кординат. Всякое решение (2.4) очевидно имеет вид

$$X_{ik}(\omega) = \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) & \xi_1'(\omega) \\ \xi_2(\omega) & \xi_2'(\omega) \end{pmatrix},$$

где $\xi_i(\omega)$, $\xi_i'(\omega)$ — решения (2.6). Условие ортогональности будет выполнено т.к. $\sum\limits_{\omega} m\, Y_{ii} = \sum\limits_{\omega} m\, \xi_1(\omega) + \sum\limits_{\omega} m \times$ $\times \xi_2'(\omega)$, а каждое слагаемое в правой части этого соотношения равно нулю в силу (2.7).

4°. Будем интерпретировать (2.7) как систему линейных уравнений относительно $m(\omega)$ и поставим вопрос о существовании ее нетривиальных решений.

Проведем следующее качественое рассуждение. Рассмотрим некоторое связанное подмножество $\mathfrak{W}$ ячеек сетки. Обозначим: N — число ячеек в $\mathfrak{W}$; n — число узлов, являющихся вершинами этих ячеек; N_* — число узлов на границе $\mathfrak{W}$. В этих обозначених система (2.7) содержит n неизвестных. Оценим число уравнений. Для этого рассмотрим систему (2.6). Число неизвестных $\xi_i(\omega)$ очевидно равно $2n$, ранг матрицы системы не превосходит $N + N_*$, значит число линейно независимых решений не менее $2n - N - N_*$. Из геометрических соображений нетрудно показать, что

$$2n = \begin{cases} N + N_* + 2, & \text{на треугольных сетках,} \\ 2N + N_* + 2, & \text{на четырехугольных сетках.} \end{cases}$$

Таким образом число уравнений (2.7)

$$\geq \begin{cases} 2, & \text{на треугольных сетках,} \\ N + 2, & \text{на четырехугольных сетках.} \end{cases}$$

Отвлекаясь от вопроса о линейной зависимости этих уравнений, можно сделать вывод о том, что на треугольной сетке система (2.5) может иметь нетривиальные решения всегда, а на четырехугольной это, вообще говоря, не так.

Суммируя вышеизложенное, можно выделить две существенно различных ситуации, когда соотношения (2.5)

могут быть удовлетворены:
a) разностная схема такова, что движений с сохраняющимися объемами ячеек не существует или их достаточно мало (схемы на треугольных сетках [70], по-видимому, схемы с мультиплетным числом термодинамических степеней свободы [72]);
b) массы узлов не скаляры, постоянные во времени, а функции, зависящие от конфигурации сетки [73—76].

§6.3. Априорные оценки

1°. В §6.1 для разностных уравнений

$$Mq_t + \operatorname{DIV} \boldsymbol{w} = M\psi, \tag{3.1}$$

$$m\boldsymbol{w}_t + \operatorname{GRAD} q = m\boldsymbol{\varphi} \tag{3.2}$$

было установлено энергетическое неравенство

$$J_t \le \Big[\sum_{\omega} m|\boldsymbol{\varphi}|^2 + \sum_{\Omega} M\psi^2\Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

где $J = \Big[\sum\limits_{\omega} m\, w^2 + \sum\limits_{\Omega} Mq^2\Big]^{\frac{1}{2}}$ — энергетическая норма. Из (3.3) очевидно следует, что если $\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{O}(h)$ и $\psi = \mathrm{O}(h)$, то имеет место сходимость в энергетической норме со скоростью $\mathrm{O}(h)$.

2°. Получим теперь априорную оценку в норме, аналогичной $\overset{\circ}{H}{}^1$. Продифференцируем (3.1) по t, умножим на q_t и просуммируем по Ω. Имеем

$$\sum_{\Omega} Mq_tq_{tt} + \sum_{\Omega} q_t \operatorname{DIV} \boldsymbol{w}_t = \sum_{\Omega} Mq_t\psi_t,$$

$$\Big(\frac{1}{2}\sum_{\Omega} Mq_t^2\Big)_t + \sum_{\omega}\Big(\big[\frac{1}{m}\operatorname{GRAD} q - \boldsymbol{\varphi}\big], \operatorname{GRAD} q_t\Big) =$$

$$= \sum_{\Omega} Mq_t\psi_t,$$

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{\Omega} Mq_t^2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega}\frac{1}{m}|\,\mathrm{GRAD}\,q|^2\right)_t =$$
$$= \sum_{\Omega} Mq_t\psi_t + \sum_{\omega}(\boldsymbol{\varphi},\ \mathrm{GRAD}\,q_t).$$

Окончательно

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{\Omega} Mq_t^2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega}\frac{1}{m}|\,\mathrm{GRAD}\,q|^2 - \sum_{\omega}(\boldsymbol{\varphi},\ \mathrm{GRAD}\,q)\right)_t =$$
$$= \sum_{\Omega} Mq_t\psi_t - \sum_{\omega}(\boldsymbol{\varphi}_t,\ \mathrm{GRAD}\,q) \le$$
$$\le \left[\sum_{\Omega} Mq_t^2 + \sum_{\omega}\frac{1}{m}|\,\mathrm{GRAD}\,q|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{\omega} m|\boldsymbol{\varphi}_t|^2 + \sum_{\Omega} M\psi_t^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

В обозначениях

$$Q^2 = \sum_{\Omega} Mq_t^2 + \sum_{\Omega}\frac{1}{m}|\,\mathrm{GRAD}\,q|^2,$$
$$F = \sum_{\omega}(\boldsymbol{\varphi},\ \mathrm{GRAD}\,q),$$
$$G^2 = \sum_{\omega} m|\boldsymbol{\varphi}_t|^2 + \sum_{\Omega} M\psi_t^2,$$

последнее неравенство принимает вид

$$QQ_t \le F_t + GQ \tag{3.5}$$

с начальными условиями

$$Q^2(0) = \sum_{\Omega} Mq_t^2(0) = \sum_{\Omega} M\psi^2(0) = Q_0^2, \qquad F(0) = 0.$$

Оценим $Q(T)$ при произвольном T. Пусть $\max\limits_{0\le t\le T} Q(t) = Q_*$ достигается при $t = t_*$. Интегрируя (3.5) от 0 до t_* получаем

$$\frac{1}{2}[Q_*^2 - Q_0^2] \le F(t_*) - F(0) + \int_0^{t_*} G(t)Q(t)\mathrm{d}t \le$$
$$\le F(t_*) + Q_*\int_0^{t_*} G(t)\mathrm{d}t.$$

Кроме того

$$F(t_*) \le Q_* \sum_\omega m|\boldsymbol{\varphi}(t_*)|^2 = Q_* H(t_*),$$

так что

$$Q_*^2 - 2Q_*\Big[H(t_*) + \int_0^{t_*} G(t)\mathrm{d}t\Big] - Q_0^2 \le 0,$$

откуда

$$Q_* \le Q_0 + 2\Big[H(t_*) + \int_0^{t_*} G(t)\mathrm{d}t\Big],$$

и следовательно

$$Q(T) \le Q_* \le Q_0 + 2\Big[\max_{0\le t\le T} H(t) + \int_0^T G(t)\mathrm{d}t\Big].$$

Очевидно, что если

$$\sum_\omega m|\boldsymbol{\varphi}|^2, \quad \sum_\Omega M\psi^2, \quad \sum_\omega m|\boldsymbol{\varphi}_t|^2 + \sum_\Omega M\psi_t^2$$

суть $O(h)$ при всех t, то $Q(t)$ тоже порядка $O(h)$.

3°. Как уже отмечалось, на нерегулярной четырехугольной сетке разностная схема (1.7)—(1.8), вообще говоря, не аппроксимирует уравнение движения жидких частиц. Тем не менее оценка $Q(t) = O(h)$ может быть сохранена при некоторых разумных условиях на разностную сетку.

Это утверждение связано со следующим обстоятельством. Пространство векторных сеточных функций $\mathcal{H}$ (см. §6.1) снабдим скалярным произведением по формуле

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \sum_\omega m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

и разложим в ортогональную прямую сумму $\mathcal{H} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. Подпространство $\mathcal{A}$ состоит из «потенциальных» функций вида

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\,\mathrm{GRAD}\, f,$$

а подпространство $\mathcal{B}$ из «вихревых» функций, удовлетворяющих условиям

$$\mathrm{DIV}\,\mathbf{b} = 0.$$

В ортогональности функций $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ легко убедиться, воспользовавшись цепочкой равенств

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{\omega} (\mathbf{b}, \mathrm{GRAD}\, f) - \sum_{\Omega} f\, \mathrm{DIV}\, \mathbf{b} = 0.$$

Разложение (точнее подпространство $\mathcal{A}$ этого разложения) выбрано так, что в уравнении движения слагаемое $\frac{1}{m}\mathrm{GRAD}\, q \in \mathcal{A}$, т.е. под действием градиента давления изменяется лишь компонента сеточной функции $\boldsymbol{w} \in \mathcal{H}$, лежащая в $\mathcal{A}$. С другой стороны, компонента $\boldsymbol{w}$, лежащая в $\mathcal{B}$, не приводит к изменению давления. Таким образом пространство решений $(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ состоящее из пар сеточных функций $q \in \mathcal{R}$ и $\boldsymbol{w} \in \mathcal{H}$, распадается на подпространства $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ и $(0, \mathcal{B})$, эволюция решения в которых протекает независимо друг от друга. Поэтому, если окажется, что $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{A}$, то решение $(q, \boldsymbol{w}) \in (\mathcal{R}, \mathcal{A})$, а если $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{B}$, то $(q, \boldsymbol{w}) \in (0, \mathcal{B})$. В любом случае, при $\boldsymbol{\varphi} = O(1)$ расчитывать на сходимость разностной схемы (1.5)—(1.6) относительно скорости нельзя. В то же время, если $\boldsymbol{\varphi}$ «почти лежит» в $\mathcal{B}$ следует ожидать сходимости относительно давлений.

После сделанного замечания вернемся к соотношению (3.4) и рассмотрим выражение для F. Так как $\frac{1}{m} \times \times \mathrm{GRAD}\, q \in \mathcal{A}$, то к $\boldsymbol{\varphi}$ можно прибавить произвольную функцию $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$, поэтому

$$F \le Q \inf_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \|\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{b}\|.$$

Аналогично, правая часть (3.4)

$$\sum_{\Omega} M q_t \psi_t - \sum_{\omega} (\boldsymbol{\varphi}_t, \mathrm{GRAD}\, q) \le Q \Big[\sum_{\Omega} M \psi_t^2 + \inf_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \|\boldsymbol{\varphi}_t + \mathbf{b}\|^2 \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом мы приходим к неравенству (3.5), но с модифицированными F и G. Установим условия на сетку,

при которых

$$\text{a)} \inf_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{b}\| = \mathrm{O}(h), \qquad \text{b)} \inf_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\varphi}_t+\mathbf{b}\| = \mathrm{O}(h) \tag{3.6}$$

и соответственно

$$F = \mathrm{O}(h), \qquad G = \mathrm{O}(h), \qquad Q = \mathrm{O}(h).$$

Прежде чем сформулировать эти условия напомним критерий аппроксимации уравнения движения, полученный в §6.2

$$\mathrm{GRAD}_k X_i = m\delta_{ik} \tag{3.7}$$

где $X_i(\Omega)$ — первые моменты проектора Π. Другими словами это означает, что тензорная сеточная функция равна δ_{ik} в каждом узле сетки лежит в подпространстве $\mathcal{A}$. Отметим, что все последующие выкладки по существу имеют смысл только для четырехугольных сеток, т.к. на треугольных сетках условия (3.7) могут быть удовлетворены (см. §6.6). Для четырехугольных сеток условия (3.7) выполняются лишь в отдельных случаях. Пусть они нарушены. Так как $\mathcal{H} = \mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ представим сеточную функцию в каждом узле в виде

$$\delta_{ik} = \frac{1}{m}\,\mathrm{GRAD}_k\Gamma_i + \gamma_{ik},$$

где $\gamma_{ik} \in \mathcal{B}$, т.е. $\mathrm{DIV}_k\,\gamma_{ik} = 0$ для всех Ω.

Первое условие состоит в том, что векторы $\Gamma_i(\Omega)$ могут быть приняты в качестве моментов проектора Π, т.е. концы этих векторов лежат в $\mathrm{O}(h)$ — окрестности соответствующих ячеек.

Второе условие состоит в следующем. Пусть $\{\mathbf{b}^\alpha(\omega)\}$ базис в подпространстве $\mathcal{B}$. Тогда тензорная функция γ_{ik} может быть разложена по этому базису

$$\gamma_{ik}(\omega) = \sum_\alpha c_i^\alpha b_k^\alpha(\omega) \tag{3.8}$$

Будем предполагать, что:

1) в $\mathcal{B}$ существует базис, орты которого — сеточные функции $\mathbf{b}^\alpha(\omega)$ отличны от нуля в ограниченном числе

узлов (для каждого α эти узлы, конечно, свои), заключенных в окружность радиуса $O(h)$ и $|\mathbf{b}^\alpha(\omega)| = O(1)$;

2) коэффициенты разложения (2.6) имеют порядок $|\mathbf{c}^\alpha| = O(1)$.

Для сетки, состоящей из четырехугольных ячеек, базисные функции $\mathbf{b}^\alpha(\omega)$ можно построить следующим образом. Рассмотрим две соседние четырехугольные ячейки (см. рис.6.3). Очевидно, возможно построить сеточную функцию $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ отличную от нуля только в узлах заштрихованных ячеек. Действительно, $\operatorname{DIV} \mathbf{b} = 0$ для всех ячеек, кроме двенадцати, изображенных на рис.6.3. Условия $\operatorname{DIV} \mathbf{b} = 0$ для этих ячеек дают двенадцать однородных линейных уравнений для двенадцати неизвестных компонент шести векторов $\mathbf{b}(A)$, ..., $\mathbf{b}(F)$. Но эти двенадцать уравнений не являются независимыми, т.к. $\sum \operatorname{DIV} \mathbf{b} = 0$, где суммирование проводится по двенадцати указанным ячейкам. Следовательно, существует нетривиальное решение этих уравнений, которые в силу их однородности, может быть отнормировано так, что $|\mathbf{b}^\alpha(\omega)| = O(1)$. Таким образом построена векторная сеточная функция $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$, носитель которой состоит из шести узлов, являющихся вершинами двух

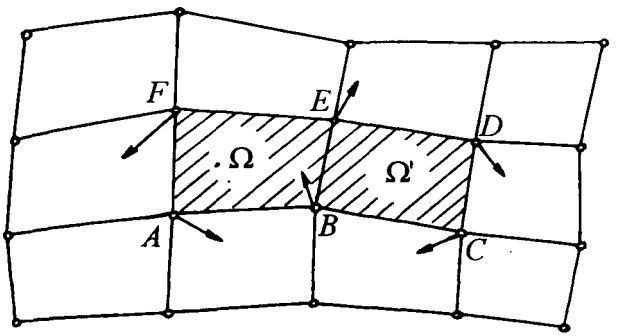


Рис.6.3

соседних ячеек Ω, Ω'. Выбирая различные пары ячеек можно построить достаточно много сеточных функций $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$, описанного вида, и образовать из них базис в $\mathcal{B}$.

Покажем теперь, что сформулированные условия достаточны для

$$\inf_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{b}\| = O(h).$$

Положим $\mathbf{b}(\omega) = \sum_{\alpha}(\mathbf{c}^{\alpha},\mathbf{p}^{\alpha})\mathbf{b}^{\alpha}(\omega)$, где $\mathbf{p}^{\alpha}$ некоторое осреднение ∇p в окрестности носителя $\mathbf{b}^{\alpha}(\omega)$, например, среднее по ячейкам Ω, Ω' (см. рис.6.3). Тогда

$$\inf_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{b}\|^2 \le \|\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{b}\|^2 = \sum_{\omega} m|\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{b}|^2.$$

Оценим теперь отдельные слагаемые в правой части

$$\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{b} = \frac{1}{m}\,\mathrm{GRAD}\,(\Pi p) - \hat{\Pi}(\,\mathrm{grad}\,p) + \sum_{\alpha}(\mathbf{c}^{\alpha},\mathbf{p}^{\alpha})\mathbf{b}^{\alpha}(\omega).$$

При фиксированном ω сумма по α содержит ограниченное число слагаемых, таких что $\mathbf{b}^{\alpha}(\omega)\neq 0$, причем носители этих $\mathbf{b}^{\alpha}$ лежат в круге радиуса $O(h)$ с центром в узле ω. Так как выражение в правой части последнего равенства обращающийся в ноль на полиномах степени ≤ 1, то $|\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{b}| = O(h)$ при $p(x)\in C^2$. С учетом этих неравенств получаем $(3.6-a)$. Аналогично устанавливается $(3.6-b)$, следовательно $Q(t) = O(h)$, т.е. разностная схема (1.7), (1.8) имеет первый порядок точности относительно давления.

§6.4. «Градиентное» представление невязки в уравнении движения

1°. Рассмотрим теперь более подробно невязку в уравнении движения жидких частиц и покажем, что на четырехугольной сетке ее главный член имеет «градиентную» форму. Как уже говорилось во введении, под «градиентными» подразумеваются такие, сеточные функции на (ω), суммирование которых по связному множеству узлов сводится к сумме по границе этого множества. Установим явный вид этой «градиентной» формы и конкретизируем

понятие «градиентности» в данном случае. Итак

$$m\varphi_k(\omega) = -p_i(\omega)\sum_a (X_{i,a}S_{k,a} + m\delta_{ik}) + m\chi_k(\omega). \qquad (4.1)$$

Здесь $p_i(\omega) = \nabla_i p(\mathbf{r}_\omega)$, $X_{i,a}$ — первые моменты проектора Π, m — масса узла ω, суммирование производится по ячейкам, окружающим узел ω. Вообще говоря, первое слагаемое справа (при достаточной гладкости $p(x)$) есть $m\mathrm{O}(1)$, второе $m\mathrm{O}(h)$.

Чтобы выделить из этого выражения «градиентную» часть проведем следующие геометрические построения. Пусть $m = 1/4\sum_a M_a$ для всех узлов сетки. Рассмотрим некоторую ячейку $\Omega = ABCD$. Выделим в ней точку O таким образом, чтобы площади четырехугольников $AEOH$, $BFOE$, ... были равны $S_{ABCD}/4$. Из геометрических соображений ясно, что точка O лежит на пересечении прямых α и β, выпущенных из середин диагоналей AC и BD так, что $\alpha \| BD$, $\beta \| AC$. В силу имеющегося произвола в выборе проекторов положим $\Pi p(x) = p(O)$. Тогда, $X_{i,\Omega} = X_{i,O}$. Зафиксируем теперь узел ω (пусть $\omega = A$, см. рис 6.4) и рассмотрим отдельное слагаемое $X_{i,a}S_{k,a}$ в (4.1) соответствующее узлу ω и ячейке Ω. Вектор $S_{k,a}$ имеет смысл ориентированной площади отрезка EH (имеющего единичную высоту по третьей координате). Очевидно $S_{k,a} = -S_{k,EO} - S_{k,HO}$, где $S_{k,EO}$, $S_{k,HO}$ — площади отрезков OE и OH, ориентированные внешним, относительно четырехугольника $AEOH$, образом.

Пусть M, N — середины отрезков OE, OH соответственно. Тогда

$$X_{i,a}S_{k,a} = -X_{i,O}S_{k,OE} - X_{i,O}S_{k,OH} =$$
$$= -X_{i,M}S_{k,OE} + (X_{i,M} - X_{i,O})S_{k,OE} -$$
$$-X_{i,N}S_{k,OH} + (X_{i,N} - X_{i,O})S_{k,OH} = -\int\limits_{EOH} x_i \mathrm{d}s_k + M_{ik,a},$$

где $M_{ik,a} = (X_{i,M} - X_{i,O})S_{k,OE} + (X_{i,N} - X_{i,O})S_{k,OH}$.

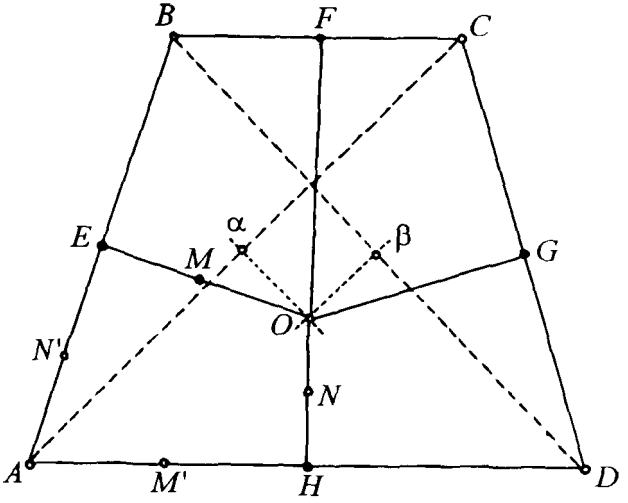


Рис.6.4

В этих обозначениях (4.1) принимает вид (второе слагаемое временно опускаем)

$$m\varphi_k(\omega) = p_i(\omega)(\oint x_i \mathrm{d}s_k - \sum_a M_{ik,a} - m\delta_{ik}),$$

где контур интегрирования состоит из отрезков OE, OH и аналогичных в других ячейках, окружающих узел ω. По построению

$$\oint x_i \mathrm{d}s_k = m\delta_{ik},$$

так что

$$m\varphi_k(\omega) = -p_i(\omega)\sum_a M_{ik,a}.$$

Добавим в правую часть последнего равенства величину

$$-p_i(\omega)\sum_a M^*_{ik,a} \equiv 0.$$

Для рассматриваемой ячейки $ABCD$

$$M^*_{ik,a} = (X_{i,A} - X_{i,M'})S_{k,AH} + (X_{i,A} - X_{i,N'})S_{k,AE},$$

где M', N' — середины сторон AH и AE, $S_{k,AH}$, $S_{k,AE}$ — площади отрезков AH и AE, ориентированные внешним, относительно четырехугольника $AEOH$, образом. Окончательно

$$m\varphi_k(\omega) = -p_i(\omega)\Big(\sum_a M_{ik,a} + \sum_a M^*_{ik,a}\Big) = -p_i(\omega)\sum_a N_{ik,a}.$$

2°. Из конструкции тензоров $N_{ik,a}$ очевидно, что

$$\sum_a N_{ik,a} = 0, \tag{4.2}$$

где суммирование проводится по вершинам ячейки Ω. Кроме того $|N_{ik,a}| = O(h^2)$ в общем случае и $N_{ik,a} = 0$, если $ABCD$ — параллелограмм.

Такой же вид на линейном профиле давлений имеет выражение

$$-\sum_a p_{i,a} N_{ik,a}, \tag{4.3}$$

где $p_{i,a}$ — каким-либо образом отнесенное к ячейке значение $\nabla_i p$ (например, — среднее по Ω).

Кроме того, конструкция (4.3) имеет «градиентный» вид в следующем смысле. Пусть $\mathfrak{W}$ — связное множество ячеек сетки, т.е. из любой ячейки $\Omega \in \mathfrak{W}$ можно попасть в любую другую $\Omega' \in \mathfrak{W}$ переходя от соседа к соседу (соседи — ячейки, имеющие две общие вершины). Вершины ячеек $\Omega \in \mathfrak{W}$ образуют связное множество узлов $\mathfrak{w}$, с границей $\partial\mathfrak{w}$ — множеством узлов, являющихся вершинами ячеек, как принадлежащих, так и не принадлежащих $\mathfrak{W}$. Тогда

$$\sum_{\omega\in\mathfrak{w}}\sum_a p_{i,a}N_{ik,a} = \sum_{\partial\mathfrak{w}}\sum_a{}' p_i N_{ik,a} + \sum_{\Omega\in\mathfrak{W}} p_i \sum_a N_{ik,a}. \tag{4.4}$$

Здесь $\sum_a{}'$ — суммирование по ячейкам, не принадлежащим $\mathfrak{W}$. Последнее слагаемое в (4.4) исчезает в силу (4.2) и остается только сумма по $\partial\mathfrak{w}$.

Возможность преобразования суммы по $\mathfrak{w}$ к сумме по $\partial\mathfrak{w}$ очевидно связана со свойством (4.2) тензоров $N_{ik,a}$.

Этим же свойством обладают и векторы $S_{i,a} = \partial V_\Omega / \partial x_{i,\omega}$, участвующие в определении оператора GRAD. Опираясь на эту аналогию мы называем «градиентными» выражения вида $\sum_a \mathcal{F}_a \mathcal{S}_a$, где $\mathcal{F}(\Omega) \in \mathcal{R}$ — тензорная сеточная функция, $\mathcal{S}_a$ — тензорные коэффициенты, удовлетворяющие условиям $\sum_a \mathcal{S}_a = 0$ (суммирование по вершинам ячейки).

Таким образом, погрешность аппроксимации уравнения движения может быть представлена в виде

$$m\varphi_k(\omega) = -\sum_a p_{i,a} N_{ik,a} + m\chi_k(\omega),$$

где $\chi_k(\omega) = O(h)$ локально и, вообще говоря, другое, чем в (4.1).

§6.5. Разностная схема с искусственным диссипатором

1°. В силу линейности уравнений для ошибки и полученного в §6.4 представления погрешности аппроксимации уравнений движения, в дальнейшем, не теряя общности, будем рассматривать систему (1.9)—(1.10) с $\psi, \chi = 0$.

$$M q_t + \mathrm{DIV}\, \boldsymbol{w} = 0, \tag{5.1}$$

$$m \boldsymbol{w}_t + \mathrm{GRAD}\, q = -\mathrm{N}\mathbf{p}, \tag{5.2}$$

$$q(\Omega_*) = 0, \quad q\big|_{t=0} = 0, \quad \boldsymbol{w}\big|_{t=0} = 0,$$

где оператор $\mathrm{N} : \mathcal{R} \to \mathcal{H}$ действует по формуле

$$(\mathrm{N}\mathbf{p})_{k,\omega} = \sum_a p_{i,a} N_{ik,a}.$$

Выражение в правой части уравнения движения будем интерпретировать как силу, действующую на узел ω. Как показано выше, «градиентная» структура правой части (5.2) приводит к тому, что сила, действующая на связное множество узлов, носит поверхностный характер. Это

означает, что хотя удельная сила, действующая на каждый узел, есть O(1), но при суммировании по множеству из N связных узлов их результирующая есть $O(N^{-1/2})$ на единицу массы. Следовательно, направления этих сил не скоррелированы, а вызываемые этими силами движения носят «хаотический» характер и содержат в основном коротковолновые возмущения. Естественно попытаться подавить эти возмущения, вводя в уравнения (5.1)—(5.2) диссипативные члены. Ясно, что для эффективного подавления, диссипаторы должны быть согласованы с правой частью (5.2), т.е. главным членом погрешности аппроксимации. Действительно, как показано в §6.3, возмущения носят в основном «вихревой» характер, поэтому подавить их скалярной вязкостью (добавкой к давлению), пропорциональной $\mathrm{DIV}\,\mathbf{u}$, невозможно.

Чтобы получить конкретный вид диссипатора, рассмотрим энергетическое равенство для системы (5.1)—(5.2). Вместо (2.1), очевидно, получим

$$J\,J_t \le \sum_{\Omega} \Pi(\nabla p) \sum_{a} N_{ik,a} w_{i,a} \le$$
$$\le \sum_{\Omega} \left[\varepsilon |\mathrm{N}^* \boldsymbol{w}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} |\Pi(\nabla p)|^2\right].$$

Здесь $J^2 = \sum_{\Omega} Mq^2 + \sum_{\omega} mw^2$, оператор $\mathrm{N}^* : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$ действует по формуле

$$(\mathrm{N}^* \boldsymbol{w})_{i,\Omega} = \sum_{a} N_{ik,a} w_{k,a}.$$

Чтобы компенсировать правую часть (5.2), введем в уравнение движения диссипативный член следующим образом

$$m\mathbf{u}_t + \mathrm{GRAD}\,p + \mathrm{N}[\nu \mathrm{N}^* \mathbf{u}] = 0. \tag{5.3}$$

Тогда соответствующие уравнения для ошибки примет вид

$$m\boldsymbol{w}_t + \mathrm{GRAD}\,q + \mathrm{N}[\nu \mathrm{N}^* \boldsymbol{w}] = -\mathrm{N}[\hat{\Pi}(\nabla p)] - \mathrm{N}[\nu \mathrm{N}^* (\hat{\Pi}\mathbf{u})],$$

а баланс энергии

$$J\,J_t + \sum_{\Omega} \nu |\mathrm{N}^*\boldsymbol{w}|^2 =$$
$$= -\sum_{\Omega} (\mathrm{N}^*\boldsymbol{w}, \Pi(\nabla p)) - \sum_{\Omega} \nu (\mathrm{N}^*\boldsymbol{w}, \mathrm{N}^*(\hat{\Pi}\mathbf{u})) \le$$
$$\le \sum_{\Omega} \Big[\varepsilon |\mathrm{N}^*\boldsymbol{w}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|\Pi(\nabla p)|^2 + \nu\varepsilon_1 |\mathrm{N}^*\boldsymbol{w}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}|\mathrm{N}^*(\hat{\Pi}\mathbf{u})|^2\Big],$$

где $\varepsilon(\Omega)$, $\varepsilon_1(\Omega) > 0$.

Положив $\varepsilon = k\nu$, $\varepsilon_1 = 1 - k$ $(0 < k < 1)$, получаем оценку

$$J\,J_t \le \frac{1}{4}\sum_{\Omega}\Big[\frac{|\hat{\Pi}(\nabla p)|^2}{\nu k} + \frac{\nu |\mathrm{N}^*(\hat{\Pi}\mathbf{u})|^2}{1-k}\Big]$$

и, в силу произвольности k,

$$J\,J_t \le \sum_{\Omega} \frac{(|\hat{\Pi}(\nabla p)| + \nu |\mathrm{N}^*(\hat{\Pi}\mathbf{u})|)^2}{4\nu}.$$

Так как $|N_{ik,a}| = \mathrm{O}(h^2)$ и $\sum\limits_a N_{ik,a} = 0$, то $|\mathrm{N}^*(\hat{\Pi}\mathbf{u})| = \mathrm{O}(h^3)$. Кроме того $|\hat{\Pi}(\nabla p)| = \mathrm{O}(1)$. Поэтому, если положить $\nu = \nu_0/h^3$ с $\nu_0 = \mathrm{const} = \mathrm{O}(1)$, правая часть последнего неравенства будет иметь порядок $\mathrm{O}(h)$. Следовательно разностная схема (1.7)—(1.8) для уравнений акустики с диссипатором $\mathrm{N}[\nu\mathrm{N}^*\mathbf{u}]$ при указанном выборе ν будет сходиться со скоростью $\mathrm{O}(h^{1/2})$ в энергетической норме.

2°. Модифицируем теперь нелинейную разностную схему (1.1)—(1.4) так, чтобы она осталась консервативной, а в акустическом приближении перешла в (1.7)—(1.8). Уравнения (1.1), (1.2) очевидно следует оставить без изменений, а в уравнение (1.4) движения добавить диссипативный член, после чего оно примет вид

$$m\mathbf{u}_t + \mathrm{GRAD}\,p + \mathrm{N}[\nu\mathrm{N}^*\mathbf{u}] = 0. \tag{5.4}$$

Консервативность по импульсу при этом гарантируется «градиентной» структурой оператора N. Умножая (5.4)

на $\mathbf{u}$ и суммируя по (ω), получаем баланс кинетической энергии

$$\Big(\sum_{\omega}\frac{mu^2}{2}\Big)_t+\sum_{\omega}(\mathbf{u},\,\mathrm{GRAD}\,p)+\sum_{\Omega}\nu|\mathrm{N}^*\mathbf{u}|^2=0.$$

Ясно, что последнее слагаемое слева описывает интенсивность диссипации кинетической энергии, поэтому для сохранения консервативности схемы по полной энергии уравнение (1.3) необходимо модифицировать следующим образом

$$Me_t+pV_t=\nu|\mathrm{N}^*\mathbf{w}|^2. \tag{5.5}$$

Очевидно, что правая часть (5.5) неотрицательна, то есть действительно происходит диссипация кинетической энергии в тепловую.

Таким образом, разностная схема (1.1), (1.2), (5.4), (5.5) является консервативной и сходится со скоростью $O(h^{1/2})$ в акустическом приближении.

§6.6. Выбор масс узлов

1°. Вернемся теперь к проблеме выбора масс узлов. Рассмотрим сетку, все ячейки которой — треугольники (см. рис.6.5). В качестве $X_i(\Omega)$ выберем координаты центра тяжести ячейки Ω. В узле ω рассмотрим тензор

$$v_{ik}=-\sum_{a}X_{i,a}S_{k,a}. \tag{6.1}$$

Вектор $X_{i,a}$ представим в виде $X_{i,a}=x_i+d_{i,a}$ (см. рис.6.5), x_i — координата узла ω, тогда

$$v_{ik}=-\sum_{a}x_iS_{k,a}-\sum_{a}d_{i,a}S_{k,a}.$$

В силу (2.2) первый член в правой части последнего равенства исчезает.

Из геометрических соображений видно, что $\mathbf{d}=4/3\,\mathbf{l}$, где $\mathbf{l}$ — вектор, соединяющий узел ω с серединой отрезка AB, $\mathbf{S}$ — ориентированная площадь отрезка AB. Таким

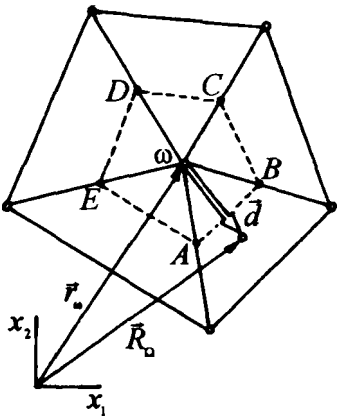


Рис.6.5

образом

$$v_{ik} = -\frac{4}{3} l_{i,a} S_{k,a} = \frac{4}{3} \int\limits_{ABCDE} x_i \mathrm{d}s_k = \frac{4}{3} V_{ABCDE} \delta_{ik}.$$

Т.к. $V_{ABCDE} = 1/4 \sum\limits_a V_a$, то $v_{ik} = 1/3 \sum\limits_a V_a \delta_{ik}$, где суммирование проводится по ячейкам, окружающим узел ω. Сравнивая с (2.3), заключаем, что массу узла следует выбирать как треть масс, окружающих его ячеек:

$$m = \frac{1}{3} \sum_a M_a. \tag{6.2}$$

2. Рассмотрим сетку, все ячейки которой — четырехугольники (см. рис.6.6). В этом случае выбор $v(\omega)$ таких, что выполнено (2.3), вообще говоря, невозможен. В качестве выхода из такой ситуации можно предложить следующий.

Будем считать, что масса узла не скаляр, а тензор второго ранга. Естественно потребовать, чтобы этот тензор был симметричным и положительным. Таким образом, задача состоит в отыскании сеточной тензорной функции v_{ik}, делающей систему

$$-\sum_a X_{i,a} S_{k,a} = v_{ik} \tag{6.3}$$

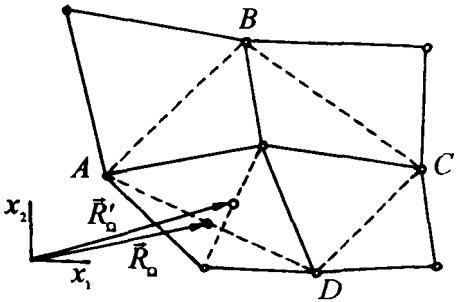


Рис 6.6

совместной. Задачу можно поставить по-другому: найти вектора $\mathbf{R}_\Omega$ такие, что тензоры в левой части (6.3) симметричны и положительны.

Итак, пусть тензор v_{ik} симметричный. Свернем обе части (6.3) с антисимметричным тензором ε_{ik}, тогда

$$[\mathbf{R}_a, \mathbf{S}_a] = 0. \tag{6.4}$$

Построить вектора $\mathbf{R}$ таким образом, чтобы для отдельного узла выполнялось (6.4) несложно - для этого в качестве $\mathbf{R}$ можно взять радиус-вектор середины соответствующей диагонали. При этом, как легко убедится

$$-\sum_a X_{i,a} S_{k,a} = \frac{1}{2} V_{ABCD} \delta_{ik}.$$

Но при таком способе построения $\mathbf{R}_\Omega$ зависит не только от ячейки Ω, но и от того, середину какой диагонали мы принимаем в качестве конца вектора $\mathbf{R}_\Omega$. Чтобы обойти эту неоднозначность, проведем следующее построение (см. рис.6.7).

Через середину диагонали AC, перпендикулярно к ней, проведем прямую α, а через середину диагонали BD, также перпендикулярно к ней — прямую β. Если конец вектора $\mathbf{R}$ лежит на α, то

$$[\mathbf{R}, \mathbf{S}_A] = [\mathbf{R}_Q, \mathbf{S}_A] \text{ и } [\mathbf{R}, \mathbf{S}_C] = [\mathbf{R}_Q, \mathbf{S}_C],$$

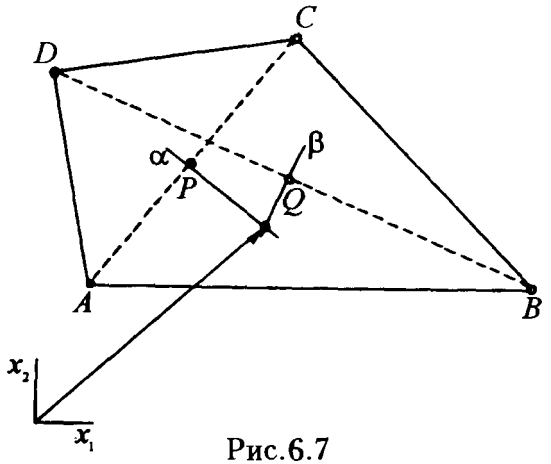


Рис.6.7

а если на β, то

$$[\mathbf{R}, \mathbf{S}_B] = [\mathbf{R}_P, \mathbf{S}_B] \text{ и } [\mathbf{R}, \mathbf{S}_D] = [\mathbf{R}_P, \mathbf{S}_D].$$

Если в качестве конца вектора $\mathbf{R}_\Omega$ выбрать точку пересечения прямых $\alpha(\Omega)$ и $\beta(\Omega)$, то по построению для всех узлов ω будет выполнено

$$\sum_a [\mathbf{R}_a, \mathbf{S}_a] = 0.$$

Приведем формулу, выражающую вектор $\mathbf{R}_\Omega$ через координаты вершин ячейки Ω (см. *Приложение E*)

$$V\mathbf{R} = \frac{1}{2}\sum_a \mathbf{S}_a |\mathbf{r}_a|^2. \tag{6.5}$$

В качестве массы узла можно принять тензор

$$m_{ik}(\omega) = \rho(\omega) v_{ik}(\omega),$$

где $\rho(\omega)$ — некоторая плотность, соотнесенная узлу ω. Матрица v_{ik}, а с ней и m_{ik}, вообще говоря не является положительной. Однако, если ячейки, окружающие узел ω, — параллелограммы $v_{ik} = v\delta_{ik}$ с $v = 1/4\sum_a V_a > 0$.

Так как положительность является «грубым» свойством, в том смысле, что не нарушается при достаточно малых вариациях элементов матрицы (в отличие от, например, симметричности), очевидно существуют практически интересные конфигурации узлов с $v_{ik} > 0$.

3°. Отметим, что и на треугольной сетке можно аналогично построить симметричные матрицы v_{ik}, удовлетворяющие условию аппроксимации уравнения движения (2.3).

§6.7. Полностью консервативные дифференциально-разностные схемы с тензорными массами узлов

1°. Итак, предыдущее рассмотрение показало, что традиционные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики, в которых масса узла — скаляр, вообще говоря не аппроксимируют уравнения движения. Достичь аппроксимации можно, если расширить семейство полностью консервативных разностных схем, допустив, что масса узла может быть симметричным тензором, определяемым положением узлов сетки.

Для построения полностью консервативных разностных схем в этом случае применим вариационный подход. Возьмем лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{\omega} m_{ik} u_i u_k - \sum_{\Omega} Me,$$

где $m_{ik}(\omega)$ — тензорная масса узла ω, M — масса ячейки Ω, e — удельная внутренняя энергия ячейки Ω, а суммирование производится по всем узлам и ячейкам сетки. Уравнения движения для узлов, получающиеся из вариационного принципа с учетом кинематических связей

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = u_i \tag{7.1}$$

и условия адиабатичности

$$M\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0 \tag{7.2}$$

имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_{ik}u_k)_\omega-\frac{1}{2}\sum_{\omega'}u_{j,\omega'}u_{k,\omega'}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}}=-\mathrm{GRAD}_i p. \tag{7.3}$$

Здесь $\sum\limits_{\omega'}$ — сумма по тем узлам, масса которых $m_{ik,\omega'}$ зависит от положения узла ω. Можно считать, что эта сумма по всей сетке, хотя на самом деле в ней ограниченное число членов.

2°. Покажем, что разностная схема (7.1)—(7.3) является полностью консервативной. Пусть $\mathfrak{W}$ — некоторое связное множество ячеек сетки. Рассмотрим систему, состоящую из этих ячеек и узлов $\mathfrak{w}$, являющихся их вершинами. Под полной консервативностью мы будем понимать то свойство разностной схемы, что импульс и полная энергия такой системы (при произвольном выборе множества $\mathfrak{W}$) не имеют внутренних источников, т.е. изменяются только за счет взаимодействия с другими элементами сетки (или границы) по своей поверхности.

Рассмотрим баланс импульса выделенной системы. Импульс узла ω

$$p_{i,\omega}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\omega}}=m_{ik,\omega}u_{k,\omega}.$$

Просуммируем (7.3) по множеству $\mathfrak{W}$. Имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\mathfrak{w}}p_{i,\omega}-\frac{1}{2}\sum_{\omega\in\mathfrak{w}}\sum_{\omega'}u_{j,\omega'}u_{k,\omega'}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}}=-\sum_{\omega\in\mathfrak{w}}\mathrm{GRAD}_i\,p. \tag{7.4}$$

Во втором слагаемом слева соберем члены, содержащие множитель $u_{j,\omega'}u_{k,\omega'}$. Очевидно, они имеют вид

$$\frac{1}{2}u_{j,\omega'}u_{k,\omega'}\sum_{\omega\in\mathfrak{w}}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}}.$$

Здесь сумма $\sum\limits_{\mathfrak{w}}$ есть изменение массы $m_{jk,\omega'}$ узла ω' при одновременном сдвиге всех узлов $\omega \in \mathfrak{w}$ вдоль координаты x_i. На массы узлов естественно наложить требование

$$\sum_{\omega} \frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}} = 0, \tag{7.5}$$

где суммирование проводится по всей сетке. Коэффициенты при $u_{j,\omega'}u_{k,\omega'}$ обратятся в ноль для тех узлов ω', массы которых зависят только от координат узлов $\mathfrak{W}$, либо не зависят от этих координат. Для узлов «на границе $\mathfrak{W}$», массы которых зависят от положения узлов как принадлежащих, так и не принадлежащих $\mathfrak{w}$, выражение $\sum\limits_{\omega\in\mathfrak{w}} \neq 0$ и соответствующие члены в (7.4) дают разностный аналог «поверхностного интеграла».

Рассмотрим баланс кинетической энергии. Умножим (7.3) на u_i и просуммируем по $\omega \in \mathfrak{w}$

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\omega\in\mathfrak{w}}\frac{1}{2}(m_{ik}u_iu_k)_\omega + \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\mathfrak{w}} u_{i,\omega}u_{k,\omega}\frac{\mathrm{d}m_{ik,\omega}}{\mathrm{d}t} - \\ -\frac{1}{2}\sum_{\omega\in\mathfrak{w}}\sum_{\omega'} u_{i,\omega}u_{j,\omega'}u_{k,\omega'}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}} = \sum_{\omega\in\mathfrak{w}} u_i\ \mathrm{GRAD}_i\, p.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Преобразуем второе и третье слагаемые в левой части (7.6)

$$(\mathrm{ii}) + (\mathrm{iii}) = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\mathfrak{w}}\sum_{\omega'} u_{i,\omega}u_{j,\omega'}\left[u_{k,\omega}\frac{\partial m_{jk,\omega}}{\partial x_{i,\omega'}} - u_{k,\omega'}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}}\right].$$

В правой части последнего равенства множители $u_{i,\omega}u_{j,\omega'}$ не меняются при замене $i \leftrightarrow j$, $\omega \leftrightarrow \omega'$, а множители [...] меняют знак при этой замене. С учетом этого сумма в правой части последнего равенства обратилась бы в нуль, но существуют пары (ω_1, ω_2), которые встречаются в сумме только один раз и поэтому не изчезают, а дают «поверхностный интеграл».

Баланс полной энергии в схеме (7.1)—(7.3) имеет такой же вид, что и в традиционных полностью консервативных разностных схемах, поэтому мы его не приводим.

3°. Отметим, что уравнения (7.3) отличаются от уравнений движения, полученных в [73, 74], в которых второй член в левой части имеет вид

$$-\frac{1}{2}u_{k,\omega}\frac{\mathrm{d}m_{ik}}{\mathrm{d}t}.$$

По-видимому, предложенная в [74] разностная схема не являтся консервативной по импульсу. Это связанно с тем, что при подходе к построению разностных схем, предложенном в [73], правая часть уравнения движения определяется с точностью до гироскопической силы, удовлетворяющей условию

$$\sum_{\omega}(\mathbf{f}_{\omega}, \mathbf{u}_{\omega}) = 0.$$

Ввиду этой неоднозначности при построении дискретных моделей уравнений газовой динамики на основе законов взаимного превращения кинетической и внутренней энергий сплошной среды [73] следует привлекать дополнительные соображения, например консервативность.

§6.8. Преобразование Галилея

1°. Как известно уравнения газовой динамики допускают преобразование Галилея, т.е. при замене

$$u_i \to u_i + U_i, \qquad x_i \to x_i + U_i t \tag{8.1}$$

не изменяются. Естественно потребовать, чтобы разностная схема также допускала эти преобразования. С уравнениями (7.1)—(7.2) проблем, очевидно, не возникает. Рассмотрим уравнение движения (7.3) и сделаем в нем указанную замену.

Предварительно отметим следующее. В силу условий (2.1), (7.5) объемы ячеек и массы узлов инвариантны относительно сдвигов сетки. Следовательно не изменяются и их производные по координатам узлов: $S_{i,a}$ и $\dfrac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}}$, входящие в (7.3). Таким образом, после преобразования

(8.1) с учетом симметрии m_{ik} уравнения движения примут вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_{ik}u_k)_\omega - \frac{1}{2}\sum_{\omega'} u_{j,\omega'}u_{k,\omega'}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}} + U_k\frac{\mathrm{d}m_{ik,\omega}}{\mathrm{d}t} -$$
$$-U_k\sum_{\omega'} u_{j,\omega'}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}} - \frac{1}{2}U_jU_k\sum_{\omega'}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}} = -\mathrm{GRAD}_i p. \tag{8.2}$$

Сравнивая (8.2) и (7.3), находим следующие условия инвариантности разностной схемы (7.1)—(7.3) относительно преобразований Галилея

$$\frac{\mathrm{d}m_{ik,\omega}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\omega'} u_{j,\omega'}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}}, \tag{8.3}$$

$$\sum_{\omega'}\frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}} = 0. \tag{8.4}$$

Из (8.3) с учетом

$$\frac{\mathrm{d}m_{ik,\omega}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\omega'} u_{j,\omega'}\frac{\partial m_{ik,\omega'}}{\partial x_{j,\omega}}$$

имеем

$$\sum_{\omega'} u_{j,\omega'}\left[\frac{\partial m_{ik,\omega}}{\partial x_{j,\omega'}} - \frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}}\right] = 0.$$

Требуя, чтобы последнее уравнение удовлетворялось при произвольных $u_{j,\omega'}$, получаем

$$\frac{\partial m_{ik,\omega}}{\partial x_{j,\omega'}} = \frac{\partial m_{jk,\omega'}}{\partial x_{i,\omega}}. \tag{8.5}$$

Очевидно, что при выполнении (8.5) и (7.5) условие (8.4) выполняется автоматически.

Условие (8.5) будет выполнено, если существует «потенциал масс», т.е. векторная функция $\Lambda_i(\mathbf{r}_\omega; M_\Omega)$ такая что

$$m_{ik,\omega} = \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_{k,\omega}}. \tag{8.6}$$

2°. До сих пор, рассматривая вопрос об инвариантности разностных схем относительно преобразования Галилея, мы не делали никаких предположений относительно масс узлов. Однако, они должны выбираться таким образом, чтобы обеспечить аппроксимацию уравнения движения (1.2) в акустическом приближении. Для треугольных сеток этого можно достичь положив $m = 1/3 \sum_a M_a$. Для четырехугольных сеток достичь аппроксимации также несложно, положив $m_{ik}(\omega) = \rho(\omega) v_{ik}(\omega)$. Здесь $v_{ik}(\omega)$ дается формулой (6.3) с $X_k(\Omega)$ определенными согласно (6.5); $\rho(\omega)$ — плотность в узле, получаемая тем или иным усреднением плотностей в ячейках, окружающих узел ω. Однако при таком выборе m_{ik} не никакой надежды на выполнение условий (8.5) и, тем самым, инвариантность разностной схемы (7.1)—(7.3) относительно преобразования Галилея. Другой путь состоит в построении «массового потенциала» Λ_i и определении масс узлов по (8.6).

Выясним, какие условия налагает требование аппроксимации уравнений движения на вид функции Λ_i. Подставляя (8.6) в (2.7) и интерпретируя ξ_k как скорости узлов, получаем

$$\sum_\omega \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_{k,\omega}} \xi_{k,\omega} = \frac{\mathrm{d}\Lambda_i}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{8.7}$$

т.е. Λ_i не должна изменяться при изообъемных движениях сетки.

По-видимому, достаточно простого выражения для Λ_i, во всяком случае линейного по массам ячеек, удовлетворяющего (8.7) и дающего симметричные тензоры $m_{ik}(\omega)$, не существует. Таким образом, для уравнений лагранжевой газовой динамики не удается построить разностные схемы на четырехугольных сетках, которые одновременно аппроксимируют уравнения акустики, удовлетворяют принципу полной консервативности и инвариантны относительно преобразования Галилея.

Глава VII

Исследование вариационно–разностных схем газовой динамики на свободно–лагранжевых сетках

§7.1. Семейство разностных схем. Условия аппроксимации

1°. Настоящая глава посвящена исследованию сходимости полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в двумерной плоской геометрии на свободно–лагранжевых сетках. Идея построения полностью консервативных схем такого типа состоит в следующем. Каждому узлу сетки ставится в соответствие некоторая часть расчетной области, как функция координат узлов сетки. Постулируется, что области соответствия являются жидкими частицами, т.е. между ними отсутствуют конвективные потоки массы, импульса и энергии. Уравнения движения для такой дискретной модели получаются, например, путем варьирования функционала действия при наложенных кинематических и термодинамических связях. Весь произвол при построении полностью консервативных разностных схем такого типа заключается в выборе областей соответствия для узлов сетки. В данной работе будет рассмотрен случай, когда областью соответствия узла является его ячейка Дирихле.

В этом случае уравнение движения узлов аппроксимируется локально с первым порядком по шагу пространственной сетки h, а аппроксимация уравнения неразрывности в локальном смысле отсутствует. Тем не менее можно показать, что имеет место сходимость к решению дифференциальной задачи в некоторой негативной норме. Это связано с тем, что главный член погрешности аппроксимации уравнения неразрывности, имеющий порядок $O(1)$, представляются в «дивергентном» виде, при этом поток, стоящий под «дивергенцией», имеет порядок $O(h)$. «Дивергентность» в данном случае означает, что

сумма «дивергентных» слагаемых по связному множеству узлов сводится к сумме по границе этого множества. На качественном уровне это означает, что ошибка также имеет «дивергентный» вид и разностное решение осциллирует около спроектированного на сетку решения дифференциальной задачи. При этом «амплитуда осцилляций», вообще говоря, есть $O(1)$, а «амплитуда» сеточной функции под «дивергенцией» есть $O(h)$. Подавить эти осцилляции можно вводя в схему искусственную вязкость порядка $O(h)$. Тогда решение разностной задачи будет сходится к решению исходной дифференциальной со скоростью $O(h^{1/2})$.

Сделанные утверждения можно наглядно проиллюстрировать на дифференциальном уровне следующим примером. Рассмотрим уравнение переноса

$$z_t + az_x = -\psi_x, \quad a = \text{const} > 0 \tag{1.1}$$

при $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$. Пусть $z\big|_{t=0} = 0$ и $\psi(t,x)$ финитная по x функция с L^2–нормой $\|\psi\| = O(h)$, где h — малый параметр. Имея в виду ассоциацию с разностными схемами под h следует понимать шаг пространственной сетки. Пусть при этом $\|\psi_x\| = O(1)$.

Ясно, что в общем случае $\|z\| = O(1)$. Оценим негативную норму решения. Умножим (1.1) на $\zeta(t,x)$ и проинтегрируем по x. Обозначая $\langle\zeta, z\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \zeta z \mathrm{d}x$ и выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\langle\zeta, z\rangle_t - \langle\zeta_t, z\rangle - a\langle\zeta_x, z\rangle = \langle\zeta_x, \psi\rangle.$$

Требуя, чтобы $\zeta(t,x)$ удовлетворяла уравнению

$$\zeta_t + a\zeta_x = 0, \tag{1.2}$$

находим $\langle\zeta, z\rangle_t = \langle\zeta_x, \psi\rangle$, откуда

$$|\langle\zeta, z\rangle| \leq \int\limits_0^T |\langle\zeta_x, \psi\rangle| \mathrm{d}\tau \leq \int\limits_0^T \|\zeta_x\| \|\varphi\| \mathrm{d}\tau.$$

Но $\|\zeta_x\| = \|\zeta\|_1$ очевидно не зависит от t, поэтому

$$\frac{|\langle\zeta, z\rangle|}{\|\zeta\|_1} \le \int\limits_0^T \|\psi\| \mathrm{d}\tau. \tag{1.3}$$

В левой части этого неравенства ζ рассматривается в момент времени t и может быть произвольной функцией x. На временной интервал $0 < \tau < t$ она продолжается согласно уравнению (1.2). Беря в (1.3) supremum по всем $\zeta(t, x)$ при фиксированном t получаем

$$\|z\|_{-1} = \sup \frac{|\langle\zeta, z\rangle|}{\|\zeta\|_1} \le \int\limits_0^T \|\psi\| \mathrm{d}\tau = \mathrm{O}(h).$$

Добавим теперь в уравнение (1.1) диссипативный (диффузионный) член. При этом следует помнить, что на самом деле (1.1) является аналогом уравнения для ошибки полностью консервативной разностной схемы, а диссипатор вводится в сами разностные уравнения. Поэтому в (1.1) появится не только диффузионное слагаемое, но и дополнительный член в правой части, имеющий ту же структуру. Вместо (1.1) получаем

$$z_t + az_x - \nu z_{xx} = -\psi_x + \nu\varphi_x, \quad \nu = \mathrm{const} > 0,$$

где φ — аналог решения исходной задачи (точнее производной решения по x). Это уравнение рассматривается при тех же начальных данных и условиях на ψ. Умножая его на $z(t, x)$ и интегрируя по x, находим

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z\|^2 + \nu\|z_x\|^2 = \langle z_x, \psi - \nu\varphi\rangle.$$

Применяя ε–неравенство с $\varepsilon = \nu$ получаем

$$\|z\|^2 \le \frac{1}{2\nu}\int\limits_0^T \|\psi - \nu\varphi\|^2 \mathrm{d}\tau \le \frac{1}{\nu}\int\limits_0^T \|\psi\|^2 \mathrm{d}\tau + \nu\int\limits_0^T \|\varphi\|^2 \mathrm{d}\tau.$$

Так как $\|\psi\| = \mathrm{O}(h)$ из последнего неравенства следует, что следует полагать $\nu = \mathrm{O}(h)$, при этом $\|z\| = \mathrm{O}(h^{1/2})$.

Вывод из рассмотренной аналогии таков: следует ожидать, что полностью консервативные разностные схемы, понимаемые как схемы без диссипации, не гарантируют сходимость в случаях, когда аппроксимация уравнений в локальном смысле отсутствует. Но именно это свойство позволяет принять полностью консервативные разностные схемы как базовые и вводить в них диссипацию целенаправленно (для подавления осцилляций и обеспечения сходимости) и в контролируемых дозах.

2°. На плоскости (x_1, x_2) рассмотрим систему уравнений лагранжевой газовой динамики

$$\begin{aligned} &\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ &\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \operatorname{grad} p = 0, \\ &\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + p\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь ρ, $v = 1/\rho$, e, p — плотность, удельные объем и внутренняя энергия, давление; $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$ — радиус-векторы и скорости частиц жидкости.

Для численного интегрирования уравнений (1.4) введем семейство свободно–лагранжевых сеток. Так как постановка граничных условий в свободно–лагранжевых методах является отдельной проблемой [83] , не имеющей прямого отношения к цели данной работы, уравнения (1.4) будем рассматривать на всей плоскости (x_1, x_2). В дальнейшем вопросы аппроксимации и сходимости разностных схем будут рассматриваться в акустическом приближении и возмущения всех величин, входящих в (1.4), считаться финитными функциями.

Все сеточные функции будем относить к узлам сетки. Согласно рассматриваемой здесь методике, с каждым узлом сетки ассоциируется многоугольник на плоскости (x_1, x_2) — соответствующая ячейка Дирихле. Объем ячейки Дирихле узла ω (призмы единичной высоты,

имеющей в основании соответствующий многоугольник) является функцией координат узлов сетки, фактически только соседних с ω.

Предположение о лагранжевости ячеек Дирихле приводит к дифференциально-разностной схеме [77]:

$$Mv_t - \sum_{\omega'} \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial \mathbf{r}_{\omega'}}\right) \mathbf{u}_{\omega'} = 0, \tag{1.5}$$

$$M\mathbf{u}_t + \sum_{\omega'} p_{\omega'} \left(\frac{\partial V_{\omega'}}{\partial \mathbf{r}_\omega}\right) = 0, \tag{1.6}$$

$$Me_t + pV_t = 0, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{u}. \tag{1.8}$$

Здесь V, M — объем и масса ячейки ω; $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$ — радиус-вектор и скорость узла ω.

В (1.5), (1.6) суммирование формально проводится по всем узлам сетки, а фактически только по соседям узла ω. Уравнения (1.5), (1.6) позволяют ввести разностные аналоги дифференциальных операторов div и grad по формулам:

$$\mathrm{DIV}\,\mathbf{u} = \sum_{\omega'} \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial \mathbf{r}_{\omega'}}\right) \mathbf{u}_{\omega'},$$

$$\mathrm{GRAD}\,p = -\sum_{\omega'} p_{\omega'} \left(\frac{\partial V_{\omega'}}{\partial \mathbf{r}_\omega}\right).$$

Построенные таким образом операторы DIV и $-$GRAD являются сопряженными в том смысле, что

$$\sum_\omega p\,\mathrm{DIV}\,\mathbf{u} = -\sum_\omega (\mathbf{u},\ \mathrm{GRAD}\,p)$$

для любых финитных сеточных функций $\mathbf{u}$, p.

Известно [78] , что V_ω и $\partial V_\omega / \partial \mathbf{r}_{\omega'}$ — непрерывные функции координат узлов сетки. Так как ячейки Дирихле инвариантны относительно сдвигов сетки и заполняют плоскость (x_1, x_2) без зазоров и перекрытий

$$\sum_{\omega'} \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial \mathbf{r}_{\omega'}}\right) = 0, \qquad \sum_{\omega'} \left(\frac{\partial V_{\omega'}}{\partial \mathbf{r}_\omega}\right) = 0.$$

Геометрический смысл вектора $\partial V_\omega/\partial \mathbf{r}_{\omega'}$ при $\omega \neq \omega'$ следующий [78]. Пусть отрезок AB — сторона ячеек Дирихле узлов ω (точка O) и ω' (точка O'), а C — середина этого отрезка (см. рис.7.1).

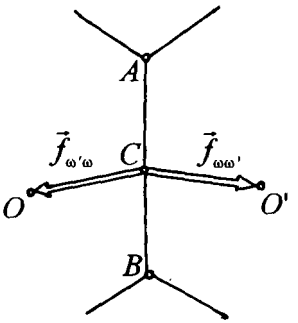


Рис.7.1

Тогда $\dfrac{\partial V_\omega}{\partial \mathbf{r}_{\omega'}} = \dfrac{AB}{OO'}\mathbf{f}_{\omega\omega'}$.

3°. Вопросы аппроксимации и сходимости разностной схемы (1.5)—(1.8) будем рассматривать в акустическом приближении. Подробность разностной сетки будем характеризовать параметром h, предполагая, что расстояния $l_{\omega\omega'}$ между соседними (области Дирихле которых имеют общую сторону) узлами ω, ω' удовлетворяют условию $c_1 h \leq l_{\omega\omega'} \leq c_2 h$, где c_1, c_2 не зависят от сетки из рассматриваемого семейства и пары ω, ω'.

Кроме того будем считать выполненным следующее вложение

$$\sum |\zeta_\omega - \zeta_{\omega'}|^2 \leq c^2 \sum_\omega \frac{|\mathrm{GRAD}\,\zeta|^2}{M}$$

для произвольной финитной $\zeta(\omega)$ и константой c независящей от сетки. Здесь слева суммирование проводится по всем соседним парам. По существу это неравенство означает, что рассматриваются сетки, такие что $\mathrm{GRAD}\,\zeta = 0$ только при $\zeta = \mathrm{const}$.

Уравнения акустики имеют вид

$$p_t + \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{u}_t + \operatorname{grad} p = 0. \tag{1.10}$$

Здесь p, $\mathbf{u}$ — возмущения давления и скорости. Считаем, что на фоне плотность равна 1, скорость звука — 1, скорость вещества — 0. Будем считать также, что $p(x)$, $\mathbf{u}(x)$ отличны от нуля в ограниченной области плоскости (x_1, x_2).

Соответствующая линеаризованная разностная схема имеет вид

$$Mp_t + \operatorname{DIV} \mathbf{u} = 0, \tag{1.11}$$

$$M\mathbf{u}_t + \operatorname{GRAD} p = 0, \tag{1.12}$$

Чтобы сравнивать разностное решение (1.11)—(1.12) с решением исходной задачи (1.9)—(1.10) преобразуем последнее в сеточные функции при помощи проекторов Π и $\hat{\Pi}$, которые будем считать независящими от t.

Получим уравнения для ошибок

$$q(\omega) = p(\omega) - \Pi_\omega p(x), \quad \boldsymbol{w}(\omega) = \mathbf{u}(\omega) - \hat{\Pi}_\omega \mathbf{u}(x).$$

Для этого применим проектор Π к (1.9), а проектор $\hat{\Pi}$ к (1.10). В результате, комбинируя с (1.11)—(1.12), имеем

$$Mq_t + \operatorname{DIV} \boldsymbol{w} = -M\Pi(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{DIV}(\hat{\Pi}\mathbf{u}) = M\psi, \tag{1.13}$$

$$M\boldsymbol{w}_t + \operatorname{GRAD} q = -M\hat{\Pi}(\operatorname{grad} p) + \operatorname{GRAD}(\Pi p) = M\boldsymbol{\varphi}. \tag{1.14}$$

В [78, 82] было показано, что если в качестве проекторов взять $\Pi_\omega p(x) = p(\mathbf{r}_\omega)$, $\hat{\Pi}_\omega \mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_\omega)$, то уравнение движения аппроксимируется локально с точностью $O(h)$, а уравнение непрерывности в локальном смысле не аппроксимируется, но аппроксимируется в некоторой «негативной» норме, т.е. невязка имеет «дивергентный» вид и сеточная функция, стоящая под «дивергенцией», исчезает при $h \to 0$. Повторим вывод указанной работы с целью конкретизировать утверждение о «дивергентном» виде погрешности аппроксимации уравнения неразрывности.

Рассмотрим невязку в правой части (1.13).
Если $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u} = \text{const}$, то $M\psi = M\psi_0 = \operatorname{DIV} \mathbf{u}$.
Если $\mathbf{u}(x) = \mathbb{U}\mathbf{r}$ ($\mathbb{U} = \text{const}$), то $M\psi = M\psi_1 = \operatorname{DIV}(\mathbb{U}\mathbf{r})$–

$-V\,\mathrm{sp}\mathbb{U}$.

Чтобы выполнялась оценка $\psi = \mathrm{O}(h)$, следует потребовать $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 0$ при произвольных $\mathbf{u}$, $\mathbb{U}$. Отсюда

$$\mathrm{DIV}_i 1 = \sum_{\omega'} \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial x_{i,\omega'}} \right) = 0, \tag{1.15}$$

$$\mathrm{DIV}_i X_k = \sum_{\omega'} \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial x_{i,\omega'}} \right) X_{k,\omega'} = V_\omega \delta_{ik}. \tag{1.16}$$

Рассмотрим невязку в правой части (1.14).

Если $p(x) = p = \mathrm{const}$, то $M\boldsymbol{\varphi} = M\boldsymbol{\varphi}_0 = \mathrm{GRAD}\,p$.

Если $p(x) = (\mathbf{p}, \mathbf{r})$, то $m\boldsymbol{\varphi} = M\boldsymbol{\varphi}_1 = \mathrm{GRAD}\,(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - V\mathbf{p}$.

Чтобы выполнялась оценка $\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{O}(h)$, следует потребовать $\boldsymbol{\varphi}_0 = 0$, $\boldsymbol{\varphi}_1 = 0$ при произвольных p, $\mathbf{p} = \mathrm{const}$. Отсюда

$$\mathrm{GRAD}_i 1 = -\sum_{\omega'} \left(\frac{\partial V_{\omega'}}{\partial x_{i,\omega}} \right) = 0, \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{GRAD}_i X_k &= -\sum_{\omega'} X_{k,\omega'} \left(\frac{\partial V_{\omega'}}{\partial x_{i,\omega}} \right) = \\ &= V_\omega \delta_{ik}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Условия (1.15), (1.17) очевидно выполнены, проверим выполнение (1.16), (1.18). Рассмотрим узел ω. Введем векторы $\mathbf{l}_a = \mathbf{r}_{\omega'} - \mathbf{r}_\omega$, где a — упорядоченная пара (ω, ω'), $-a = (\omega', \omega)$. Тогда в силу (1.17) условие (1.18) для узла ω можно записать в виде

$$-\sum_a l_{k,a} \left(\frac{\partial V_a}{\partial x_i} \right) = V \delta_{ik}.$$

Здесь фиксированный индекс ω опущен, суммирование проводится по всем соседям узла ω, а дифференцирование по координатам узла ω. Вектор $\partial V_a / \partial x_i$, как уже отмечалось, есть $\lambda_a f_{i,-a}$, где $\lambda_a = |\mathbf{S}_a| : |\mathbf{l}_a|$, $\mathbf{S}_a$ — ориентированная наружу площадь стороны AB ячейки Дирихле узла ω (см. рис.7.1). В силу этого тензор

$$l_{k,a} \left(\frac{\partial V_a}{\partial x_i} \right) = -f_{i,-a} S_{k,a},$$

и, следовательно,

$$\sum_a l_{k,a}\left(\frac{\partial V_a}{\partial x_i}\right) = -V\delta_{ik},$$

т.е. в (1.14) $\psi = O(h)$ локально.

Рассмотрим теперь условия (1.16). Аналогичные выкладки дают

$$\sum_{\omega'}\left(\frac{\partial V_\omega}{\partial x_{i,\omega'}}\right)X_{k,\omega'} = \sum_a\left(\frac{\partial V}{\partial x_{i,a}}\right)l_{k,a} = \sum_a f_{i,a}S_{k,a}.$$

Правая часть последней цепочки равенств, вообще говоря, не равна $V\delta_{ik}$. Найдем разность этих величин и выясним ее структуру. Имеем

$$\sum_a f_{i,a}S_{k,a} = -\sum_a f_{i,-a}S_{k,a} + \sum_a (f_{i,a} + f_{i,-a})S_{k,a} =$$
$$= V\delta_{ik} + \sum_a e_{i,a}l_{k,a},$$

где вектор $\boldsymbol{e}_a = \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial \mathbf{r}_{\omega'}}\right) + \left(\frac{\partial V_{\omega'}}{\partial \mathbf{r}_\omega}\right)$ симметричен относительно ω, ω'.

Таким образом погрешность аппроксимации уравнения неразрывности на линейном профиле скорости $u_i(x)=U_{ik}\times$ $\times x_k$

$$M\psi = U_{ik}\sum_a e_{i,a}l_{k,a}.$$

Очевидно, что такой же вид на линейном профиле скорости имеет и конструкция

$$\sum_a e_{i,a}\Delta_a\hat{\Pi}u_i, \tag{1.19}$$

где $\Delta_a\hat{\Pi}u_i = \hat{\Pi}u_i(\omega') - \hat{\Pi}u_i(\omega)$. Выражение (1.19) имеет «дивергентный» вид в смысле, указанном во введении. В самом деле, векторы $\boldsymbol{e}_a$ симметричны относительно замены $\omega \leftrightarrow \omega'$ а $\Delta_a\hat{\Pi}u_i$ — антисимметричны. Поэтому при суммировании выражений (1.19) по связному множеству узлов $\mathfrak{W}$ слагаемые, соответствующие парам ω, $\omega' \in \mathfrak{W}$,

исчезнут, а останутся лишь слагаемые, соответствующие «граничным» парам $\omega \in \mathfrak{A}$, $\omega' \notin \mathfrak{A}$.

Таким образом погрешность аппроксимации уравнения неразрывности может быть представлена в виде

$$M\psi = \sum_a (\mathbf{e}_a, \Delta_a \hat{\Pi}\mathbf{u}) + M\chi,$$

где $\chi = O(h)$ локально. В дальнейшем для краткости будем обозначать $(\mathbf{e}_a, \Delta_a \hat{\Pi}\mathbf{u}) = g_a$, очевидно $g_{-a} = -g_a$.

§7.2. Априорные оценки

1°. Установим энергетическое неравенство для уравнений (1.13)—(1.14). Умножая (1.13) на q, (1.14) на $\boldsymbol{w}$ и суммируя по всем ω, находим, с учетом сопряженности операторов DIV и $-$GRAD

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_\omega \frac{M}{2}(|w|^2 + q^2) = \sum_\omega M[(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\varphi}) + q\psi]. \tag{2.1}$$

Обозначая энергию системы $J^2 = \sum_\omega M(|w|^2 + q^2)$ и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} \le \Big[\sum_\omega M(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + \psi^2)\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Если $\boldsymbol{\varphi}, \psi = O(h)$, то из (2.2) следует сходимость разностной схемы (1.11)—(1.12) в энергетической норме со скоростью $O(h)$. Однако, вообще говоря, погрешность аппроксимации уравнения неразрывности $\psi = O(1)$. Тем не менее, так как главный член невязки имеет специальный «дивергентный» вид, можно расчитывать на сходимость в слабой норме.

Так как система (1.13)—(1.14) линейна, не нарушая общности можно считать, что $\boldsymbol{\varphi}, \chi = 0$ и соответственно правая часть (1.13) имеет вид $\sum_a g_a$.

2°. Рассмотрим систему (1.13)—(1.14) с указанной правой частью

$$
\begin{aligned}
&M q_t + \operatorname{DIV} \boldsymbol{w} = \sum_a g_a, \\
&M \boldsymbol{w}_t + \operatorname{GRAD} q = 0, \\
&q\Big|_{t=0} = 0, \quad \boldsymbol{w}\Big|_{t=0} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Умножим первое уравнение на $\eta(t,\omega)$, второе на $\xi(t,\omega)$ и просуммируем по всем ω

$$
\langle \eta, q_t \rangle + \langle \xi, \boldsymbol{w}_t \rangle + \sum_\omega \eta \operatorname{DIV} \boldsymbol{w} + \sum_\omega (\xi, \operatorname{GRAD} q) = \sum_\omega \eta \sum_a g_a,
$$

где $\langle \zeta, z \rangle = \sum\limits_\omega M \zeta z$. С учетом $\operatorname{DIV}^* = -\operatorname{GRAD}$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\langle \eta, q \rangle_t + \langle \xi, \boldsymbol{w} \rangle_t - \langle \eta_t, q \rangle - \sum_\omega q \operatorname{DIV} \xi - \\
&- \langle \xi_t, \boldsymbol{w} \rangle - \sum_\omega (\boldsymbol{w}, \operatorname{GRAD} \eta) = - \sum_\sigma g_\sigma \Delta_\sigma \eta.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Здесь $\sum\limits_\sigma$ — суммирование по всем парам (ω, ω'), являющихся соседями. Наложим теперь на сеточные функции $\eta(t,\omega)$ и $\xi(t,\omega)$ условие, состоящее в том, что они удовлетворяют системе

$$
\begin{aligned}
&M \eta_\tau + \operatorname{DIV} \xi = 0, \\
&M \xi_\tau + \operatorname{GRAD} \eta = 0.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Тогда из (2.4) следует

$$
\langle \eta, q \rangle + \langle \xi, \boldsymbol{w} \rangle = - \int_0^t \Big[\sum_\sigma g_\sigma \Delta_\sigma \eta \Big] \mathrm{d}\tau \tag{2.6}
$$

Прежде чем оценивать правую часть последнего равенства рассмотрим систему (2.5). Продифференцируем первое из уравнений по τ, умножим на η_τ и просуммируем

по ω. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\omega}\Big[M\eta_\tau\eta_{\tau\tau} + \eta_\tau \operatorname{DIV}\xi_\tau\Big] = \\ &= \sum_{\omega}\Big[\frac{M}{2}(\eta_\tau^2)_\tau - (\xi_\tau, \operatorname{GRAD}\eta_\tau)\Big] = \\ &= \sum_{\omega}\frac{1}{2M}\Big[(\operatorname{DIV}\xi)^2 + (\operatorname{GRAD}\eta)^2\Big]_\tau, \end{aligned}$$

т.е. выражение

$$\|\zeta\|_1^2 = \sum_{\omega}\frac{1}{M}\Big[(\operatorname{DIV}\xi)^2 + (\operatorname{GRAD}\eta)^2\Big]$$

не зависит от τ.

Вернемся теперь к (2.6). Рассмотрим подынтегральное выражение в правой части в момент времени t:

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{\sigma} g_\sigma\Delta_\sigma\eta\Big| \le \Big[\sum_{\sigma} g_\sigma^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\sum_{\sigma}(\Delta_\sigma\eta)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le c\Big[\sum_{\omega}\frac{(\operatorname{GRAD}\eta)^2}{M}\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\sum_{\sigma} g_\sigma^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le c\|\zeta\|_1\Big[\sum_{\sigma} g_\sigma^2\Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В силу $\|\zeta\|_1 = \mathrm{const}$ имеем

$$\Big|\int_0^t\Big[\sum_{\sigma} g_\sigma\Delta_\sigma\eta\Big]\mathrm{d}\tau\Big| \le c\|\zeta\|_1\int_0^t\Big[\sum_{\sigma} g_\sigma^2\Big]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau. \tag{2.7}$$

Подынтегральное выражение в последнем неравенстве легко оценить, предполагая ту или иную степень гладкости $\mathbf{u}(x)$.

Негативную норму решения задачи (2.3) $z = (q, \mathbf{w})$ в момент времени t введем по формуле

$$\|z\|_{-1} = \sup\frac{|\langle\zeta, z\rangle|}{\|\zeta\|_1}, \tag{2.8}$$

где $\zeta = (\eta, \xi)$.

В (2.8) сеточные функции η и ξ определены только при $\tau = t$. Продолжим их на временной отрезок $0 \le \tau \le t$

как решение уравнений (2.5) с начальными данными при $\tau = t$. Тогда справедлива оценка (2.7) и, следовательно, $\|z\|_{-1} = O(h)$. Остается добавить, что здесь t произвольно.

3°. Поставим теперь вопрос: можно ли ввести в систему (2.3) диссипацию так, чтобы получить сходимость $(q, \boldsymbol{w}) \to 0$ в более сильной норме, например — энергетической.

Правая часть первого уравнения (2.3) после умножения на q и суммирования по ω, даст выражение

$$\Psi = \sum_\sigma g_\sigma \Delta_\sigma q \le \sum_\sigma \left[\varepsilon |\Delta_\sigma q|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} g_\sigma^2\right].$$

Компенсировать первое слагаемое, содержащее норму решения, можно, вводя в первое уравнение под знак DIV дополнительное слагаемое $\boldsymbol{\nu}$, линейное по Δq, например

$$\boldsymbol{\nu}[q] = -\frac{\nu}{M} \operatorname{GRAD} q \quad (\nu = \text{const} > 0).$$

Тогда вместо (2.1) получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{J^2}{2} + \nu \sum_\omega \frac{|\operatorname{GRAD} q|^2}{M} = \Psi. \tag{2.9}$$

Однако следует иметь в виду, что диссипативные члены вводятся не в уравнения (1.13)—(1.14) для ошибки, а в уравнения (1.11)—(1.12). Это приводит к появлению в правой части уравнения (1.13) дополнительного слагаемого $-\operatorname{DIV} \boldsymbol{\nu}[\Pi p]$, с учетом которого правая часть (2.9) примет вид

$$\Psi = \sum_\sigma g_\sigma \Delta_\sigma q - \nu \sum_\omega \frac{(\operatorname{GRAD} q, \operatorname{GRAD}(\Pi p))}{M}$$

и может быть оценена с использованием ε–неравенства

$$|\Psi| \le \varepsilon \sum_\sigma (\Delta_\sigma q)^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \sum_\sigma g_\sigma^2 +$$

$$+ \nu\varepsilon_1 \sum_\omega \frac{|\operatorname{GRAD} q|^2}{M} + \frac{\nu}{4\varepsilon_1} \sum_\omega \frac{|\operatorname{GRAD}(\Pi p)|^2}{M} \le$$

$$\le (c^2\varepsilon + \nu\varepsilon_1) \sum_\omega \frac{|\operatorname{GRAD} q|^2}{M} +$$

$$+ \frac{1}{4\varepsilon} \sum_\sigma g_\sigma^2 + \frac{\nu}{4\varepsilon_1} \sum_\omega \frac{|\operatorname{GRAD}(\Pi p)|^2}{M}.$$

Полагая в последнем неравенстве $c^2\varepsilon = \nu k$, $\varepsilon_1 = 1 - k$ $(0 < k < 1)$, получаем

$$|\Psi| \le \nu \sum_\omega \frac{|\operatorname{GRAD} q|^2}{M} + \frac{A^2}{4\nu k} + \frac{\nu B^2}{1-k},$$

где

$$A^2 = \frac{c^2}{4} \sum_\sigma g_\sigma^2 = \mathrm{O}(h^2), \quad B^2 = \frac{1}{4} \sum_\omega \frac{|\operatorname{GRAD}(\Pi p)|^2}{M} = \mathrm{O}(1).$$

Соответственно

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{J^2}{2} \le \frac{A^2}{\nu k} + \frac{\nu B^2}{1-k}.$$

Т.к. k произвольно в интервале $(0,1)$, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{J^2}{2} \le \inf_{k\in(0,1)} \left(\frac{A^2}{\nu k} + \frac{\nu B^2}{1-k} \right) = \frac{(A + \nu B)^2}{\nu}. \tag{2.10}$$

Ясно, что при $\nu = \nu_0 h$ с $\nu_0 = \mathrm{O}(1)$ правая часть (2.10) имеет порядок $\mathrm{O}(h)$ и следовательно $J(t) = \mathrm{O}(h^{1/2})$.

Таким образом, введение под знак DIV в уравнении неразрывности диссипативного члена $\boldsymbol{\nu} = -\dfrac{\nu_0 h}{M} \operatorname{GRAD} p$ приводит к сходимости разностной схемы (1.11)—(1.12) в энергетической норме со скоростью $\mathrm{O}(h^{1/2})$.

§7.3. Модификация нелинейной разностной схемы

1°. В этом параграфе рассмотрим следующий вопрос: как модифицировать исходную нелинейную разностную

схему (1.5)—(1.8) так, чтобы в акустическом приближении получить уравнения (1.11)—(1.12) и при этом сохранить ее консервативность.

Так как диссипативные слагаемые вводились в уравнение неразрывности, уравнение движения оставим без изменений.

$$M\mathbf{u}_t + \mathrm{GRAD}\, p = 0, \tag{3.1}$$

Уравнение неразрывности запишем в виде

$$V_t - \mathrm{DIV}\,(\mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) = 0, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\nu} = -\dfrac{\nu}{M}\,\mathrm{GRAD}\, p$.

С другой стороны тождественно

$$V_t - \mathrm{DIV}\,\mathbf{r}_t = 0,$$

так что вместо (1.8) следует написать

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}. \tag{3.3}$$

Из уравнения движения (3.1) вытекает баланс кинетической энергии

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{Mu^2}{2} + (\mathbf{u},\, \mathrm{GRAD}\, p) = 0. \tag{3.4}$$

Чтобы сохранить консервативность схемы по полной энергии, баланс внутренней энергии следует записать в виде

$$Me_t + p\,\mathrm{DIV}\,\mathbf{u} = 0. \tag{3.5}$$

Именно в этом случае вторые слагаемые соотношений (3.4), (3.5) при суммировании по связному множеству узлов свернутся в сумму по границе, что обеспечит консервативность разностной схемы. Подставляя в (3.5) $\mathbf{u}$ из (3.3) получим баланс энтропии

$$Me_t + pV_t = MTs_t = \mathrm{DIV}\,\boldsymbol{\nu}.$$

т.е. происходит обмен энтропией между ячейками Дирихле.

2°. Отметим следующее. В силу уравнения движения

$$\frac{\mathrm{GRAD}\,p}{M} = -\mathbf{u}_t,$$

поэтому диссипативный член можно представить в виде $\boldsymbol{\nu} = \nu \mathbf{u}_t$. Соответственно

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{u} + \nu \mathbf{u}_t. \tag{3.6}$$

При дискретизации системы разностных уравнений по времени в (3.5) под знаком DIV должно стоять $\mathbf{u}^{(0.5)}$, в этом случае разностная схема будет консервативной по полной энергии [17]. Такое же усреднение $\mathbf{u}$ должно фигурировать и в уравнениях (3.2), (3.3). В силу (3.6) конструкция $\mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}$ приобретает вид $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ с временным весом $\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\nu}{\tau}$.

Глава VIII

Инструментальные средства системы ТЕКОН

§8.1. Построение разностных операторов путем организации ссылок в список

1°. Как уже отмечалось во введении, опыт решения практических задач приводит к необходимости создания универсальных инструментальных средств, позволяющих разрабатывать пакетные комплексы для решения различного класса задач. Для создания пакетов с широкой предметной областью необходимы проблемно-ориентированные инструментальные средства, связанные с работой с динамической памятью. Существенным элементом здесь является организация динамических структур в памяти ЭВМ (т.е. графов универсальной структуры) и программирование ссылок в список [102, 103]. Это дает возможность гибко (в произвольном порядке и в различные моменты времени) формировать (или уничтожать частями) расчетную область сложной формы из ее макроэлементов. Кроме того, организация списковой структуры в памяти машины дает возможность возложить на ЭВМ часть громоздких символьных выкладок, позволяет производить декомпозицию матриц произвольной структуры и т.п.

2°. В качестве примера рассмотрим процедуру реализации разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона $\Delta u = f(x)$ в области $\mathcal{O}$, построенных в главах I (на четырехугольных сетках) и V (на произвольных сетках). Будем рассматривать первую краевую задачу $u\big|_{\partial\mathcal{O}} = u_*(x)$. Под реализацией здесь имеется в виду формирование матрицы и правой части разностной схемы на конкретной расчетной сетке с конкретными входными данными $f(x)$ и $u_*(x)$. Для разностной схемы на четырехугольной сетке матричные элементы и правые части разностных уравнений могут быть выписаны в яв-

ном виде как функционалы от координат узлов сетки и функций $f(x)$, $u_*(x)$. Структура этих функционалов весьма сложна, но обозрима. Обозримость эта однако связана в большой степени с однородностью разностной схемы, которая в свою очередь обусловлена однородностью сетки (топологической). Если сетка в указанном смысле неоднородна, т.е. содержит, например, трехугольные ячейки, то ситуация существенно усложняется. В принципе матричные элементы могут быть выписаны, но они уже будут иметь различный вид в зависимости от того какие ячейки (трехугольные или четырехугольные) и в каком числе окружают узел, для которого выписывается разностное уравнение. С другой стороны структура разностных уравнений весьма однородна. Уравнение баланса содержит сумму уходящих от рассматриваемого узла потоков, каждый из которых ассоциируется с ребром сетки, связанным с этим узлом. Поток на ребре вычисляется через инкременты «температуры» на нем и соседних ребрах при помощи метрического оператора. Метрический оператор также действует везде однотипным образом, образуя конструкции линейные по инкрементам «температуры» и содержащие матрицы Грама с весовыми коэффициентами в базисах, собственно и определяющих соседство ребер. Указанные этапы проиллюстрированы на рис.8.0–а.

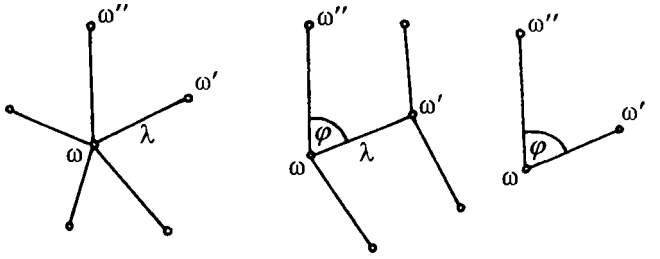


Рис.8.0–а

Естественно возникает желание алгоритмизировать процедуру получения матричных элементов и правых частей разностных уравнений. При этом речь идет о вы-

числении численных значений этих величин на конкретной сетке, а не о выписывании шаблонных функционалов пригодных для любой конфигурации сетки в любом узле. Указанный алгоритм может выглядеть следующим образом. Делаеся цикл по всем внутренним узлам сетки (рассматривается первая краевая задача). Один шаг цикла заполняет строку матрицы соответствующую этому узлу. На каждом шаге цикла делается внутренний цикл по ребрам, выходящим из текущего узла. На каждом ребре расписывается метрический оператор, связывающий поток на этом ребре с инкрементами «температур» на ребрах–соседях. Коэффициенты при «температурах» в узлах, определяющих поток на рассматриваемом ребре, занимают места в столбцах матрицы, соответствующих этим узлам. Если узел оказался граничным, то соответствующий матричный элемент умноженный на известное значение сеточной функции переносится в правую часть с обратным знаком. Вообще говоря, полученные на шаге цикла числа не являются еще матричными элементами и правыми частями разностных уравнений, а составляют их часть обусловленную взаимодействием по рассматриваемому ребру. Полностью они будут вычислены после завершения внутреннего цикла по ребрам. Так матричный элемент, описывающий «взаимодействие» узлов ω и ω' (см. рис.8.0–b), будет полностью сформирован после рассмотрения ребер λ_1 и λ_2.

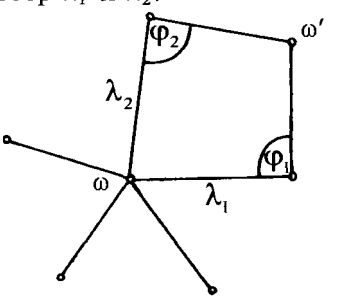


Рис.8.0–b

Наряду с таким прямым и наглядным способом вычисления матричных элементов и правых частей может

быть использован и другой подход, менее наглядный, но более экономичный. Он учитывает то обстоятельство, что наиболее трудоемкой операцией при построении разностных схем на нерегулярных сетках является вычисление матриц Грама в базисах сетки. Чтобы вычислять матрицу Грама один раз в каждом базисе, делается цикл по базисам сетки (или внешний по ячейкам и внутренний по базисам ячейки). В каждом базисе расписывается часть метрического оператора, связанная с матрицей Грама в этом базисе. Полученная конструкция содержит значения сеточной функции «температур» в трех узлах (см.рис.8.0–с). Коэффициенты при «температурах» дают вклады (обусловленные рассматриваемым базисом) в матричные элементы, на пересечении трех строк и трех столбцов, соответствующих указанным узлам. Аналогичным образом вычисляются и правые части.

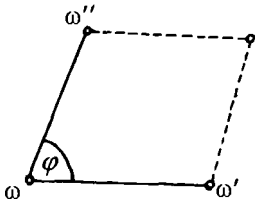


Рис.8.0–с

3°. Таким образом, есть возможность не формировать разностный оператор в явном виде, выписывая формулы для матричных элементов, а собирать его по частям, используя структурно–динамические инструментальные средства системы «ТЕКОН». Смысл этого подхода сводится к следующему. Инструментальными средствами системы «ТЕКОН» организуются циклы по элементарныт объектам сетки (ячейкам, ребрам, базисам и т.п.). При этом на каждом конкретном элементарном объекте делается вклад сразу в несколько строк и столбцов формируемой матрицы. Но матричные элементы формируются не до конца, и на каждом следующем элементарном объекте происходит прибавление вклада. Таким обра-

зом, лишь после завершения цикла по элементарным объектам сетки формируется оператор системы разностных уравнений.

§8.2. Основные понятия

Приведем краткую характеристику основных понятий, используемых в дальнейшем.

– *сегмент обмена* — единица информации в байтах, используемая для обменов между оперативной памятью (ОП) и внешним носителем (свопингом).

– *свопинг* — место хранения архива массивов на внешнем носителе.

– *подпул оперативной памяти* — часть ОП, нумеруемая в байтах (**NA** = 1, ..., **NAMAX**), длина которой **NAMAX** ограничена возможностями, предоставляемыми памятью ЭВМ; количество подпулов **NCMAX** ≥ 2.

– *файл прямого доступа.* При помощи программы обмена система связывается с операционным окружением. В данной версии эта связь реализована посредством файла прямого доступа, использующего стандартные утилиты **OPEN** и **CLOSE**.

– *пул оперативной памяти* — совокупность подпулов **NC** = 1, ..., **NCMAX**, включающих в себя паспорт архива, граф свободного и занятого пространства. Процесс перевода неймановской (т.е. обычной) памяти подпулов в граф свободного пространства называется шнуровкой. В паспорте архива распологается стек, длина которого заказывается пользователем (см. §8.4) и используется им по необходимости. В графе занятого пространства расположены ОЛМ (*массивы* информации, внешне представляемые системой как *однородные линейные* упорядоченности байтов). Сегменты обмена, показанные на рисунке, могут принадлежать как к графу свободного (без ОЛМ), так и занятого (с ОЛМ) пространства. В первом подпуле расположен паспорт архива. Оставшаяся часть первого подпула и остальные подпулы прошнурованы в граф свободного или занятого пространства (рис.8.1).

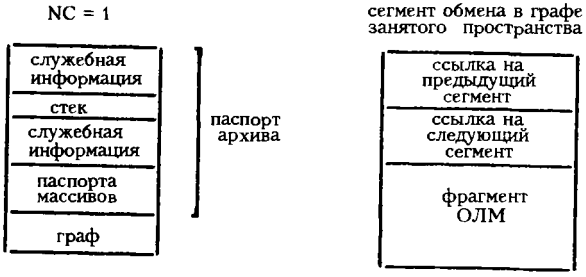


Рис.8.1

§8.3. Открытие работы с системой. Дампинг

В этом параграфе дается краткое описание открытия работы с системой и печать ее состояния в момент аварийного останова.

3.1. **FUNCTION IOPNPP(NIL)** — открывает работу с системой. Вызов этой функции обязателен перед началом работы. Аргумент функции **NIL** игнорируется.

3.2. **FUNCTION ISTPP(NIL)** — выдает печать о состоянии системы в момент вызова. Функция **ISTPP** вызывается автоматически в случае авоста или может быть вызвана пользователем в случае необходимости. Печать состояния содержит следующие основные элементы:

– сообщение об ошибках имеет формат:
***<*название программы*>/<*параметры*>/=, после чего печатаются значения указанных параметров. В случае **LX** = 1 (режим отладки) выдается информация об уровне вхождения в стек;

– информация о массивах в архиве и ОЛМ в них. Сообщается номер массива **NMAS**, номер байта начала паспорта массива в паспорте архива, диапазоны внешних индексов **IYZMIN**÷**IYZMAX** (см. §8.4);

– информация о графах свободного F и занятого пространства V: количество сегментов **NSF** и **NSV** в графах, координаты первого и последнего сегментов в графах (**NCF**, **NAF**), (**NCV**, **NAV**);

– служебная информация.

Пользователь может управлять выдачей информации при помощи

COMMON /STCPP/ IRW,IRX,INM,JRX,ISV,IDN,JPD,NFD,IDO

IRW — параметр, отвечающий за чтение и запись в подпулы (служебная информация). **Ø** — нет печати (по умолчанию), 1 — печать. **IRX** — **Ø** (по умолчанию) — короткая печать об архиве, 1 — полная печать; 2 — полная печать об архиве и диапазоны внешних индексов **IYZMIN÷IYZMAX** (для всех массивов в архиве, если **INM** = −1 (по умолчанию), или только для массива с номером **INM** ≥ **Ø**). **JRX** — **Ø** — никаких действий, 1 — в конце **ISTPP** вызывается **IDAPP** (см. §8.4) с **LPLONL** = 1, наконец при **JRX** = 2 — то же самое, но с **LPLONL** = **Ø** (по умолчанию). **ISV** — **Ø** — короткая информация о графах свободного и занятого пространства, 1 — полная информация о графах (по умолчанию). **IDN** — **Ø** — короткая печать о динамической структуре в текущем ОЛМ, 1 — полная печать того же самого (по умолчанию).

Функция **JPDPP(JPD)** (см. п.6.6.1.){<не вызывается при **JPD** = −2 (по умолчанию) >|<вызывается при **JPD** ≥ −1>}. Функция **NFDPP(NFD)** (см. п.6.6.2.) {<не вызывается при **NFD** = −1 (по умолчанию) >|<вызывается при **NFD** ≥ **Ø**>}.

IDO — {**Ø**,1,...,**MCØ**6} — количество печатаемых уровней рекурсии на сетке, 1 — по умолчанию. **MCØ**6 — максимальное количество уровней рекурсии. Задается администратором версии пакета.

§8.4. Архив массивов

Структурная организация системы такова, что после открытия работы возникает необходимость в создании глобального архива специальных массивов. При этом самым высоким в иерархии, связанной с дисциплиной работы в системе, является собственно архив. В этом архиве заводятся массивы, состоящие из однородных линейных множеств (ОЛМ), интерпретируемых как однородные массивы байтов и позволяющих вести работу в режиме внешней виртуальной памяти. Сегментация массивов на ОЛМ производится при помощи внешнего ин-

декса, диапазон изменения которого определяет количество ОЛМ в данном массиве. В этом параграфе описаны различные возможности, предоставляемые системой для работы с архивом специальных массивов. Среди них заведение и активизация архива, заведение и исключение массива, копирование массива в текущем и другом архиве, запись содержимого архива в свопинг. Характерной чертой системы является возможность работы сразу с несколькими архивами, что позволяет, в принципе, вести работу с параллельным процессором применительно, например, к декомпозиционной алгебре. Далее следует описание основных функций, необходимых пользователю для работы с архивом.

4.1. **FUNCTION NARPP(LX,N,NSWMAX,NSP,NARX,LSCB,LNST, NAP,NAST)** — заводит новый архив с номером **NARX**.

LX={0–<счет>}|1–<отладка>} — экспертный параметр.

N > 0 — длина поля в памяти под номер массива (**NM** = = $0, 1, ..., 2^N - 1$).

NSWMAX = $1, ..., 2^{\mathrm{LFI01}} - 1$ — полное количество сегментов обмена в свопинге. Длина полей **LFI**, **LFI01** в битах задается администратором версии пакета.

NSP = 1, ..., **NSWMAX** — количество сегментов обмена под паспорт пула данных.

NARX — целый номер архива. Диапазон изменения параметра **NARX** определяется администратором версии пакета.

LSCB = $5*(\mathrm{LFI}/8+1), ..., 2^{\mathrm{LFI01}} - 1$ — длина сегмента обмена в байтах.

LNST = $0, ..., 2^{\mathrm{LFI01}} - 1$ — длина стека в паспорте пула данных в байтах.

NAP — выходной параметр; количество байтов в незанятом конце паспорта пула данных.

NAST — выходной параметр; адрес стека в паспорте пула данных. Все параметры, кроме **LX** и **NAP**, являются атрибутами архива. После заведения архив становится текущим. Непаспортная часть пула прошнурована в граф свободного пространства.

4.2. **FUNCTION IACPP(LX,NARX,LSCB,LNST,NAP,NAST)** — активизирует ранее заведенный архив с номером **NARX**.

LNST — выходной параметр; длина стека в паспорте пула данных. После активизации архив становится текущим. Непаспортная часть пула прошнурована в граф свободного пространства.

4.3. **FUNCTION NMSPP(LX,NM,IYZØ,IYZ1,MT,NYZ,LFX,LFY, LFYZ)** — заводит в текущем архиве новый массив с номером **NM**.

NM = Ø, 1, ..., $2^N - 1$ — номер массива.

IYZØ — минимальный внешний индекс в начальном диапазоне внешних индексов.

IYZ1 — максимальный внешний индекс в начальном диапазоне внешних индексов.

MT — параметр, указывающий на место хранения ОЛМ (см. также п.5.1.):

MT < Ø — все ОЛМ находятся в паспорте массива; |**MT**| — длина в байтах поля под ОЛМ в паспорте массива;

MT > Ø — все ОЛМ находятся в системе пул — свопинг; **MT** — длина поля под ОЛМ в сегментах обмена.

MT = Ø — специальный случай; описывается пользователем.

NYZ — параметр размерности массива:

NYZ = Ø — двумерный случай (индексы **IX**, **IYZ**);

NYZ = 1 — трехмерный случай (индексы **IX**, **IY**, **IYZ**);

LFX — длина поля под внутренний индекс **IX** в битах.

LFY — длина поля под промежуточный индекс **IY** в битах (игнорируется при **NYZ** = Ø).

LFYZ — длина поля под внешний индекс **IYZ** в битах.

В процессе работы функции **NMSPP** стандартно задается один диапазон внешних индексов **IYZØ**—**IYZ1** (с помощью функции **NMSRPP**). В случае необходимости пользователь может завести несколько таких диапазонов, описав:

```
      FUNCTION NMSRPP(LX,I,IYZØ,IYZ1)
      GOTO (1,...,i,...k),I
    1 NMSRPP=1
      RETURN
      ...
    i NMSRPP=1
```

```
      IYZØ=IYZØi
      IYZ1=IYZ1i
      RETURN
      ...
  k   NMSRPP=Ø
      IYZØ=IYZØk
      IYZ1=IYZ1k
      RETURN
      END
```

вместо стандартной. Диапазоны внешних индексов не должны иметь общих элементов.

Случай **MT** = Ø небходим пользователю, если он хочет, чтобы часть ОЛМ хранилась в паспорте массива, а часть ОЛМ в системе пул–свопинг. Для этого необходимо описать **FUNCTION NMSTPP(LX,IYZ,IOUT)** для каждого внешнего индекса **IYZ** (входной параметр). В зависимости от значения выходного параметра **IOUT** возвращаемое значение функции **NMSTPP** > Ø трактуется как длина в байтах поля под ОЛМ в паспорте массива (при **IOUT** = 1) или как длина поля под ОЛМ в сегментах обмена в системе пул-свопинг (при **IOUT** = Ø). При **MT** = Ø вызов функции **NMSTPP** из функции **NMSPP** происходит всегда. Стандартное значение **NMSTPP** = Ø и в этом случае выдается сообщение об ошибке.

4.4. **FUNCTION IMSPP(LX,NM)** — исключает массив с номером **NM** из текущего архива.

4.5. **FUNCTION ICOPP(LX,LPLONL,NM,NMNW)** — копирует массив в текущем архиве.

Если в пуле недостаточно свободных сегментов обмена для размещения подкачиваемого из свопинга ОЛМ (находящегося в системе пул–свопинг), то из пула в свопинг выталкиваются те ОЛМ, первое обращение к которым происходило наиболее давно. Некоторые ОЛМ пользователь может пометить как не подлежащие выталкиванию в свопинг (см. п.5.5.9.).

LPLONL={Ø-<нет печати>|1-<печать>} — параметр, отвечающий за печать информации о тех ОЛМ, которые нельзя вытолкнуть в свопинг.

NM — номер копируемого массива.

NMNW ≥ 0 — номер нового массива.

NMNW $= -1$ — система сама ищет первый свободный в текущем архиве номер массива и копирует в него массив **NM**, затем печатает номер нового массива.

NMNW $= -2$ — эквивалентно предыдущему случаю, но без печати номера нового массива.

Выходное значение параметра **NMNW** — номер нового массива. Возвращаемое значение функции **ICOPP** — количество ОЛМ, которые нельзя вытолкнуть в свопинг.

4.6. **FUNCTION ICAPP(LX,LPLONL,NM,NMNW,NARXNW)**

COMMON /ICACPP/ ICA — копирует массив в другой архив из текущего, сохраняя тем же самым текущий архив.

NM — номер копируемого массива в текущем архиве.

NMNW ≥ 0 — номер скопированного массива в другом архиве **NARXNW**.

NMNW $= -1$ — система сама ищет первый свободный в другом архиве номер массива и копирует в него массив **NM**, одновременно печатая номер нового массива в другом архиве **NARXNW**.

NMNW $= -2$ — эквивалентно предыдущему случаю, но без печати номера нового массива. Выходное значение параметра **NMNW** — номер нового массива в другом архиве.

NARXNW — целый номер другого архива, в котором будет заведен скопированный массив. Возвращаемое значение функции **ICAPP** (при **ICA** $= 1$) — количество ОЛМ, которые нельзя вытолкнуть в свопинг. **ICA** — параметр, определяющий режим работы функции **ICAPP**.

ICA $= 1$ — общий режим работы (стандартное значение); автоматически в начале функции **ICAPP** производится выталкивание текущего архива в свопинг, а в конце — шнуровка графа свободного пространства.

ICA $= 0$ — специальный режим; перед одним или более вызовами функций **ICAPP**, осуществляющих серию копирований массивов в другой архив **NARXNW** из текущего, вызывается сначала функция **IDAPP** (см. п.4.7.), а затем

FUNCTION ICA2PP(LX,NARXNW) — читает паспорт пула данных другого архива **NARXNW** во второй подпул (**NC** $= 2$).

Далее после работы функций **ICAPP**. вызывается

FUNCTION JCA2PP(LX,NARXNW) — выталкивает паспорт пула данных другого архива **NARXNW** из второго подпула (**NC** = 2) в его свопинг и восстанавливает шнуровку второго подпула (**NC** = 2) в графе свободного пространства.

4.7. **FUNCTION IDAPP(LX,LPLONL)**

Выталкивает текущий архив в свопинг. Выталкиваются как ОЛМ, так и паспорт пула данных. Попытка два раза подряд применить **IDAPP** без активизации или заведение нового архива между ними приводит к сообщению об ошибке. Возвращенное значение функции **IDAPP** есть количество ОЛМ во всех массивах текущего архива, которые нельзя вытолкнуть в свопинг.

4.8. **FUNCTION JSMPP(LX,LPLONL,NARXNW)** — ликвидирует дыры в свопинге и в паспорте пула данных, образовавшиеся при исключении массивов. При этом старый архив с дырами выталкивается в свопинг, а новый архив без дыр с номером **NARXNW** становится текущим и активизированным. Возвращаемое значение функции **JSMPP** — количество ОЛМ во всех массивах архива, которые нельзя вытолкнуть в свопинг.

§8.5. Типы данных внешнего индекса массива

Как уже отмечалось выше, внешний индекс отвечает за сегментацию массива на ОЛМ. В этом параграфе представлены структура и назначение ОЛМ. Описаны также функции, работающие с внешним индексом. Среди них функции, осуществляющие настройку на ОЛМ и различные виды продвижений по нему, чтение и запись в ОЛМ по битам и по байтам. Здесь же описана реентерабельность функций, работающих с внешним индексом массива.

5.1. Множество чисел, представляющих какую-либо сеточную функцию, есть структурированный массив данных, инициализированный из архива в систему: пул–свопинг. Это множество чисел разбито на подмножества.

Каждое из этих подмножеств представляет собой однородный линейный массив (ОЛМ) байтов (см. рис.8.2).

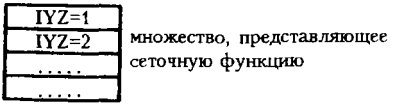


Рис.8.2

ОЛМ описывается двумя числами:
NM = $\emptyset, 1, \ldots$ — номер массива в архиве;
IYZ = $\emptyset, 1, \ldots$ — внешний индекс массива. По внешнему индексу сегментируется память в системе.

5.2. Зафиксировав **NM** и **IYZ**, получаем линейный массив типа «очереди» (см. рис.8.3).

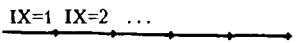


Рис.8.3

Каждая стрелка «очереди» может содержать, например, фиксированное количество битов и нумероваться внутренним индексом массива — **IX**. Таким образом, сетке ставится в соответствие граф типа прямое дерево (см. рис.8.4).

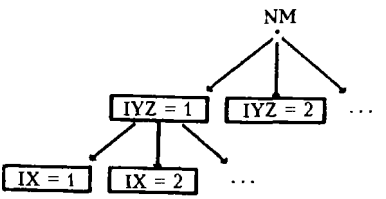


Рис.8.4

5.3. Вообще говоря, ОЛМ может не поместиться в оперативной памяти (ОП). Поэтому устанавливается «квант обмена» между ОП и свопингом, называемый сегментом. Размер сегмента в байтах зависит от ЭВМ,

на которой эксплуатируется данная версия пакета и выбор его рекомендуется администратором версии. Обмены скрыты внутри пакета и пользователь работает с «виртуальной памятью».

5.4. Возможно введение промежуточного индекса IY, который может оказаться полезным при решении трехмерных задач (см. рис.8.5).

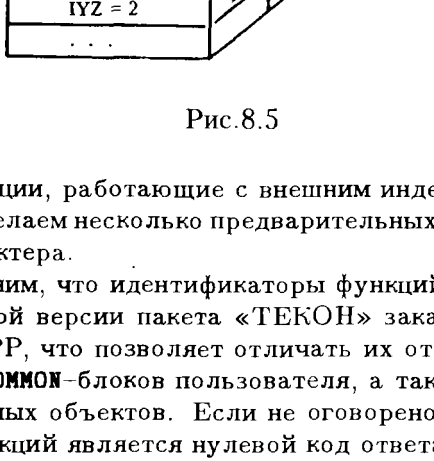


Рис.8.5

5.5. Функции, работающие с внешним индексом.

5.5.1. Сделаем несколько предварительных замечаний общего характера.

a) Напомним, что идентификаторы функций и **COMMON**-блоков данной версии пакета «ТЕКОН» заканчиваются символами PP, что позволяет отличать их от программ, функций и **COMMON**-блоков пользователя, а также от других глобальных объектов. Если не оговорено иное, значениями функций является нулевой код ответа.

b) Если в идентификатор функции входит буква **A**, то эта функция осуществляет чтение из ОЛМ, а если **B** — запись в ОЛМ.

c) Если в имя функции входит символ I, то эта функция оперирует с битами (**bit**), а если **E** — с байтами (**byte**).

d) Аргумент функции **NIL** игнорируется.

e) В качестве значения конструкции '<объект>:<булевское выражение>' берется <объект>, если <булевское выражение> есть «истина» и <пусто>, если «ложь».

5.5.2. **FUNCTION IYZPP(LX)** осуществляет настройку на ОЛМ. Содержит **COMMON /IYZCPP/ NMAS,IYZ**, через который в нее передаются номер массива **NMAS** и внешний индекс **IYZ**. По этим параметрам функция находит в архиве соответствующий массив с номером **NMAS** и заносит в «настроечную головку» (**MS**–указатель) информацию о массиве. Если **IYZ** = −1, то работа функции заканчивается. Иначе (при **IYZ** ≥ **Ø**) происходит вызов функции **IYZØPP(LX,IYZ)**, после чего работа функции заканчивается.

FUNCTION IYZØPP(LX,IYZ) осуществляет настройку на ОЛМ при определенном ранее **MS**–указателе. Заносит в «настроечную головку» (**IYZ**–указатель) информацию об ОЛМ. Ниже приводимые функции пункта 5 вызываются лишь при настроенном **IYZ**–указателе, указывающем, в частности, на текущий байт с номером **NA** в ОЛМ. **MS**–указатель при этом может быть неопределен.

5.5.3. **FUNCTION NEOPP(LNEO)** — осуществляет различные виды продвижений по ОЛМ в зависимости от значений аргумента **LNEO**. Содержит **COMMON**–блоки:

/IEOCPP/ LX,IE

IE — число проталкиваемых байтов (см. **LNEO** = **Ø**),

/IETCPP/ NA,NB

NA = **Ø**, 1, ... — номер байта в ОЛМ;

NB = **Ø**, 1, ...7 — номер бита в байте.

NA, NB — пользователем не изменяются.

Аргумент **LNEO** = {**Ø**|1|2|3}:

LNEO = **Ø** — проталкивание байтов, при этом **IE** — количество проталкиваемых байтов. (см. рис.8.6).

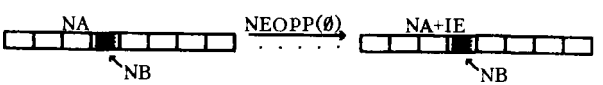


Рис.8.6

Замечание: **IE** может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

LNEO = 1 — установка на начальный байт ОЛМ с возможной подкачкой в ОП (предшествует вызовам с **LNEO** =

= {∅|3}). При этом фукцией присваиваются значения **NA** = ∅, **NB** = ∅.

LNEO = 2 — сброс ОЛМ с возможным возвратом соответствующих сегментов ОП в граф свободного пространства. После вызова функции **NEOPP(2)** установка на начальный байт ОЛМ отсутствует.

Замечание: функцию **NEOPP(2)** можно вызывать без предварительного вызова **NEOPP(1)**.

LNEO = 3 — проталкивание байтов с экономией сегментов. При вызове **NEOPP(3)** происходит то же, что при вызове **NEOPP(∅)**, но информация в байтах с номерами **NA** + 1, ...(после вызова) становится неопределенной (возможен возврат соответствующих сегментов ОЛМ, находящихся в ОП, в граф свободного пространства).

Замечания:

a) параметр **IE** не используется при **LNEO** = 1, 2.

b) параметр **LX** вырабатывается при настройке на **IYZ**-указатель.

c) параметр **NB** при вызове **NEOPP** (с **LNEO** ≠ 1) не изменяется.

FUNCTION NEO1PP(IE1) — начальная установка на байт **IE1** ОЛМ, эквивалентна следующей последовательности действий:

```
NIL=NEOPP(1)
LIE=IE
IE=IE1
NEO1PP=NEOPP(∅)
IE=LIE
```

5.5.4. **FUNCTION NIOPP(LIEO)** — осуществляет различные виды продвижений по ОЛМ. В отличие от функции **NEOPP** продвижения осуществляются не байтами, а битами. Содержит **COMMON**-блоки:

```
/IEOCPP/ LX,IE,
/IETCPP/ NA,NB.
```

Параметр **IE** имеет смысл проталкиваемых битов.

Аргумент **LIEO** = {∅|1|2|3}.

При вызове функции **NIOPP(LIEO)** выполняются действия такие же, что и при вызове **NEOPP(LNEO)**. При продви-

жениях внутри данного байта (**NA**) номер бита **NB** может изменяться и непосредственно, без вызова функции **NIOPP**.

5.5.5. Чтение–запись в S–спецификации.

FUNCTION KAEPP(NIL) — осуществляет чтение из ОЛМ в значение функции байтами. Содержит **COMMON**–блок **/IEOCPP/ LX,IE**. Параметр **IE** имеет смысл длины поля чтения в байтах. По смыслу **IE≤NEMAX**, где **NEMAX** — количество байтов, допустимое для представления целого в **INTEGER**.

FUNCTION KBEPP(IW) — осуществляет запись из **IW** в ОЛМ байтами. Содержит **COMMON**–блок **/IEOCPP/ LX,IE**. Смысл **IE** тот же, что и в **KAEPP**. Аргумент **IW** — число, записываемое в поле длины **IE**(см. рис.8.7).

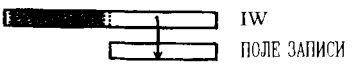


Рис.8.7

Осуществляется контроль (**LX** = 1): если в **IW** левее **IE** правых байтов есть хоть одна 1, то выдается диагностика об ошибке.

FUNCTION KAIPP(NIL)

COMMON /IEOCPP/ LX,IE

Работает аналогично **KAEPP**, но с битами: **IE** $\leq$ **NIMAX** = = 8 $*$ **NEMAX**.

FUNCTION KBIPP(IW)

COMMON /IEOCPP/ LX,IE

Работает аналогично **KBEPP**, но с битами.

5.5.6. Чтение–запись в I–спецификации битами (левый бит в поле записи — знаковый, **IE** $\geq$ 2).

FUNCTION IAIPP(NIL)

COMMON /IEOCPP/ LX,IE

Чтение из ОЛМ в значение функции с размножением знака.

FUNCTION IBIPP(IW)

COMMON /IEOCPP/ LX,IE

Запись из **IW** в ОЛМ (левый бит поля записи — знаковый).

Осуществляется контроль (LX= 1) тиражирования знака в битах из IW левее IE правых.

5.5.7. Чтение-запись в *E*-спецификации битами.

Действительный тип **$Ø1REAL** задается администратором версии пакета.

```
$Ø1REAL
      1 FUNCTION RAIPP(NIL)
        COMMON /IEOCPP/ LX,IE
        FUNCTION MBIPP(RW)
$Ø1REAL
      1 RW
        COMMON /IEOCPP/ LX,IE
```

5.5.8. Реентерабельность функций, работающих с внешним индексом массива.

Функции с этим свойством обладают возможностью переключаться с одного множества данных (указателя) на другое.

FUNCTION IRMPP(LX2,IDS)

DIMENSION IDS(8)

Запоминает **MS**-указатель в целый массив **IDS(8)** из 8 элементов. **LX2**={Ø–<счет>|1–<отладка>|2–<занесение в стек вызванных функций без проверок>}

FUNCTION IRBPP(LX2,IDS)

DIMENSION IDS(8)

Восстанавливает **MS**-указатель из целого массива **IDS(8)**.

FUNCTION NRMPP(LX2,NDS)

DIMENSION NDS(11)

Запоминает **IYZ**-указатель в целый массив **NDS(11)** из 11 элементов.

FUNCTION NRBPP(LX2,NDS)

DIMENSION NDS(11)

Восстанавливает **IYZ**-указатель из целого массива **NDS(11)**. Эта операция имеет смысл лишь если после запоминания **IYZ**-указателя в целый массив **NDS(11)** с данным ОЛМ не производилось никакой работы функциями пакета, т.е. операции чтения, записи и продвижения по ОЛМ «непотенциальны».

Если текущий ОЛМ, **IYZ**–указатель которого запоминается, декларирован в системе пул–свопинг и до прерывания с ним работы к нему применена функция **NEOPP(1)** (т.е. текущий ОЛМ втолкнут в пул), то это его состояние должно фиксироваться функцией **LSWOLD = IYZSPP(1)** вместе с вызовом функции **NRMPP**. Вместе с вызовом функции **NRBPP** может быть восстановлено прежнее состояние ОЛМ (функцией **IYZSPP(LSWOLD)**).

5.5.9. **FUNCTION IYZSPP(LSW)**. **LSW**={∅–<текущий ОЛМ можно вытолкнуть в свопинг>|1–<нельзя>}. Стандартное значение **LSW** = ∅. Возвращаемый результат **LSWOLD** = = **IYZSPP(LSW)** — предыдущее значение **LSW**–признака. Вызов функции игнорируется, если текущий ОЛМ находится в паспорте массива. Пользователь сам должен заботиться о своевременном обнулении **LSW**–признака.

5.5.10. **FUNCTION IYZDPP(LX,NMAS,IYZ)** — читает признак динамичности ОЛМ. Возвращаемое значение функции **IYZDPP** = 1 — ОЛМ динамический (на нем может располагаться динамическая структура) и **IYZDPP** = ∅ — ОЛМ статический (сжат функциями пакета и не может стать динамическим, динамическая структура отсутствует). Изначально заводимые ОЛМ в архиве - динамические.

5.5.11. **FUNCTION NAYZPP(NIL)** — читает (возвращаемое значение) максимальный номер байта (**NA**), возможный в текущем ОЛМ.

§8.6. Динамические типы данных на ОЛМ

6.1. Под динамической структурой на ОЛМ понимается граф (см. рис.8.8), элементы которого (стрелки) упорядочены посредством организации ссылок в список (см. рис.8.9).

Здесь (q) — множество элементов, эквивалентных как следующие по отношению к предшествующему уровню дерева (элемент p).

Память под стрелку «набирается» из динамических айтемов (D–айтемов), которые представляют собой элементарные частицы памяти, подобно тому как сложная

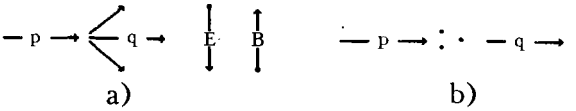


Рис.8.8

молекула собирается из элементарных атомов. Размер D–айтема, также как и длина поля LFI в битах, задается администратором версии пакета. Фрагмент начального D–айтема стрелки представлен на рис.8.9. Здесь LE = 1, если стрелка последняя в множестве элементов, эквивалентных как следующие;

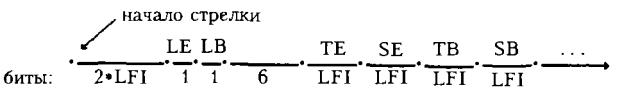


Рис.8.9

LB = 1, если стрелка начальная в множестве элементов, эквивалентных как следующие;

TE={'<указатель на следующую стрелку в множестве элементов, эквивалентных как следующие>: LE = ∅'|'<указатель на предшествующий уровень дерева>: LE = 1'}

SE={'∅:<следующего уровня дерева нет>'|'<указатель на начальную стрелку (LB = 1) следующего уровня дерева>: SE > ∅'}

TB={'<указатель на предыдущую стрелку в множестве элементов, эквивалентных как следующие>: LB = ∅'| '<указатель на предшествующий уровень дерева>: LB = = 1'}

SB={'∅:<следующего дерева нет>'|'<указатель на последнюю стрелку (LE = 1) следующего уровня дерева>: SB > ∅'}.

Поля LE, LB, TE, TB игнорируются в начальной стрелке динамической структуры.

В идентификаторы функций и COMMON–блоков, работающих с динамическими структурами, входит буква D (или S в функциях чтения из стрелки).

6.2. FUNCTION NPDPP(NIL) — формирует в ОЛМ новый паспорт динамической структуры, начиная с текуще-

го байта с номером **NA** = **NAD**, **NB** = ∅ и заводит ее начальную стрелку. Текущий байт с номером **NA** = **NAD** и нулевой бит (**NB** = ∅) IYZ–указателя сохраняется. В ОЛМ может существовать не более одной динамической структуры, располагаемой на всех байтах ОЛМ, начиная с **NAD**. Паспорт динамической структуры, генерируемой функциями пакета в ОЛМ, всегда начинается с байта с номером **NA** = **NAD** = LFI/4, **NB** = ∅.

6.3. **FUNCTION IWDPP(NIL)** — установка IYZ-указателя на начальную стрелку (вырабатываются соответствующие **NA** и **NB** = ∅ в IYZ–дескрипторе). Предварительно IYZ–указатель продвигается на паспорт динамической структуры (**NA** = **NAD**, **NB** = ∅), который является и возвращаемым значением функции, т.е. **NAD** = **IWDPP(NIL)**. С начальной стрелкой динамической структуры нельзя работать как с прямым деревом, т.е. к ней не применимы функции пункта 6.4. При установке на стрелку динамической структуры всегда **NB** = ∅ в IYZ–дескрипторе.

6.4. Функции, работающие с динамической структурой как с прямым деревом (см.рис.8.8).

В идентификаторы таких функций входит буква T (tree). Функции, начинающиеся с букв I, K или M, соответствуют прямому ходу ссылок (буква E на рис.8.8, 8.9). Начальная буква J, L или N соответствует обратному ходу ссылок (буква B на рис.8.8, 8.9).

6.4.1. **FUNCTION MTDPP(NAD)** — переход к следующему (прямой ход ссылок) во множестве элементов, эквивалентных как следующие (см. рис.8.10).

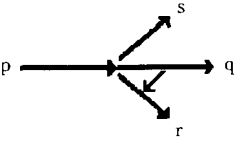


Рис.8.10

Предварительно IYZ–указатель продвигается на предыдущий элемент (q). Текущим становится следующий элемент (r).

Содержит **COMMON /IBDCPP/ IBD**. Если исходно находимся на последней стрелке (r), то стоим при **IBD** = $\emptyset$ или переходим на предшествующий уровень дерева (стрелка p) при **IBD** = 1. Возвращаемое значение функции **MTDPP** = 1 (признак конца), если исходно находились на последнем элементе (r), и **MTDPP** = $\emptyset$ — иначе.

6.4.2. **FUNCTION NTDPP(NAD)**
COMMON /IBDCPP/ IBD

Симметричный аналог функции **MTDPP(NAD)**. Обратный ход ссылок.

6.4.3. **FUNCTION ITDPP(NAD)** — заведение стрелки (r) перед собой (q) следующей по порядку (прямой ход ссылок) во множестве элементов, эквивалентных как следующие (см.рис.8.10). Текущей становится вновь заведенная стрелка (r). Возвращаемое значение функции **ITDPP** = 1 (признак конца), если исходно находились на последнем элементе (r), и **ITDPP** = $\emptyset$ — иначе.

6.4.4. **FUNCTION JTDPP(NAD)** — симметричный аналог функции **ITDPP(NAD)**. Обратный ход ссылок.

6.4.5. **FUNCTION KTDPP(NAD)** — уничтожение стрелки (r) перед собой (q) следующей по порядку (прямой ход ссылок) во множестве элементов, эквивалентных как следующие (см. рис.8.10). Текущей остается исходная стрелка (q). Возвращаемое значение функции **KTDPP** = 1 (признак конца) и не производится никаких действий. если исходно находились на последнем элементе (r), и **KTDPP** = $\emptyset$ — иначе.

6.4.6. **FUNCTION LTDPP(NAD)** — симметричный аналог функции **KTDPP(NAD)**. Обратный ход ссылок.

6.5. Функции, работающие с динамической структурой как с очередью. В идентификаторы таких функций входит буква **S** (sequence).

6.5.1. **FUNCTION MSDPP(NAD)** — переход с предыдущего уровня дерева (p) на первую (прямой ход ссылок) стрелку (s) во множестве элементов, эквивалентных как следующие (см. рис.8.10). Возвращаемое значение функции **MSDPP** = 1 (признак конца) и не производится никаких действий, если исходно находились на последнем элементе дерева, и **MSDPP** = $\emptyset$ — иначе.

6.5.2. **FUNCTION NSDPP(NAD)** — симметричный аналог функции **MSDPP(NAD)**. Переход на первую (обратный ход ссылок) стрелку (r).

6.5.3. **FUNCTION ISDPP(NAD)** — заведение стрелки нового следующего уровня дерева и установка на нее. Возвращаемое значение функции **ISDPP** = 1 (признак конца), если исходно находились на последнем уровне дерева, и **ISDPP** = $\emptyset$ — иначе.

6.5.4. **FUNCTION KSDPP(NAD)** — уничтожение следующего уровня дерева. Текущей сохраняется стрелка предыдущего уровня. Возвращаемое значение функции **KSDPP** = 1 (признак конца) и не производится никаких действий, если исходно находились на последнем уровне дерева, и **KSDPP** = $\emptyset$ — иначе. Уничтожаемый следующий уровень дерева должен содержать лишь один элемент.

6.6. **FUNCTION IPDPP(NIL)** — печать стандартной информации о динамической структуре в целом (занятое, свободное пространство, и т.п.). Текущий байт с номером **NA** = **NAD** и нулевой бит (**NB** = $\emptyset$) **IYZ**–указателя сохраняются.

6.6.1. **FUNCTION JPDPP(JPD)** — условная поэлементная печать стандартной информации о стрелке динамической структуры: (см. рис.8.11) относительный номер уровня дерева ($1 \leq$ **LVL** $\leq$ **MC**$\emptyset$8), номер стрелки в семействе эквивалентных как следующие (**NLV** ≥ 1), абсолютная нумерация стрелок (**NBS** ≥ 1) слева направо и сверху вниз в соответствии с прямым ходом ссылок (буква **E** на рис.8.8), а также количество и адреса D–айтемов, образующих стрелку.

Максимальный уровень погружения в дерево **MC**$\emptyset$8 задается администратором версии пакета. В случае его превышения печать прекращается и происходит возврат из функции **JPDPP** = 1 с соответствующим сообщением. В случае превышения максимально возможного целого величинами **NLV** и **NBS** они сбрасываются в ноль, печать продолжается с последующим возвратом функции **JPDPP** = 2 и **JPDPP** = 3 соответственно. Текущий байт **NA** = **NAD** и нулевой бит (**NB** = $\emptyset$) **IYZ**–указателя сохраняются.

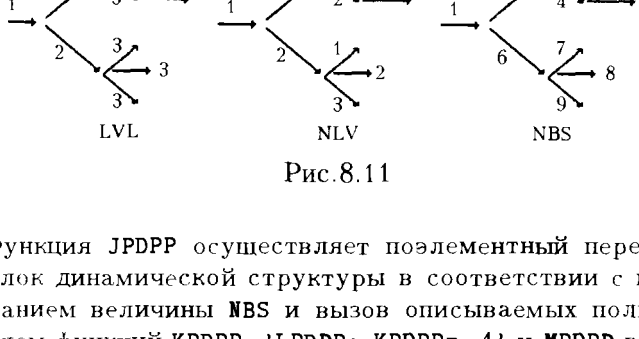


Рис.8.11

Функция JPDPP осуществляет поэлементный перебор стрелок динамической структуры в соответствии с возрастанием величины **NBS** и вызов описываемых пользователем функций KPDPP, 'LPDPP: KPDPP=−4' и **MPDPP** в каждой из них. Перед вызовом каждой из этих функций IYZ–указатель продвигается на текущую стрелку и может не восстанавливаться перед возвратом из функций. Параметр JPD = $-1, \emptyset, 1, 2, \ldots$ передается в функции KPDPP, 'LPDPP: KPDPP=−4'.

```
FUNCTION KPDPP(JPD)
COMMON /JPDAPP/ NLVL(MCØ8)
COMMON /JPDCPP/ LVL,NLV,NBS,NAD
```

В зависимости от возвращаемого значения функции KPDPP происходит {'<вызов LPDPP>: KPDPP=−4' | '<возврат из JPDPP>:KPDPP=−3' | '<нет печати о стрелке>: KPDPP=−2' | '<печать полной стандартной информации о стрелке>: KPDPP=−1' | '<печать LVL, **NLV**, **NBS** и адрес начального D-айтема стрелки>: KPDPP=Ø' | '<печать неполной (не более KPDPP адресов начальных D-айтемов стрелки) стандартной информации о стрелке>: KPDPP=1, 2, ...'}. Определены только первые LVL элементов массива **NLVL**(1) = 1, ..., **NLVL**(LVL) = **NLV** определяющие номер стрелки в семействе эквивалентных как следующие от корневого до текущего уровня дерева. Возвращаемое значение из стандартной функции KPDPP = JPD.

```
FUNCTION LPDPP(JPD,NUMITM)
COMMON /JPDAPP/ NLVL(MCØ8)
COMMON /JPDCPP/ LVL,NLV,NBS,NAD
```

Вызывается после функции KPDPP с возвращаемым значением KPDPP = −4. В зависимости от возвращаемого зна-

чения функции LPDPP ≥ -3 происходят те же действия, что и при возврате из функции KPDPP ≥ -3 соответственно. NUMITM ≥ 1 — количество D–айтемов, образующих стрелку. Возвращаемое значение из стандартной функции LPDPP = JPD.

```
FUNCTION MPDPP(NUMITM)
COMMON /JPDAPP/ NLVL(MC∅8)
COMMON /JPDCPP/ LVL,NLV,NBS,NAD
```

Вызывается после функций KPDPP, 'LPDPP: KPDPP=–4' и может использоваться пользователем для печати содержимого стрелки. Стандартная функция MPDPP – пустая.

6.6.2. FUNCTION NFDPP(NFD) — печать количества D–айтемов и NFD $> \emptyset$ начальных их адресов (если NFD $= \emptyset$, то адреса всех D–айтемов), попавших в граф свободного пространства динамической структуры в результате исключения стрелок и еще не использованных в других стрелках динамической структуры.

6.7.
```
FUNCTION NCDPP(LPR,NDS)
COMMON /NCDCPP/ NMAS,IYZ,NAD
DIMENSION NDS(76)
```

Осуществляет копирование текущей динамической структуры (IYZ–указатель текущего ОЛМ продвинут на паспорт) на другой ОЛМ со «сборкой мусора». Координаты ОЛМ для записи представлены в COMMON–блоке.

OUT	IN	LPR
∅	∅	∅
∅	1	1
1	∅	2
1	1	3

Параметр LPR (см.таблицу) управляет режимами печати стандартной информации об исходной (IN) и скопированной (OUT) динамических структурах. Ненулевое значение в колонках {IN|OUT} означает печать информации о соответствующей структуре. NDS(76) — рабочий массив не менее чем из 76-ти целых. Текущий байт с номером NA и нулевой бит (NB $= \emptyset$) IYZ–указателя, установленного на исходный ОЛМ, сохраняется.

Возвращаемое значение функции **NCDPP** = 1 при отсутствии текущей динамической структуры (при **IN** = 1 выдается соответствующее сообщение) и **NCDPP** = $\emptyset$ в противном случае.

§8.7. Типы данных индекса стрелки динамической структуры

Как отмечалось выше, элементы динамической структуры сами по себе также являются сложной структурой и представляют собой очередь из динамических айтемов. Операции над этим типом данных обеспечивают продвижение, чтение и запись внутри стрелки динамической структуры и т.п. Описывается также реентерабельность функций, работающих с индексом стрелки динамической структуры.

7.1. **FUNCTION NEDPP(LNED)** — осуществляет различные виды продвижений по ОЛМ-стрелки в зависимости от значений аргумента **LNED** (сравн. с п.5.5.3.). Содержит **COMMON**-блоки:

/IEDCPP/ IED

/ITDCPP/ IA,IB

IA = $\emptyset, 1, \ldots$ — номер байта в ОЛМ стрелки;
IB = $\emptyset, 1, \ldots, 7$ — номер бита в байте.

IA, **IB** пользователем не изменяются.

Возвращаемое значение функции **NEDPP=<NA** стрелки>.

Аргумент **LNED** = $\{\emptyset|1|2|3\}$:

LNED = $\emptyset$ — режим проталкивания байтов, при этом **IED** — количество проталкиваемых байтов.
Замечание: **IED** может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

LNED = 1 — режим установки на начальный байт ОЛМ-стрелки (предшествует вызовам с **LNED** = $\{\emptyset|2|3\}$). При этом функцией присваиваются значения **IA** = $\emptyset$, **IB** = $\emptyset$. В «настроечную головку» (**IRW**-указатель) заносится информация об ОЛМ-стрелки. Перед вызовом функции: **IYZ**-указатель должен быть продвинут на стрелку (**NA=<NA**-стрелки>), и присвоено **IED** = **NAD**.

LNED = 2 — режим сброса содержимого ОЛМ–стрелки (сама стрелка при этом сохраняется) с возможным возвратом соответствующих D–айтемов в граф свободного пространства динамической структуры. В результате вызова функции **NEDPP(2)** IYZ–указатель оказывается продвинутым на «пустую» стрелку, IRW–указатель неопределен.

LNED = 3 — режим проталкивания байтов с экономией D–айтемов. При вызове **NEDPP(3)** происходит то же, что при вызове **NEDPP(0)**, но информация в байтах **IA** + 1, ... (после вызова) становится неопределенной (возможен возврат соответствующих D–айтемов, находящихся в ОЛМ–стрелки, в граф свободного пространства динамической структуры).

Замечания:

a) Параметр IED не используется при **LNED** = 2.

b) Параметр **LX** вырабатывается при настройке на **IYZ**–указатель.

c) Параметр IB при вызове **NEDPP** с **LNED** = $\{0|3\}$ не изменяется.

FUNCTION NED1PP(IED1) — установка на начальный байт ОЛМ–стрелки динамической структуры, генерируемой функциями пакета в ОЛМ. Эквивалентна следующей последовательности действий:

```
IED=LFI/4
NED1PP=NEDPP(1)
IED=IED1
```

7.2. **FUNCTION NIDPP(LNID)** — осуществляет различные виды продвижений по ОЛМ–стрелки. В отличие от функции **NEDPP** продвижения осуществляются не байтами, а битами.

Содержит **COMMON**–блоки:

/IEDCPP/ IED

/ITDCPP/ IA,IB

Параметр IED имеет смысл проталкиваемых битов.

Аргумент **LNID** = $\{0|1|2|3\}$. При вызове функции **NIDPP(LNID)** выполняются действия такие же, что и при вызове **NEDPP(LNED)**, исключая замечание c) пункта 7.1.

7.3. Чтение–запись в ОЛМ–стрелки.

Замечание: если в идентификатор функции входит буква C, то эта функция осуществляет чтение из ОЛМ–стрелки, а если D — запись в ОЛМ–стрелки.

7.3.1. Чтение–запись в S–спецификации.

```
FUNCTION KCEPP(NIL)
COMMON/IEDCPP/ IED
```

Осуществляет чтение из ОЛМ–стрелки в значение функции байтами. Параметр IED имеет смысл длины поля чтения в байтах. Как обычно, IED $\leq$ NEMAX.

```
FUNCTION KDEPP(IW)
COMMON/IEDCPP/ IED
```

Осуществляет запись из IW в ОЛМ–стрелки байтами. Смысл IED такой же, что и в KCEPP. Аргумент IW — число, записываемое в поле длины IED (см. рис.8.7).

Осуществляется контроль (LX = 1): если в IW левее IED правых байтов есть хоть одна 1, то выдается диагностика об ошибке.

```
FUNCTION KCIPP(NIL)
COMMON/IEDCPP/ IED
```

Работает аналогично KCEPP, но с битами: IED $\leq$ NIMAX $= 8 *$ NEMAX.

```
FUNCTION KDIPP(IW)
COMMON/IEDCPP/ IED
```

Работает аналогично KDEPP, но с битами.

7.3.2. Чтение–запись в I–спецификации битами (левый бит в поле записи — знаковый, IED ≥ 2).

```
FUNCTION ICIPP(NIL)
COMMON/IEDCPP/ IED
```

Чтение из ОЛМ–стрелки в значение функции с размножением знака.

```
FUNCTION IDIPP(IW)
COMMON/IEDCPP/ IED
```

Запись из IW в ОЛМ–стрелки (левый бит поля записи — знаковый). Осуществляется контроль (LX = 1) тиражирования знака в битах из IW левее IED правых.

7.3.3. Чтение–запись в E–спецификации битами.

```
$Ø1REAL
      1 FUNCTION RCIPP(NIL)
```

```
      COMMON/IEDCPP/ IED
      FUNCTION MDIPP(RW)
$Ø1REAL
    1 RW
      COMMON/IEDCPP/ IED
```

7.4. Реентерабельность функций, работающих с индексом стрелки динамической структуры (см. также п.5.5.8.).

7.4.1. **FUNCTION NMDPP(LX2,NSD)**
DIMENSION NSD(7)

Запоминает IRW-указатель в целый массив **NSD(7)** из 7 элементов. Выполняется вместе с запоминанием IYZ-указателя функцией **NRMPP**. Используется, если после возврата в данный ОЛМ из другого предполагается продолжение работы внутри ОЛМ-стрелки.

7.4.2. **FUNCTION NBDPP(LX2,NSD)**
DIMENSION NSD(7)

Восстанавливает IRW-указатель из целого массива **NSD(7)**. Выполняется вместе с восстановлением IYZ-указателя функцией **NRBPP**.

При операциях чтения, записи и продвижения по ОЛМ-стрелки может происходить «скрытое непотенциальное» продвижение IYZ-указателя по ОЛМ, содержащему динамическую структуру. Поэтому операции запоминания и восстановления IYZ-указателя и IRW-указателя имеют смысл лишь если после их запоминания с данным ОЛМ и с данным ОЛМ-стрелки не производилось никакой работы функциями пакета. При необходимости продолжить работу внутри ОЛМ-стрелки после «непотенциальной» работы в ОЛМ, содержащем эту динамическую структуру, установка на начало ОЛМ-стрелки призводится функциями §8.6.

§8.8. Типы данных сетки, их формирование

Основными операциями тензорного анализа, при помощи которых записываются уравнения математической физики, являются div , grad , rot . Так как каждая трех-

мерная разностная сетка состоит из ячеек (Ω), узлов (ω), граней (σ) и ребер (λ), то и указанные операторы могут быть определены на разных типах носителей сетки. Конкретный вид типов данных на сетке зависит от типа дискретной аппроксимации. Так, например, оператор div может рассматриваться как действующий из (σ) в (Ω), а может — из (ω) в (Ω). Аналогично, оператор grad может действовать из (Ω) в (σ) или из (Ω) в (ω) и т.п. При решении задач математической физики необходимо построить типы данных на сетке, которые позволяли бы решать уравнения математической физики, например уравнение Пуассона. Как видно из приведенной ниже таблицы, типы данных на сетке могут быть двух видов — унитарные и бинарные. Унитарными являются ячейка, узел, грань, ребро. К бинарным относятся, например, $\Omega.\sigma$ — ячейки, прилежащие к данной грани.

В связи с вышеизложенным, решая, например, уравнение Пуассона, пользователь сталкивается с проблемой занесения и хранения сетки — унитарных типов данных ячеек. Затем возникает проблема создания бинарных типов данных сетки — так называемое связывание междоменных индексов для дальнейшего вычисления оператора divgrad.

После завершения создания типов данных сетки, например, уравнение Пуассона на сетке решается следующим образом. Инструментальными средствами §8.10 организуются три вложенных цикла. Первый цикл по всем ячейкам области. Второй цикл — вычисление div — цикл по всем граням данной ячейки. И третий цикл — по ячейкам, смежным через данную грань, внутри которого вычисляется grad . Таким образом, средствами системы решается уравнение Пуассона на сетке. Причем, такие рассуждения носят инвариантный характер и позволяют аналогично вычислять rotrot, graddiv и т.д. Далее следует описание типов данных сетки, возможностей их формирования, а также циклических операций и операций прямого доступа над ними.

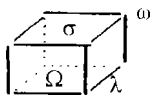
8.1. Типы данных и соответствующие им массивы-дескрипторы сетки.

тип	IT	JT	лок. вид.	один и более '<дескриптор сетки>: <тип массива>'
$\bar{\Omega}.\emptyset$	1	$\emptyset$	–	'D($\bar{\Omega}.\emptyset$):(1,$\emptyset$)'
$\omega.\emptyset$	2	$\emptyset$	–	'D($\omega.\emptyset$):(2,$\emptyset$)'$\|_{1\emptyset}$
$\bar{\Omega}$	1	1	+	'D($\bar{\Omega}$):(1,1)'
$\bar{\Omega}.\omega$	1	2	+	'D($\bar{\Omega}.\omega$):(1,2)'
$\bar{\Omega}.\sigma$	1	4	+	'D($\bar{\Omega}.\sigma$):(1,4)'$\|_{12}$
$\bar{\Omega}.\lambda$	1	5	+	'D($\bar{\Omega}.\lambda$):(1,5)'$\|_{12}$
ω	2	± 2	+	{''D($\bar{\Omega}.\omega$):(1,2)':+'| ''D(ω):(2,2)'$\|_{14}$:-'}
σ	4	4	+	'D($\bar{\Omega}.\sigma$):(1,4)'$\|_{22}$
λ	5	5	+	'D($\bar{\Omega}.\lambda$):(1,5)'$\|_{22}$

$|_{\alpha\beta}$ — используются нециклические функции типа α = IT, β = JT.

В приведенной таблице используются следующие обозначения:

1 – $\bar{\Omega} = \{\Omega|\Omega.\partial\}$ – ячейка
2 – ω – узел
4 – σ – грань
5 – λ – ребро
$\Omega.\partial$ – фиктивная ячейка
$\imath = \{\omega|\sigma|\lambda\}$ – междоменный индекс
$\bar{\Omega}.\imath$ – бинарный объект



8.2. **FUNCTION MTPEPP(LX,NMAS,I,J)** — установить тип массива (I,J) как 8 * I + J + 64. I = $\emptyset$, 1, ..., J = $\emptyset$, 1, ..., 7. Стандартное значение ($\emptyset$,$\emptyset$) соответствует доменному массиву (**DM**–массив) в сеточных доменах которого определен произвольный {'<айтем>:IYZDPP = $\emptyset$'|'<стрелка>:IYZDPP = 1'}.

8.3. **FUNCTION NDMPP(LX,MST,LPT,IX,IY,IYZ,L)**
DIMENSION MST(9)
{'<завести>:L=1 .**AND**. <еще нет>'|
'<никаких действий>:L=1 .**AND**. <уже есть>'|
'<исключить>:L=$\emptyset$.**AND**. <еще есть>'|
'<никаких действий>:L=$\emptyset$.**AND**. <уже нет>'}
доменную стрелку динамической структуры на динамическом ОЛМ (**NMAS=MST(1), IYZ**), соответствующую доме-

ну с координатами 'IX: = 0, 1, ...', 'IY: = 0, 1, ...AND.NYZ = = 1', 'IYZ: = 0, 1, ...' в DM-массиве (тип (0, 0)).

Домен с нулевыми координатами рекомендуется использовать под параметрическую информацию.

Параметры типа 'IY:NYZ=0' всюду в дальнейшем игнорируется.

Параметр LPT = −2, −1, 1, 2. При |LPT| = 1 происходит поиск массива в архиве по номеру NMAS = MST(1), формируется MS-указатель,который запоминается в 8 элементов целого массива MST(2), ..., MST(9) подобно пункту 5.5.8.

При |LPT| = 2 восстанавливается MS-указатель из целого массива MST(2), ..., MST(9) подобно пункту 5.5.8.

В других функциях (см. ниже) вместо массива -параметра MST, задающего массив NMAS = MST(1) в архиве, может использоваться массив- параметр IST, задающий более одного массива из архива. Режим работы параметра |LPT| в этом случае аналогичен.

При LPT > 0 происходит запоминание и восстановление MS-указателя, IYZ-указателя функциями пункта 5.5.8. (функции IYZSPP, если это необходимо, вызываются пользователем самостоятельно) и IRW-указателя функциями пункта 7.4.

При LPT < 0 происходит запоминание и восстановление только IRW-указателя функциями пункта 7.4. MS указатель оказывается настроенным на массив задаваемый в MST. IYZ-указатель оказывается продвинутым на заводимую стрелку, соответствующую домену, (L = 1), даже если эта стрелка уже есть, и IYZ-указатель оказывается неопределенным при исключении стрелки (L = 0).

При использовании режима работы LPT < 0 в других функциях (см. ниже) MS-, IYZ- и IRW-указатели оказываются неопределенными.

Независимо от заведения или исключения (параметр L) функция NDMPP пытается сначала найти стрелку,соответствующую домену, и продвинуться на нее. В зависимости от результата этих действий вырабатывается возвращаемое значение функции NDMPP=<код установки на домен>.

<код установки на домен>={'0:<стрелка найдена>'|

```
    '1:<нет IX-индекса>'|
    '2:<нет IY-индекса> .AND. NYZ=1'|
    '3:<нет IYZ-индекса>'}
'<правило поиска>:<IYZ-индекс>→'<IY-индекс>→:NYZ=
=1'<IX-индекс>'.
```

Сначала происходит поиск стрелки по внешнему индексу IYZ, затем по промежуточному индексу 'IY:NYZ=1' и, наконец, по внутреннему индексу IX.

8.3.1. **FUNCTION MC<IJ>PP(LX,NMAS,IYZ,NMASØ,IYZØ)**
< IJ > = {ØØ|1Ø|11|2Ø|22} в соответствии со значениями параметров I (первая цифра) и J (вторая цифра) типа массива (см. п.8.2.).

Производит сжатие непустого динамического ОЛМ (NMAS,IYZ) массива-дескриптора типа <IJ> в статический ОЛМ (NMAS,IYZ). Перед вызовом функции MCØØPP в каждую доменную стрелку ОЛМ (NMAS,IYZ) заносится айтем из двух полей A и B (см. рис.8.12). Третье поле (C) формируется самой функцией MCØØPP.

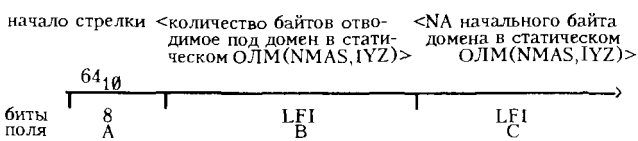


Рис.8.12

ОЛМ (NMASØ,IYZØ) — рабочий массив (с любым NYZ). После вызова функции MC<IJ>PP он сброшен. Возвращаемое значение функции MC<IJ>PP>Ø — продвинутое при сжатии количество байтов, на которых расположена информация в статическом ОЛМ (NMAS,IYZ). При MS<IJ>PP=Ø пустой ОЛМ (NMAS,IYZ) сохраняется динамическим.

8.4.**FUNCTION ND1ØPP(LX,MST,LPT,IX,IY,IYZ,L)**
DIMENSION MST(9)

Работает аналогично функции NDMPP (см. п.8.3.), но с массивами-дескрипторами типа (1,Ø) и (2,Ø). Собственно доменной стрелки в массивах-дескрипторах данного типа нет.

8.5. **FUNCTION ND11PP(LX,MST,LPT,IX,IY,IYZ,L,M)**
DIMENSION MST(9)

Работает аналогично функции **NDMPP** (см. п.8.3.), но с массивами-дескрипторами типа (1,1) и (2,2).

M признак граничности {'={'1:α'|'$\emptyset$:$\alpha.\partial$'}:L=1 .AND. <еще нет>'|'<игнорируется>:(L=1 .AND. <уже есть>) .OR. L=$\emptyset$'}

$\alpha = \{'\Omega : (1,1)'|'\omega : (2,2)'\}$ – домен сетки

$\alpha.\partial$ — фиктивный домен.

Здесь и далее считаются выполнеными следующие соглашения.

Заводимый объект (L=1 .AND. <еще нет>) автоматически становится глобальным (стандартное значение), т.е. всегда видимым.

Если исключаемый объект (L=$\emptyset$ .AND. <еще есть>) локально невидим, то перед исключением он автоматически восстанавливается в глобальное состояние.

8.6.**FUNCTION ND12PP(LX,MST,LPT,IP,IX,IY,IYZ,L,LP,M)**
COMMON /AD12PP/ JP,JX,JY,JYZ
DIMENSION MST(9)

Работает с междоменными индексами $\imath = \omega, \sigma, \lambda$ с указателями (IP$\geq\emptyset$,IX,IY,IYZ) и '(JP$\geq\emptyset$,JX,JY,JYZ): L=2' и соответствующими им семействами бинарных объектов ($\Omega.\imath$) в массивах-дескрипторах типа (1,2), (1,4) и (1,5).

L $= -1, \emptyset, 1, 2$.

{ '<исключить междоменный индекс $\imath$ с указателем (IP,IX,IY,IYZ) вместе с семейством бинарных объектов ($\bar{\Omega}.\imath$)>: L $= -1$'|

'<исключить бинарный объект $\bar{\Omega}.\imath$ с указателем (IP,IX, IY,IYZ) (вместе с междоменным индексом $\imath$, если он принадлежит только ячейке (IX,IY,IYZ))>:L=$\emptyset$'|

'<завести междоменный индекс $\imath$ с указателем (IP,IX,IY, IYZ) вместе с бинарным объектом $\bar{\Omega}.\imath$>:L=1'|

'<соединить междоменные индексы $\imath$ с указателем (IP, IX,IY,IYZ) и ν с указателем (JP,JX,JY,JYZ) в один междоменный индекс $\imath$ с общим семейством бинарных объектов ($\bar{\Omega}.\imath$). В случае отсутствия междоменного индекса он предварительно заводится (см. случай L=1).>:L=2'}.

В двумерном случае промежуточные индексы 'IY,JY: NYZ=∅' игнорируются. В зависимости от результата этих действий вырабатывается возвращаемое значение функции ND12PP = ∅, 1, 2, 3, 4.

```
ND12PP={'{'∅:<исключен>'|'≠∅:<отсутствует по
            <правилу поиска>>'}:L=-1,∅'|
        '{'∅:<уже есть>'|'≠∅:<заведен по
            <правилу поиска>>'}:L=1'|
        '{'∅:<есть оба, соединены>'|
          '1:<есть только (IP,IX,IY,IYZ)>'|
          '2:<есть только (JP,JX,JY,JYZ)>'|
          '3:<есть оба, рассоединены>'|
          '4:<отсутствуют оба>'}:L=2'}
'<правило поиска>:
  <IYZ-индекс,ND12PP=3>
     '<IY-индекс,ND12PP=2>:NYZ=1'
  <IX-индекс,ND12PP=1>
  <IP-индекс,ND12PP=4>'
```

При LP = ∅ никакая локальная видимость в массиве-дескрипторе неразрешена. Во всем массиве-дескрипторе разрешена локальная видимость только

```
{'<междоменных индексов i >:LP=1'|
'<бинарных объектов Ω.i >:LP=2'}
```

Перед сменой режима LP = ∅, 1, 2 необходимо восстановление массива-дескриптора в глобальное состояние в старом режиме LP.

Заводимый междоменный индекс i или бинарный объект $\Omega.i$ (L=1,2 .AND. <еще нет>) автоматически становится глобальным (стандартное значение).

Если исключаемый (L=-1,∅ .AND. <еще есть>) междоменный индекс i (LP = 1) или бинарный объект $\Omega.i$ (LP = 2) локально невидимый, то перед исключением он автоматически восстанавливается в глобальное состояние.

```
M признак граничности {'={ '1:i'|'∅ : ∂i'}:(L=1 .AND.
ND12PP≠∅) .OR. (L=2 .AND. ND12PP=4)'|
'<игнорируется>:(L=1 .AND. ND12PP=∅) .OR.
(L=2 .AND. ND12PP=∅,1,2,3) .OR. L=-1,∅'}
```

∂i — граничный междоменный индекс.

Глобальное/локально невидимое состояние соединен-

ного междоменного индекса i (случай L=2 .AND. ND12PP=3) и его внутренний/граничный M–признак (случай L= =2 .AND. ND12PP=3) берутся из указателя (IP,IX,IY,IYZ).

8.6.1. FUNCTION MC12PP(LX,NMAS,IYZ,NMASØ,IYZØ)

Производит сжатие непустого динамического ОЛМ (NMAS,IYZ) в массивах–дескрипторах типа (1,2), (1,4) и (1,5) в статический ОЛМ (NMAS,IYZ).

ОЛМ (NMASØ,IYZØ) — рабочий массив (с любым NYZ). После вызова функции MC12PP он сброшен.

Возвращаемое значение функции MC12PP > Ø – продвинутое при сжатии количество байтов, на которых расположена информация в статическом ОЛМ (NMAS,IYZ). При MC12PP = Ø пустой ОЛМ (NMAS,IYZ) сохраняется динамическим.

§8.9. Нециклические операции на сетке

9.1. FUNCTION MXYZPP(LX,MST,LPTR,IX,IY,IYZ)
DIMENSION MST(9)

IYZ–указатель продвигается на {'<айтем>:IYZDPP=Ø'| '<стрелку>:IYZDPP=1'} сеточного домена (IX,IY,IYZ) в DM–массиве (тип (Ø,Ø)). MS–указатель оказывается настроенным на массив, задаваемый в MST. IRW–указатель {'<сохраняется>:IYZDPP=Ø'| '<неопределен>:IYZDPP=1'}.

Возвращаемое значение функции MXYZPP=<код установки на домен> (см. п.8.3.).

Если продвинуться на {'<айтем>:IYZDPP=Ø'| '<стрелку>:IYZDPP=1'} домена не удалось (MXYZPP $\neq$ Ø), то IYZ–указатель неопределен.

Параметр LPTR = $-2, -1, 1, 2$. При |LPTR| = 1 происходит поиск массива в архиве по номеру NM=MST(1), формируется MS–указатель, который запоминается в 8 элементов целого массива MST(2), ..., MST(9) подобно пункту 5.5.8.

При |LPTR| = 2 восстанавливается MS–указатель из целого массива MST(2), ..., MST(9) подобно пункту 5.5.8.

Если MXYZPP $\neq$ Ø, то {LPTR<Ø–<нет печати> |LPTR>Ø–<печать>} информации о невозможности установиться на домен.

9.2. Доменный <сет переменных> =

$('v_1:t_1','...'v_i:t_i','...'v_{|NTP|}:t_{|NTP|}')$,

|NTP| = 1, ..., MC∅4 на сетке — упорядоченная последовательность переменных v_i типов t_i одинаковой пространственной размерности (с одинаковым NYZ), заданная на доменах сетки одного и того же типа (либо ячеечных, либо узловых). Максимально допустимый размер сета MC∅4≥1 задается администратором версии пакета. Сет переменных задается первыми |NTP| столбцами сет-массива

DIMENSION IST(8,4*MC∅4). Столбцы |NTP|+1..., 4*MC∅4 используются как рабочие. Рассмотрим типичный столбец IST(k,i), k=1,...8 (см. Таблицу п.8.1.).

IST(1,i)=IT,

IST(2,i)=JT,

IST(3,i)={'∅:<t_i глобальный/локальная видимость>'|
'1:<t_i глобальный>'}.

IST(3,i) игнорируется, если локальная видимость в типе t_i отсутствует (см. Таблицу п.8.1.).

IST(4,i),IST(5,i),IST(6,i) — не более трех номеров в архиве массивов-дескрипторов сетки, однозначно задающих данный тип t_i.

Если тип t_i обладает способностью видеть объекты локально и IST(3,i)=∅, то один из трех массивов-дескрипторов сетки IST(4,i), IST(5,i) либо IST(6,i), отвечающий за локальную видимость в типе t_i, может быть использован в другом типе t_j (вообще говоря и в другом сет-массиве IST) лишь в режиме IST(3,j)=1.

Параметры IST(3,i),IST(7,i),IST(8,i) используются только функцией IPNPP.

Переменные '$v_i:t_i$',i=1...|NTP| сет-массива IST упорядочены в монотонную последовательность. Каждая переменная из '$v_i:t_i$' попадает в пространственный домен (IX,'IY:NYZ',IYZ), где она впервые встретилась. Множество таких доменов монотонизовано: возрастает IYZ; при фиксированном IYZ возрастает 'IY:NYZ'; наконец, при фиксированных IYZ и 'IY:NYZ' возрастает IX. В фиксированном домене (IX,IY,IYZ) множества переменных из '$v_i:t_i$',i=1...|NTP| (каждой приписывается номер IS ≥

$\geq \emptyset$), которые в нем впервые встретились, образуют монотонную подпоследовательность, упорядоченную по i.

Если более одной переменной из '$v_i:t_i$' впервые встретилось в одном и том же домене (IX,IY,IYZ), то они упорядочены по своим локальным номерам IP $\geq \emptyset$ в этом домене.

Алгебраически переменной из '$v_i:t_i$',i=1...|NTP| сет–массива IST соответствует 4-вектор (IS,IX,IY,IYZ).

9.3.
```
FUNCTION IPNPP(LX,IST,LPT,NTP,IP,IX,IY,IYZ)
COMMON /JPNCPP/ JP,JX,JY,JYZ
COMMON /KPNCPP/ KP,KX,KY,KYZ
COMMON /MPNCPP/ M
DIMENSION IST(8,4*MC∅4)
```
конкатенирует переменные из IST в доменную последовательность.

IPNPP={-1|IS$\geq\emptyset$} вырабатывает номер IS $\geq \emptyset$ переменной '$v_{|NTP|}:t_{|NTP|}$' в сет–массиве IST с указателем (IP$\geq\emptyset$, IX,IY,IYZ).

Если '$v_{|NTP|}:t_{|NTP|}$' бинарный объект, то используется еще указатель (JP,JX,JY,JYZ). Например, в $\bar{\Omega}.i$ (IP= =$\emptyset$,IX,IY,IYZ) указывает на ячейку $\bar{\Omega}$, а (JP,JX,JY,JYZ) указывает на междоменный индекс i в одной из ячеек, куда он входит.

Выходной параметр KP=-1, если объект (IP,IX,IY, IYZ) впервые встретился в домене (IX,IY,IYZ). Иначе, (KP$\geq\emptyset$,KX,KY,KYZ) — указатель на (IP$\geq\emptyset$,IX,IY,IYZ), но в домен, где он впервые встретился.

Выходной параметр 'M={'1:<внутренний>'|'$\emptyset$:<граничный>'}: IP$\geq\emptyset$' признак небинарных объектов '$v_{|NTP|}$: $t_{|NTP|}$' с JT $\neq \emptyset$ (см. Таблицу п.8.1.). В выходных параметрах IST(8,i), i=1,...,|NTP| содержится количество переменных из '$v_i:t_i$' в доменной последовательности, которые впервые встретились в домене {'(IX,IY,IYZ): KP=-1'|'(KX,KY,KYZ):KP$\geq\emptyset$'}.

IP = $\{-2|-1|\geq\emptyset\}$. При IP $< \emptyset$ работает режим трассировки доменной последовательности. Под IS $\geq \emptyset$ при этом следует понимать максимальный номер в последовательности переменных из '$v_i:t_i$', i=1,...,|NTP|, которые впервые встретились в домене (IX,IY,IYZ). Нумерация в

доменной последовательности начинается с нуля.

Выше описан режим работы трассировки IP = −2. В режиме IP = −1 переменные ''v_i:t_i':IST(7,i)=∅'. i=1,...,|NTP| в трассировке доменной последовательности не участвуют (т.е. для них вырабатывается IST(8, i)=∅). Входные параметры IST(7,i)={∅|1}. i=1,..., |NTP| игнорируются при IP ≠ −1.

'IPNPP=-1:IP≥∅' — нет домена или объекта в домене, определяемых указателями (IP,IX,IY,IYZ) и (JP,JX, JY,JYZ).

'IPNPP=-1:IP<∅' — трассируемая доменная последовательность пуста (т.е. из домена (IX,IY,IYZ) в нее не попала ни одна переменная из 'v_i:t_i', i=1,...,|NTP|).

{'<нет печати>:NTP<∅'|'<печать>:NTP>∅'} — управление печатью о ситуации, если IPNPP=-1.

9.4. FUNCTION L{P11|M22}PP(LX,IST,LPT,NTP,
IX,IY,IYZ,L,M)
COMMON /M{P11|M22}PP/ M{P11|M22}

Состояние {<ячеечного $\bar{\Omega}$>|<узлового ω >} домена (IX, IY,IYZ) массива-дескриптора типа {(1,1)|(2,2)} из IST с номером в архиве IST(4,|NTP|) с |NTP|=1,...,MC∅4
{<установить>{'<глобальным>,L{P11|M22}PP={'∅:<уже глобальный>'|'1:<был локально невидим>'}:L=1'|
'<локально невидимым>, L{P11|M22}PP={'∅:<уже локально невидим>'| '1:<был глобальным>'}:L=∅'}|
'<прочитать глобальное (L{P11|M22}PP=1)/локально невидимое (L{P11|M22}PP=∅)>:L=-1'}
и признак домена {<установить> {'<внутренним>, <выходной параметр> M{P11|M22}=1:M=1'|
'<граничным>, <выходной параметр> M{P11|M22}=∅: M=∅'}|
'<прочитать внутренний (выходной параметр M{P11| M22}=1)/граничный (выходной параметр M{P11|M22}=∅)>: M=-1'}.

Возвращаемое значение функции L{P11|M22}PP=-1 — домен (IX,IY,IYZ) в массиве-дескрипторе отсутствует.

{'<нет печати>:NTP<∅'| '<печать>:NTP>∅'} — управление печатью о ситуации, если L{P11|M22}PP=-1.

9.5. **FUNCTION LP22PP(LX,IST,LPT,NTP,**
IP,IX,IY,IYZ,L,M)
COMMON /MP22PP/ MP22

Состояние междоменного индекса $\{\omega|\sigma|\lambda\}$ с указателем (IP≥∅,IX,IY,IYZ) в массиве-дескрипторе типа {(1,2)|(1,4)|(1,5)} из IST с номером в архиве IST(4,|NTP|) с |NTP|=1,..., MC∅4
{<установить>{'<глобальным>, LP22PP={'∅:<уже глобальный>'|'1:<был локально невидим>'}:L=1'|
'<локально невидимым>, LP22PP={'∅:<уже локально невидим>'|'1:<был глобальным>'}:L=∅'}|
'<прочитать глобальное (LP22PP=1)/локально невидимое (LP22PP=∅)>:L=-1'}
и признак междоменного индекса
{<установить>{'<внутренним>, <выходной параметр> MP22=1:M=1'| '<граничным>, <выходной параметр> MP22=∅:M=∅'}|
'<прочитать внутренний (выходной параметр MP22==1)/граничный (выходной параметр MP22=∅)>:M=-1'}.

Возвращаемое значение функции LP22PP=-1 — междоменный индекс $\{\omega|\sigma|\lambda\}$ с указателем (IP≥∅,IX,IY,IYZ) в массиве-дескрипторе отсутствует.

{'< нет печати>:NTP<∅'|'<печать>:NTP>∅'} — управление печатью о ситуации, если LP22PP=-1.

9.6. **FUNCTION LP12PP(LX,IST,LPT,NTP,IX,IY,IYZ,L)**
COMMON /JP12PP/ JP,JX,JY,JYZ

Состояние бинарного объекта $\{\bar{\Omega}.\omega|\bar{\Omega}.\sigma|\bar{\Omega}.\lambda\}$ в ячейке $\bar{\Omega}$ = (IX,IY,IYZ) содержащей междоменный индекс $\{\omega|\sigma|\lambda\}$ с указателем (JP≥∅,JX,JY,JYZ) в массиве-дескрипторе типа $\{(1,2)|(1,4)|(1,5)\}$ из IST с номером в архиве IST(4,|NTP|) с |NTP|=1, ..., MC∅4
{<установить> {'<глобальным>, LP12PP={'∅:<уже глобальный>'| '1:<был локально невидим>'}:L=1'|
'<локально невидимым>, LP12PP={'∅:<уже локально невидим>'|'1:<был глобальным>'}:L=∅'}|'<прочитать глобальное (LP12PP=1)/локально невидимое (LP12PP==∅)>:L=-1'}

Возвращаемое значение функции LP12PP=-1 — бинарный объект $\{\bar{\Omega}.\omega|\bar{\Omega}.\sigma|\bar{\Omega}.\lambda\}$ в ячейке $\bar{\Omega}$ = (IX,IY,IYZ).

содержащей междоменный индекс $\{\omega|\sigma|\lambda\}$ с указателем (JP≥∅,JX,JY,JYZ) в массиве-дескрипторе отсутствует. {'<нет печати>:NTP<∅'| '<печать>:NTP>∅'} — управление печатью о ситуации, если LP12PP=-1.

§8.10. Циклические операции на сетке

10.1. **FUNCTION N{1|2}∅ρPP(LX,IST,LPT,NTP,J)**
DIMENSION IST(8,4*MC∅4)

однократный цикл по всем {<ячеечным ($\bar{\Omega}$)>|<узловым (ω)>} доменам массива-дескриптора типа {(1,∅)|(2,∅)} из IST с номером в архиве IST(4,NTP) с NTP=1,...MC∅4. Возвращаемое значение функции N{1|2}∅ρPP≥ ∅ — количество доменов в массиве-дескрипторе.

При J = ∅ осуществляется фиктивный проход. При J = 1 в каждом домене вызывается

FUNCTION I{1|2}∅ρPP(LX)
COMMON /A{1|2}∅ρPP/ NYZ,IX,IY,IYZ,LDN,IXT,

наполнение которой реализуется пользователем. LDN — признак динамичности ОЛМ (см. п.5.5.10.), в котором расположен домен (IX,IY,IYZ). Входное значение параметра IXT = ∅. Если при выходе из функции I{1|2}∅ρPP установлено IXT = 1, цикл после данного домена обрывается.

Здесь и далее ρ = A,... — замена циклической рекурсии. Допустимые подстановки (A,...) для реализации вложенных циклов определяются администратором версии пакета.

10.2. **FUNCTION {N11|M22}ρPP(LX,IST,LPT,NTP,J,LL)**
DIMENSION IST(8,4*MC∅4)

однократный цикл по {'<всем>:LL=1'| '<локально видимым>:LL=∅'} {<ячеечным ($\bar{\Omega}$)>|<узловым (ω)>} доменам массива-дескриптора типа {(1,1)|(2,2)} из IST с номером в архиве IST(4,NTP) с NTP=1,...MC∅4.

Возвращаемое значение функции {N11|M22}ρPP≥ ∅ — количество доменов в массиве-дескрипторе, участвующих в цикле (в зависимости от параметра LL). Фиктивный проход (J = ∅) осуществляется именно по этим доменам.

При J = 1 в каждом домене, участвующем в цикле, вызывается

```
FUNCTION {I11|J22}ρPP(LX)
COMMON /{A11|B22}ρPP/ NYZ,IX,IY,IYZ,M,LDN,IXT,
```

наполнение которой реализуется пользователем. **M** — внутренний/граничный признак домена (см. п.9.4.). Ненулевое значение параметра **LDN** понимается как <**NA** доменной стрелки> массива–дескриптора типа {(1,1)|(2, 2)}, на которую можно продвинуться из функции {I11|J22}ρPP вызовом **NIL=NEO1PP(LDN)**. При входе в функцию '{I11|J22}ρPP:LDN>∅' считаются выполненными следующие действия:

```
NIL=NEO1PP(LDN)
LDN=NED1PP(1)
LDN=NIDPP(∅)
```

т.е. текущим является бит (**IA=∅,IB=1**) ОЛМ — доменной стрелки массива–дескриптора. В битах (**IA=∅,IB=∅**) и (**IA=∅,IB=1**) содержится служебная информация.

10.3. **FUNCTION N{22|44|55}ρPP(LX,IST,LPT, NTP,J,LL,MM)**

DIMENSION IST(8,4*MC∅4)

однократный цикл по {'<всем>:LL=1'|' <локально видимым>:LL=∅'} междоменным индексам ({<узлам (ω)>|<граням (σ)>|<ребрам (λ)>}) массива–дескриптора типа {(1,2)|(1,4)|(1,5)} из **IST** с номером в архиве **IST(4, NTP)** с **NTP=1,...MC∅4**.

Возвращаемое значение функции **N{22|44|55}ρPP** $\geq$ ∅ — количество междоменных индексов в массиве–дескрипторе, участвующих в цикле (в зависимости от параметра **LL**). Фиктивный проход (J = ∅) осуществляется именно по этим междоменным индексам. При J = 1 в каждом междоменном индексе, участвующем в цикле, вызывается

```
FUNCTION I{22|44|55}ρPP(LX)
COMMON /A{22|44|55}ρPP/ NYZ,IP,IX,IY,IYZ,M,LDN,IXT,
```

наполнение которой реализуется пользователем.

'**M:MM=1**' — внутренний/граничный признак междоменного индекса (см. п.9.5.). Неопределен при **MM** = ∅.

10.4. FUNCTION N1{2|4|5}ρPP(LX,IST,LPT,NTP,NITP,
JP,JX,JY,JYZ,J,LDNLDN)
DIMENSION IST(8,4*MC∅4)

однократный цикл по всем ячейкам $\{(\bar{\Omega}(\omega))|(\bar{\Omega}(\sigma))|(\bar{\Omega}(\lambda))\}$, содержащим общий междоменный индекс $\{\omega|\sigma|\lambda\}$ с указателем (JP≥∅,JX,JY,JYZ) в массиве-дескрипторе типа {(1,2)|(1,4)|(1,5)} из IST с номером в архиве {'IST(4,|NTP|):NITP=1'|'IST(5,|NTP|):NITP=2'} с |NTP|= =1,...MC∅4.

Возвращаемое значение функции N1{2|4|5}ρPP>∅ — количество ячеек $\{(\bar{\Omega}(\omega))|(\bar{\Omega}(\sigma))|(\bar{\Omega}(\lambda))\}$ с общим междоменным индексом $\{\omega|\sigma|\lambda\}$, участвующих в цикле. Фиктивный проход (J = ∅) осуществляется именно по этим ячейкам. При J = 1 в каждой ячейке, участвующей в цикле, вызывается

FUNCTION I1{2|4|5}ρPP(LX)
COMMON /A1{2|4|5}ρPP/ NYZ,IP,IX,IY,IYZ,I,LDN,IXT,

наполнение которой реализуется пользователем.
IP ≥ ∅ — номер междоменного индекса $\{\omega|\sigma|\lambda\}$ в ячейке (IX,IY,IYZ) цикла $\{(\bar{\Omega}(\omega))|(\bar{\Omega}(\sigma))|(\bar{\Omega}(\lambda))\}$.
{'<неперваяя>:I=∅'|'<первая>:I=1'} ячейка цикла в монотонной последовательности доменов-ячеек (см. п.9.2). Признак динамичности LDN (см. п.5.5.10) для ОЛМ, в котором расположена ячейка (IX,IY,IYZ) цикла {'<неопределен>:LDNLDN=∅'|'<определен>:LDNLDN=1'}.

Возвращаемое значение функции N1{2|4|5}ρPP=-1 — междоменный индекс $\{\omega|\sigma|\lambda\}$ с указателем (JP≥∅,JX,JY, JYZ) в массиве-дескрипторе отсутствует.

{'<нет печати>:NTP<∅'|'<печать>:NTP>∅'} — управление печатью о ситуации, если N1{2|4|5}ρPP=-1.

10.5. FUNCTION N{2|4|5}1ρPP(LX,IST,LPT,NTP,NITP,
IX,IY,IYZ,J,II)
DIMENSION IST(8,4*MC∅4)

однократный цикл $\{(\omega(\bar{\Omega}))|(\sigma(\bar{\Omega}))|(\lambda(\bar{\Omega}))\}$ по всем междоменным индексам $\{\omega|\sigma|\lambda\}$, входящим в ячейку (IX,IY, IYZ) в массиве-дескрипторе типа {(1,2)|(1,4)|(1,5)} из IST с номером в архиве {'IST(4,|NTP|):NITP=1'|' IST(5,|NTP|):NITP=2'} с |NTP|=1,...MC∅4.

Возвращаемое значение функции **N**{2|4|5}1ρPP>∅ — количество междоменных индексов $\{(\omega(\bar{\Omega}))\,|\,(\sigma(\bar{\Omega}))\,|\,(\lambda(\bar{\Omega}))\}$, входящих в ячейку (IX,IY,IYZ) участвующих в цикле. Фиктивный проход (J = ∅) осуществляется именно по этим междоменным индексам. При J = 1 в каждом междоменном индексе, участвующем в цикле, вызывается

FUNCTION I{2|4|5}1ρPP(LX)

COMMON /A{2|4|5}1ρPP/ **NYZ,IP,IX,IY,IYZ,I,LDN,IXT**,

наполнение которой реализуется пользователем.

IP ≥ ∅ — номер междоменного индекса $\{\omega\,|\,\sigma\,|\,\lambda\}$ в ячейке (IX,IY,IYZ) цикла $\{(\omega(\bar{\Omega}))\,|\,(\sigma(\bar{\Omega}))\,|\,(\lambda(\bar{\Omega}))\}$.

Междоменный индекс в цикле {'<невпервые>:I=∅'|'<впервые>:I=1'} встречается в ячейке (IX,IY,IYZ) из монотонной последовательности доменов-ячеек (см. п.9.2). Признак I={'<неопределен>:II=∅'|'<определен>:II=1'}.

LDN — признак динамичности (см. п.5.5.10.) для ОЛМ, в котором расположена ячейка (IX,IY,IYZ).

Возвращаемое значение функции **N**{2|4|5}1ρPP=-1 — ячейка (IX,IY,IYZ) в массиве-дескрипторе отсутствует.

{'<нет печати>:NTP<∅'|'<печать>:NTP>∅'} — управление печатью о ситуации, если **N**{2|4|5}1ρPP=-1.

10.6. **FUNCTION MYZ**ρPP(LX,**NM**,J,LL)

однократный цикл по {'<всем>:LL=1'|'<локально видимым>:LL=∅'} внешним индексам массива с номером **NM**. Параметр LL игнорируется, если локальная видимость в массиве с номером **NM** отсутствует. Возвращаемое значение функции MYZρPP ≥ ∅ — количество внешних индексов в массиве с номером **NM**, участвующих в цикле (в зависимости от параметра LL). Фиктивный проход (J = ∅) осуществляется именно по этим внешним индексам. При J = 1 в каждом внешнем индексе, участвующем в цикле, вызывается

FUNCTION JYZρPP(LX)

COMMON /BYZρPP/ **NYZ,IYZ,LDN,IXT**,

наполнение которой реализуется пользователем.

Приложения

Приложение А

Покажем, что при $1 \le p < 2$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\mathcal{O}} |\psi^{\sigma}(x)|^p \mathrm{d}V \le M s^p,$$

где s — длина некоторого отрезка σ внутри ограниченной области $\mathcal{O}$, а $|\psi^{\sigma}(x)|$ — деленный на 2π угол, под которым этот отрезок виден из точки $x \in \mathcal{O}$ (см. рис.1—А).

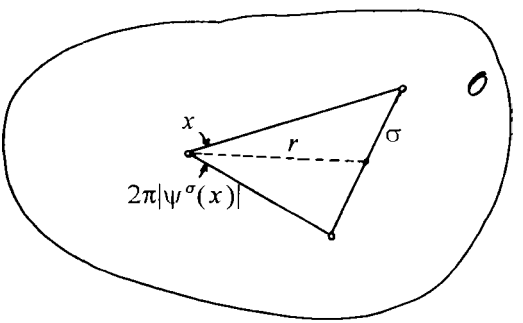


Рис.1—А

Функция $|\psi^{\sigma}(x)|$ мажорируется очевидно выражением $s/2\pi r$, где r — расстояние от точки x центра отрезка σ. Таким образом

$$\int\limits_{\mathcal{O}} |\psi^{\sigma}(x)|^p \mathrm{d}V \le s^p \int\limits_{\mathcal{O}} \frac{\mathrm{d}V}{(2\pi r)^p} \le (2\pi)^{1-p} s^p \int\limits_0^R r^{1-p} \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{(2\pi)^{1-p} R^{2-p}}{2-p} s^p.$$

Здесь R можно выбрать из условия $\pi R^2 = \operatorname{mes} \mathcal{O}$. Окончательно

$$\int\limits_{\mathcal{O}} |\psi^{\sigma}(x)|^p \mathrm{d}V \le \frac{2^{1-p} \pi^{-p/2} (\operatorname{mes} \mathcal{O})^{1-p/2}}{2-p} s^p \le M s^p.$$

Приложение В

Покажем, что при $q < 2$ имеет место неравенство

$$\sum_{\sigma} |\psi^{\sigma}(x)|^q \le Mh^{q-2}.$$

Зафиксируем σ. Пусть K — круг, построенный на σ как на диаметре, ρ — радиус этого круга, R — расстояние от точки x до середины грани. С одной стороны

$$|\psi^{\sigma}(x)| \le \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\rho}{R} \le \frac{\rho}{\pi R}$$

с другой стороны

$$\int\limits_K \frac{\mathrm{d}V_y}{|x-y|^q} \ge \frac{\pi R^{2-q}}{1-q/2}\left[\left(1+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{1-q/2} - 1\right] \ge$$
$$\ge \pi R^{2-q}\operatorname{arctg}^2\frac{\rho}{R} \ge \pi^{1+q}\rho^{2-q}\left(\frac{\rho}{\pi R}\right)^{q-2}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\rho}{R}\right)^2 \ge$$
$$\ge \pi^{1+q}\rho^{2-q}|\psi(x)|^q.$$

Таким образом

$$|\psi^{\sigma}(x)| \le \frac{\rho^{q-2}}{\pi^{1+q}}\int\limits_K \frac{\mathrm{d}V_y}{|x-y|^q}.$$

Сдвигая, если необходимо, круги K внутрь $\mathcal{O}$ и предполагая, что каждая точка области $\mathcal{O}$ покрыта не более чем $n = \mathrm{O}(1)$ кругами K имеем

$$\sum_{\sigma} |\psi^{\sigma}(x)| \le \frac{\rho^{q-2}}{\pi^{1+q}}\sum_K \int\limits_K \frac{\mathrm{d}V_y}{|x-y|^q} \le$$
$$\le \frac{n\rho^{q-2}}{\pi^{1+q}}\int\limits_{\mathcal{O}} \frac{\mathrm{d}V_y}{|x-y|^q} = \mathrm{O}(h^{q-2}),$$

т.к. $\rho = \mathrm{O}(h)$, а интеграл в правой части $\int\limits_{\mathcal{O}} \frac{\mathrm{d}V_y}{|x-y|^q}$ сходится и может быть оценен величиной $\frac{2\pi^{q-1}}{2-q}(\operatorname{mes}\mathcal{O})^{2-q}$ (см. *Приложение А*).

Приложение С

Условия (2.1) и первое из условий (2.2) главы VI, записанные в виде

$$\sum_a \left(\frac{\partial V}{\partial x_{i,a}}\right) = 0, \qquad (C.1)$$

$$\sum_a \left(\frac{\partial V}{\partial x_{i,a}}\right) x_{k,a} = V\delta_{ik}, \qquad (C.2)$$

$$\sum_a \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_a = 0 \qquad (C.3)$$

будем интерпретировать как систему дифференциальных уравнений относительно функции $V(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \ldots)$, где A, B, ... — вершины ячейки — многоугольника $AB\ldots$. Выясним характер зависимости V от $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, ..., позволяющий удовлетворить $(C.1)$—$(C.3)$. Будем обозначать $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Соотношение $(C.1)$ означает инвариантность объема ячейки при параллельном переносе в любом направлении. Недиагональные элементы соотношения $(C.2)$ означает инвариантность объема ячейки при поворотах, диагональные — однородность по x и y (в отдельности) с первым порядком. Соотношение $(C.3)$ отсутствие зазоров и наложений между ячейками.

Естественно считать (хотя и необязательно), что объем ячейки зависит лишь от координат узлов, являющихся ее вершинами, и имеет вид $V = \sum_{a,b} V_{ab} x_a y_b$. Здесь индексы a, b пробегают по всем вершинам ячейки.

Рассмотрим сначала какие условия на V_{ab} накладывают соотношения $(C.1)$, $(C.2)$, означающие аппроксимацию уравнения непрерывности. Недиагональные элементы $(C.2)$ дают $\sum_{a,b} V_{ab} x_a x_b = 0$, откуда $V_{ab} = -V_{ba}$. Соотношение $(C.1)$ дает $\sum_{a,b} V_{ab} y_b = 0$, откуда $\sum_a V_{ab} = 0$, т.е. сумма элементов в строке (столбце) матрицы (V_{ab}) равна нулю.

Рассмотрим треугольную ячейку. Матрица (V_{ab}), удовлетворяющая сформулированным условиям, очевидно имеет вид

$$(V_{ab}) = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если нормировачный множитель α выбрать из условия, чтобы прямоугольный треугольник с единичными катетами имел объем $= \frac{1}{2}$, получим, что $V(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C)$ есть площадь прямолинейного треугольника с радиус-векторами вершин $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$. Таким образом, для треугольных ячеек функция V определяется из условий $(C.1)$, $(C.2)$.

Рассмотрим теперь четырехугольную ячейку. Антисимметричная матрица (V_{ab}) имеет шесть ненулевых независимых элементов, на которые накладываются четыре условия $\sum\limits_a V_{ab} = 0$ (из них линейно независимых — три). Два дополнительных условия следуют из $(C.3)$ и состоят в том, что $V_{ab} \neq 0$ только тогда, когда узлы a и b соседние. Таким образом, $V_{AC} = V_{BD} = 0$ и оставшиеся четыре элемента матрицы (V_{ab}) определяются с точностью до нормировочного множителя. Накладывая условие нормировки: объем V единичного квадрата $= 1$, получаем, что $V(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D)$ — площадь прямолинейного четырехугольника с радиус-векторами вершин $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$, $\mathbf{r}_D$.

Приложение D

Получим формулу (6.5) главы VI. Рассмотрим произвольную четырехугольную ячейку $ABCD$ (см. рис.1—D) с координатами вершин $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$, $\mathbf{r}_D$. Требуется найти координаты точки пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям AC и BD.

По геометрическому смыслу векторы $\mathbf{S}_A$ и $\mathbf{S}_C$ перпендикулярны диагонали BD, а векторы $\mathbf{S}_B$ и $\mathbf{S}_D$ — диаго-

нали AC. Кроме того

$$\mathbf{S}_A = -\mathbf{S}_C, \qquad \mathbf{S}_B = -\mathbf{S}_D.$$

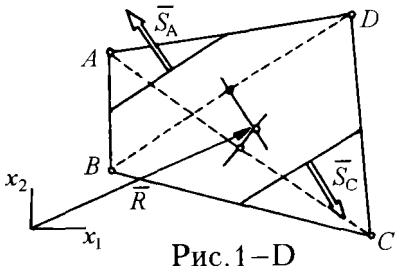


Рис.1–D

Из формулы (C.3) после свертки по i, k следует $(\mathbf{S}_a, \mathbf{r}_a) = 2V$. Более того, так как в матрице (V_{ab}) элементы, соответствующие противоположным вершинам равны нулю, справедливы равенства

$$(\mathbf{S}_A, \mathbf{r}_A) + (\mathbf{S}_C, \mathbf{r}_C) = (\mathbf{S}_B, \mathbf{r}_B) + (\mathbf{S}_D, \mathbf{r}_D) = V.$$

Из (C.3) следует также тождество

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}_a(\mathbf{c}, r_a) \qquad (D.1)$$

с произвольным вектором $\mathbf{c} = \text{const}$.

С учетом этих замечаний искомый вектор $\mathbf{R}$ может быть представлен в следующих формах

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C) + \alpha\mathbf{S}_B = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D) + \beta\mathbf{S}_A. \qquad (D.2)$$

Умножим (D.2) скалярно на вектор $\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B$ перпендикулярный $\mathbf{S}_A$. Имеем

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B) + \alpha(\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B, \mathbf{S}_B) = -(r_D^2 - r_B^2).$$

Но $(\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B, \mathbf{S}_B) = -(\mathbf{r}_B, \mathbf{S}_B) - (\mathbf{r}_D, \mathbf{S}_D) = -V$, поэтому

$$\alpha = \frac{1}{2V}\Big(r_B^2 - r_D^2 + (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B)\Big).$$

Подставляя это выражение для α в $(D.2)$, получаем

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C) + \frac{1}{2V}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B)\mathbf{S}_B +$$

$$+\frac{1}{2V}(r_B^2 - r_D^2)\mathbf{S}_B =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C) - \frac{1}{2V}\Big[(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B)\mathbf{S}_B + (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D)\mathbf{S}_D\Big] +$$

$$+\frac{1}{2V}(r_B^2\mathbf{S}_B + r_D^2\mathbf{S}_D).$$

С учетом $(D.1)$ два первых слагаемых в последнем равенстве преобразуются к виду

$$\text{(i)} + \text{(ii)} = \frac{1}{2V}\Big[(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A)\mathbf{S}_A + (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_C)\mathbf{S}_C\Big] =$$

$$= \frac{1}{2V}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C)\mathbf{S}_A - \frac{1}{2V}(r_A^2 - r_C^2)\mathbf{S}_A =$$

$$= \frac{1}{2V}(r_A^2\mathbf{S}_A + r_C^2\mathbf{S}_C).$$

Отсюда получаем искомое выражение

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2V}\sum_a \mathbf{S}_a|\mathbf{r}|_a^2.$$

Приложение E

Установим явные формулы для вычисления тензоров $N_{ik,a}$. Рассмотрим ячейку $ABCD$, точки E, F, G, H — середины соответствующих сторон (см. рис.1—E)

Точка O выбрана таким образом, что $V_{AEOH} = V_{BFOE} = V_{CGOF} = V_{DHOG} = \frac{1}{4}V_{ABCD}$. Определим ее положение. По построению $EH = FG = \frac{1}{2}BD$. Поэтому равенство $V_{AEOH} = V_{CGOF}$ будет выполнено тогда и

только тогда, когда точка O лежит на прямой, параллельной диагонали BD и проходящей через середину диагонали AC. Аналогичное условие дает и равенство $V_{BFOE} = V_{DHOG}$. Кроме того очевидно, что при любом положении точки O выполнено $V_{AEOH} + V_{CGOF} = V_{BFOE} + V_{DHOG}$ (т.к. $V_{AEOH} = V_{AEOH}$ и т.д.). Таким образом точка O лежит на пересечении прямых, проходящих через середины диагоналей параллельно другой диагонали.

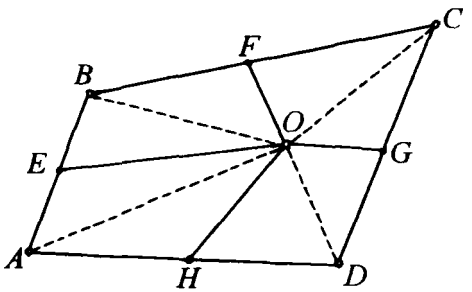


Рис.1–Е

Рассмотрим теперь четырехугольник $AEOH$. Пусть $k_{i,AE}$, $k_{i,EO}$, $k_{i,OH}$, $k_{i,HA}$ — векторы, направленные вдоль соответствующих сторон, как это показано на рис.2—Е; $S_{k,AE}$, $S_{k,EO}$, $S_{k,HO}$, $S_{k,HA}$ — ориентированные наружу длины соответствующих сторон $AEOH$. Тогда

$$N_{ik} = k_{i,AE}S_{k,AE} + k_{i,EO}S_{k,EO} + k_{i,OH}S_{k,OH} + k_{i,HA}S_{k,HA},$$

индекс a опущен.

В дальнейшем нам потребуются следующие легко проверяемые утверждения: пусть ε_{ij} — антисимметричный тензор ($\varepsilon_{12} = 1$), тогда

1) вектор $\varepsilon_{ij}a_j$ получается из вектора a_i поворотом на угол $\pi/2$ по часовой стрелке,

2) $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kq} = \delta_{ik}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{ij}$.

Обозначим $k_{i,HA} + k_{i,AE} = l_i$, $S_{k,HA} + S_{k,AE} = S_k$, тогда

$$k_{i,HA}S_{k,HA} + k_{i,AE}S_{k,AE} =$$

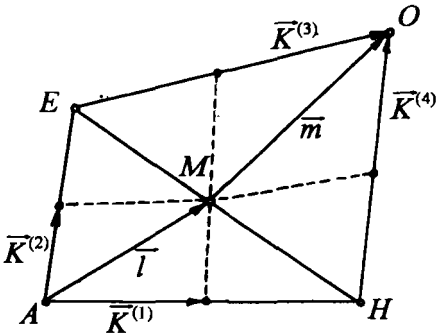


Рис.2–Е

$$\frac{1}{2}\Big[l_i S_k + (k_{i,HA} - k_{i,AE})(S_{k,HA} - S_{k,AE})\Big].$$

Из геометрических соображений ясно

$$k_{i,HA} - k_{i,AE} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ij} S_j,$$

$$S_{k,HA} - S_{k,AE} = 2\varepsilon_{kq} k_{q,HA} + 2\varepsilon_{kq} k_{q,AE} = 2\varepsilon_{kq} l_q,$$

$$(k_{i,HA} - k_{i,AE})(S_{k,HA} - S_{k,AE}) = -\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kq} S_j l_q =$$

$$= l_i S_k - (\mathbf{l}, \mathbf{S})\delta_{ik},$$

так что

$$k_{i,HA} S_{k,HA} + k_{i,AE} S_{k,AE} = l_i S_k - \frac{1}{2}(\mathbf{l}, \mathbf{S})\delta_{ik}.$$

Аналогично

$$k_{i,EO} S_{k,EO} + k_{i,OH} S_{k,OH} = m_i S_k - \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \mathbf{S})\delta_{ik},$$

$$m_i = k_{i,EO} + k_{i,OH}.$$

Окончательно

$$N_{ik} = n_i S_k - \frac{1}{2}(\mathbf{n}, \mathbf{S})\delta_{ik}, \qquad n_i = l_i - m_i.$$

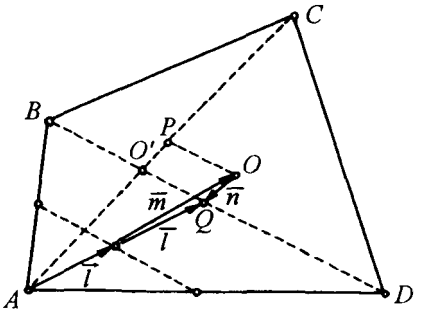


Рис.3–E

Вектор $\mathbf{n}$ соединяет точки O и Q — серидину диагонали BD (см. рис.3—E). Очевидно $\mathbf{n} = \mathbf{r}(Q) - \mathbf{r}(O) = \mathbf{r}(O') - \mathbf{r}(P)$, где точка P — середина диагонали AC, O' — точка пересечения диагоналей.

Приложение F

Условия первого порядка аппроксимации интегралов вида $\int\limits_{\Omega} p_{ik} q_{ik} \mathrm{d}V$ связывают матричные элементы g_{ij}^{ab} и геометрические характеристики сетки равенством

$$g_{ij}^{ab} p_{ik} l_{k,a} q_{jq} l_{q,b} = V(2\mu p_{(ik)} q_{(ik)} + \lambda p_{ii} q_{jj}), \qquad (F.1)$$

которое должно быть выполнено при произвольных тензорах p_{ik}, q_{jq}. Получим условия на матричные элементы g_{ij}^{ab}, не содержащие тензоров p_{ik} и q_{jq}. Для этого заметим, что:

i) $p_{(ik)} q_{(ik)} = p_{ik} q_{(ik)}$, т.к. свертка антисимметричной части тензора p_{ik} с симметричным тензором $q_{(ik)}$ равна нулю;

ii) $p_{ii} = p_{ik} \delta_{ik}$.

Соотношение $(F.1)$ принимает вид

$$g_{ij}^{ab} p_{ik} l_{k,a} q_{jq} l_{q,b} = V(2\mu q_{(ik)} + \frac{\lambda}{2} \delta_{ik} q_{jj}) p_{ik},$$

и в силу произвольности p_{ik}

$$g_{ij}^{ab} l_{k,a} q_{jq} l_{q,b} = V(2\mu q_{(ik)} + \frac{\lambda}{2} \delta_{ik} q_{jj}). \qquad (F.2)$$

Воспользуемся теперь тождествами:
i) $q_{(ik)} = \frac{1}{2}(q_{ik} + q_{ki}) = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{kq} + \delta_{iq}\delta_{kj})q_{jq}$;
ii) $q_{jj} = \delta_{jq}q_{jq}$;
и перепишем (F.2) в виде

$$g_{ij}^{ab} l_{k,a} q_{jq} l_{q,b} = V(\mu\delta_{ij}\delta_{kq} + \mu\delta_{iq}\delta_{kj} + \lambda\delta_{ik}\delta_{jq})q_{jq},$$

откуда, в силу произвольности q_{jq}, окончательно получаем

$$g_{ij}^{ab} l_{k,a} l_{q,b} = V(\mu\delta_{ij}\delta_{kq} + \mu\delta_{iq}\delta_{kj} + \lambda\delta_{ik}\delta_{jq}) = V\Lambda_{ikjq}.$$

Приложение G

Это приложение носит справочный характер. В нем приведены некоторые сведения о соболевских пространствах и эллиптических уравнениях, используемые в основном тексте при обосновании разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона.

Функция $u(x_1, x_2)$ принадлежит пространству Соболева $H^k(\mathcal{O})$ (k — целое число), если она сама и все ее обобщенные производные до порядка k квадратично интегрируемы в $\mathcal{O}$. Норма в пространстве $H^k(\mathcal{O})$ задается формулой

$$||u||_{k,\mathcal{O}} = \left[\sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathcal{O}} |D^\alpha u|^2 \mathrm{d}V\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\alpha = (m, n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = m + n$.

Используется также полунорма

$$|u|_{k,\mathcal{O}} = \left[\sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathcal{O}} |D^\alpha u|^2 \mathrm{d}V\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Замыкание по норме $||u||_{k,\mathcal{O}}$ множества бесконечно дифференцируемых финитных функций образует в $H^k(\mathcal{O})$

подпространство, обозначаемое $\overset{\circ}{H}{}^k(\mathcal{O})$. Его элементы обладают тем свойством, что будучи продолжены нулем вне области $\mathcal{O}$ они принадлежат $H^k(\mathcal{O}_1)$, $\forall \mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}$.

Согласно теореме Кальдерона [20] функции из $H^k(\mathcal{O})$ можно продолжить на всю плоскость R таким образом, что для продолженной функции $C_1 u$ справедливо неравенство

$$||C_1 u||_{k,\mathrm{R}} = B_1 ||u||_{k,\mathcal{O}}.$$

Более того, продолжение можно осуществить таким образом [36], что

$$|C_2 u|_{k,\mathrm{R}} = B_2 |u|_{k,\mathcal{O}}.$$

где константы B_1, B_2 не зависят от u.

Для соболевских пространств имеют место следующие вложения [20]. Пусть $\mathcal{O}$ — ограниченная область в R с непрерывной по Липшицу границей и пусть $\mathcal{C}$ — гладкая кривая в $\mathcal{O}$. Тогда:

1. $H^1(\mathcal{O})$ вкладывается в $L^1(\mathcal{C})$,
2. $H^2(\mathcal{O})$ вкладывается в $C(\bar{\mathcal{O}})$.

Это означает, что:

1. для любой функции $u \in H^1(\mathcal{O})$ имеет смысл интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{C}} u \mathrm{d}s \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathcal{C}} |u| \mathrm{d}s \leq M_1 ||u||_{1,\mathcal{O}};$$

2. для любой функции $u \in H^2(\mathcal{O})$ имеет смысл значение функции в точке $x \in \bar{\mathcal{O}}$ и $|u(x)| \leq M_2 ||u||_{2,\mathcal{O}}$;

где константы M_1, M_2 не зависят от u.

При исследовании вопросов аппроксимации в пространствах обобщенных функций $H^{k+1}(\mathcal{M})$ разложение в ряд Тейлора заменяется оценками функционалов, обращающихся в нуль на подпространствах $P_k(\mathcal{M})$ полиномов степени $\leq k$. В этом случае функции u_1 и u_2, такие что

$u_1 - u_2 \in P_k$ считаются эквивалентными и соответствующие классы эквивалентности образуют фактор-пространство H^{k+1}/P_k с нормой

$$||\hat{u}||_{k+1,\mathcal{M}} = \inf_{p \in P_k} ||u + p||_{k+1,\mathcal{M}}.$$

где $\hat{u} \in H^{k+1}/P_k$ — класс эквивалентности функции $u \in$ $\in H^{k+1}$.

Оказывается [20], что

$$\inf_{p \in P_k} ||u + p||_{k+1,\mathcal{M}} \leq M|u|_{k+1,\mathcal{M}}.$$

Из этого утверждения очевидным образом следует и лемма Брембла–Гильберта.

Обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f \text{ при } x \in \mathcal{O}, \quad u\big|_{\partial\mathcal{O}} = \mu$$

называется функция $u(x) \in H^1(\mathcal{O})$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\mathcal{O}} (\operatorname{grad}\eta, \operatorname{grad} u)\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{O}} f\eta \mathrm{d}V$$

при любой $\eta(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\mathcal{O})$ и такая, что $u - \mu \in \overset{\circ}{H}{}^1(\mathcal{O})$.

Обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f \text{ при } x \in \mathcal{O}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\mathcal{O}} = \mu$$

называется функция $u(x) \in H^1(\mathcal{O})$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\mathcal{O}} (\operatorname{grad}\eta, \operatorname{grad} u)\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{O}} f\eta \mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{O}} \mu\eta \mathrm{d}s$$

при любой $\eta(x) \in H^1(\mathcal{O})$.

В ряде случаев решение обладает дополнительной гладкостью, а именно $u(x) \in H^2(\mathcal{O})$. Это имеет место (для первой краевой задачи), если $f(x) \in L^2(\mathcal{O})$, $\mu(x) \in H^2(\mathcal{O})$ а область $\mathcal{O}$ есть окружность, кольцо, прямоугольник или может быть преобразована в одну из этих областей с помощью регулярного преобразования $y = y(x) \in C(\bar{\mathcal{O}})$ [19].

Литература

1. Самарский А. А. О математическом моделировании и вычислительном эксперименте в физике // Вестник АН СССР, 1979, №5, с.38—49.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. — Москва: Наука, 1983.
3. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнеиий. — Москва: Наука, 1976.
4. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — Москва: Наука, 1980.
5. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. — Москва: Наука, 1987.
6. Оганесян Л. А., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. — Ереван: изд. АН Арм.ССР, 1979.
7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. — Москва: Мир, 1980.
8. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — Москва: Мир, 1980.
9. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. — Москва: Наука, 1973.
10. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — Москва: Наука, 1977.
11. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванова М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. В. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — Москва: Наука, 1976.
12. Бахвалов Н. С. Численные методы. — Москва: Наука, 1973.
13. Калиткин Н. Н. Численные методы. — Москва: Наука, 1978.
14. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — Москва: Мир, 1972.
15. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. — Москва: Мир, 1990.
16. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. — Москва: Мир, 1991.
17. Heinrich B. Finite Difference Methods on Irregular Networks. Math. Forsch., Bd. 33, Akademie-Verlag, Berlin, 1987.

18. Олейник О. А., Иосифьяи Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — Москва: Изд.МГУ, 1990.
19. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — Москва: Наука, 1973.
20. Фадеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н. Некоторые главы анализа и высшей алгебры. Ленинград: изд. ЛГУ, 1981.
21. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. — Москва: Высшая школа, 1982.
22. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления — Москва: Наука, 1984.
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика — Москва: Наука, 1986.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — Москва: Наука, 1987.
25. Карпов В. Я., Корягин Д. А., Самарский А. А. Приицпы разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики // ЖВМ и МФ, 1978, т.18, №2, с.458—467.
26. Горбунов-Посадов М. М., Корягин Д. А., Мартынюк В. В. Системное обеспечение пакетов прикладных программ. Москва: Наука, 1990.
27. Лэнгсам Й., Огенстайн М., Тененбаум А. Структуры данных для персоиальных ЭВМ. Москва: Мир, 1989.
28. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. Москва: Наука, 1990.
29. Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. ТЕКОН. Пакет программ для решения тепловых задач. — Препринт ИПМ АН СССР, 1978, №65.
30. Дремов О. А., Повещенко Ю. А. База данных ТЕКОН. — Препринт ИПМ РАН, 1994, №78.
31. Дремов О. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Чублукова Ю. Н. Введение в систему ТЕКОН. — Препринт ИПМ АН СССР, 1991, №23.
32. Дремов О. А., Кальянова Н. Л., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов С. Б., Чублукова Ю. Н. Система ТЕКОН. О типах данных пространственной сетки. — Препринт ИПМ РАН, 1992, №12.
33. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // ЖВМ и МФ, 1961, т.1, №1, с.425—440.
34. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы на неоднородных сетках // ЖВМ и МФ, 1962, т.2, №5, с.812—832.

35. Самарский А. А., Попов Ю. П. Полностью консервативные разиостные схемы // ЖВМ и МФ, 1969, т.9, №4, с.953—958.
36. Strang G. Approximation in the Finite Element Method. Num. Math., 19 (1972), heft 1, p.81—98.
37. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Разностные аналоги основных дифференциальных операторов первого порядка. — Препринт ИПМ АН СССР, 1981, №8.
38. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы. — Препринт ИПМ АН СССР, 1981, №9.
39. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы // Дифф.уравнения, 1981, т.17, №7, с.1317—1321.
40. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме // ДАН СССР, 1981, т.258, №5, с.1092—1096.
41. Коршия Т. К., Тишкин В. Ф., Самарский А. А., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Вариационно-операторные разностные схемы для уравнений математической физики. — Тбилиси: изд ТГУ, 1983.
42. Годунов С. К., Прокопов Г. П. О решении дифференциальных уравнений с использованием криволинейных разностных сеток // ЖВМ и МФ, 1968, т.8, №1, с.26—46.
43. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогоиальных сетках // ЖВМ и МФ, 1982, т.22, №2, с.339—348.
44. Шашков М. Ю. Построение и исследование разностного аналога оператора Лапласа на непрямоугольной сетке. — Препринт ИПМ АН СССР, 1977, №47.
45. Фрязинов И. В. Метод баланса и вариационно-разностные схемы переменных направлений на нерегулярных сетках. — Препринт ИПМ АН СССР, 1979, №53.
46. Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Аппроксимация потоковых схем для уравнения теплопроводности на нерегулярных криволинейных сетках. — Препринт ИПМ АН СССР, 1981, №93.
47. Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. Часть 1 //

ЖВМ и МФ, 1964, т.4, №3, с.449—465; Часть 2 // ЖВМ и МФ, 1964, т.4, №4, с.649—659.

48. Забродин А.В., Пекарчук С.Б. Об одном методе численного решения нелинейного уравнения теплопроводности на параллело граммной сетке точек // ВАНТ, 1982, вып.2, с.14—22.
49. Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Интерполяционные схемы для численного решения уравнения теплопроводности. — Препринт ИПМ АН СССР, 1988, №80.
50. Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Разностные схемы для уравнения теплопроводности на основе локальных среднеквадратичных приближений. — Препринт ИПМ АН СССР, 1979, №53.
51. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. // Дифф.уравнения, 1982, т.19, №7, с.1235—1245.
52. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об аппроксимации процессов переноса на неортогональных сетках. — Препринт ИПМ АН СССР, 1984, №66.
53. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Об аппроксимации вариационно-разностных уравнений гидродинамики. — Препринт ИПМ АН СССР №34, 1977.
54. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П., Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике. // Докл. АН СССР, 1977, т.235, №6, с. 1285—1288.
55. Фаворский А.П. Вариационно-дискретные модели уравнений гидродинамики. // Дифф.уравнения, 1980, т. XXVI, №7, с.1317—1727.
56. Арделян Н.В. О сеточных аналогах основных дифференциальных операторов на нерегулярной треугольной сетке // Разностные методы математической физики. — Москва, Изд.МГУ, 1981, с.49—58.
57. Арделян Н.В., Гущин И.С. Об одном подходе к построению полностью консервативных разностных схем // Вестник МГУ, сер.15. Вычислительная математика и кибернетика. — 1982, №3, с.3—10.
58. Мажорова О.С., Попов Ю.П. О полностью консервативных схемах для двумерных уравнений газовой динамики // Дифф.уравнения, 1979, т.15, №7, с.1318—1331.
59. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. О сходимости разностных схем метода

опорных операторов для уравнения Пуассона. — Препринт ИПМ АН СССР, 1987, №85.

60. Колдоба А. В., Кузнецов О. А., Повещенко Ю. А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона. — Препринт ИПМ АН СССР, 1989, №125.
61. Денисов А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях. — Препринт ИПМ АН СССР, 1988, №46.
62. Денисов А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях // ЖВМ и МФ, 1989, т.29, №3, с.371—381.
63. Денисов А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях // ЖВМ и МФ, 1990, т.30, №3, с.371—381.
64. Дремов О. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. Исследование разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на нерегулярных сетках. — Препринт ИПМ АН СССР, 1989, №114.
65. Дремов О. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. Разностные аналоги некоторых теорем вложения на нерегулярных сетках. — Препринт ИПМ АН СССР, 1990, №77.
66. Дремов О. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. Сходимость разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона в L-нормах. — Препринт ИПМ АН СССР, 1991, №17.
67. Дремов О. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. Исследование разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на нерегулярных сетках // ЖВМ и МФ, 1992, т.29, №3, с.1433—1446.
68. Коробицин В. А. Метод базисных операторов построения операторных разностных схем // Математическое моделирование. 1990, т.2, №5, с.131—148.
69. Коробицин В. А. Метод базисных операторов построения разностных схем в неортогональных системах координат на плоскости // Математическое моделирование. 1991, т.3, №10, с.31—41.
70. Арделян Н.В. Сходимость разностных схем для двумерных уравнений акустики и Максвелла // ЖВМ и МФ, 1983, т. XXXII, №5, с.1168—1176.

71. Арделян Н. В., Черниговский С. В. К теории устойчивости разностных схем газовой динамики в линейном приближении. — Препринт, Кишинев, 1985.
72. Головизнин В. М., Волкова Р. А. Двумерные вариационно-разностные схемы газовой динамики с мультиплетным числом термодинамических степеней свободы. Препринт ИПМ АН СССР,1982, №64.
73. Исаев В. Н., Софронов И. Д. Конструирование дискретных моделей уравнений газовой динамики на основе законов взаимного превращения кинетической и внутренней энергий сплошной среды // ВАНТ, 1984, вып.1.
74. Делов В. И., Исаев В. Н., Софронов И. Д. Консервативные и инвариантные дифференциально-разностные представления уравнений газовой динамики в осесимметричном случае // ВАНТ, 1987, вып.1
75. Попов Ю. П., Колдоба А. В., Кузнецов О. А., Повещенко Ю. А. и др. Исследование аппроксимации разностных схем для уравнений акустики на произвольных сетках // Отчет ИПМ АН СССР №328—87.
76. Колдоба А. В., Кузнецов О. А., Повещенко Ю. А. Исследование аппроксимации разностных схем для уравнений акустики на произвольных сетках. — Препринт ИПМ АН СССР, 1990, №119.
77. Михайлова Н. В., Тишкин В. Ф., Тюрина Н. Н., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Численное моделирование двумерных газодинамических течений на сетке переменной структуры // ЖВМ и МФ, 1986, т.26, №9, с.1392—1406.
78. Соловьев А. В., Соловьева Е. В., Тишкин В. Ф., Тюрина Н. Н., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Исследование аппроксимации разностных операторов на сетке из ячеек Дирихле // Дифф.уравнения, 1986, т.22, №7, с.1227-1237.
79. Анучина Н. Н., Бабенко К. И., Годунов С. К. и др. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. - М: Наука, 1979.
80. Глаголева Ю. П., Жогов Б. М., Кирьянов Ю. Ф. и др. Основы методики «Медуза» // ЧММСС, 1972, т.3, №2, с.18—55.
81. Соловьев А. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. О геометрических свойствах областей соответствия в «свободно-лагранжевых» методах. — Препринт ИПМ АН СССР, 1988, №144.

82. Соловьев А. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Об Аппроксимации уравнения неразрывности в методе «частиц Дирихле» — Препринт ИПМ АН СССР, 1988, №124.
83. Соловьев А. В., Шашков М. Ю. Об одном методе расчета свободной границы в методе «частиц Дирихле» — Препринт ИПМ АН СССР, 1990, №23.
84. Колдоба А. В., Кузнецов О. А., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. К расчету самогравитирующих и магнитогидродинамических процессов в смешанных эйлеро-лагранжевых переменных. — Препринт ИПМ АН СССР, 1986, №29.
85. Колдоба А. В., Кузнецов О. А., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений механики сплошной среды в квазилагранжевых переменных при наличии гравитационных и магнитогидродинамических процессов. — Препринт ИПМ АН СССР, 1985, №55.

А.А.Самарский, А.В.Колдоба,
Ю.А.Повещенко, В.Ф.Тишкин,
А.П.Фаворский

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ

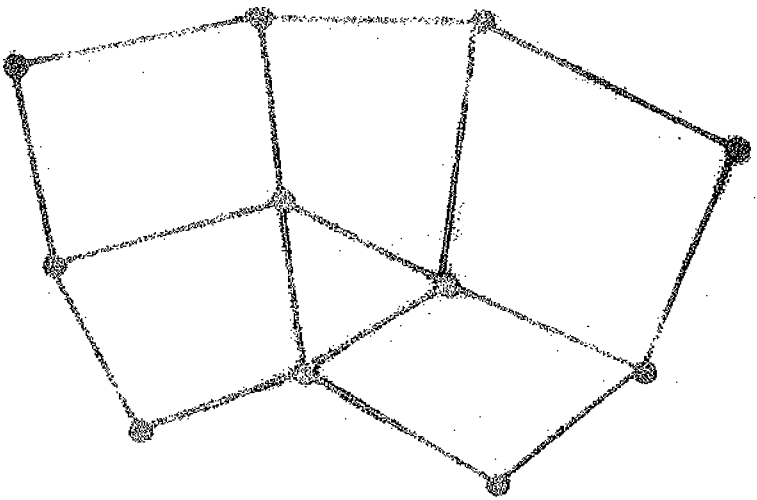
Ответственная за выпуск Никифорова Е.Д.
Технический редактор Ананич С.Э.

Подписано в печать 24.4.96г. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Гарнитура Типа Таймс.
Печать офсетная.
Усл.печ.л.17,25 Тираж 500 экз. Заказ 1910
Издатель ЗАО "Критерий". Лицензия ЛВ N1190.
220027, г.Минск, пр.Ф.Скорины, 67/2

Компьютерный набор и верстка ЗАО "Критерий"

Полиграфические услуги выполнены Речицкой
укрупненной типографией. 247500,г.Речица,
ул.Урицкого, 19а.

А.А. Самарский, В.А. Колдоба,
Ю.А. Повещенко, В.Ф. Тишкин,
А.П. Фаворский



РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ