МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методы описания и исследования сложных систем

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОТДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАТИКИ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методы описания и исследования сложных систем

Ответственные редакторы:
академик А. А. САМАРСКИЙ,
академик Н. Н. МОИСЕЕВ,
доктор физико-математических наук
А. А. ПЕТРОВ

МОСКВА «НАУКА» 1989

УДК 519.86

Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем.— М.: Наука, 1989.— 271 с.— ISBN 5-02-000744-7

В сборнике представлена современная проблематика математического моделирования и анализа сложных физических, экологических и экономических систем. Приведены новые результаты качественного анализа диссипативных структур, результаты вычислительных экспериментов с моделями сложных физических систем, рассмотрены методические и математические аспекты имитационных экспериментов с моделями экологических систем. Обсуждаются вопросы моделирования экономических систем, приведены результаты исследования новых моделей рыночной экономики и централизованной плановой экономики.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся математическим моделированием с применением ЭВМ в разных областях приложений, а также для аспирантов, специализирующихся в прикладной математике и информатике.

Рецензенты:

Ю. Н. ПАВЛОВСКИЙ, В. В. ФЕДОРОВ

Mathematical modelling: Methods of description and investigation of complex systems / Ed. A. A. Samarsky, N. N. Moiseev, A. A. Petrov.— Moscow: Nauka, 1989.— 271 p.— ISBN 5-02-000744-7

The book presents modern problems of mathematical modelling and analysis of complex physical, ecological and economic systems. New mathematical method of investigation of dissipative structures is delivered. The results of computer experiment of physical systems model are exposed, the mathematical and methodological aspects of ecological systems simulation are discussed. Some problems of economic systems description and the results of investigation of the new market and central-planned economy models are discussed.

The book is adressed to specialists working at mathematical and computer modelling in different fields, as well as to postgraduates in applied mathematics and informatics.

М $\frac{1402020000-418}{042(02)-89}$ 87-89. Доп. тем. план

ISBN 5-02-000744-7 © Вычислительный центр АН СССР, 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник статей посвящен математическим моделям сложных физических, экологических и экономических систем. В физике, экологии, экономике математические методы описания и анализа имеют разную историю, традиции, разный уровень развития. Однако везде математическое моделирование применяется все шире и шире, соответственно изменяются взгляды на математические модели. Причина этого и в том, что совершенствуется вычислительная техника, и в том, что возникают новые общественные потребности.

В развитых странах сейчас происходит смена хозяйственного уклада. Создается новая информационная инфраструктура: интегрированные системы сбора, хранения, переработки и передачи информации, включающие в себя сети ЭВМ. Возникла новая отрасль хозяйства, выпускающая средства переработки информации. Наукоемкость электронных технологий обработки данных исключительно высока и продолжает расти. Ведь эти технологии предназначены для проектирования сложных систем и управления сложными системами. Все это дает большую выгоду. Опыт развитых стран свидетельствует: в результате существенно повышается производительность и эффективность экономических систем, качественно изменяются социальные условия.

Наукоемкость новых информационных технологий определяется триадой модель—алгоритм—программа. Поскольку в ЭВМ информация представлена в формализованном виде, модель должна быть формализованной. Если новые информационные технологии становятся фундаментом научного, технического и социального прогресса, то модель ложится в фундамент краеугольным камнем. Поэтому во всем мире растет спрос на формализованные модели в самых разных областях приложений. Методы моделирования распространяются в области, прежде далекие от приложений математики. Отсутствие культуры, традиций, опыта математического описания взаимосвязей и взаимодействий здесь на первых порах восполняется применением ЭВМ для обработки больших массивов цифровой и символьной информации. Для этого создают так называемые «мягкие» или «компьютерные» модели — формализованное представление в ЭВМ практических приемов, опыта деятельности, достижений науки в соответствующих областях. Для идентификации формальных соотношений используется накопленная информация о множестве прецедентов. Компьютерные модели применяют в режиме диалога со специалистом, чтобы диагностировать состояние системы (или процесса), прогнозировать развитие и формировать разумные управляющие воздействия. Конечно, все это позволяет и лучше осмыслить имеющийся опыт, и более эффективно его использовать. Однако эти

возможности исчерпываются, и рано или поздно возникает вековая проблема создания методов математического описания и анализа новых классов явлений и объектов.

С помощью моделей теория приводит в систему хаотический поток эмпирического опыта. Чтобы использовать теоретические методы, надо иметь основополагающие принципы, из которых можно выводить содержательные следствия. Нужны и правила вывода следствий. Опыт физики показывает, что теория совершенствуется по мере того, как в ней остается меньше основных понятий и принципов, они становятся проще, но тем не менее следствия из них охватывают все существенное множество опытов. Эйнштейн писал: «Какое место занимает картина мира физиков-теоретиков среди всех возможных картин мира? Благодаря использованию языка математики, эта картина удовлетворяет наиболее высоким требованиям в отношении строгости и точности выражения взаимозависимостей. Но зато физик вынужден сильнее ограничивать свой предмет, довольствуясь изображением наиболее простых, доступных нашему опыту явлений, тогда как все сложные явления не могут быть воссозданы человеческим умом с той же точностью и последовательностью, которые необходимы физику-теоретику. Высокая аккуратность, ясность и уверенность — за счет полноты. Но какую прелесть может иметь охват такого небольшого среза природы, если наиболее тонкое и сложное малодушно и боязливо оставляется в стороне? Заслуживает ли результат такого скромного занятия гордое название «картины мира»?

Я думаю — да, ибо общие положения, лежащие в основе мысленных построений теоретической физики, претендуют быть действительными для всех происходящих в природе событий. Путем чисто логической дедукции из них можно было бы вывести картину, т. е. теорию всех явлений природы, включая жизнь, если бы этот процесс дедукции не выходил бы далеко за пределы творческой возможности человеческого мышления. Следовательно, отказ от полноты физической картины мира не является принципиальным.

Отсюда вытекает, что высшим долгом физиков является поиск тех общих элементарных законов, из которых путем чистой дедукции можно получить картину мира. К этим законам ведет не логический путь, а только основанная на проникновении в суть опыта интуиция» [1]. Эйнштейн настойчиво подчеркивал, что фундаментальные принципы нельзя вывести индуктивным способом непосредственно из опыта, что они возникают свободно в результате абстрагирования от эмпирического опыта. Собственно творческое начало здесь принадлежит математике, хотя опыт остается единственным критерием пригодности теории.

По-видимому, развитие вычислительной техники несильно облегчит мучительный процесс рождения новых основополагаю-

---

[1] *Эйнштейн А.* Физика и реальность. М.: Наука, 1965. С. 9.

щих принципов, хотя и определенно расширит творческие возможности человеческого мышления. Численные методы анализа уже открыли новые возможности дедуктивного вывода следствий из фундаментальных принципов, что существенно расширило физическую картину мира. Но это еще не все. Совершенствование численных методов и ЭВМ привело к новой методологии исследований — вычислительному эксперименту с математическими моделями. Тем самым эмпирический опыт дополняется опытом мысленных экспериментов. Современные персональные вычислительные системы позволяют проводить такие эксперименты быстро и эффективно использовать их результаты. Можно надеяться, что это поможет отыскивать общие принципы, отражающие всю совокупность множеств экспериментальных данных.

В статьях, включенных в настоящий сборник, отражается во всей широте проблематика математического моделирования. Раздел 1 содержит модели физических систем. В статье А. А. Белолипецкого, Н. Р. Строгиной, А. М. Тер-Крикорова изложены тонкие аналитические методы исследования известной нелинейной модели, описываемой уравнениями реакции—диффузии. Изучены общие качественные свойства модели и с единой точки зрения объяснено возникновение диссипативных структур, в том числе колебательных. В статье Ю. А. Белова и др. предложена сложная модель взаимодействия импульса радиации с твердым телом. Вычислительные эксперименты с моделью позволили детально изучить процессы механического разрушения материала под действием импульсной радиации.

В разделе 2 представлены две статьи, посвященные моделированию экологических систем. В статье Г. Л. Стенчикова и Д. С. Степанова изучается модель общей циркуляции атмосферы и верхнего слоя океана. Вычислительные эксперименты с такими моделями сложны из-за разнообразия протекающих в системе процессов. Используя естественную иерархию характерных временных масштабов в модели, удалось упростить модель так, что повысилась эффективность вычислительных экспериментов. В статье А. А. Воинова обсуждается структура имитационных моделей экосистем озер, прудов и водохранилищ.

Раздел 3 посвящен моделированию экономических систем и дает представление о состоянии оригинального направления исследований, которое развивается в Вычислительном центре АН СССР [2]. В статье А. А. Петрова и А. А. Шананина в широком контексте обсуждается проблема агрегирования описаний экономических систем. Это один из фундаментальных вопросов математической экономики, потому что развитие строгой теории агрегирования не только даст возможность однозначно интерпретировать макросоотношения, но и позволит установить границы применимости макромоделей. В статье И. Г. Поспелова рассмот-

[2] См. также: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах / Под ред. А. А. Самарского, Н. Н. Моисеева, А. А. Петрова. М.: Наука, 1986. С. 7—197.

рено микроописание рыночных обменов многих участников. Изучено парето-оптимальное коллективное поведение торговцев, обнаружено, что устойчивость его тесно связана с возможностью строить оптимальное индивидуальное поведение по ограниченной информации о состоянии других участников. Исследована возможность агрегирования исходного микроописания. В статье Н. Н. Оленева и И. Г. Поспелова приведены результаты исследования замкнутой многосекторной модели рыночной экономики. Она построена агрегированием оригинального микроописания долгосрочного планирования промышленных фирм. На модели исследованы циклы деловой активности.

В статье А. А. Крутова, А. А. Петрова, И. Г. Поспелова описана модель предельно централизованной плановой экономики, отражающая некоторые характерные особенности производственных отношений в нашей экономике последних десятилетий. Численные эксперименты с моделью показали, что удалось отразить качественные особенности экономического развития нашей экономики в последние десятилетия. В статье А. В. Тимохова рассмотрена модель экономики, состоящей из хозрасчетных единиц [3]. Исследование модели показало, что если правильно назначить нормативы платы за фонды и налоги на прибыль, то будет возможен стабильный экономический рост.

Математические методы системного анализа социалистической экономики еще только начинают развиваться и ни ту, ни другую модель нельзя считать вполне удовлетворительной. Тем не менее достоинство их в том, что они построены на ясных гипотезах и дают замкнутое описание и материальной, и финансовой системы общественного воспроизводства. Поэтому они позволяют оценить совокупность отдаленных последствий различных управленческих решений. Такого рода модели уже можно было бы использовать при обсуждении предложений по совершенствованию хозяйственного механизма наряду с традиционными методами политической экономии.

Мы надеемся, что предлагаемый сборник будет интересен и полезен научным работникам и аспирантам, специализирующимся в области математического моделирования с применением ЭВМ, а также всем, кто интересуется современными математическими методами системного анализа.

Редакторы выражают глубокую благодарность Н. К. Буровой, много сделавшей для подготовки сборника.

Н. Н. Моисеев, А. А. Петров

---

[3] А. В. Тимохов — доцент кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ. Идейно его статья примыкает к направлению исследований, которое развивается в ВЦ АН СССР.

I. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 519.926.4

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭВОЛЮЦИИ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ

А. А. Белолипецкий, Н. Р. Строгина, А. М. Тер-Крикоров

Явления самоорганизации в однородных нелинейных средах стали объектом пристального исследования после основополагающей статьи А. Тьюринга [1] и цикла работ брюссельской школы И. Пригожина. Основной вопрос теории самоорганизации состоит в следующем: при каких условиях в открытых однородных физических системах появляются упорядоченные, или диссипативные, структуры (ДС) и каков механизм их возникновения? Один из ответов на этот вопрос дает теория бифуркаций. Если параметры системы близки к критическим, то у последней могут появиться новые устойчивые состояния равновесия, неоднородные как по пространственным переменным, так и по времени.

В настоящей статье с помощью методов малого параметра аналитически исследуются полулинейные уравнения параболического типа с коэффициентами, зависящими от параметров. В первой части работы изучается поведение решений задачи Коши абстрактного нелинейного параболического уравнения. Основной результат состоит в следующем. Если значения параметров близки к бифуркационным, то характер поведения решений абстрактного уравнения определяется фазовым портретом системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), представляющих собой уравнения разветвления. Это продолжение серии работ [2—5] данного направления. В отличие от [2—4] здесь рассмотрена бифуркация более общего типа и доказан более общий результат об асимптотике решений задачи Коши, чем опубликованный в [5]. Нетривиальные стационарные состояния, являющиеся аттракторами траекторий уравнения (1.1), в приложениях можно трактовать как ДС.

Во второй части аналитически получен новый класс близких к периодическим неоднородных по пространству решений для уравнения Курамото—Цузуки.

© А. А. Белолипецкий, Н. Р. Строгина, А. М. Тер-Крикоров, 1989

1. Бифуркации решений абстрактного нелинейного параболического уравнения

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$du/dt + Bu = \lambda u + F(u), \quad t \in [0, \infty). \tag{1.1}$$

Здесь $u(t)$ — функция $R \to \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — банахово пространство, B — замкнутый оператор $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $F(u)$ — нелинейный аналитический при $u = 0$ оператор $E \to E$. Банахово пространство E непрерывно вложено в $\mathcal{B}$, содержится в области определения $\mathrm{D}(B)$ оператора B, причем $\overline{\mathrm{D}(B)} = \mathcal{B}$. Параметр λ — скаляр.

Обозначим $A(\lambda) = B - \lambda I$. Значение λ_0 назовем бифуркационным, если $A(\lambda_0)u = 0$ имеет нетривиальные решения.

Предположение I. Оператор $A(\lambda_0)$ фредгольмов и $\dim \operatorname{Ker} A(\lambda_0) = 2$. Обозначим базисы ядер $A(\lambda_0)$ и $A^*(\lambda_0)$ u_1, u_2 и u_1^*, u_2^* соответственно, причем $\langle u_i^*, u_j\rangle = \delta_{ij}$.

В этом случае пространство E разложимо в прямую сумму $E = E^2 \oplus E^{\infty-2}$. Проекторами на E^2 и $E^{\infty-2}$ являются

$$Pu = \langle u_1^*, u\rangle u_1 + \langle u_2^*, u\rangle u_2, \quad Qu = u - Pu \tag{1.2}$$

соответственно.

Если A_0 — сужение A на $E^{\infty-2}$, то по теореме Банаха A_0^{-1} непрерывен, как $E^{\infty-2} \to E^{\infty-2}$.

Предположение II. Оператор A_0 является генератором непрерывной и непрерывно дифференцируемой полугруппы T_t $(t \geqslant 0)$ в $\mathcal{B}^{\infty-2}$, T_t непрерывна при $t \geqslant 0$ и непрерывно дифференцируема при $t > 0$ в $E^{\infty-2}$, причем

$$\| T_t u \|_E \leqslant M e^{-\beta t} \| u \|_E, \quad t \geqslant 0 \quad \forall u \in E. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.1) с помощью замены $|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$, $\varkappa = \operatorname{sign}(\lambda - \lambda_0)$, $\tau = \varepsilon t$, $u(\lambda, t) = z(\varepsilon, \tau)$ переходит в

$$\varepsilon\, dz/d\tau + A(\lambda_0 + \varepsilon\varkappa) z = \varepsilon\varkappa z + F(z). \tag{1.4}$$

Если $f(t) \mid R \to E^{\infty-2}$, $f \in C^1$, то уравнение

$$dz/dt + A_0 z = f(t), \quad z(0) = z_0, \tag{1.5}$$

эквивалентно

$$z(t) = T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} f(s)\, ds. \tag{1.6}$$

Предположение III. Пусть $P^{(i)}u = \langle u_i^*, u\rangle = \delta^{(i)}$, $i = 1, 2$. Если $u_1, u_2 \in E$, $v \in E^{\infty-2}$, то

$$F\Big(\sum_{i=1}^{2} \delta^{(i)} u_i + v\Big) \equiv \sum_{i_1+i_2+j=2}^{\infty} F_{i_1 i_2 j} [\delta^{(1)}]^{i_1} [\delta^{(2)}]^{i_2} v^j. \tag{1.7}$$

Причем ряд (1.7) сходится в E, если $|\delta^{(i)}|$ $(i = 1, 2)$, $\|v\|_E \leqslant r$, $r > 0$.

1.2. Стационарные решения вблизи точки бифуркации

Стационарные решения (1.4), т. е. решения системы

$$Az = \varepsilon\varkappa z + F(z) \tag{1.8}$$

условимся искать в виде

$$z(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} \delta^{(i)}(\varepsilon) u_i + v(\varepsilon), \tag{1.9}$$

где $\delta^{(i)}(\varepsilon) = P^{(i)}z(\varepsilon)$ $(i = 1, 2)$, $v(\varepsilon) = Qz$. Применяя операторы $P^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ и Q, спроектируем (1.8) на E^2 и $E^{\infty-2}$:

$$0 = \varepsilon\varkappa\delta^{(i)} + P^{(i)}F\Big(\sum_{j=1}^{2} \delta^{(j)}u_j + v\Big), \quad i = 1, 2, \tag{1.10}$$

$$A_0 v = \varepsilon\varkappa v + QF\Big(\sum_{j=1}^{2} \delta^{(j)}u_j + v\Big). \tag{1.11}$$

Последнее соотношение в достаточно малой окрестности нуля (т. е. $v = 0$, $\delta^{(j)} = 0$ $(j = 1, 2)$, $\varepsilon = 0$) неявно единственным образом задает функцию $v(\delta, \varepsilon)$, представимую абсолютно и равномерно сходящимся рядом [6]:

$$v(\varepsilon, \delta) = \sum_{\substack{i_1+i_2\geqslant 2\\ j\geqslant 0}} v_{i_1 i_2 j}[\delta^{(1)}]^{i_1}[\delta^{(2)}]^{i_2}\varepsilon^j, \quad v_{i_1 i_2 j} \in E^{\infty-2}. \tag{1.12}$$

В силу этого обстоятельства и предположения III при достаточно малых ε и $\delta^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ можно записать, что

$$F\Big(\sum_{j=1}^{2} \delta^{(j)}u_j + v\Big) = \sum_{\substack{i_1+i_2\geqslant 2\\ j\geqslant 0}} g_{i_1 i_2 j}[\delta^{(1)}]^{i_1}[\delta^{(2)}]^{i_2}\varepsilon^j, \tag{1.13}$$

где $g_{i_1 i_2 j} \in E$ и мажорантный ряд для (1.13) сходится абсолютно и равномерно. Вследствие (1.13) система (1.10) примет вид

$$0 = \varepsilon\varkappa\delta^{(i)} + \sum_{\substack{i_1+i_2\geqslant 2\\ j\geqslant 0}} L^{(i)}_{i_1 i_2 j}[\delta^{(1)}]^{i_1}[\delta^{(2)}]^{i_2}\varepsilon^j, \quad i = 1, 2, \tag{1.14}$$

где

$$L^{(i)}_{i_1 i_2 j} = P^{(i)} g_{i_1 i_2 j}, \quad i = 1, 2. \tag{1.15}$$

Сделаем

Предположение IV. Существует число p, такое, что для любых i $(i = 1, 2)$, i_1, i_2, таких, что $i_1 + i_2 \leqslant p$, $L^{i}_{i_1 i_2 0} = 0$, и существуют такие i $(i = 1, 2)$, i_1, i_2, что $i_1 + i_2 = p + 1$ и $L^{(i)}_{i_1 i_2 0} \neq 0$.

Очевидно, что $p \geqslant 1$. Заметим, что если при $\varepsilon = 0$ уравнение (1.8) имеет единственное тривиальное решение $z = 0$, то предположение IV выполнено. Действительно, все возможные решения (1.8) при $\varepsilon = 0$ также определены системой (1.10)—(1.11). В силу (1.12) уравнение (1.11) имеет решение

$$v(0, \delta) = \sum_{i_1+i_2 \geqslant 2} v_{i_1 i_2 0} [\delta^{(1)}]^{i_1} [\delta^{(2)}]^{i_2}.$$

С учетом этого, в силу разложения (1.13), при $\varepsilon = 0$ система (1.10) принимает вид

$$\sum_{i_1+i_2 \geqslant 2} L^{(i)}_{i_1 i_2 0} [\delta^{(1)}]^{i_1} [\delta^{(2)}]^{i_2} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Если бы предположение IV не было выполнено (т. е. для любых i, i_1, i_2 $L^{(i)}_{i_1 i_2 0} = 0$), то указанная система и, следовательно, система (1.8) имели бы нетривиальные решения.

Стационарные решения (1.4) будем искать в виде рядов по степеням $\sqrt[p]{\varepsilon}$. Итак, пусть

$$\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \mu^j, \tag{1.16}$$

где $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)})$, $\delta_j = (\delta^{(1)}_j, \delta^{(2)}_j)$, $j = \overline{1, \infty}$, и

$$\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}. \tag{1.17}$$

Тогда $v(\varepsilon, \delta)$, определенное в (1.11) формулой (1.12), также будет рядом по степеням μ. Подставим (1.16) в систему (1.14), соберем члены при одинаковых степенях μ и для главного члена разложения δ_1 получим нелинейную алгебраическую систему

$$0 = \varkappa \delta^{(i)}_1 + \sum_{i_1+i_2=p+1} L^{(i)}_{i_1 i_2 0} [\delta^{(1)}_1]^{i_1} [\delta^{(2)}_1]^{i_2}. \tag{1.18}$$

Обозначим

$$R^{(i)}(\varkappa, \delta) \equiv \varkappa \delta^{(i)} + \sum_{i_1+i_2=p+1} L^{(i)}_{i_1 i_2 0} [\delta^{(1)}]^{i_1} [\delta^{(2)}]^{i_2} \tag{1.19}$$

и

$$H(\varkappa, \delta) = \left| \frac{\partial R^{(i)}(\varkappa, \delta)}{\partial \delta^{(j)}} \right| \tag{1.20}$$

и сформулируем следующий результат.

Лемма 1. *Пусть система* (1.18) *имеет решение* $\bar{\delta}_1 = (\bar{\delta}^{(1)}_1, \bar{\delta}^{(2)}_1)$, *причем*

$$\det H(\varkappa, \bar{\delta}_1) \neq 0. \tag{1.21}$$

Тогда система (1.14) *также имеет решение*; *оно представимо в виде ряда* (1.16), *сходящегося абсолютно при достаточно ма-*

лых μ (*малых* ε), *причем* $\delta_1 = \bar{\delta}_1$, *системы для* δ_j $(j = \overline{2, \infty})$ *разрешимы последовательно и единственным образом.*

Доказательство можно найти в [6].

Заметим, что тривиальному решению (1.18) $\bar{\delta}_1 \equiv (0, 0)$ соответствует тривиальное стационарное решение (1.4). Действительно, $H(\varkappa, 0) = \varkappa I$; значит, $\bar{\delta}_1 = (0, 0)$ удовлетворяет условиям Леммы 1 и определяет только тривиальное решение системы (1.14) $\delta = (0, 0)$. В силу формулы (1.12) $v(\varepsilon, 0) = 0$ и соответствующее стационарное решение (1.4) $z(\varepsilon) = 0$, $z(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} \delta^{(i)} u_i + v$. Ниже для краткости стационарные решения любых систем дифференциальных уравнений условимся называть просто стационарами.

Таким образом, каждому нетривиальному решению (1.18), удовлетворяющему (1.21), при достаточно малых ε соответствует нетривиальное решение (1.14) и нетривиальный стационар (1.4). Если $\delta_1 = \bar{\delta}_1$, то эти решения будем обозначать соответственно

$$\bar{\delta}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\delta}_j \mu^j, \quad \bar{\delta}(\varepsilon) = (\bar{\delta}^{(1)}(\varepsilon), \bar{\delta}^{(2)}(\varepsilon)),$$
$$\bar{z}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} \bar{\delta}^{(i)}(\varepsilon) u_i + v(\varepsilon, \bar{\delta}(\varepsilon)). \tag{1.22}$$

Отметим несколько свойств системы (1.18). Любое ее нетривиальное решение можно записать как $\delta_1 = (\delta_1^{(1)}, k\delta_1^{(1)})$, где $k = \delta_1^{(2)}/\delta_1^{(1)}$ $(\delta_1^{(1)} \neq 0)$, или как $(0, \delta_1^{(2)})$, где $\delta_1^{(2)} \neq 0$. В первом случае систему (1.18) перепишем в виде

$$0 = \varkappa\delta_1^{(1)} + [\delta_1^{(1)}]^{p+1} \sum_{i_1+i_2=p+1} L_{i_1 i_2 0}^{(1)} k^{i_2},$$
$$0 = \varkappa\delta_1^{(1)} k + [\delta_1^{(1)}]^{p+1} \sum_{i_1+i_2=p+1} L_{i_1 i_2 0}^{(2)} k^{i_2}.$$

Обозначим $a(k) = \sum_{i_1+i_2=p+1} L_{i_1 i_2 0}^{(1)} k^{i_2}$ и $b(k) = \sum_{i_1+i_2=p+1} L_{i_1 i_2 0}^{(2)} k^{i_2}$. Тогда нетривиальные решения этой системы определены соотношениями

$$0 = \varkappa + a(k) [\delta_1^{(1)}]^p, \tag{1.23}$$

$$a(k) k = b(k). \tag{1.24}$$

Так как $a(k)$ и $b(k)$ — полиномы от k степени не выше $p+1$, уравнение (1.24) имеет не более $p+2$ корней. Если система (1.18) допускает решение типа $(0, \delta_1^{(2)})$, где $\delta_1^{(2)} \neq 0$, то

$$L_{0\,p+1\,0}^{(1)} = 0, \tag{1.25}$$

а $\delta_1^{(2)}$ удовлетворяет уравнению

$$0 = \varkappa + L_{0\,p+1\,0}^{(2)} [\delta_1^{(2)}]^p. \tag{1.26}$$

Из равенства (1.25) следует, что степень $a(k)$ в уравнении (1.24) для нахождения решений, отличных от $(0, \delta_1^{(2)})$, $\delta_1^{(2)} \neq 0$, не выше p и (1.24) имеет не более $p+1$ решения. Таким образом, в любом случае на плоскости $\delta_1 = (\delta_1^{(i)}, \delta_1^{(2)})$ определено не более $p+2$ прямых, на которых могут лежать нетривиальные решения (1.18). Эти прямые проходят через начало координат $\delta_1 = (0, 0)$ (тривиальное решение). Если p — нечетное, то существует хотя бы одна такая прямая.

Если при выполнении (1.24) или (1.25) уравнения (1.23) или (1.26) соответственно не имеют решений ни при каком $\varkappa = \pm 1$; значит, данной прямой соответствует кратный корень $a(k)$ и $b(k)$ или $L_{0\,p+1\,0}^{(2)} = 0$ соответственно. Ниже такие прямые условимся называть прямыми кратного корня и временно исключим их из рассмотрения.

Из (1.23) и (1.26) видно, что:

1. Если p — нечетно, то на каждой такой прямой лежит не более одного нетривиального решения; таким образом, всего их не более $p+2$. При этом, если при $\varkappa = \varkappa_0$ решением (1.18) было $\delta_1 = \bar{\delta}_1$, то $\delta_1 = -\bar{\delta}_1$ будет решением (1.18) при $\varkappa = -\varkappa_0$;

2. Если p — четно, то на каждой прямой при одном из значений $\varkappa = \pm 1$ лежит пара симметричных решений $\delta_1 = \bar{\delta}_1$ и $\delta_1 = -\bar{\delta}_1$, а при противоположном значении $\varkappa$ решений на этой прямой нет. Таким образом, при четном p максимальное число нетривиальных решений $2(p+1)$.

Далее, в силу того, что

$$H(\varkappa_0, \bar{\delta}_1) = \begin{cases} H(\varkappa_0, -\bar{\delta}_1), & p \text{ — четное}, \\ -H(-\varkappa_0, -\bar{\delta}_1), & p \text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{1.27}$$

условие (1.21) выполняется или не выполняется для указанных пар решений $\bar{\delta}_1$ и $-\bar{\delta}_1$ одновременно. В этом смысле условие (1.21) характеризует не решение, а направление на плоскости $\delta_1 = (\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)})$.

1.3. Формальное построение нестационарных решений

По аналогии со стационарным построим нестационарное решение (1.4) в форме

$$z(\varepsilon, \tau) = \sum_{i=1}^{2} \delta^{(i)}(\varepsilon, \tau) u_i + v(\varepsilon, \delta(\varepsilon, \tau)) + \varepsilon^{\frac{p+1}{p}} \zeta(\varepsilon, \tau), \tag{1.28}$$

где $v(\varepsilon, \delta)$ определено формулой (1.12), а $\delta^{(i)}(\varepsilon, \tau)$ и ε достаточно малы, чтобы (1.12) сходился абсолютно и равномерно. Решение $z(\varepsilon, \tau)$ ищем на $\tau \in [0, +\infty)$. Начальные условия, т. е. значение $z(\varepsilon, 0)$ оговорим ниже.

Спроектируем (1.4) на E^2 и $E^{\infty-2}$ и воспользуемся тождеством (1.11), разложением (1.13) и формулой (1.15). Мы получим систе-

му, эквивалентную (1.4) вблизи $z = 0$:

$$\varepsilon \frac{d\delta^{(i)}}{d\tau} = \varepsilon\varkappa\delta^{(i)} + \sum_{\substack{i_1+i_2>p+1\\ j\geqslant 0}} L^{(i)}_{i_1 i_2 j} [\delta^{(1)}]^{i_1} [\delta^{(2)}]^{i_2} \varepsilon^j +$$

$$+ P^{(i)} F\Big(\sum_{j=1}^{2} \delta^{(j)} u_j + v(\varepsilon, \delta) + \varepsilon^{\frac{p+1}{p}} \zeta\Big) -$$

$$- P^{(i)} F\Big(\sum_{j=1}^{2} \delta^{(j)} u_j + v(\varepsilon, \delta)\Big), \quad i = 1, 2; \tag{1.29}$$

$$\varepsilon^{\frac{2p+1}{p}} \frac{d\zeta}{d\tau} + \varepsilon^{\frac{p+1}{p}} A_0 \zeta = \varepsilon^{\frac{2p+1}{p}} \varkappa\zeta - \varepsilon \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial \delta^{(j)}} \frac{d\delta^{(j)}}{d\tau} +$$

$$+ QF\Big(\sum_{j=1}^{2} \delta^{(j)} u_j + v(\varepsilon, \delta) + \varepsilon^{\frac{p+1}{p}} \zeta\Big) -$$

$$- QF\Big(\sum_{j=1}^{2} \delta^{(j)} u_j + v(\varepsilon, \delta)\Big). \tag{1.30}$$

Решения системы (1.29)—(1.30) по аналогии с решением (1.9) будем строить в виде формальных рядов

$$\delta^{(i)}(\varepsilon, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta^{(i)}_j(\tau) \mu^j, \quad i = 1, 2, \tag{1.31}$$

$$\zeta(\varepsilon, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j(\tau) \mu^j, \tag{1.32}$$

где μ определено соотношением (1.17). Заметим, что

$$F\Big(\sum_{j=1}^{2} \delta^{(j)} u_j + v(\varepsilon, \delta) + \varepsilon^{\frac{p+1}{p}} \zeta\Big) - F\Big(\sum_{j=1}^{2} \delta^{(j)} u_j + v(\varepsilon, \delta)\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{l+i_1+i_2\geqslant 2\\ l\geqslant 1}} F_{i_1 i_2 l} [\delta^{(1)}]^{i_1} [\delta^{(2)}]^{i_2} \sum_{s=1}^{l} C^s_l v^{l-s} [\varepsilon^{\frac{p+1}{p}} \zeta]^s, \tag{1.33}$$

и в соответствии с разложением (1.12) и договоренностью (1.31)—(1.32) эта разность имеет порядок μ^{p+3}. Также в соответствии с (1.12) оценим слагаемое

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial \delta^{(j)}} \frac{d\delta^{(j)}}{d\tau} = \varepsilon \sum_{\substack{i_1+i_2\geqslant 2\\ l\geqslant 0}} \varepsilon^l v_{i_1 i_2 l} \Big\{ i_1 [\delta^{(1)}]^{i_1-1} [\delta^{(2)}]^{i_2} \frac{d\delta^{(1)}}{d\tau} +$$

$$+ i_2 [\delta^{(1)}]^{i_1} [\delta^{(2)}]^{i_2-1} \frac{d\delta^{(2)}}{d\tau} \Big\} \sim O(\mu^{p-2}). \tag{1.34}$$

В силу того, что $\delta^{(i)}(\tau) = P^{(i)} z(\varepsilon, \tau)$, имеем $\delta^{(i)}(0) = P^{(i)} z(\varepsilon, 0)$. Пока мы не налагаем ограничений на значение

$z(\varepsilon, 0)$. Условимся теперь, что в (1.31)

$$\mu\delta_1^{(i)}(0) = P^{(i)}z(\varepsilon, 0), \quad \delta_j^{(i)}(0) = 0, \quad j \geqslant 2, \quad i = 1, 2.$$

Приравнивая в (1.29), (1.30) члены при одинаковых степенях μ, получим следующие системы для коэффициентов формальных рядов (1.31)—(1.32):

1. Старший член разложения (1.31) удовлетворяет нелинейной автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$d\delta_1^{(i)}/d\tau = R^{(i)}(\varkappa, \delta_1), \qquad \delta_1^{(i)}(0) = \delta_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \tag{1.35}$$

где $R^{(i)}(\varkappa, \delta_1)$ определено формулой (1.19);

2. Для $j \geqslant 2$ получим линейные системы ОДУ

$$d\delta_j/d\tau = H(\varkappa, \delta_1(\tau))\,\delta_j + G_j, \quad \delta_j(0) = 0, \tag{1.36}$$

где матрица $H(\varkappa, \delta_1(\tau))$ определена формулой (1.20). Коэффициенты ζ_j $(j \geqslant 1)$ удовлетворяют линейным уравнениям

$$A_0\zeta_j = G_j^0. \tag{1.37}$$

В силу (1.29), (1.30) и разложений (1.12), (1.33), (1.34) G_j представляет собой вектор-функцию, каждая компонента которой есть многочлен от компонент аргументов $\delta_l(\tau)$, $d\delta_l/d\tau$ $(l = \overline{1, j-1})$ и от $P^{(i)}\zeta_l$ $(l = \overline{1, j-2})$, $i = 1, 2$. Если (1.36)—(1.37) решать последовательно, то на каждом шаге j $(j = \overline{2, \infty})$ G_j и G_{j-1}^0 — известные функции. В следующих разделах будут указаны условия, при которых (1.36)—(1.37) последовательно разрешимы в классах ограниченных функций.

1.4. Свойства автономной системы ОДУ

Во-первых, очевидна связь систем (1.35) и (1.18): последняя определяет стационарные точки (1.35); поэтому все, что касалось существования и свойств решений (1.18), зависящих от четности p и знака $\varkappa$, справедливо для (1.35). Во-вторых, $H(\varkappa, \bar{\delta}_1)$ из (1.20) является матрицей Якоби для (1.35) в окрестности стационара $\bar{\delta}_1$. Таким образом, условие (1.21) Леммы 1 требует, чтобы точка $\bar{\delta}_1$ была равновесием простого типа. Займемся фазовым портретом (1.35).

Так как собственные числа матрицы $H(\varkappa, 0)$ равны $\varkappa$, справедлива

Лемма 2. *Тривиальный стационар* $\delta_1 = (0,0)$ *системы* (1.35) *является узлом, устойчивым при* $\varkappa = -1$ *и неустойчивым при* $\varkappa = 1$.

Лемма 3. *Прямые фазовой плоскости, проходящие через точку* $\delta_1 = (0, 0)$, *на которых лежат (или могли бы лежать) стационары системы* (1.35), *целиком состоят из фазовых траекторий системы* (1.35).

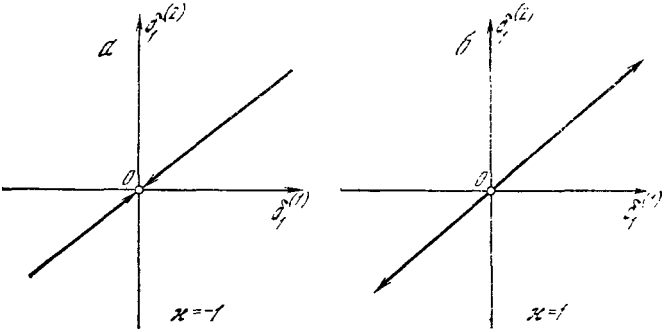


Рис. 1

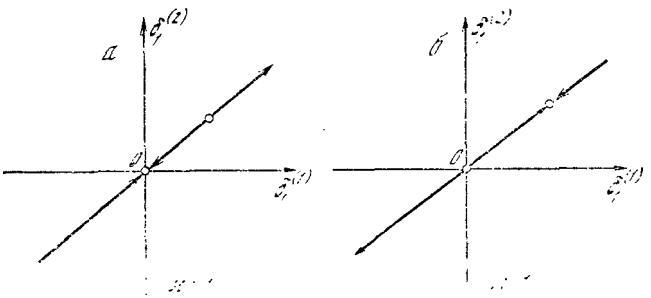


Рис. 2

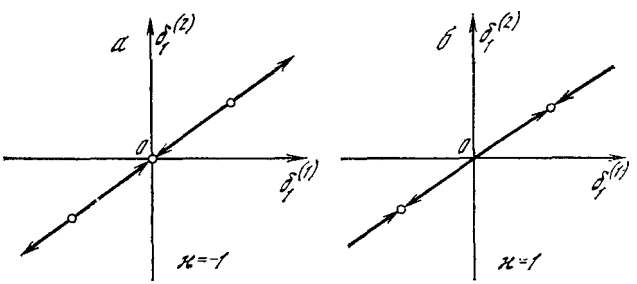


Рис. 3

Прямым кратного корня соответствует рис. 1; в противном случае, если на прямой есть стационар, ситуация при p нечетном изображена на рис. 2, при p четном — на рис. 3; если при p четном $\varkappa$ таково, что на прямой нет стационарных решений, вид фазовых траекторий снова определен рис. 1. На рис. 1—3 случай a соответствует $\varkappa = -1$, случай $б$ — $\varkappa = 1$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что эти прямые определены условием $\delta_1^{(2)} = k\delta_1^{(1)}$, где k удовлетворяет (1.24), действительно, если прямая определена уравнением

$\delta_1^{(1)} = 0$, в последнем соотношении можно поменять местами $\delta_1^{(1)}$ и $\delta_1^{(2)}$. Нестационарное решение (1.35) будем искать в виде $\delta_1(\tau) = \binom{1}{k} f(\tau)$. В этом случае $f(\tau)$ определена уравнением Бернулли $\dot{f} = f(\varkappa + a(k) f^p)$. Семейства нестационарных решений даются формулой

$$f^p(\tau - \tau_0) = -\frac{\varkappa}{a(k)} \frac{1}{(1 \pm e^{-p\varkappa(\tau-\tau_0)})} \tag{1.38}$$

при $a(k) \neq 0$ и

$$f(\tau - \tau_0) = e^{\varkappa(\tau-\tau_0)} \tag{1.39}$$

при $a(k) = 0$, где τ_0 — вещественный параметр. Вид этих семейств в зависимости от знаков $\varkappa$, $\varkappa/a(k)$ и четности p в случае $a(k) \neq 0$ приведен на рис. 4—6 (p — нечетное (рис. 4); p — четное (рис. 5, 6), $\varkappa = -\mathrm{sign}\,(a(k))$ (рис. 5), $\varkappa = \mathrm{sign}\,(a(k))$ (рис. 6)).

Следствие 1. *В системе* (1.35) *при* $\varkappa = -1$ *существует единственное устойчивое решение* $\bar{\delta}_1 = (0, 0)$.

Следствие 2. *В системе* (1.35) *предельные циклы невозможны.*

Следствие 3. *В системе* (1.35) *нетривиальные равновесия простого типа — либо узлы, либо седла.*

Заметим, что вследствие (1.27) при четном p симметричные решения устойчивы или неустойчивы одновременно, а при нечетном узлы, неустойчивые при $\varkappa = -1$, превращаются в устойчивые при $\varkappa = 1$. При смене знака $\varkappa$ седла переходят в седла.

Наша задача — получить решение в форме (1.28), определенное при $\tau \in [0, +\infty)$. Коэффициенты формальных рядов (1.29), (1.30) должны быть ограниченными и непрерывно дифференцируемыми при $\tau \in [0, +\infty)$ функциями. Все ограниченные решения (1.35) сходятся к одному из устойчивых стационаров (сепаратрисы седел временно исключим из рассмотрения). Пусть $\bar{\delta}_1$ — устойчивый узел. Обозначим его область притяжения на фазовой плоскости через $\mathcal{R}(\bar{\delta}_1)$. Заметим, что $\mathrm{int}\,\mathcal{R}(\bar{\delta}_1) \neq \varnothing$, так как она содержит по крайней мере некоторую окрестность $\bar{\delta}_1$. Как уже говорилось выше, стационарам уравнения (1.35) простого типа соответствуют стационары уравнения (1.4). Если из любой малой окрестности стационара $\bar{\delta}_1$ при некоторых условиях можно попасть в $\bar{\delta}_1$, то естественно надеяться, что решения (1.4), сколь угодно близкие к стационару $\tilde{z}(\varepsilon)$, выведут систему к стационару $\bar{z}(\varepsilon)$. Поэтому обозначим через $\mathcal{A}(\bar{\delta}_1)$ множество тех стационаров (1.35), пересечение сколь угодно малых окрестностей которых с $\mathrm{int}\,\mathcal{R}(\bar{\delta}_1)$ не пусто (естественно, $\mathcal{A}(\bar{\delta}_1)$ состоит из неустойчивых равновесий). Наконец, обозначим через $C(\bar{\delta}_1)$ множество всех непрерывно дифференцируемых на $\tau \in [0, \infty)$ решений (1.35), $\delta_1(\tau)$, для которых $\delta_1(0) \in \mathcal{R}(\bar{\delta}_1)$. Ниже будем употреблять обо-

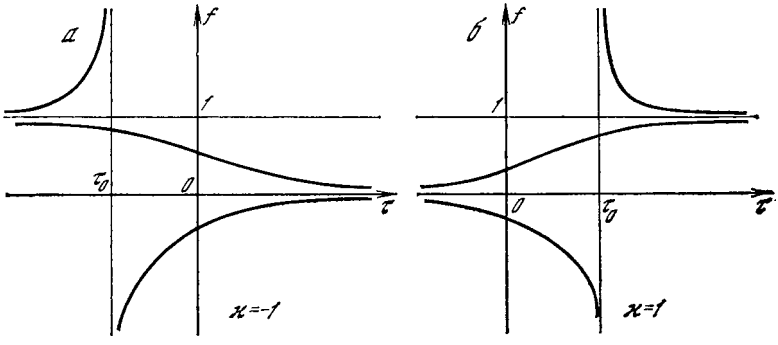


Рис. 4

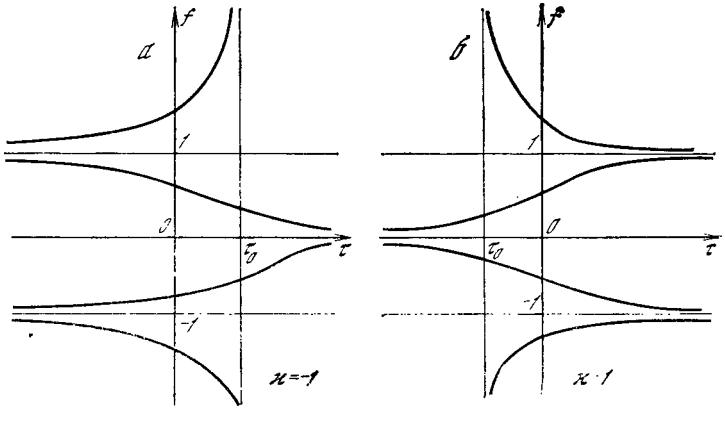


Рис. 5

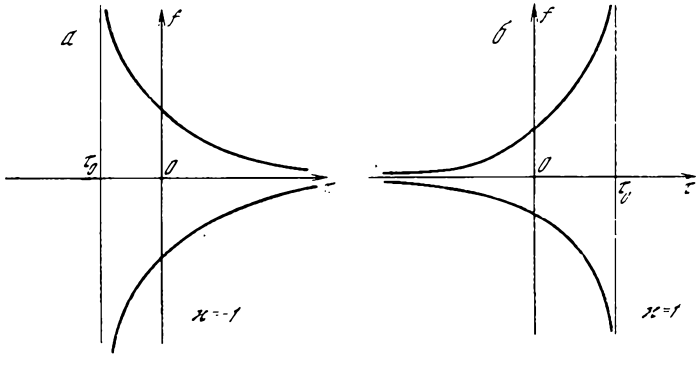


Рис. 6

значения $\mathcal{R}(\bar{\delta}_1)$, $\mathcal{A}(\bar{\delta}_1)$, $C(\bar{\delta}_1)$, не оговаривая дополнительно, что $\bar{\delta}_1$ — устойчивый узел.

1.5. Нахождение коэффициентов формального ряда

В этом разделе будет доказано, что если $\delta_1(\tau) \in C(\bar{\delta}_1)$, то системы (1.36), (1.37) последовательно разрешимы и каждый коэффициент в (1.31), (1.32) при $\tau \to +\infty$ имеет конечный предел. Если $\delta_1(\tau)$ известно, то (1.36) является линейной системой ОДУ второго порядка вида

$$d\delta/d\tau = H(\tau)\,\delta + f(\tau), \qquad \delta(0) = 0, \tag{1.40}$$

где $H(\tau) = [h_{ij}(\tau)]_{2\times 2}$, $f(\tau) = (f_1(\tau), f_2(\tau))$, $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)})$.
В следующей теореме будет показано, что если коэффициенты $H(\tau)$, решения фундаментальной системы для (1.40) и $f(\tau)$ имеют конечные пределы при $\tau \to +\infty$ и стремятся к ним «хорошо», то решения (1.40) также будут иметь конечный предел и «хорошо» к нему стремиться. Для этого введем C^1_γ, $\gamma > 0$,— банахово пространство функций $f \mid R \to R$, $f \in C^1(R)$, с нормой

$$\|f\|_{C^1_\gamma} = \sup_{\tau\geqslant 0}|f(\tau)| + \sup_{\tau\geqslant 0}|df/d\tau|\,e^{\gamma\tau},$$

и определим банахово пространство двумерных вектор-функций C_γ как $C_\gamma = C^1_\gamma \times C^1_\gamma$ с естественной нормой $\|f\|_{C_\gamma} = \|f^{(1)}\|_{C^1_\gamma} + \|f^{(2)}\|_{C^1_\gamma}$.

Теорема 1. *Пусть система* (1.40) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $H(\tau) \to \bar{H}$ *при* $\tau \to +\infty$, *и* $\bar{H}$ *имеет базис из собственных векторов* p_j, $j = 1, 2$;

2) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ — *собственные числа* $\bar{H}$;

3) $h_{ij}(\tau) \in C^1_\gamma$, $\|h_{ij}\|_{C^1_\gamma} \leqslant h^+$ *для* $i, j = 1, 2$;

4) $f(\tau) \in C_\gamma$;

5) *справедливо соотношение* $0 < \gamma < |\lambda_1| < |\lambda_2|$.

Тогда решение (1.40) $\delta(\tau) \in C_\gamma$, *единственно и дается формулой*

$$\delta(\tau) = \int_0^\tau K(\tau, s)\,f(s)\,ds, \tag{1.41}$$

где $K(\tau, s) = \Phi(\tau)\,\Phi^{-1}(s)$, $\Phi(\tau) = [\Phi_{ij}(\tau)]_{2\times 2}$ — *фундаментальная матрица однородной системы.*

Доказательство. Сначала получим некоторые оценки, необходимые для проведения доказательства. Из условия 1) вытекает, что асимптотика $\Phi(\tau)$ при $\tau \to +\infty$ такая же, как асимптотика фундаментальной системы для $\dot{\delta} = \bar{H}\delta$ [7], а именно $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \Phi_{ij}(\tau)\,e^{-\lambda_j\tau} = p_{ij}$, где p_{ij} — i-я компонента j-го собственного

вектора H. В силу этого обстоятельства $\det \Phi(\tau)\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau} \underset{\tau\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\Phi}$, а так как для $\forall\tau$ $\det \Phi(\tau) \neq 0$, то справедлива оценка

$$|\det \Phi(\tau)| \geqslant \Phi^- e^{(\lambda_1+\lambda_2)\tau}, \quad \Phi^- > 0. \tag{1.42}$$

Заметим также, что

$$|\Phi_{ij}(\tau)| \leqslant \Phi^+ e^{\lambda_j \tau}, \quad i, j = 1, 2. \tag{1.43}$$

Теперь оценим $|K_{ij}(\tau, s)|$, $i, j = 1, 2$:

$\Phi^{-1}(s) = \dfrac{1}{\det \Phi(s)} \begin{vmatrix} \Phi_{22}(s) & -\Phi_{12}(s) \\ -\Phi_{21}(s) & \Phi_{11}(s) \end{vmatrix}$; с учетом оценок (1.42)—(1.43) имеем

$$|K_{11}(\tau, s)| = \frac{1}{|\det \Phi(s)|} |\Phi_{11}(\tau)\Phi_{22}(s) - \Phi_{12}(\tau)\Phi_{21}(s)|;$$

аналогично

$$|K_{22}(\tau, s)| = \frac{1}{|\det \Phi(s)|} |\Phi_{11}(s)\Phi_{22}(\tau) - \Phi_{12}(s)\Phi_{21}(\tau)|,$$

$$|K_{12}(\tau, s)| = \frac{1}{|\det \Phi(s)|} |\Phi_{11}(s)\Phi_{12}(\tau) - \Phi_{11}(\tau)\Phi_{12}(s)|,$$

$$|K_{21}(\tau, s)| = \frac{1}{|\det \Phi(s)|} |\Phi_{21}(\tau)\Phi_{22}(s) - \Phi_{21}(s)\Phi_{22}(\tau)|.$$

Таким образом, для любых $i, j = 1, 2$ верно

$$|K_{ij}(\tau, s)| \leqslant K^+ \sum_{l=1,2} e^{\lambda_l(\tau - s)}. \tag{1.44}$$

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Существование и единственность решения (1.40) определены формулой Коши (1.41). Остается оценить $\sup\limits_{\tau\geqslant 0} |\delta^{(i)}(\tau)|$ и $\sup\limits_{\tau\geqslant 0} |d\delta^{(i)}/d\tau|\, e^{\gamma\tau}$, $i = 1, 2$. Так как $f(\tau) = C_\gamma$, то, учитывая (1.44),

$$|\delta^{(i)}(\tau)| = \left|\int_0^\tau \sum_{j=1}^{2} K_{ij}(\tau, s) f_j(s)\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant K^+ \sum_{l=1,2} e^{\lambda_l \tau} \int_0^\tau e^{-\lambda_l s} \sum_{j=1}^{2} |f_j(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant K^+ \|f\|_{C_\gamma} \sum_{l=1,2} 1 \Big/ |\lambda_l|, \quad i = 1, 2. \tag{1.45}$$

Продифференцируем систему (1.40):

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} = H(r)\,\dot{\delta}(\tau) + [f'(\tau) + H'(\tau)\,\delta(\tau)],$$

$$\left.\frac{d\delta}{d\tau}\right|_{\tau=0} = H(0)\,\delta(0) + f(0) = f(0). \tag{1.46}$$

Следовательно,

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \int_0^\tau K(\tau, s)[H'(s)\,\delta(s) + f'(s)]\,ds + \Phi(\tau)\,f(0). \tag{1.47}$$

Проведем следующие оценки, используя соотношения (1.44), (1.42), (1.45):

$$|J_1^{(i)}| \equiv \left|\int_0^\tau \sum_{j=1}^2 K_{ij}(\tau, s)\,f_j'(s)\,ds\right| \leqslant K^+ \sum_{l=1,2} e^{\lambda_l \tau} \int_0^\tau \sum_{j=1}^2 |f_j'(s)|\,e^{\gamma s} \times$$

$$\times\, e^{(-\lambda_l-\gamma)s} ds \leqslant K^+ \|f\|_{C_\gamma}\, e^{-\gamma\tau} \sum_{l=1,2} \frac{1}{|\gamma+\lambda_l|}\,; \tag{1.48}$$

$$|J_2^{(i)}| \equiv \left|\int_0^\tau \sum_{j=1}^2 K_{ij}(\tau, s) \sum_{k=1}^2 h_{jk}'(s)\,\delta^{(k)}(s)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant K^+ \sum_{l=1,2} e^{\lambda_l \tau} \int_0^\tau \sum_{j,\,k=1}^2 |h_{jk}'(s)|\,|\delta^{(k)}(s)|\,e^{-\lambda_l s} ds \leqslant$$

$$\leqslant 4h^+ [K^+]^2 \|f\|_{C_\gamma} \sum_{k=1,2} \frac{1}{|\lambda_k|} \sum_{l=1,2} \frac{1}{|\gamma+\lambda_l|}\, e^{-\gamma\tau}, \tag{1,49}$$

$$|J_3^{(i)}| \equiv \left|\sum_{j=1}^2 \Phi_{ij}(\tau)\,f_j(0)\right| \leqslant \Phi^+ \sum_{j=1}^2 e^{\lambda_j \tau}\,|f_j(0)| \leqslant$$

$$\leqslant \Phi^+ \|f\|_{C_\gamma} (e^{\lambda_1\tau} + e^{\lambda_2\tau}) \leqslant 2\Phi^+ \|f\|_{C_\gamma} e^{\lambda_1\tau} \leqslant 2\Phi^+ \|f\|_{C_\gamma}\, e^{-\gamma\tau}. \tag{1.50}$$

В силу (1.47) $|d\delta^{(i)}/d\tau| \leqslant |J_1^{(i)}| + |J_2^{(i)}| + |J_3^{(i)}|$ и вследствие оценок (1.45), (1.48)—(1.50) имеем

$$\|\delta(\tau)\|_{C_\gamma} = \sum_{i=1}^2 \sup_{\tau\geqslant 0} |\delta^{(i)}(\tau)| + \sum_{i=1}^2 \sup_{\tau\geqslant 0} \left|\frac{d\delta^{(i)}}{d\tau}\right| e^{\gamma\tau} \leqslant M_T \|f\|_{C_\gamma}.$$

Следствие. *В условиях теоремы 1 в пространстве C_γ определен линейный ограниченный оператор T*

$$Tf \equiv \int_0^\tau K(\tau, s)\,f(s)\,ds, \tag{1.51}$$

причем

$$\|T\|_{C_\gamma} \leqslant M_T.$$

Пусть B_γ — банахово пространство функций $f \mid R \to E^{\infty-2}$, имеющих сильную производную со значением в $E^{\infty-2}$, с нормой

$$\|f\|_{B_\gamma} = \sup_{\tau\geqslant 0} \|f(\tau)\|_{E^{\infty-2}} + \sup_{\tau\geqslant 0} \left\|\frac{df}{d\tau}\right\|_{E^{\infty-2}} e^{\gamma\tau}, \quad \gamma > 0.$$

Отметим некоторые свойства пространств C_γ^1, C_γ, B_γ:

1) если $f \in C^1_{\bar\gamma}(C_{\bar\gamma}, B_{\bar\gamma})$, то $f \in C^1_\gamma(C_\gamma, B_\gamma)$ при всех $\gamma \in (0, \bar\gamma]$;

2) C^1_γ — банахова алгебра;

3) для любого ограниченного в $E^{\infty\cdot 2}$ билинейного оператора F и $f_1 \in B_\gamma$, $f_2 \in B_\gamma$ $F(f_1, f_2) \in B_\gamma$;

4) если $f \in C^1_\gamma$ и $g \in E^{\infty\cdot 2}$, то $fg \in B_\gamma$;

5) если L — ограниченный линейный оператор в $E^{\infty\cdot 2}$ и $f \in B_\gamma$, то $Lf \in B_\gamma$.

Справедлива

Теорема 2. *Если решение* (1.35) $\delta_1(\tau) \in C(\bar\delta_1)$ *для некоторого устойчивого узла* $\bar\delta_1$ (1.35), *то системы* (1.36), (1.37) *последовательно разрешимы в классах* C_γ, B_γ *при некотором* $\gamma > 0$.

Доказательство. Во-первых, если $\delta_1(\tau) \in C(\bar\delta_1)$, то существует $\bar\gamma > 0$, зависящее только от $\bar\delta_1$ и не зависящее от конкретного решения $\delta_1(\tau) \in C(\bar\delta_1)$, такое, что $\delta_1(\tau) \in C_{\bar\gamma}$. Оценим поведение $\delta_1(\tau)$ и $d\delta_1/d\tau$ при $\tau \to +\infty$. Для всякой траектории $\delta_1(\tau) \in C(\bar\delta_1)$ и $\varepsilon > 0$ найдется момент $\tau_0 \geqslant 0$, такой, что $\|\delta_1(\tau) - \bar\delta_1\| < \varepsilon$ при $\tau \geqslant \tau_0$. Естественно, τ_0 зависит как от ε, так и от $\delta_1(\tau)$. Если ε достаточно мало, то в силу устойчивости $\bar\delta_1$ существует $\bar\gamma > 0$, такое, что

$$|\delta_1^{(i)}(\tau) - \bar\delta_1^{(i)}| \leqslant \tilde M \|\delta_1(\tau_0) - \bar\delta_1\| e^{-\bar\gamma\tau}, \quad i = 1, 2, \tag{1.52}$$

при всех $\tau \geqslant \tau_0$. При этом $\bar\gamma$ не зависит от конкретного решения $\delta_1(\tau)$ [8]. Обозначим $\hat\delta(\tau) = \delta_1(\tau) - \bar\delta_1$. В силу (1.19) и (1.35) при $\tau \geqslant \tau_0$.

$$\left|\frac{d\delta^{(i)}}{d\tau}\right| = \left|\frac{d\hat\delta^{(i)}}{d\tau}\right| = \varkappa\hat\delta^{(i)} + \sum_{i_1+i_2=p+1} L^{(i)}_{i_1 i_2 0} \{(\bar\delta_1^{(1)} + \hat\delta^{(1)})^{i_1} (\bar\delta_1^{(2)} + \hat\delta^{(2)})^{i_2} - (\delta_1^{(1)})^{i_1}(\delta_1^{(2)})^{i_2}\} \leqslant \tilde{\tilde M}(|\hat\delta^{(1)}| + |\hat\delta^{(2)}|). \tag{1.53}$$

Из (1.52), (1.53) и очевидных неравенств $\sup\limits_{\tau\geqslant 0} |\delta^{(i)}(\tau)| < +\infty$ и $\sup\limits_{\tau\in[0,\tau_0]} \left|\frac{d\delta^{(i)}}{d\tau}\right| e^{\bar\gamma\tau} < +\infty$, $i = 1, 2$, следует, что $\delta_1(\tau) \in C_{\bar\gamma}$. Заметим, что в силу существования у системы (1.35) решений типа (1.38) и (1.39) $\bar\gamma \leqslant 1$.

Матрица $H(\varkappa, \delta_1(\tau))$ из (1.36) удовлетворяет условиям теоремы 1: $H(\varkappa, \delta_1(\tau)) \to H(\varkappa, \bar\delta_1)$ при $\tau \to +\infty$; $h_{ij}(\tau) \in C^1_{\bar\gamma}$, и в силу того, что $\bar\delta_1$ — узел, а $H(\varkappa, \bar\delta_1)$ — матрица Якоби в точке $\bar\delta_1$, имеем $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Для систем типа (1.35) можно показать, что $H(\varkappa, \bar\delta_1)$ имеет базис из собственных векторов и при $\lambda_1 = \lambda_2$. В силу свойства 1) пространств C^1_γ, C_γ выберем $\gamma < \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \bar\gamma\}$. В этом случае все требования теоремы 1 будут выполнены.

Из (1.29), (1.33) и свойства пространств 2) следует, что $G_2 \in C_\gamma$, если $\delta_1(\tau) \in C_\gamma$. Тогда решение $\delta_2(\tau)$ системы (1.36) определено оператором T из (1.51) и $\delta_2(\tau) \in C_\gamma$. Аналогично в силу (1.30), (1.33) и (1.34) в уравнении (1.37) $G_1^0 \in B_\gamma$ и в силу ограниченности A_0^{-1} решение $\zeta_1 \in B_\gamma$. В силу свойств 2) — 4) пространств C_γ^1, C_γ, B_γ и свойств функций G_j, G_{j-1}^0 на каждом шаге $j \geqslant 2$ мы получим решения уравнений (1.36), (1.37) из пространств C_γ, B_γ соответственно. Отсюда следует, что неоднородность в (1.36) и правые части (1.37) снова принадлежат пространствам C_γ и B_γ соответственно. При достаточно больших j неоднородность в (1.36) и правые части (1.37) зависят также от производных функций $d\delta_l^{(i)}/d\tau$, $d\zeta_l/d\tau$, вычисленных на предыдущих шагах. Но так как δ_l и ζ_l $(l < j)$ сами являются решениями систем (1.36) и (1.37) соответственно, $d\delta_l/d\tau$ и $d\zeta_l/d\tau$ в силу этих систем принадлежат пространствам C_γ и B_γ.

1.6. Доказательство существования малого нестационарного решения

Прежде чем продолжить изучение систем (1.29), (1.30), исследуем уравнение

$$\varepsilon d\zeta/d\tau + A_0\zeta = f(\tau), \qquad \tau \geqslant 0, \qquad \zeta(0) = A_0^{-1}f(0). \tag{1.54}$$

Теорема 3. *Пусть верны предположения* I—II *и, кроме того,* $f(\tau) \in B_\gamma$ *для некоторого* $\gamma > 0$. *Тогда ограниченное решение* (1.54) *единственно и дается формулой*

$$\zeta(\tau) = T_{\frac{\tau}{\varepsilon}} A_0^{-1} f(0) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau T_{\frac{\tau-s}{\varepsilon}} f(s)\,ds, \tag{1.55}$$

причем $\zeta(\tau) \in B_\gamma$ *для любых* $\varepsilon < \varepsilon_0$, *где* $\varepsilon_0 < \beta/\gamma$, *а* β *и* T_t *определены в формулировке предположения* II.

Доказательство. Если $f(\tau) \in E^{\infty-2}$, непрерывно дифференцируема при $\tau \geqslant 0$ и $\|f'(\tau)\|_{E^{\infty-2}}$ ограничена при $\tau \geqslant 0$, то в силу того, что $f(0) \in D(A_0^{-1})$, (1.54) имеет в $E^{\infty-2}$ единственное непрерывно дифференцируемое при $\tau \geqslant 0$ решение, определенное формулой (1.55) [9]. Связь уравнений (1.5), (1.54) и их решений (1.6) и (1.55) очевидна. Если $f \in B_\gamma$, эти требования выполнены, поэтому для доказательства включения $\zeta \in B_\gamma$ необходимо лишь провести оценки $\|\zeta(\tau)\|_{E^{\infty-2}}$ и $\|d\zeta/d\tau\|_{E^{\infty-2}}$:

$$\|\zeta(\tau)\|_{E^{\infty-2}} \leqslant \|T_{\frac{\tau}{\varepsilon}} A_0^{-1} f(0)\|_{E^{\infty-2}} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\int_0^\tau T_{\frac{\tau-s}{\varepsilon}} f(s)\,ds\right\|_{E^{\infty-2}} \leqslant$$

$$\leqslant Me^{-\beta\tau/\varepsilon}\|A_0^{-1}\|\|f(0)\|_{E^{\infty-2}} + \frac{1}{\varepsilon}M \sup_{s\in[0,\tau]}\|f(s)\|_{E^{\infty-2}} e^{-\beta\tau/\varepsilon} \times$$

$$\times \int_0^\tau e^{\beta s/\varepsilon} ds \leqslant M(M + 1/\beta)\|f\|_{B_\gamma}. \tag{1.56}$$

Здесь было использовано соотношение (1.3). Обозначим $\tilde{\zeta}(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} T_{\frac{\tau-s}{\varepsilon}} f(s)\,ds$. Тогда [10]

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} T_{\frac{\tau}{\varepsilon}} f(0) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau T_{\frac{\tau-s}{\varepsilon}} f'(s)\,ds,$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} T_{\frac{\tau}{\varepsilon}} (-A_0) A_0^{-1} f(0) + \frac{d\tilde{\zeta}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau T_{\frac{\tau-s}{\varepsilon}} f'(s)\,ds,$$

$$\left\| \frac{d\zeta}{d\tau} \right\|_{E^{\infty-2}} = \frac{1}{\varepsilon} \left\| \int_0^\tau T_{\frac{\tau-s}{\varepsilon}} f'(s)\,ds \right\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} M \int_0^\tau e^{\frac{-\beta(\tau-s)}{\varepsilon}} \|f'(s)\|_{E^{\infty-2}} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} M e^{\frac{-\beta\tau}{\varepsilon}} \sup_{s\geqslant 0} (\|f'(s)\|_{E^{\infty-2}} e^{\gamma s}) \int_0^\tau e^{\frac{\beta s}{\varepsilon} - \gamma s} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\beta - \varepsilon\gamma} \|f\|_{B_\gamma} e^{-\gamma\tau},$$

причем при проведении оценки подразумевалось, что $\beta - \gamma\varepsilon > 0$, т. е. $\varepsilon < \varepsilon_0 < \beta/\gamma$. Итак, имеем

$$\sup_{\tau\geqslant 0} \left\| \frac{d\zeta}{d\tau} \right\| e^{\gamma\tau} \leqslant \frac{M}{\beta - \varepsilon_0\gamma} \|f\|_{B_\gamma}, \tag{1.57}$$

и в силу (1.56), (1.57) $\zeta(\tau) \in B_\gamma$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Следствие. *Если ε достаточно мало, в пространстве B_γ существует линейный ограниченный оператор S, определенный формулой*

$$Sf \equiv T_{\frac{\tau}{\varepsilon}} A_0^{-1} f(0) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau T_{\frac{\tau-s}{\varepsilon}} f(s)\,ds, \tag{1.58}$$

причем

$$\|S\|_{B_\gamma} \leqslant M_s, \qquad M_s = M\left(M + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta - \varepsilon_0\gamma}\right), \quad \varepsilon_0 < \beta/\gamma.$$

Теперь сформулируем и докажем следующий результат.

Теорема 4. *Если справедливы предположения* I—IV *и система* (1.35) *имеет устойчивый стационар* $\bar{\delta}_1$, *то для каждого* $\delta_1(\tau) \in C(\bar{\delta}_1)$ *найдется такое число* $\bar{\varepsilon}$, *что для* $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ *при каждом* $N > 1$ *существует ограниченное при* $\tau > 0$ *решение уравнения* (1.4), *определенное формулой* (1.28), *где* $v(\varepsilon, \delta)$ *дается формулой* (1.12), *а функции* $\delta(\varepsilon, \tau) \in C_\gamma$ *и* $\zeta(\varepsilon, \tau) \in B_\gamma$ *являются решениями систем* (1.29), (1.30). *Ряды* (1.31), (1.32) *удовлетворяют оценкам*

$$\left\| \delta(\varepsilon, \tau) - \sum_{j=1}^N \mu^j \delta_j(\tau) \right\|_{C_\gamma} = O(\mu^{N+1}),$$

$$\left\| \zeta(\varepsilon, \tau) - \sum_{j=1}^N \mu^j \zeta_j(\tau) \right\|_{B_\gamma} = O(\mu^{N+1}),$$

μ *определено соотношением* (1.17), *т. е. ряды являются асимптотическими.*

Доказательство. Пусть найдено решение $\delta_1(\tau) \in C(\bar{\delta}_1)$, $\delta_1(\tau) \in C_\gamma$ $(N = 1)$ или пусть, кроме решения $\delta_1(\tau)$, найдены решения (1.36)—(1.37) $\delta_2, \ldots, \delta_N \in C_\gamma$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_{N-1} \in B_\gamma$ соответственно $(N \geqslant 2)$. Решения (1.29)—(1.30) $\delta(\varepsilon, \tau)$ и $\zeta(\varepsilon, \tau)$ представим в виде

$$\delta = \sum_{j=1}^{N} \delta_j \mu^j + \mu^{N+1}\omega^{(\cdot)}, \quad \omega^{(\cdot)} = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}),$$

$$\zeta = \sum_{j=1}^{N-1} \zeta_j \mu^j + \mu^N \omega^{(3)}.$$

Наша задача доказать существование ограниченных функций $\omega^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$. Обозначим $\omega = (\omega^{(\cdot)}, \omega^{(3)})$. Покажем, что $\omega \in C_\gamma \times B_\gamma$ и равномерно ограничено по ε (по μ). Из (1.29), (1.30) с учетом (1.35), (1.36), (1.37) получим, что ω удовлетворяет системе

$$d\omega^{(\cdot)}/d\tau = H(\varkappa, \delta_1(\tau))\, \omega^{(\cdot)} + \mu\Psi^{(\cdot)} + G^{(\cdot)}, \qquad \omega^{(\cdot)}(0) = 0, \quad (1.59)$$

$$\varepsilon d\omega^{(3)}/d\tau + A_0\omega^{(3)} = \mu\Psi^{(3)} + G^{(3)}, \qquad \tau \geqslant 0. \quad (1.60)$$

Функции $\Psi = (\Psi^{(\cdot)}, \Psi^{(3)})$ зависят от неизвестного ω, а функции $G = (G^{(\cdot)}, G^{(3)})$ зависят только от известных $\delta_1, \ldots, \delta_N, \zeta_1, \ldots, \zeta_{N-1}$. Если $\omega \in C_\gamma \times B_\gamma$, то $\Psi^{(\cdot)}, G^{(\cdot)} \in C_\gamma$ и $\Psi^{(3)}, G^{(3)} \in B_\gamma$. Поскольку мы не задавались начальными значениями для $\zeta(\varepsilon, \tau)$, система (1.59), (1.60) эквивалентна системе операторных уравнений

$$\omega^{(\cdot)} = T(\mu\Psi^{(\cdot)} + G^{(\cdot)}),$$

$$\omega^{(3)} = S(\mu\Psi^{(3)} + G^{(3)}),$$

где операторы T и S определены формулами (1.51) и (1.58) соответственно, или операторному уравнению

$$\omega = \Omega(\omega) \quad (1.61)$$

в пространстве $C_\gamma \times B_\gamma$. Покажем, что Ω имеет неподвижную точку в некотором шаре, радиус которого R не растет вместе с μ при достаточно малых μ:

$$\|\Omega(\omega)\|_{C_\gamma \times B_\gamma} \leqslant \|T(\mu\Psi^{(\cdot)} + G^{(\cdot)})\|_{C_\gamma} + \|S(\mu\Psi^{(3)} + G^{(3)})\|_{B_\gamma} \leqslant$$
$$\leqslant M_T(\mu\|\Psi^{(\cdot)}\|_{C_\gamma} + \|G^{(\cdot)}\|_{C_\gamma}) + M_s(\mu\|\Psi^{(3)}\|_{B_\gamma} + \|G^{(3)}\|_{B_\gamma}) \leqslant$$
$$\leqslant M_1\mu\|\Psi\|_{C_\gamma \times B_\gamma} + M_2.$$

Чтобы шар отобразился в себя, достаточно, чтобы

$$M_1\mu\|\Psi\|_{C_\gamma \times B_\gamma} + M_2 \leqslant R \quad (1.62)$$

для любого ω из этого шара. Так как $\sup\limits_{\|\omega\|_{C_\gamma + B_\gamma} \leqslant R} \|\Psi(\omega)\|_{C_\gamma \times B_\gamma} \leqslant$

$\leqslant \varphi(R)$, то при $R > M_2$ за счет малого μ можно добиться выполнения (1.62). Будем считать, что такое R выбрано.

Оценим производную Фреше в шаре $\| \omega \|_{C_\gamma \times B_\gamma} \leqslant R$:

$$\left\| \frac{d\Omega}{d\omega} \right\| \leqslant M_T \mu \left\| \frac{d\Psi^{(\cdot)}}{d\omega} \right\|_{C_\gamma} + M_S \mu \left\| \frac{d\Psi^{(3)}}{d\omega} \right\|_{B_\gamma} \leqslant M_3 \mu.$$

Пусть $\| \omega_1 \|_{C_\gamma \times B_\gamma}$, $\| \omega_2 \|_{C_\gamma \times B_\gamma} \leqslant R$, тогда

$$\| \Omega(\omega_1) - \Omega(\omega_2) \|_{C_\gamma \times B_\gamma} \leqslant \left\| \int_0^1 \frac{d\Omega}{d\omega} (\nu\omega_1 + (1-\nu)\omega_2)(\omega_1 - \omega_2)\, d\nu \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\omega\|_{C_\gamma \times B_\gamma} \leqslant R} \left\| \frac{d\Omega}{d\omega} \right\| \| \omega_1 - \omega_2 \| \leqslant M_3 \mu \| \omega_1 - \omega_2 \|.$$

Таким образом, при малых μ оператор Ω является оператором сжатия в шаре $\| \omega \|_{C_\gamma \times B_\gamma} \leqslant R$. Следовательно, уравнение (1.61) имеет единственное решение в $C_\gamma \times B_\gamma$, и оно ограничено равномерно по μ.

Следствие. *Если* $\delta_1(\tau) \in C(\bar{\delta}_1)$, $z(\varepsilon, \tau)$ — *решение* (1.4) *в форме* (1.28), *соответствующее* $\delta_1(\tau)$, *и* $\bar{z}(\varepsilon)$ — *стационарное решение* (1.4) *в форме* (1.22), *соответствующее* $\bar{\delta}_1$, *то* $z(\varepsilon, \tau) \underset{\tau \to +\infty}{\to} \bar{z}(\varepsilon)$.

Доказательство. Так как в формуле (1.28) $\delta(\varepsilon, \tau) \in C_\gamma$ и $\zeta(\varepsilon, \tau) \in B_\gamma$, то $\delta(\varepsilon, \tau)$ и $\zeta(\varepsilon, \tau)$ имеют конечные пределы при $\tau \to +\infty$ и $d\delta/d\tau(\varepsilon, \tau) \to 0$, $\tau \to +\infty$, $d\zeta/d\tau(\varepsilon, \tau) \underset{\tau \to +\infty}{\to} 0$. Так как $v(\varepsilon, \delta)$, определенное формулой (1.12), сходится абсолютно и равномерно, существует предел $z(\varepsilon, \tau) \to \tilde{z}(\varepsilon)$ при $\tau \to +\infty$. В силу замкнутости оператора A $\tilde{z}(\varepsilon)$ будет стационарным решением (1.4). Так как $\tilde{z}(\varepsilon) = \mu \sum_{i=1}^{2} \bar{\delta}_1^{(i)} u_i + o(\mu)$, где $\bar{\delta}_1^{(i)} = \lim_{\tau \to +\infty} \delta_1^{(i)}(\tau)$, то $\tilde{z}(\varepsilon)$ является тем самым стационарным решением $\bar{z}(\varepsilon)$, которое соответствует по (1.22) решению (1.35) $\bar{\delta}_1$.

1.7. О стабилизации решений задачи Коши

Предположим, что (1.4) удовлетворяет требованиям I—IV. Изучим свойства решений $z(\varepsilon, \tau)$ уравнения (1.4) с начальными условиями $z(\varepsilon, 0) = z_0(\varepsilon)$, $z_0(\varepsilon) \in D(A)$. Предположим, что ε достаточно мало и представим $z(\varepsilon, 0)$ в виде

$$z_0(\varepsilon) = \mu \sum_{i=1}^{2} \delta_0^{(i)} u_i + v(\mu^p, \mu\delta_0) + \mu^{p+1}\zeta^0, \tag{1.63}$$

где μ и ε связаны (1.17), $\zeta^0 \in E^{\infty-2}$, $v(\mu^p, \mu\delta_0) \in E^{\infty-2}$ определено формулой (1.12) и сходится абсолютно в силу малости ε;

$$\delta_0 = (\delta_0^{(1)}, \delta_0^{(2)}) \text{ и } P^{(i)} z(\varepsilon, 0) = \mu\delta_0^{(i)}, \ i = 1, 2. \tag{1.64}$$

Предположение V. Пусть $\delta_0 \in R(\bar{\delta}_1)$, где $\bar{\delta}_1$ — один из устойчивых стационаров системы (1.35).

Малые нестационарные решения (1.4), существование которых было доказано в теореме 4, будем называть фундаментальными. Если предположение V выполнено, то уравнение (1.4) имеет такое фундаментальное решение $z_f(\varepsilon, \tau)$, проекции которого на E^2 при $\tau = 0$ совпадают с проекциями начального значения задачи Коши, т. е. (ср. с (1.64)).

$$P^{(i)} z_f(\varepsilon, 0) = \mu \delta_0^{(i)}, \quad i = 1, 2. \tag{1.65}$$

Выбранное таким образом решение $z_f(\varepsilon, \tau)$ представим в форме (1.28):

$$z_f(\varepsilon, \tau) = \sum_{i=1}^{2} \delta_f^{(i)}(\varepsilon, \tau) u_i + v(\varepsilon, \delta_f(\varepsilon, \tau)) + \varepsilon^{\frac{p+1}{p}} \zeta_f(\varepsilon, \tau); \tag{1.66}$$

оно удовлетворяет начальным условиям

$$z_f(\varepsilon, 0) = \mu \sum_{i=1}^{2} \delta_0^{(i)} u_i + v(\mu^p, \mu\delta_0) + \mu^{p+1} \zeta_f^0. \tag{1.67}$$

Из (1.63) и (1.67) видно, что в начальный момент решения $z_f(\varepsilon, \tau)$ и $z(\varepsilon, \tau)$ отличаются составляющей

$$Q(z(\varepsilon, 0) - z_f(\varepsilon, 0)) = \mu^{p+1}(\zeta^0 - \zeta_f^0). \tag{1.68}$$

Проследим, как будут отличаться друг от друга решения $z_f(\varepsilon, \tau)$ и $z(\varepsilon, \tau)$ при $\tau > 0$. Допустим, что решение задачи Коши (1.63) может быть представлено в виде (1.28), где неизвестные $\delta^{(i)}(\varepsilon, \tau)$, $i = 1, 2$, и $\zeta(\varepsilon, \tau)$ при фиксированном малом ε равномерно ограничены по $\tau \in [0, \infty)$. Запишем $\delta_f(\varepsilon, \tau)$, $\zeta_f(\varepsilon, \tau)$ из (1.66) и неизвестные $\delta(\varepsilon, \tau)$, $\zeta(\varepsilon, \tau)$ в форме

$$\begin{aligned} &\delta_f^{(i)}(\varepsilon, \tau) = \mu\delta_1(\tau) + \mu^2 \hat{\delta}_f(\varepsilon, \tau), \\ &\delta^{(i)}(\varepsilon, \tau) = \mu\delta_1(\tau) + \mu^2 \hat{\delta}(\varepsilon, \tau), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{1.69}$$

где $\delta_1(\tau)$ — решение (1.35), такое, что $\delta_1(0) = \delta_0$, и

$$\zeta_f(\varepsilon, \tau) = \mu \hat{\zeta}_f, \qquad \zeta(\varepsilon, \tau) = \mu \hat{\zeta}, \tag{1.70}$$

причем в силу теоремы 4 функции $\hat{\delta}_f$ и $\hat{\zeta}_f$ ограничены в C_γ, B_γ независимо от ε. Введем новые переменные $\omega = (\omega^{(\cdot)}, \omega^{(3)})$, где $\omega^{(\cdot)} = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$, $\omega^{(\cdot)} = \hat{\delta} - \hat{\delta}_f$, и $\omega^{(3)} = \hat{\zeta} - \hat{\zeta}_f$. С учетом (1.69), (1.70) и того, что пары $\delta(\varepsilon, \tau)$, $\zeta(\varepsilon, \tau)$ и $\delta_f(\varepsilon, \tau)$, $\zeta_f(\varepsilon, \tau)$ удовлетворяют (1.29), (1.30), для неизвестного ω имеем систему

$$d\omega^{(\cdot)}/d\tau = H(\varkappa, \delta_1(\tau))\, \omega^{(\cdot)} + \mu \overline{\Psi}^{(\cdot)}(\omega), \qquad \omega^{(\cdot)}(0) = 0, \tag{1.71}$$

$$\varepsilon d\omega^{(3)}/d\tau + A_0 \omega^{(3)} = \mu \overline{\Psi}^{(3)}(\omega), \qquad \omega^{(3)}(0) = \omega_0^{(3)}, \tag{1.72}$$

где

$$\omega_0^{(3)} = (\zeta^0 - \zeta_f^0)/\mu; \quad \overline{\Psi} = (\overline{\Psi}^{(\cdot)}, \Psi^{(3)}). \tag{1.73}$$

Тогда по определению

$$\overline{\Psi}(\omega) = \Psi(\hat{\delta}_f + \omega^{(1)}, \hat{\xi}_f + \omega^{(3)}) - \Psi(\hat{\delta}_f, \hat{\xi}_f).$$

Наша задача — показать, что при достаточно малых ε система (1.71)—(1.72) имеет решение в некотором классе функций, стремящихся к нулю. Этим будет доказано существование решения задачи Коши (1.63) и получена информация о поведении решения при $\tau \to +\infty$. По аналогии с C^1_γ, C_γ, B_γ введем при $\gamma > 0$ следующие банаховы пространства:

$C^1_{\gamma,\varepsilon}$ — функции $f \mid R \to R$, $f \in C^1(R)$, с нормой $\|f\|_{C^1_{\gamma,\varepsilon}} = \sup\limits_{\tau \geq 0} |f(\tau)| e^{\gamma\tau} + \varepsilon \sup\limits_{\tau \geq 0} |df/d\tau| e^{\gamma\tau}$;

$C_{\gamma,\varepsilon}$ — пространство двумерных вектор-функций $f = (f^{(1)}, f^{(2)})$, определенное как $C_{\gamma,\varepsilon} = C^1_{\gamma,\varepsilon} \times C^1_{\gamma,\varepsilon}$, с нормой $\|f\|_{C_{\gamma,\varepsilon}} = \|f^{(1)}\|_{C^1_{\gamma,\varepsilon}} + \|f^{(2)}\|_{C^2_{\gamma,\varepsilon}}$;

$B_{\gamma,\varepsilon}$ — пространство функций $f \mid R \to E^{\alpha-2}$ с сильной производной со значением в $E^{\alpha-2}$ и нормой $\|f\|_{B_{\gamma,\varepsilon}} = \sup\limits_{\tau \geq 0} \|f(\tau)\|_{E^{\alpha-2}} e^{\gamma\tau} + \varepsilon \sup\limits_{\tau \geq 0} \|df/d\tau\|_{E^{\alpha-2}} e^{\gamma\tau}$.

При фиксированном ε пространства $C^1_{\gamma,\varepsilon}$, $C_{\gamma,\varepsilon}$ и $B_{\gamma,\varepsilon}$ обладают теми же свойствами, что были указаны для пространств C^1_γ, C_γ и B_γ соответственно.

Теорема 5. *Пусть в условиях теоремы 1 вместо требования 4 наложено требование $f(\tau) \in C_{\gamma,\varepsilon}$. Тогда в пространстве $C_{\gamma,\varepsilon}$ формулой (1.51) определен линейный ограниченный оператор T, причем оценка нормы T не зависит от ε.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, с той разницей, что оценки проводятся для $|\delta^{(i)}(\tau)| e^{\gamma\tau}$ и $\varepsilon |d\delta^{(i)}/d\tau| e^{\gamma\tau}$.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{d\zeta}{d\tau} + A_0 \zeta = f(\tau), \quad \tau \geq 0; \quad \zeta(0) = 0. \tag{1.74}$$

Теорема 6. *Пусть верны предположения I—II; кроме того, $f(\tau) \in B_{\gamma,\varepsilon}$ для некоторого $\gamma > 0$. Тогда (1.74) имеет единственное ограниченное решение, которое дается формулой $\zeta(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau T_{\frac{\tau-s}{\varepsilon}} f(s)\, ds$, причем $\zeta(\tau) \in B_{\gamma,\varepsilon}$ для любых $\varepsilon < \varepsilon_0 < \beta/\gamma$.*

Формула $S^{(\varepsilon)} f = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau T_{\frac{\tau-s}{\varepsilon}} f(s)\, ds$ определяет в пространстве $B_{\gamma,\varepsilon}$ при достаточно малых ε линейный равномерно по ε ограниченный оператор.

Ход доказательства аналогичен доказательству теоремы 3.

Решение системы (1.71), (1.72) будем искать в пространстве $C_{\gamma,\varepsilon} \times B_{\gamma,\varepsilon}$. Если $\omega^{(\cdot)} \in C_{\gamma,\varepsilon}$, $\omega^{(3)} \in B_{\gamma,\varepsilon}$, то $\overline{\Psi}^{(\cdot)}(\omega) \in C_{\gamma,\varepsilon}$, $\overline{\Psi}^{(3)}(\omega) \in B_{\gamma,\varepsilon}$. Так как $\delta_1(\tau) \in C(\bar{\delta}_1)$, то система (1.71) удовлетворяет требованиям теоремы 5 (доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 2). От системы (1.71), (1.72) перейдем к операторным уравнениям

$$\omega^{(\cdot)} = T\mu\overline{\Psi}^{(\cdot)}, \qquad \omega^{(3)} = S^{(\varepsilon)}\mu\overline{\Psi}^{(3)} + T_{\tau/\varepsilon}\omega_0^{(3)}. \tag{1.75}$$

Оценим в последней формуле свободный член и наложим ограничения на $\omega_0^{(3)}$, чтобы он был ограниченным в норме $B_{\gamma,\varepsilon}$:

$$\| T_{\tau/\varepsilon}\omega_0^{(3)} \| e^{\gamma\tau} \leqslant Me^{(-\beta/\varepsilon+\gamma)\tau} \| \omega_0^{(3)} \| \leqslant M \| \omega_0^{(3)} \|, \tag{1.76}$$

$$\varepsilon \left\| \frac{d}{d\tau} T_{T/\varepsilon}\omega_0^{(3)} \right\| e^{\gamma\tau} \leqslant Me^{(-\beta/\varepsilon+\gamma)\tau} \| A_0\omega_0^{(3)} \| \leqslant M \| A_0\omega_0^{(3)} \| \tag{1.77}$$

при $\varepsilon < \varepsilon_0 < \beta/\gamma$. Пусть $\widehat{\mathscr{B}}$ — банахово пространство, вложенное в $E^{\infty-2}$, такое, что $\widehat{\mathscr{B}} \subseteq \mathrm{D}(A_0^2)$. По теореме Банаха о замкнутом графике оператор A_0 ограничен в $\widehat{\mathscr{B}}$, т. е. $\forall u \in \widehat{\mathscr{B}}$ $\| A_0 u \|_{E^{\infty-2}} \leqslant \leqslant \| A_0 \|_{\widehat{\mathscr{B}}} \| u \|_{\widehat{\mathscr{B}}}$. Сделаем

Предположение VI. $Q(z(\varepsilon, 0) - z_f(\varepsilon, 0)) \in \widehat{\mathscr{B}}$, причем $\| Q(z(\varepsilon, 0) - z_f(\varepsilon, 0)) \|_{\widehat{\mathscr{B}}} \leqslant \varepsilon O(\mu^2)$.

Тогда в силу оценок (1.76), (1.77) и соотношений (1.68), (1.73) $\| T_{\tau/\varepsilon}\omega_0^{(3)} \|_{B_{\gamma,\varepsilon}}$ ограничено равномерно по ε при всех $\varepsilon < \varepsilon_0 < < \beta/\gamma$.

Рассмотрим (1.75) как операторное уравнение в $C_{\gamma,\varepsilon} \times B_{\gamma,\varepsilon}$ $\omega = \Omega(\omega)$. В шаре $\| \omega \|_{C_{\gamma,\varepsilon} \times B_{\gamma,\varepsilon}} \leqslant 1$ оператор Ω при достаточно малых ε имеет единственную неподвижную точку. Доказательство проводится так же, как в теореме 4. Здесь существенно заметить, что при фиксированном ε в единичном шаре в $C_{\gamma,\varepsilon} \times B_{\gamma,\varepsilon}$ $\| \overline{\Psi}^{(\cdot)} \|_{C_{\gamma,\varepsilon}}$, $\| \partial\overline{\Psi}^{(\cdot)}/\partial\omega \|_{C_{\gamma,\varepsilon}}$, $\| \overline{\Psi}^{(3)} \|_{B_{\gamma,\varepsilon}}$, $\| \partial\overline{\Psi}^{(3)}/\partial\omega \|_{B_{\gamma,\varepsilon}}$ ограничены, и оценка не зависит от ε. Поэтому при достаточно малых $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$ оператор Ω отображает шар в себя и является оператором сжатия. Этим доказана

Теорема 7. *Пусть выполнены предположения* I—VI. *Тогда решение* $z(\varepsilon, \tau)$ *задачи Коши с начальными условиями* (1.63), (1.64) *существует и может быть представлено в виде* (1.28), *причем* $z(\varepsilon, \tau) \to z_f(\varepsilon, \tau)$, *где* $z_f(\varepsilon, \tau)$ — *соответствующее фундаментальное решение, удовлетворяющее начальному условию* (1.65), (1.67).

Теорема 8. *В условиях теоремы 7 решение задачи Коши с начальными условиями* (1.63), (1.64) $z(\varepsilon, \tau)$ *стабилизируется к тому же стационарному решению* (1.4) $\bar{z}(\varepsilon)$, *что и соответствующее фундаментальное решение* $z_f(\varepsilon, \tau)$, *удовлетворяющее* (1.65), (1.67).

Следствие. *Если* $\bar{\delta}_1$ — *устойчивый* (*неустойчивый*) *стационар* (1.35), *то по формуле* (1.22) *ему соответствует устойчивое* (*неустойчивое*) *стационарное решение* (1.4) $\bar{z}(\varepsilon)$.

2. Близкие к периодическим решения уравнения Курамото—Цузуки

В этом разделе аналитически построен новый класс ДС — колебательных пространственно неоднородных решений. Анализ проведен на примере уравнения Курамото—Цузуки, которое является универсальным для описания поведения широкого класса решений систем двух уравнений типа реакции—диффузии в окрестностях критических наборов параметров [11]. В ряде работ свойства решений этого уравнения исследовались численно [12—14]. Построенные специальные непериодические решения этого уравнения описывают характер стремления к устойчивому предельному циклу. В той области параметров, где такие решения существуют, они могут определять поведение решений смешанной задачи с достаточно близкими начальными данными. В более простой ситуации подобные свойства доказаны в работах [2], [3], идеи которых существенно используются.

2.1. Постановка задачи

Будем рассматривать вторую краевую задачу для уравнения Курамото—Цузуки [1]

$$W_t = W_{xx}(1 + ic_1) + W - (1 + ic_2)\,|W|^2 W, \tag{2.1}$$

$$t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\sqrt{l},\quad W_x(0, t) = W_x(\pi\sqrt{l},\ t) = 0.$$

Здесь c_1, c_2, l — вещественные параметры, W — комплексная функция вещественных переменных t и x. Исследуются решения, не обращающиеся в нуль.

Положим

$$W = \exp\{{}^1/_2\omega(x', t) + {}^1/_2 D(t) - ic_2 t\}, \tag{2.2}$$

$$x = x'l, \qquad \lambda = -2l(1 + ic_2)/(1 + ic_1).$$

Здесь $\omega(x', t)$ — новая неизвестная комплексная функция, $D(t)$ — вещественная функция, которая будет впоследствии выражена наиболее удобным образом через неизвестную функцию $\omega(x', t)$.

Если $c_1 \neq c_2$, то c_1 и c_2 легко выражаются через комплексный параметр λ:

$$c_1 = \frac{\operatorname{Re}(\lambda + 2l)}{\operatorname{Im}\lambda}, \qquad c_2 = c_1 - \frac{|\lambda + 2l|^2}{2l\operatorname{Im}\lambda}.$$

Для простоты записи в дальнейшем вместо x' будем писать x. Уравнение (2.1) запишется в виде

$$\omega_{xx} + \frac{1}{2}\omega_x^2 + \lambda(e^{\operatorname{Re}\omega} - 1) = \frac{l\operatorname{Im}\lambda}{\bar{\lambda} + 2l}(D' - i\omega_t) \qquad \left(D' = \frac{dD}{dt}\right), \tag{2.3}$$

$$\omega_x(0, t) = \omega_x(\pi, t) = 0.$$

2.2. Условия разрешимости линейной задачи в точке бифуркации

Как известно, бифуркационные значения параметра λ определяются из решения следующей однородной линейной задачи:

$$u_{xx} + \lambda \operatorname{Re} u = 0; \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0. \tag{2.4}$$

Заметим, что эта задача не является самосопряженной. Ее решение имеет следующий вид:

$$\lambda_n = n^2\gamma, \ \gamma = 1 + i\sigma, \ u_n(x) = \gamma \cos nx + iu_0,$$
$$n = 0, 1, \ldots, \tag{2.5}$$
$$\sigma \neq 0 \leftrightarrow c_1 \neq c_2.$$

Здесь σ и u_0 — произвольные вещественные постоянные.

Лемма. *Неоднородная линейная задача*

$$u_{xx} + n^2\gamma \operatorname{Re} u = f(x), \quad f(x) = n^2 \sum_{k=0}^{p} f_k \cos knx,$$
$$u_x(0) = u_x(\pi) = 0$$

имеет решение в том и только том случае, когда

$$Mf \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Im}(\bar{\gamma} f)\, dx = 0, \tag{2.6}$$

$$Lf \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re} f \cos nx\, dx = 0. \tag{2.7}$$

При этом решение имеет следующий вид:

$$u(x) = \gamma \operatorname{Re} f_0 - i \operatorname{Im}(\bar{\gamma} f_1) \cos nx -$$
$$- \sum_{k=2}^{p} \left(\frac{\operatorname{Re} f_k}{k^2 - 1} + i \frac{\operatorname{Im}(\bar{\gamma} f_k)}{k^2} \right) \cos knx + \tilde{C} u_n(x) + i\tilde{D}. \tag{2.8}$$

Здесь $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ — произвольные вещественные постоянные. Если наложить дополнительное ограничение $Mu = Lu = 0$, то $\tilde{C} = \tilde{D} = 0$.

Доказательство. Пусть $V = \operatorname{Im}(\bar{\gamma} u)$. Тогда

$$\frac{d^2V}{dx^2} = n^2 \sum_{k=0}^{p} \operatorname{Im}(\bar{\gamma} f_k) \cos knx, \quad V_x(0) = V_x(\pi) = 0.$$

Эта задача имеет решение в том и только том случае, когда выполнено условие (2.6). При этом

$$V = - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} \operatorname{Im}(\bar{\gamma} f_k) \cos knx + \tilde{D}. \tag{2.9}$$

Для $\operatorname{Re} u$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 \operatorname{Re} u}{dx^2} + n^2 \operatorname{Re} u = n^2 \sum_{k=0}^{p} \operatorname{Re} f_k \cos knx, \quad \operatorname{Re} u_x(0) = \operatorname{Re} u_x(\pi) = 0.$$

Эта задача разрешима в том и только том случае, когда выполнено условие (2.7). Решение имеет вид

$$\operatorname{Re} u = \operatorname{Re} f_0 - \sum_{k=2}^{p} \frac{\operatorname{Re} f_k}{k^2 - 1} \cos knx \quad C \cos nx. \tag{2.10}$$

Тогда

$$V = \operatorname{Im}(\bar{\gamma} u) = \operatorname{Im} u - \sigma \operatorname{Re} u,$$

$$u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u = \operatorname{Re} u + i (V + \sigma \operatorname{Re} u) = \gamma \operatorname{Re} u + iV.$$

Подставляя сюда (2.9) и (2.10), получаем (2.8).

2.3. Преобразование уравнений и вспомогательная задача

Положим

$$\lambda = n^2 [\gamma + \varkappa(\varepsilon, \sigma) \varepsilon^2], \quad \gamma = 1 - i\sigma. \tag{2.11}$$

У числа $\varkappa$ существенен лишь знак, его модуль будет впоследствии выбран наиболее удобным образом, ε — малый вещественный параметр.

Уравнение (2.3) перепишем в виде

$$\omega_{xx} + n^2 \gamma \operatorname{Re} \omega = \varepsilon^2 \Phi(\omega) + F(\omega) + \frac{l\sigma}{\bar{\gamma} + \varepsilon^2 \varkappa + 2l/n^2} (D' - i\omega_t), \tag{2.12}$$

$$F(\omega) = -n^2 \gamma (e^{\operatorname{Re} \omega} - 1 - \operatorname{Re} \omega) - {}^1/_2 \omega_x^2, \tag{2.13}$$

$$\Phi(\omega) = -\varkappa n^2 (e^{\operatorname{Re} \omega} - 1). \tag{2.14}$$

Функция $D(t, \varepsilon, \sigma, n)$ была произвольной. Подберем ее так, чтобы функционал M аннулировал правую часть (2.12). Получаем

$$D_t(t) = \frac{|\gamma + p|^2}{l\sigma^2 p} M \left[\varepsilon^2 \Phi(\omega) + F(\omega) - \frac{il\sigma\omega_t}{\bar{\gamma} + p} \right]. \tag{2.15}$$

$$\omega_{xx} + n^2 \gamma \operatorname{Re} \omega = \varepsilon^2 \Phi(\omega) + F(\omega) - \frac{il\sigma\omega_t}{\bar{\gamma} + p} +$$

$$+ \frac{\gamma + p}{\sigma p} M \left[\varepsilon^2 \Phi(\omega) + F(\omega) - \frac{il\sigma\omega_t}{\bar{\gamma} + p} \right], \tag{2.16}$$

$$p(\varepsilon) = \varkappa \varepsilon^2 + 2l/n^2.$$

Для упрощения вычислений, как и в [2], рассмотрим вспомогательную задачу, положив $\varepsilon = 0$, $\omega_t \equiv 0$,

$$\varphi_{xx} + n^2\gamma \operatorname{Re}\varphi = F(\varphi) + \frac{\gamma + p}{\sigma p} M(F(\varphi)) - L(F(\varphi)) \cos nx, \quad (2.17)$$

$$\varphi_x(0) = \varphi_x(\pi) = 0, \quad L\varphi = M\varphi = 0.$$

Пусть δ — произвольный малый параметр. Будем искать решение задачи (2.7) в виде ряда по степеням параметра δ

$$\varphi = \gamma\delta \cos nx + \sum_{k=2}^{\infty} \delta^k \varphi_k(x). \quad (2.18)$$

Тогда

$$F(\varphi) = n^2 \sum_{k=2}^{\infty} \delta^k F_k, \quad F_2 = -\frac{\gamma}{4}(2 + i\sigma) + \frac{i\gamma\sigma}{4} \cos 2nx,$$
$$F_3 = -\frac{\gamma}{6} \cos^3 nx - \gamma \operatorname{Re}\varphi_2 \cos nx + \frac{\gamma}{n} \varphi_2' \sin nx. \quad (2.19)$$

Подставляя разложение (2.18) в уравнение (2.17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра δ, получаем

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + n^2\gamma\varphi_2 = n^2(A + b\cos 2nx),$$
$$A = -\frac{3}{4}\gamma - \frac{1}{4p}\gamma|\gamma|^2, \quad b = -\frac{\sigma^2}{4} + i\frac{\sigma}{4}.$$

Откуда

$$\varphi_2 = A + B\cos 2nx, \quad (2.20)$$
$$B = \sigma^3/48 - \sigma/16.$$

Подставляя выражения (2.20) в выражение (2.19) для F_3, получаем

$$\operatorname{Re} F_3 = \frac{1}{6}\cos^3 nx - (\operatorname{Re} A + \operatorname{Re} B \cos 2nx)\cos nx -$$
$$- 2\operatorname{Re}(\gamma B)\sin 2nx \sin nx,$$
$$LF_3 = \frac{1}{48}\left(\sigma^4 - 9\sigma^2 + 30 + 12\frac{1 + \sigma^2}{p}\right) > 0. \quad (2.21)$$

Заметим еще, что в силу (2.19) уравнение (2.17) может быть переписано в следующем виде:

$$\varphi_{xx} + n^2\gamma \operatorname{Re}\varphi - F(\varphi) - \frac{\gamma + p}{\sigma p} M(F(\varphi)) =$$
$$= -n^2 \sum_{k=3}^{\infty} \delta^k (LF_k) \cos nx. \quad (2.22)$$

Модуль $|\varkappa(\varepsilon, \sigma)|$ может быть выбран произвольно. Воспользуемся этим для упрощения последующих формул. Положим

$$|\varkappa(\varepsilon, \sigma)| = LF_3 = \frac{1}{48}\left(\sigma^4 - 9\sigma^2 + 30 + 12\frac{1+\sigma^2}{l}\right).$$

При фиксированных n, l, σ и при достаточно малом ε имеем

$$|\varkappa(\varepsilon, \sigma)| = \frac{1}{48}\left(\sigma^4 - 9\sigma^2 + 30 + 12\frac{1+\sigma^2}{2ln^2}\right) + o(\varepsilon^2). \tag{2.23}$$

Сходимость ряда (2.18) при достаточно малых δ следует из теоремы о неявной функции в аналитическом случае [6].

2.4. Построение асимптотических решений

Будем искать решение граничной задачи для уравнения (2.16) в виде

$$\omega = \varphi(x, \delta(t)) + \Omega(x, t),$$

$$\Omega_x(0, t) = \Omega_x(\pi, t) = 0, \qquad L\Omega = M\Omega = 0. \tag{2.24}$$

Здесь $\varphi(x, \delta)$ — решение вспомогательной задачи (2.17), $\delta(t)$ и $\Omega(x, t)$ — новые неизвестные функции. Подставляя (2.24) в (2.17) и учитывая, что $\varphi(x, \delta)$ удовлетворяет уравнению (2.22), получаем

$$\begin{aligned}\Omega_{xx} + n^2\gamma \operatorname{Re}\Omega &= \varepsilon^2\Phi(\varphi+\Omega) + F(\varphi+\Omega) - F(\varphi) + \\ &+ n^2\cos nx\sum_{k=3}^{\infty}(LF_k)\delta^k - \frac{il\sigma}{\bar\gamma+p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}\frac{d\delta}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial t}\right) + \\ &+ \frac{\gamma+p}{\sigma p}M\left[\varepsilon^2\Phi(\varphi+\Omega) + F(\varphi+\Omega) - F(\varphi) - \right. \\ &\left. - \frac{il\sigma}{\bar\gamma+p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}\frac{d\delta}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.25}$$

Для разрешимости (2.25) требуется, чтобы функционал L аннулировал правую часть (2.25). Последнее равносильно следующему:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^2}(\varepsilon, \sigma)\left[1 - \sum_{k=2}^{\infty}A_k(\varepsilon, \sigma)\delta^{k-1}\right]\frac{d\delta}{dt} - \varkappa\varepsilon^2\delta + \sum_{k=3}^{\infty}(Lf_k)\delta^k + \\ &+ \frac{1}{n^2}L\left(\varepsilon^2\Phi(\varphi+\Omega) + \varkappa\varepsilon^2\delta\cos nx + F(\varphi+\Omega) - F(\varphi) - \right. \\ &\left. - \frac{il\sigma}{\bar\gamma+p}\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right) = 0,\end{aligned}$$

$$q(\varepsilon, \sigma) = \frac{|\gamma+p|}{|\sigma|\sqrt{(ln^2)(2+p)}},$$

$$A_k(\varepsilon, \sigma) = \frac{k}{\sigma}\frac{1-p}{2+p}\int_0^{\pi}\operatorname{Im}(\varphi k(x)\cos knx)\,dx. \tag{2.26}$$

Уравнение (2.25) теперь принимает вид

$$\Omega_{xx} + n^2\gamma \operatorname{Re}\Omega = \varepsilon^2\Phi(\varphi+\Omega) + F(\varphi+\Omega) - F(\varphi) -$$
$$- \frac{il\sigma}{\bar{\gamma}+p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}\frac{d\delta}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial t}\right) + \frac{\gamma+p}{\sigma p} M \left[\varepsilon^2\Phi(\varphi+\Omega) +\right.$$
$$\left. + F(\varphi+\Omega) - F(\varphi) - \frac{il\sigma}{\bar{\gamma}+p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}\frac{d\delta}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)\right] -$$
$$- \cos nxL \left[\varepsilon^2\Phi(\varphi+\Omega) + F(\varphi+\Omega) - F(\varphi) -\right.$$
$$\left. - \frac{il\sigma}{\bar{\gamma}+p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}\frac{d\delta}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)\right]. \qquad (2.27)$$

Будем искать асимптотическое решение уравнений (2.26) и (2.27) в виде рядов по степеням малого параметра ε, используя «медленное время» τ:

$$\delta = \varepsilon\delta_1(\tau) + \varepsilon^2\delta_2(\tau) + \ldots, \qquad \Omega = \varepsilon^2\Omega_1(x,\tau) + \ldots,$$
$$\tau = \varepsilon^2 |\varkappa| q(\varepsilon,\sigma)\, t = Q(\varepsilon,\sigma)\, t. \qquad (2.28)$$

Параметр ε может быть как положительным, так и отрицательным.

Подставляя разложения (2.28) в уравнения (2.26) и (2.27), получаем уравнение для определения $\delta_1(\tau)$:

$$d\delta_1/d\tau + \delta_1^3 - \operatorname{sign}\delta_1 = 0. \qquad (2.29)$$

Рассмотрим два случая:

а) $\varkappa > 0$, тогда решение уравнения (2.29) имеет вид

$$\delta_1(\tau) = a(\tau - \tau_0), \qquad a(\xi) = (1 + e^{-2\xi})^{-1/2}; \qquad (2.30)$$

б) $\varkappa < 0$, тогда

$$\delta_1(\tau) = d(\tau + \tau_0), \qquad d(\xi) = (e^{2\xi} - 1)^{-1/2}, \quad \xi > 0. \qquad (2.31)$$

Заметим, что при $\xi \to +\infty$ функция $a(\xi)$ стремится к единице, а $d(\xi)$ — к нулю.

Доказательство того, что все члены рядов (2.28) могут быть последовательно определены, проводится так же, как в [3]. Здесь мы ограничимся только главным членом асимптотики. Обоснование асимптотичности рядов, по-видимому, может быть проведено по схеме [2, 3], но технически сложнее.

Из (2.15) с точностью до более высоких степеней параметра имеем

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{\varepsilon^2}{4\sigma}\frac{|\gamma+p|}{4\sigma}|\gamma|^2\delta_1^2. \qquad (2.32)$$

Подставляя в (2.32) выражения (2.30) или (2.31) для δ_1, после несложных вычислений получаем:

при $\varkappa > 0$

$$D(t) = -\frac{\varepsilon^2}{4\sigma}\frac{|\gamma+p|}{pl/n^2}|\gamma|^2\left[t - t_0 + \frac{1}{2Q}\ln(1 + e^{-2Q(t-t_0)})\right], \qquad (2.33)$$

а при $\varkappa < 0$

$$D(t) = -\frac{\varepsilon^2}{4\sigma}\frac{|\gamma + p|}{pln^2}|\gamma|^2\frac{1}{2Q}\ln\left[1 - e^{-2Q(t-t_0)}\right]. \tag{2.34}$$

Когда $t \to +\infty$, то $D(t) \to 0$ при $\varkappa < 0$, и при $\varkappa > 0$

$$D(t) \sim -\frac{\varepsilon^2}{4\sigma}\frac{|\gamma + p|}{pln^2}|\gamma|^2(t - t_0) + D_0. \tag{2.35}$$

Решение, соответствующее $\varkappa > 0$ ($\varkappa < 0$), обозначим через ω_+ (ω_-). Тогда в силу (2.2), (2.11) и (2.23) получаем

$$W_\pm = \exp\left[\omega_\pm\left(\frac{x}{\sqrt{l}}, t\right) + \frac{i}{2}D_\pm(t) - ic_2t\right], \tag{2.36}$$

$$\lambda_\pm = n^2\left[1 + i\sigma \pm \frac{\varepsilon^2}{48}\left(\sigma^4 - 9\sigma^2 + 30 + 12\frac{1+\sigma^2}{2ln^2}\right) + o(\varepsilon^2)\right]. \tag{2.37}$$

Функции $D_+(t)$ и $D_-(t)$ определяются равенствами (2.33), (2.34) соответственно.

Заметим теперь, что в силу (2.24) и (2.18)

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \varepsilon(1 + i\sigma)\cos\frac{nx}{\sqrt{l}}\left[1 + e^{-2Q(t-t_0)}\right]^{-1/2} + o(\varepsilon), \\ \omega_- &= \varepsilon(1 + i\sigma)\cos\frac{nx}{\sqrt{l}}\left[e^{-2Q(t-t_0)} - 1\right]^{-1/2} + o(\varepsilon), \quad t > t_0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Отсюда при $t \to +\infty$ равенства (2.35)—(2.38) дают

$$\begin{aligned} W_+ &\sim \exp\left[\varepsilon(1 + i\sigma)\cos nx - i\tilde{c}_2t + {}^1/_2 iD_0\right], \\ \tilde{c}_2 &= c_2 + \frac{\varepsilon^2}{8\sigma}\frac{|\gamma + p|^2}{pln^2}|\gamma|^2, \\ W_- &= \exp\left[-ic_2t + {}^1/_2 iD_0\right]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Таким образом, при $t \to +\infty$ решение W_+ описывает переход от однородного по пространству периодического решения к неоднородному по пространству предельному циклу (2.39). Такими свойствами решение обладает при значениях параметра $\mathrm{Re}\,\lambda$, близких к критическим, равным n^2, $n = 1, 2, \ldots$ Вдали от критических значений $\mathrm{Re}\,\lambda$ решения задачи Коши могут вести себя более сложным образом. Так, при численных экспериментах обнаружены такие области изменения параметров, в которых могут наблюдаться явления типа «динамического хаоса» [14].

Abstract

The systems of the reaction—diffusion equations with parameters near the critical value are investigated. There is proposed a universal approach which explains the formation of the dissipative structures. The character of the evolution of system state to dissi-

pative structure is described. The description is closely connected with existence of the group of solutions which earlier by the authors were named as fundamental.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Turing A. M.* The chemical basis of morphogenesis // Philos. Trans. Roy. Soc. London B. 1952. Vol. 237. P. 37—72.
2. *Белолипецкий А. А., Тер-Крикоров А. М.* О фундаментальных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 124, № 6. С. 850—863.
3. *Белолипецкий А. А., Тер-Крикоров А. М.* Построение фундаментальных решений абстрактного нелинейного параболического уравнения вблизи точки бифуркации // Мат. сб. 1985. Т. 128, вып. 3. С. 306—320.
4. *Белолипецкий А. А., Тер-Крикоров А. М.* Асимптотический анализ диссипативных структур в системах уравнений реакции диффузии. М.: ВЦ АН СССР, 1987. 24 с.
5. *Треногин В. А., Недосекина И. С.* О решениях нелинейных параболических уравнений, описывающих явления самоорганизации // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1631—1633.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
7. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 474 с.
8. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 331 с.
9. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 497 с.
10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
11. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems // Progr. Theor. Phys. 1975. Vol. 53, N 3. P. 687—699.
12. Многомерные диссипативные структуры в триггерных средах / С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, Ю. А. Повещенко и др. М., 1981. 26 с. (Препр./ИПМ АН СССР; № 85).
13. *Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.* Колебательные процессы в нелинейных диссипативных средах: О некоторых упрощенных моделях. М., 1982. 30 с. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 53).
14. *Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.* О диффузионном хаосе. М.,1983. 28 с. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 140).

УДК 539.2 : 539.1.03 : 539.13 : 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И МЕХАНИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОЙ РАДИАЦИИ

Ю. А. Белов, М. М. Белова, А. В. Иванов, С. С. Проценко

1. Введение

Воздействие на материалы слабоинтенсивных потоков радиации при достаточно высокой энергии бомбардирующих частиц приводит к образованию внутри твердого тела различного вида структурных дефектов. Появление этих дефектов изменяет прочностные (или иные функциональные) характеристики материалов и при достаточной концентрации дефектов может привести к разрушению облучаемого образца (или невозможности выполнения им своего функционального назначения) [1]. Критические флюенсы облучения, при которых эффекты радиационного воздействия начинают оказывать заметное влияние, в частности на прочностные свойства материала, лежат в диапазоне 10^{20}—10^{23} част./м^2 [2]. С нахождением критических флюенсов связано появление термина «радиационная стойкость» материалов.

В настоящее время возрос интерес к использованию в технике импульсных потоков радиации. Радиационно-физические и радиационно-химические аспекты воздействия мощных импульсных пучков электронов и ионов, а также возникающее при этом интенсивное акустическое излучение находят применение для термического отжига, закалки, размерной обработки материалов [3—7], разработки горных пород [8], акустических измерений [9] и пр.

Характер взаимодействия импульсных потоков заряженных частиц с различными средами, в частности с твердым телом, определяется энергией частиц, плотностью тока и длительностью пучка. При максимально больших уровнях интенсивности воздействия (порядка 10^{17} Вт/м^2) наблюдается испарение материала, образование высокотемпературной плазмы, возникновение в материале мощных ударных волн. Использование импульсных потоков радиации в технологических целях, в приборах сильноточной электроники (в вакуумных коммутаторах и разрядниках, в импульсных рентгеновских трубках и др.) предполагает более умеренный уровень интенсивности излучения — 10^9—10^{15} Вт/м^2.

Эксперименты по изучению взаимодействия импульсных потоков радиации умеренной интенсивности с твердым телом, в частности потоков электронов с металлами, полупроводниками и диэлектриками [7, 8, 9—14], обнаружили явление механического разрушения материалов и пороговый характер этого процесса. При этом критические (пороговые) флюенсы импульсной радиации

© Ю. А. Белов, М. М. Белова, А. В. Иванов, С. С. Проценко, 1989

оказались на 3—4 порядка ниже, чем в случае «чисто» радиационного воздействия. Это свидетельствует о том, что за разрушение материала становятся ответственны физические процессы, отличные от тех, которые имели место при слабоинтенсивном радиационном воздействии.

В указанной связи возникает новая научно-техническая проблема исследования радиационно-импульсной стойкости материалов. Решение этой проблемы призвано обеспечить технологическое использование импульсных потоков радиации и развитие собственно импульсной техники, которое требует создания конструкционных материалов, способных длительное время выдерживать периодические импульсные радиационные нагрузки.

Проведение натурных измерений и чисто экспериментальный подход к решению сформулированных задач сопряжены не только с большими техническими трудностями и материальными затратами, возникающими при создании ускорителей заряженных частиц. Трудности экспериментального решения задачи связаны также с высокой нестабильностью и малой экспрессностью работы мощных импульсных систем, что не позволяет с требуемой точностью определять пороговые флюенсы. Необходимость получения важной для практики информации о радиационно-импульсной стойкости конструкционных материалов обусловила развитие в этом направлении методов вычислительного эксперимента, сочетающего математическое моделирование, численные методы с использованием вычислительной техники и опорных физических экспериментов [15].

Предпосылки, на основе которых формулируется математическая модель, фиксируют предположения об объекте моделирования. В рассматриваемом случае это собственно механизм разрушения импульсными потоками радиации определенного уровня интенсивности. Следует отметить, что до настоящего времени не выработано единое мнение относительно физических процессов, ответственных за разрушение материалов при радиационно-импульсном воздействии. Большинство исследователей тем не менее признает, что основным фактором, контролирующим деструкцию, является термоудар, т. е. формирование в облучаемом материале механических полей напряжений как динамического, так и квазистатического характера, связанных с процессом интенсивного тепловыделения [16—18]. Разрушению металлов под действием собственно термоудара могут способствовать эффекты плазмон-фононного [19], а разрушению диэлектриков и полупроводников — эффекты экситон-фононного взаимодействия [17]. В частности, для объяснения механизма разрушения полупроводников и диэлектриков существует ряд качественных теорий, среди которых теория термоудара в присутствии электронно-дырочной плазмы («плазменный» механизм разрушения) [20] заслуживает наибольшего внимания. Тем не менее количественный учет вышеупомянутых факторов взаимодействия на данном этапе исследований не представляется возможным.

Результатом проведенных в данной работе исследований явилось построение математической модели процесса механического разрушения материалов в результате воздействия импульсной радиации на основе теории термоудара и кинетической теории прочности, модифицированной с учетом характерных времен воздействия 10^{-4}—10^{-9} с. Изложены результаты детального параметрического исследования задачи, полученные с помощью вычислительного эксперимента с привлечением данных натурных исследований. Показана применимость разработанного математического аппарата для прогнозирования радиационно-импульсной стойкости материалов в широком диапазоне изменения их физико-механических свойств и параметров внешнего воздействия.

Разработанная математическая модель термоударного механизма воздействия и изучение на ее основе процесса деструкции дало возможность в сравнении с опорными физическими экспериментами дать количественную оценку влияния термоудара на процесс разрушения.

2. Анализ физических основ термоударного механизма взаимодействия

В наиболее интересном с технологической точки зрения диапазоне энергий частиц (100 кэВ — 20 МэВ) основным механизмом потерь энергии частиц в веществе являются ионизационные потери. Потери энергии на радиационное торможение частиц пучка оказываются существенными лишь при энергиях частиц более 20—50 МэВ [21].

Основу ионизационных потерь составляет упругое и неупругое рассеяние первичных частиц на атомных электронах, что в металлах и полупроводниках приводит к увеличению энергии электронной подсистемы твердого тела или генерации ее — в диэлектриках.

Характерное время передачи энергии пучка электронной подсистеме твердого тела составляет величину порядка 10^{-13} с [22]. Электронная подсистема, в свою очередь, за время электрон-ионной релаксации (величина порядка 10^{-11} с) передает свою энергию ионной (атомной) подсистеме твердого тела. Таким образом, поток проникающих частиц, проходя через вещество за время порядка 10^{-13} с, нагревает электронную подсистему вещества, которая за время порядка 10^{-11} с передает свою энергию атомной подсистеме. Если рассматривать процессы воздействия пучка проникающих частиц, превосходящие длительностью время пробега излучения в веществе, можно считать, что энерговыделение во всех точках траекторий частиц происходит практически одновременно. С этой точки зрения результат непосредственного воздействия импульса радиации на материал, пренебрегая эффектами «чисто» радиационного характера, можно математически моделировать заданием на поверхности облучаемого образца или внутри его объема распределенного источника тепла. Пространственно-временная структура такого источника должна быть адекватной

данному типу радиации и пространственно-временной структуре потока излучения.

Физическая модель термоудара по своей сути проста — импульс радиации вызывает быстрый разогрев локальных областей материала, что приводит к формированию в облучаемом образце динамических и квазистатических полей механических напряжений [23]. При этом волны напряжений распространяются по материалу со скоростью звука (в акустическом приближении) и могут, взаимодействуя между собой, формировать в материале области повышенной повреждаемости. Очевидно, что динамический эффект воздействия будет проявлять себя в том случае, если длительность ввода энергии меньше или сравнима со временем прохождения волны разгрузки через зону энерговыделения. Если указанное условие не выполняется, динамическими эффектами можно пренебречь. Определяющими при этом становятся статические (точнее, квазистатические) эффекты, связанные с неравномерным нагревом вещества мишени:

формирование квазистатических полей термоупругих напряжений и остаточных напряжений, связанных с возможной пластической деформацией материала при нагреве.

Все вышесказанное составляет представление о процессах в моделируемом объекте в рамках акустического механизма взаимодействия импульсного пучка проникающих частиц с твердым телом. Возмущение, вызванное поглощением энергии заряженных частиц, моделируется заданием распределенного источника тепла специфической пространственно-временной структуры, а реакция объекта описывается языком механики сплошной среды.

Идея термоударного механизма воздействия на твердое тело импульсного пучка проникающих частиц была использована исследователями для объяснения эффектов в широком диапазоне интенсивностей воздействия: от возникновения акустических колебаний вплоть до явления разрушения материалов [11, 16] (см. также библиографию указанных работ). В соответствии с этим и первая математическая модель динамического отклика твердого тела на импульсное поглощение релятивистского пучка на основе линейной задачи термоупругости использовалась как для расчета эффектов акустического излучения [16, 18], так и для попытки оценить критические флюенсы [11] на основе наиболее примитивного критерия разрушения: $\sigma \geqslant \sigma_B$, где σ — достигаемый в процессе облучения уровень тепловых напряжений, а σ_B — предел прочности рассматриваемого материала.

Построение математической модели термоударного механизма взаимодействия более высокого уровня детализации требует расчета уровня тепловых напряжений с учетом влияния температуры, гидростатического давления, величины и скорости деформации, диссипативных эффектов и пр. Особое внимание должно быть уделено критерию разрушения. Эта задача представляется достаточно сложной, поскольку в настоящее время нет четких, установившихся представлений о том, какие физические процессы

на микроскопическом уровне отвечают за динамическое разрушение материала. Существуют различные теоретические описания этого явления, основывающиеся на особенностях поведения дислокаций при ударных нагрузках, на эффекте образования, роста и слияния микропор и др. [24]. Однако эти теории далеки от завершения и, как правило, содержат большое число параметров, которые трудно или вообще невозможно определить экспериментально. Последнее обстоятельство делает применение указанных теорий малоэффективным для проведения практических расчетов.

Для целей проведенного исследования было признано целесообразным использовать феноменологические критерии, основанные на экспериментальных данных о динамическом разрушении материалов. К таким критериям относятся концепция энергетического анализа процесса разрушения и кинетическая теория прочности, модифицированная с учетом специфики разрушения за времена порядка 10^{-4} — 10^{-9} с. При этом второй подход является более предпочтительным, поскольку в большей степени обеспечен соответствующими константами [25—27].

Итак, моделируемое физическое явление взаимодействия импульсного пучка проникающих частиц с твердым телом можно условно разделить на три взаимодействующих процесса: воздействие, оказываемое пучком, реакция среды на это воздействие и развитие деструкции. В этой связи математическая модель явления должна отражать взаимодействие моделей каждого из процессов.

3. Тепловыделение при поглощении релятивистского пучка проникающих частиц

Достоверное знание поля энерговыделения (теплового поля), формируемого внешним воздействием в твердом теле, является определяющим с точки зрения точности всех последующих вычислений.

В настоящее время наиболее последовательные расчеты прохождения заряженных частиц через вещество выполняются на основе решения кинетического уравнения переноса частиц и с использованием метода статистических испытаний (Монте-Карло) [28—31].

Решение системы уравнений Больцмана в самом общем случае отсутствует, однако в ряде практически интересных случаев (например, для падающего потока электронов с энергией $E_e \lesssim 20$ МэВ, эволюция которого в среде рассматривается за времена много большие, чем время прохождения частиц через область энерговыделения, составляющее величину порядка 10^{-10}—10^{-11} с) процесс можно считать стационарным и одночастичным, т. е. включать в рассмотрение частицы только одного сорта. В этом случае в одномерной геометрии система уравнений Больцмана имеет более простой вид, но даже в упрощенном виде уравнение переноса представляет для решения математические и вы-

числительные трудности. Для его решения в настоящее время разработано несколько специальных методов, таких, например, как метод моментов [28], метод отрезков [29] и другие. Указанные методы позволяют проводить расчеты с достаточно высокой точностью — порядка 1—3%. Преимущества и недостатки многих из них довольно подробно обсуждены в литературе [30].

В методе Монте-Карло случайное движение частицы рассматривается как некоторая траектория, а состояние частицы в каждой узловой точке разыгрывается с помощью случайных чисел из соответствующих распределений. Как правило, среда полагается изотропной, розыгрыш ведется для частиц с энергией не меньше некоторой критической (для электронов $E_e \geqslant 100$ эВ). В этом случае аппроксимацией замедления частиц в веществе будет модель некоррелированных столкновений (упругих и неупругих) частиц с отдельными атомами вещества.

К преимуществам метода Монте-Карло следует отнести возможность просто и наглядно проследить влияние тех или иных приближений расчетной модели. В этом методе нет никаких трудностей, связанных с учетом сложных геометрических границ, неодномерности задачи, с последовательным включением в рассмотрение вторичных частиц.

В качестве общего недостатка методов можно указать требование большого объема памяти ЭВМ. Это особенно существенно, когда искомое поле энерговыделения является лишь входным параметром исходной задачи. В этой связи рядом исследователей предложены различные, как правило, одномерные полуэмпирические модели расчета полей энерговыделения и выхода частиц [32, 33]. Эти алгоритмы дают несколько меньшую точность расчетов (10%), но не требуют больших затрат памяти и времени ЭВМ.

Для сравнения результатов математического моделирования механизма термоудара в данном исследовании использовались известные экспериментальные данные по сильноточному импульсному электронному воздействию. Для расчета поля энерговыделения в работе использовалась полуэмпирическая модель [33], которая описывает воздействие на материал электронных пучков с энергией электронов $E_e \sim 100$ кэВ — 20 МэВ и дает наиболее точные приближения соответствующих тепловых полей.

Пусть поток электронов падает нормально на плоскую поверхность $x = 0$ области $\{x^1 \geqslant 0;\ -\infty < x^2, x^3 < \infty\}$, $X = (x^1, x^2, x^3)$. Обозначим, следуя [33], через $I(x^1)dx^1$ энергию, выделившуюся в слое, ограниченном координатами x^1 и $x^1 + dx^1$, в расчете на один упавший электрон. Очевидно, что $I(x^1)dx^1$ с точностью до знака равна производной по координате от энергии $\mathscr{E}(x^1)$, оставленной частицами на глубине $h^* \geqslant x^1$ (здесь и далее в расчете на один упавший электрон):

$$I(x^1) = -d\mathscr{E}(x^1)/dx^1. \tag{3.1}$$

При этом функцию $\mathscr{E}(x^1)$ можно представить как произведение двух величин: $\eta_d(x^1)$ — доли упавших электронов, остановившихся на глубине $h^* \geqslant x^1$, и $E_d(x^1)$ — отношения энергии частиц, выделившейся на глубине $h^* \geqslant x^1$, к числу электронов, остановившихся на этой глубине. Таким образом,

$$I(x^1)\,dx^1 = -\frac{d}{dx^1}\left(\eta_d(x^1)\,E_d(x^1)\right)dx^1. \tag{3.2}$$

Авторы работы [33] полагают, что

$$\int_0^\infty I(x^1)\,dx^1 = (1 - f_b - f_r)\,E_0 \equiv f_d E_0, \tag{3.3}$$

где E_0 — энергия падающих электронов, f_b, f_r — средние доли падающей энергии, обратно рассеянной от облучаемой поверхности и поглощенной на глубинах, соответствующих пробегу высокоэнергетических квантов тормозного излучения R_α ($x^1 \gg R_\alpha$), соответственно.

Для определения величин $\eta_d(x^1)$ и $E_d(x^1)$ в [33] предложены эмпирические соотношения, зависящие только от среднего атомного номера Z, атомной массы вещества среды A и энергии налетающих частиц:

$$\eta_d(x^1) = \eta_{d_0} \exp\left[-\alpha\,(x^1/R_0)^{1-\beta}\right], \tag{3.4}$$

где $\alpha = (1 - 1/\beta)^{1-\beta}$, η_{d_0} — доля упавших электронов, остановившихся на глубине $h^* \geqslant 0$, β — параметр, зависящий от начальной энергии электронов E_0 и атомного номера вещества Z, R_0 — экстраполированный пробег излучения в веществе, определяемый по эмпирической формуле, предложенной в [34];

$$E_d = \begin{cases} \dfrac{f_d}{\eta_{d_0}} W(R_0 - k_1 x^1) \text{ при } k_1 x^1 \leqslant k_2 R_0; \\ \dfrac{f_d}{\eta_{d_0}} W[(1-k_2)R_0] \exp\left[-\dfrac{W'[(1-k_2)R_0]}{W[(1-k_2)R_0]}(k_1 x^1 - k_2 R_0)\right] \\ \text{при } k_1 x^1 > k_2 R_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $W(\xi)$ — кинетическая энергия электронов, соответствующая экстраполированному пробегу ξ, $k_1 = h_1 Z^{-h_2}$, h_1, h_2, k_2 — константы.

Доля обратно рассеянной энергии f_b также определяется по эмпирическим формулам, предложенным в [35, 36].

Выражение для радиационного выхода f_r из толстой мишени получено модификацией числовой константы в уравнении Коха—Мотта для полного радиационного выхода [37]. Результирующее выражение записывается в виде

$$f_r = aZ\tau_0/(1 + aZ\tau_0), \tag{3.6}$$

где τ_0 — кинетическая энергия электрона, числовая константа $a = (2{,}26 \pm 0{,}10)\cdot 10^{-4}$ и определена из прямых экспериментов [38].

Рассмотренная модель легко обобщается на случай переноса электронов в пластине толщины L, если пробег излучения в веществе меньше толщины ($R_0 < L$). При $R_0 > L$, вообще говоря, необходима соответствующая коррекция величин f_b и f_r с учетом геометрии облучения. Однако для легких элементов ($Z \lesssim 15 \div 20$) величины f_b и f_r малы и составляют несколько процентов. В этом случае, учитывая общую точность расчетов по модели, коррекция f_b и f_r становится необязательной.

Используемый алгоритм расчета поля энерговыделения единичного электрона в среде предполагает стационарность собственно процесса энерговыделения. Временная зависимость количества энергии, выделяемой в данной точке среды пучком, в целом будет определяться только пространственно-временным распределением плотности тока в пучке. В одномерном случае, при отсутствии пространственной зависимости плотности тока в пучке, поле энерговыделения в облучаемой среде можно записать в виде

$$\omega(x^1, t) = \frac{1}{e} \rho \frac{d\mathscr{E}(x^1)}{dx^1} J(t), \tag{3.7}$$

где $J(t)$ — временна́я зависимость плотности тока в пучке, e — заряд электрона.

Для прямоугольного импульса тока в одномерной геометрии

$$J(t) = J_0 H(t_n - t) H(t), \tag{3.8}$$

где $H(t)$ — функция Хэвисайда, t_n — длительность процесса энерговыделения, $J_0 = \text{const}$. Для серии импульсов с длительностями Δt_i ($i = 1, 2, \ldots, m$)

$$J(t) = J_0 \sum_i H(t - t_i) H(t_i + \Delta t_i - t). \tag{3.9}$$

В этом случае (3.7) можно переписать в виде

$$\omega(x^1, t) = \omega_0(x^1) \sum_i H(t - t_i) H(t_i + \Delta t_i - t), \tag{3.10}$$

где

$$\omega_0(x^1) = J_0 \frac{1}{e} \rho \frac{d\mathscr{E}(x^1)}{dx^1};$$

для случая моноимпульса ($m = 1$) положим $\Delta t_i = t_n$.

Задание поля энерговыделения в виде (3.7) соответствует воздействию электронного пучка с большой площадью поперечного сечения и равномерным по нему распределением тока пучка, что, как правило, совпадает с технологическими требованиями, налагаемыми на процесс импульсной термообработки.

4. Математическая модель реакции среды на импульсное тепловыделение

Математическое моделирование процесса взаимодействия импульсного пучка проникающих частиц с твердым телом имеет целью прогнозировать деструкцию материала как эффект, нежелатель-

ный с точки зрения технологии. Изучение этого процесса в рамках теории термоудара дает возможность оценить уровень и динамику возникающих при такого рода воздействии деформаций и тепловых напряжений.

При решении задач разрушения твердых тел важным является выбор типа разрушения (хрупкого или вязкого), характерного для данного вида материалов и условий нагружения.

В соответствии с экспериментальными данными модель упругого твердого деформируемого тела можно использовать для исследования картины деструкции хрупких материалов. Экспериментальные исследования характера разрушения пластичных материалов, в частности металлов, очень малочисленны и носят противоречивый характер. Как известно, при температурах выше температуры хладоломкости металлы, за редким исключением, разрушаются пластически. При этом фрактографические исследования показывают характерный для этого типа разрушения «чашечный» вид излома. В экспериментах по разрушению металлов импульсными сильноточными пучками электронов обнаружен транскристаллитный тип излома, характерный для разрушения хрупких материалов на ползучесть [10]. На основании этого многими исследователями принимается, что данный вид разрушения металлов носит хрупкий характер и влиянием возможного пластического состояния материала на процесс разрушения можно пренебречь [10, 14, 17, 39]. Вместе с тем автор работы [10] отмечает, что поверхность разрушения имеет следы пластической деформации. Интенсивное пластическое течение поверхностных слоев металла, облучаемого подпороговыми (не вызывающими разрушение) импульсами электронов, обнаружено также в работе [40]. В связи с этим для прогнозирования деструкции пластических материалов предусматривалось использование двух моделей — упругого и упругопластического тела. Соответствующие численные алгоритмы были включены в пакет программ исследования. Численное моделирование близких вариантов шло по разным моделям, что в сопоставлении с данными натурных экспериментов дало возможность исследовать влияние пластического состояния металла, определяемого скоростью его деформирования в процессе нагружения, на пороговые параметры воздействия.

Остановимся кратко на использованных в работе математических моделях. В качестве физического объекта исследования была выбрана твердотельная пластина, толщина которой мала по сравнению с другими геометрическими размерами.

Пусть в изотропном слое $\Omega = \{0 \leqslant x^1 \leqslant L;\ -\infty < x^2, x^3 < \infty\}$, $X = (x^1, x^2, x^3)$ действует распределенный тепловой источник с плотностью (3.10), реализующий импульсное тепловыделение, обусловленное потоком высокоэнергетичных электронов, длительность которого сравнима со временем прохождения упругой волной расстояния L.

Цель работы состоит в построении метода расчета параметров теплового и механических полей внутри слоя Ω при $t > 0$. Вид напряженно-деформированного состояния слоя Ω, как известно, существенно зависит от условий закрепления его на бесконечности. Рассмотрим как наиболее технологичное так называемое жесткое защемление периферийной области, при котором облучаемая и тыльная стороны свободны, а перемещения материала в направлениях, перпендикулярных направлению движения электронов пучка, ограничены. В совокупности с условием прогрева пластины по закону (3.10) это дает возможность ограничиться рассмотрением одноосного деформирования слоя в направлении оси x^1.

Если тело упруго и изотропно, задача сводится к нахождению решения системы уравнений линейной связанной термоупругости

$$a^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial t^2} = 3K\alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \tag{4.1}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + 3K\alpha_T T_0 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial (x^1)^2} = \omega(x^1, t), \tag{4.2}$$

$$\sigma_{11}(x^1, t) = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\varepsilon_{11}(x^1, t) - 3K\alpha_T (T - T_0), \qquad \varepsilon_{11}(x^1, t) = \frac{\partial u_1}{\partial x^1}, \tag{4.3}$$

$$\sigma_{22}(x^1, t) = \sigma_{33}(x^1, t) = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{11}(x^1, t) - 3K\alpha_T (T - T_0). \tag{4.4}$$

Боковые поверхности $x^1 = 0$ и $x^1 = L$ предполагаются теплоизолированными и свободными. При этом начальные и граничные условия имеют вид

$$\sigma_{11}(x^1, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{11}(x^1, 0)}{\partial t} = 0; \quad T(x^1, 0) = T_0; \tag{4.5}$$

$$\sigma_{11}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial T(0, t)}{\partial x^1} = 0; \tag{4.6}$$

$$\sigma_{11}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial T(L, t)}{\partial x^1} = 0. \tag{4.7}$$

Здесь плотность ρ, коэффициент теплопроводности k, удельная теплоемкость c, объемный модуль K и модуль сдвига μ, коэффициент линейного теплового расширения α_T, продольная скорость звука a характеризуют механические и теплофизические свойства материала слоя; T_0 — начальная температура. Искомыми являются температура $T(x^1, t)$ и отличные от нуля компоненты тензора напряжений и деформаций $\sigma_{11}(x^1, t)$, $\sigma_{22}(x^1, t)$ и $\varepsilon_{11}(x^1, t)$ соответственно. В предположении малости суммарного прогрева механические и теплофизические параметры слоя предполагались не зависящими от температуры.

Для изотропного упругого слоя сформулированная выше задача была решена методом характеристик в работе [41]. Числен-

ный метод решения рассматриваемой динамической задачи термоупругости был предложен авторами в работе [42].

При численной реализации удобнее в качестве неизвестных функций использовать $\varepsilon_{11}(x^1, t)$ и температуру $T(x^1, t)$. Пусть введены характерные масштабы длины L, времени L/a и температуры T_0. С помощью безразмерных переменных и параметров

$$\xi = \frac{x^1}{L}, \quad \tau = \frac{at}{L}, \quad s = \frac{(K + 4/3\mu)\,\varepsilon_{11}}{4K\alpha_T T_0}, \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_0},$$

$$\zeta = \frac{\sigma_{11}}{3K\alpha_T T_0}, \quad f(\xi, \tau) = \frac{L\omega(x^1, t)}{T_0 c\sqrt{\rho(K + 4/3\mu)}}, \tag{4.8}$$

$$\varkappa = \frac{(3K\alpha_T)^2 T_0}{\rho c(K + 4/3\mu)}, \quad \delta^2 = \frac{k}{Lc\sqrt{\rho(K + 4/3\mu)}}$$

систему дифференциальных уравнений для введенных переменных можно представить в эквивалентной форме

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}; \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \delta^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - \varkappa \frac{\partial s}{\partial \tau} + f(\xi, \tau); \tag{4.10}$$

$$s(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial s(\xi, 0)}{\partial \tau} = 0, \quad \vartheta(\xi, 0) = 0; \tag{4.11}$$

$$s(0, \tau) = \vartheta(0, \tau), \quad \frac{\partial \vartheta(0, \tau)}{\partial \xi} = 0; \tag{4.12}$$

$$s(1, \tau) = \vartheta(1, \tau), \quad \frac{\partial \vartheta(1, \tau)}{\partial \xi} = 0. \tag{4.13}$$

Разностные уравнения записываются на сетке узлов

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\nu, \quad \overline{\omega}_h = \{\xi_i = ih;\ i = \overline{0, N};\ h = 1/N\},$$

$$\overline{\omega}_\nu = \{\tau_j = j\nu;\ j = \overline{0, M};\ \nu = \tau_\infty/M\}, \quad \tau_\infty = \text{const}.$$

Используя основные принципы построения разностных схем и стандартные обозначения [43], аппроксимируем задачу (4.9)—(4.13) следующей разностной схемой:

$$s_{\bar\tau\tau} = s^{(\alpha_1, \alpha_2)}_{\bar\xi\xi\bar\xi\xi} - \vartheta_{\bar\xi\xi\bar\xi}, \quad \xi \in \omega_h,\ \tau \in \omega_\nu; \tag{4.14}$$

$$\vartheta_{\bar\tau} = \delta^2 \overline{\Lambda}\vartheta - \varkappa s_{\bar\tau} + f(\xi, \tau),\ \xi \in \overline{\omega}_h,\ \tau \in \omega_\nu; \tag{4.15}$$

$$\begin{gathered} s(\xi, 0) = s_0(\xi), \quad \vartheta(\xi, 0) = \vartheta_0(\xi), \quad \xi \in \overline{\omega}_h, \\ s_\tau(\xi, 0) = s_1(\xi) + (\nu/2)(s_0''(\xi) - \vartheta_0''(\xi)), \ \xi \in \omega_h; \end{gathered} \tag{4.16}$$

$$s(0, \tau) = \vartheta(0, \tau), \ s(1, \tau) = \vartheta(1, \tau), \ \tau \in \omega_\nu. \tag{4.17}$$

Разностные функции обозначаются теми же буквами, что и соответствующие функции в дифференциальной задаче. Функции $s_0(\xi)$, $s_1(\xi)$, $\vartheta_0(\xi)$ задают начальные условия. Аппроксимация краевых условий (4.12), (4.13) для функции $\vartheta(\xi, \tau)$ включена в разностное уравнение (4.15), поскольку во внутренних узлах простран-

ственной сетки ω_h $\overline{\Lambda}\vartheta = \vartheta_{\bar{\xi}\bar{\xi}}$, а в граничных узлах $\xi = 0$ и $\xi = 1$ $\overline{\Lambda}\vartheta = 2h^{-1}\vartheta_{\xi}$ и $\overline{\Lambda}\vartheta = -2h^{-1}\vartheta_{\bar{\xi}}$ соответственно.

Разностная схема (4.14)—(4.17) легко реализуется методом прогонки решения разностных уравнений (4.14), а затем (4.15) с краевыми условиями (4.17). Погрешность аппроксимации характеризуется следующими величинами: $\psi_1 = O(\nu^2 + h^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\nu)$ — погрешность замены дифференциального уравнения (4.9) разностным уравнением (4.14), $\psi_2 = O(\nu + h^2)$ — погрешность аппроксимации разностного уравнения (4.15), заменяющего (4.10). Второе начальное условие для волнового уравнения аппроксимировано со вторым порядком по ν.

При выполнении условий устойчивости схемы

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2, \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} > \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\nu^2}, \tag{4.18}$$

решение разностной схемы сходится к решению задачи (4.9)—(4.13) с первым порядком по ν и вторым по h.

Для гашения паразитической осцилляции решения, обусловленной дисперсией разностной схемы, выбором весов схемы α_1 и α_2 вводилась искусственная, исчезающая при $h \to 0$, вязкость.

При переходе к упругопластическому случаю необходимо прежде всего выбрать определенную теорию пластичности. При изучении упругопластического деформирования материалов, обусловленного импульсными силовыми и тепловыми воздействиями, уровень детализации математического описания зависит в первую очередь от выбора оператора связи между тензором напряжений и тензором деформаций, что в свою очередь тесно связано с учетом тех или иных факторов, влияющих на процесс.

Большинство работ, посвященных задачам термопластичности, основывается на теории течения или некоторых ее модификациях. Вместе с тем большое число задач о температурных напряжениях в упругопластических средах может быть исследовано методами деформационной теории. В частности, для процессов, характеризующихся относительно постоянной скоростью деформации, соотношения деформационной теории являются вполне приемлемыми. Достигаемое при этом упрощение в математической постановке, возможность применения общих методов решения и достаточная точность получаемых результатов обусловливают использование деформационной теории для решения задач рассматриваемого типа.

В теории малых упругопластических деформаций при учете температурного поля [44] принимается, что интенсивность напряжения есть функция интенсивности деформации и температуры:

$$\sigma_i = 2m(\varepsilon_i, T)\,\varepsilon_i, \sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk} - 9K\alpha_T(T - T_0). \tag{4.19}$$

Здесь, как и выше, α_T — коэффициент линейного теплового расширения, $K = \lambda + {}^2/_3\mu$ — объемный модуль сжатия, λ, μ — по-

стоянные Ламе. $m(\varepsilon_i, T)$ есть функция только интенсивности деформации и температуры, σ_i и ε_i — интенсивность напряжений и деформаций, определяемые в виде

$$\sigma_i = (3/2 s_{ij}s_{ij})^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon_i = (3/2 e_{ij}e_{ij})^{\frac{1}{2}},$$
$$s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3\delta_{ij}\sigma_{kk}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\delta_{ij}\varepsilon_{kk}. \tag{4.20}$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций. Все индексы в выражениях пробегают, если специально не оговорено, значения 1, 2, 3, а по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Функция $m(\varepsilon_i, T)$ определяется экспериментальным путем при разных температурах и фиксированной скорости деформации.

Система уравнений деформационной теории имеет вид

$$s_{ij} = 2m(\varepsilon_i, T)e_{ij}, \sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk} - 9K\alpha_T(T - T_0),$$
$$\sigma_i = 2m(\varepsilon_i, T)\varepsilon_i. \tag{4.21}$$

Из системы (4.21) преобразованиями получены определяющие уравнения теории малых упругопластических деформаций для сложного напряженного состояния, которые в предположении независимости постоянных материала от температуры имеют вид:

в области активного пластического нагружения ($d\varepsilon_i/dt > 0$)

$$\sigma_{ij} = 2m(\varepsilon_i)\varepsilon_{ij} + 1/3[3K - 2m(\varepsilon_i)]\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - 3K\alpha_T(T - T_0)\delta_{ij}, \tag{4.22}$$

в области разгрузки ($d\varepsilon_i/dt < 0$)

$$s^*_{ij} - s_{ij} = 2\mu(e^*_{ij} - e_{ij}), \quad \varepsilon_{kk} = \sigma_{kk}/3K + 3\alpha_T(T - T_0), \tag{4.23}$$

где звездочкой обозначены значения соответствующих величин в момент начала процесса разгрузки (т. е. когда $d\varepsilon_i/dt = 0$).

Помимо соотношений (4.22), (4.23) в рассматриваемой области задаются уравнения движения, уравнение притока тепла, начальные условия, а на поверхности тела — граничные условия того или иного вида.

Относительно необходимости учета влияния температуры на механические свойства материала заметим, что мы рассматриваем область температур, не превышающих 300° С. Для широкого круга металлов изменение предела текучести, модуля упругости, параметров упрочнения в этой области температур незначительно. Тем не менее подход к решению проблемы, принятый в данном исследовании, позволяет учесть это влияние на следующем этапе работ, используя хорошо известные методы.

Напомним, что при решении задач термопластичности уравнения движения, геометрические соотношения, а также уравнения неразрывности деформаций полностью сохраняются, а тепловое расширение учитывается точно так же, как в классической теории упругости. В силу вышесказанного в области $\Omega = \{0 \leqslant x^1 \leqslant L;\ -\infty < x^2,\ x^3 < \infty\}$, занятой рассматриваемым телом, по-

лучаем связанную систему уравнений для определения $\varepsilon_{11}(x^1, t)$ и $T(x^1, t)$, описывающую температурное поле пластины с учетом вязкой диссипации энергии

$$\rho\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2}\left[\left(K + \frac{4}{3}m(\varepsilon_i)\right)\varepsilon_{11}\right] - 3K\alpha_T\frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2}(T - T_0), \tag{4.24}$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial (x^1)^2} - 3K\alpha_T T_0\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial t} + \omega(x^1, t) + W^*, \tag{4.25}$$

где вид функции $\omega(x^1, t)$ соответствует соотношению (3.10), а диссипативная функция W^* определяется в соответствии с теорией малых упругопластических деформаций и имеет вид [45]

$$W^* = \eta\frac{\mu'}{\mu}(\mu - \mu')\frac{\partial}{\partial t}[e_и]^2, \tag{4.26}$$

где η — параметр вещества, μ' — текущее значение модуля сдвига, $e_и = (e_{ij}e_{ij})^{1/2}$.

Уравнения (4.24), (4.25) следует дополнить начальными и граничными условиями. Начальные условия очевидны:

$$\varepsilon_{11}(x^1, 0) = 0, \quad \frac{\partial\varepsilon_{11}(x^1, 0)}{\partial t} = 0; \quad T(x^1, 0) = T_0. \tag{4.27}$$

Граничные условия являются следствием требований

$$\sigma_{11}(0, t) = \sigma_{11}(L, t) = 0. \tag{4.28}$$

Для их формулировки в терминах функции $\varepsilon_{11}(x^1, t)$ необходимо выразить $\sigma_{11}(x^1, t)$ через $\varepsilon_{11}(x^1, t)$. Особенностью задачи является то обстоятельство, что однозначную связь между $\sigma_{11}(x^1, t)$ и $\varepsilon_{11}(x^1, t)$ можно установить, если известна также величина накопленной к моменту t пластической деформации $\varepsilon_{пл}(x^1, t)$.

Сущность применяемого численного метода состоит в дискретизации временнóй переменной, анализе эволюции напряженно-деформированного состояния в каждой точке слоя с последующим изменением коэффициентов определяющих уравнений в соответствии с положением на диаграмме интенсивностей напряжений и деформаций $\sigma_i \sim \varepsilon_i$. В результате дискретизации на каждом временнóм шаге возникает задача динамической термоупругости с определяющими коэффициентами, зависящими от истории деформации. Для решения этой задачи на каждом временном шаге был применен численный метод, предложенный в работе [42] и кратко изложенный в данном разделе в связи с механикой деформирования упругой пластины.

Алгоритм решения упругопластической задачи был реализован в виде комплекса программ на языке Фортран-IV в среде ОС ЕС ЭВМ.

Для оценки уровня напряжений был выбран динамический критерий, основанный на принципе суммирования нарушений и модифицированной кинетической теории прочности [26, 27]. В соответствии с гипотезой Рэнкина, широко используемой для

прогнозирования хрупкого разрушения в случае многоосного напряженно-деформированного состояния, в качестве разрушающего напряжения принимались нормальные составляющие тензора напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}.

Порог разрушения определялся значением плотности тока пучка $J_{кр}$, при котором разрушающее напряжение σ_p в так называемом опасном сечении $x^1 = x^*$ с заданной точностью удовлетворяет соотношению

$$\int_0^{t_p} \frac{dt^*}{t_p[\sigma_p(x^*, t^*)]} = 1, \tag{4.29}$$

где $t_p(s)$ — ресурс при некотором базовом испытании с нагрузкой $s = \text{const}$. Вид зависимости $t_p(s)$ выбирался в соответствии с [26, 27]. Порог разрушения (критический флюенс) пучка электронов вычислялся по формуле

$$\Phi_{кр} = J_{кр} t_n / e, \tag{4.30}$$

где e — заряд электрона.

В случае вязкого (пластичного) разрушения в соответствии с гипотезой максимального октаэдрического напряжения по такой же схеме анализировалось поведение $\tau_{окт}$:

$$\tau_{окт} = {}^1/_3 \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}. \tag{4.31}$$

Эксперимент показывает, что возможны следующие типы разрушения [20]:

продольный передний откол (если ось координат x^1 направлена в глубь образца перпендикулярно поверхности облучения, то за это разрушение ответственна либо компонента σ_{11} (в случае хрупкого разрушения). либо $\tau_{окт}$ (при вязком характере излома));

поперечный раскол (компоненты σ_{22}, σ_{33});

«тыльный» продольный откол (компоненты σ_{11}, $\tau_{окт}$);

образование сетки трещин, что вызвано комплексным воздействием нескольких компонент тензора напряжений.

Таким образом, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что решение задачи прогнозирования разрушения твердотельной пластины при ее импульсном нагреве пучком электронов возможно на основе анализа пространственно-временного поведения главных нормальных и октаэдрического касательного напряжений с использованием критерия разрушения (4.29).

Разработанные алгоритмы решения задач механики твердого деформируемого тела и анализа состояния материала с использованием выбранного критерия разрушения реализованы в виде пакета программ, позволяющего исследовать механику упругого и упругопластического деформирования материала в процессе облучения и определять критические флюенсы импульсного потока электронов, приводящие к деструкции материала. Пакет дает возможность изучать процесс разрушения материалов в рамках термоударного механизма в хрупком, квазихрупком и упруго-

пластическом приближениях для случая свободных от напряжения поверхностей слоя и различных условий закрепления его периферии (защемление по контуру, свободная периферия). Анализируется воздействие моноэнергетических и немоноэнергетических пучков электронов с энергией частиц в диапазоне 0,1—20 МэВ. Воздействие задается выбором соответствующей функции энерговыделения пучка в веществе мишени для требуемого диапазона энергий. Допускается различная временна́я структура пучков, характеризующаяся наличием до 10 импульсов тока одинаковой интенсивности, но отличающихся длительностью с широко варьируемыми паузами между ними.

5. Результаты вычислительного эксперимента

Проведение численных исследований было направлено на установление общих закономерностей и специфических особенностей разрушения хрупких и пластичных материалов под действием импульсных потоков интенсивности порядка 10^{10} — 10^{15} Вт/м^2. Было изучено влияние параметров облучения (энергии частиц, длительности воздействия и временно́й структуры пучка), а также геометрии облучения (толщины облучаемого слоя) на разрушающее значение флюенса частиц.

Расчеты велись для пластин из силикатного стекла и алюминия как наиболее характерных представителей хрупких и пластичных материалов. Указанный выбор определился также наличием надежных данных натурных экспериментов.

5.1. Механика деформирования и процесс разрушения хрупких материалов

В рамках термоударного механизма взаимодействия механикв деформирования облучаемого твердого тела является определяющей с точки зрения процесса разрушения.

Для изучения поведения упругих материалов были использованы физико-механические и теплофизические параметры пластины из силикатного стекла с жестко закрепленной периферийной областью. Воздействие осуществлялось электронным пучком с параметрами $E_e = 0{,}35$ МэВ, $t_n = 3 \cdot 10^{-8}$ с.

Однозначное описание напряженно-деформированного состояния облучаемого слоя в одномерном случае дает совокупность функций $\sigma_{11}(x^1, t)$, $\sigma_{22}(x^1, t) = \sigma_{33}(x^1, t)$ и $\varepsilon_{11}(x^1, t)$.

Упругие колебания слоя под действием импульса объемного энерговыделения исследовались ранее другими методами [18, 41]. Результаты этих исследований были приняты в качестве тестов для апробации метода и алгоритма численного решения задачи, принятых в данном исследовании.

Рассмотрим случай $R_0 < L$ (R_0 — экстраполированный пробег излучения в веществе).

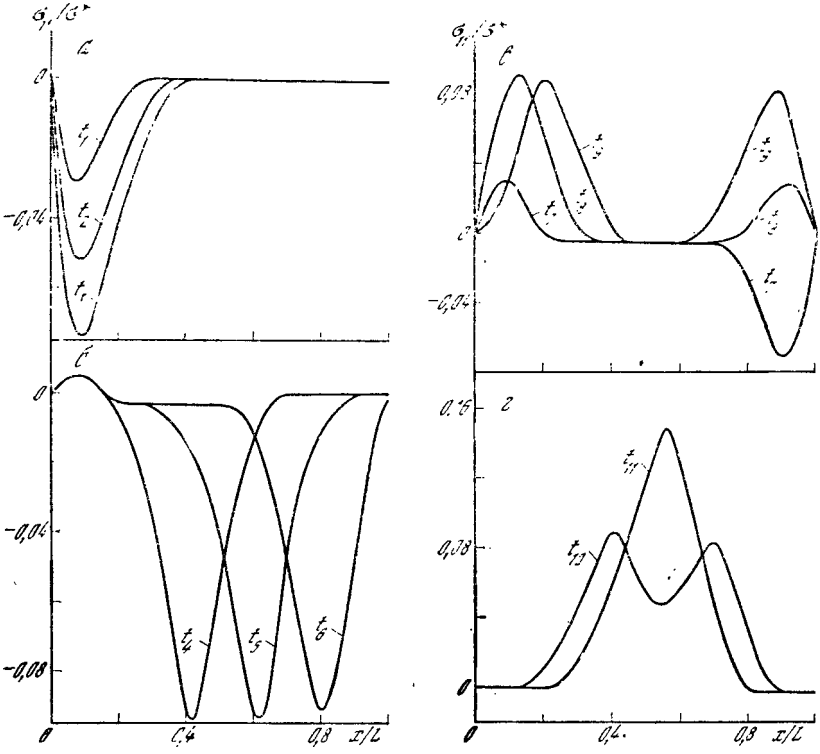


Рис. 1. Эволюция волн сжатия—растяжения динамического напряжения σ_{11} в облучаемой пластине толщины $L > R_0$

а — $0 < t_k < t_{рел}$, $k = 1, 2, 3$; *б* — $t_{рел} < t_k < t_n$, $k = 4, 5, 6$; *в* — $t_n < t_k < 2t_{мех}$, $k = 7, 8, 9$; *г* — эффект суммирования амплитуд отраженного импульса и встречного импульса разгрузки

В начальный момент времени $t < t_{рел}$, где $t_{рел} = R_0/a$ — время прохождения акустической волновой зоны энерговыделения, в области нагрева происходит рост напряжения σ_{11}, пропорциональной скорости ввода энергии в вещество (рис. 1, *а* — $0 < t_k < t_{рел}$, $k = 1, 2, 3$). К моменту $t = t_{рел}$ рост напряжений прекращается вследствие выноса энергии деформации из зоны энерговыделения упругой волной. В результате при $t_{рел} < t < t_n$ из области нагрева в положительном направлении оси x^1 со скоростью a распространяется импульс сжатия (рис. 1, *б*). Момент прекращения нагрева (окончания импульса энерговыделения) характеризуется формированием в зоне энерговыделения импульса растяжения, который также начинает двигаться вдоль оси x^1 вправо (рис. 1, *в*). Дальнейшая эволюция сформированных импульсов происходит независимо друг от друга. В результате взаимодействия с тыльной поверхностью импульс напряжения отражается от нее, меняя знак и направление движения на противоположное. Вблизи тыльной поверхности слоя происходит

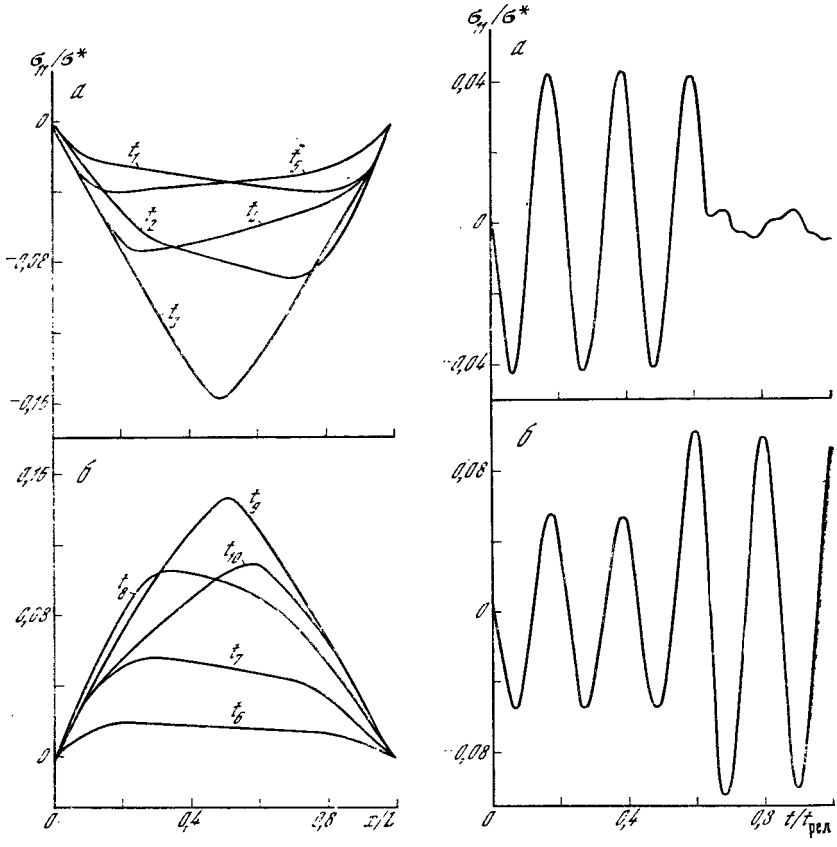


Рис. 2. Различные периоды знакопеременного нагружения в облучаемой пластине ($L \ll R_0$)

а — $t < t_{рел}$; *б* — $t_{рел} < t < 2t_{рел}$

Рис. 3. Эффект погашения и удвоения амплитуды колебаний для различных толщин поглотителя

а — $L = 3{,}1 \cdot 10^{-5}$ м; *б* — $L = 3{,}7 \cdot 10^{-5}$ м

суммирование амплитуд отраженного и встречного импульсов разгрузки. Эта зона оказывается потенциально опасной с точки зрения хрупкого разрушения, так как амплитуда нормальных растягивающих напряжений может возрасти здесь почти вдвое по сравнению с уровнем напряжений в других сечениях (рис. 1, *г*).

Здесь и далее на рисунках возрастание индекса k соответствует увеличению $t_k : t_1 < t_2 < \ldots < t_{10}$.

Определенную специфику имеет механика деформирования тонких слоев $L \ll R_0$ (рис. 2, *а*). В этом случае происходит одновременный прогрев и сжатие слоя во всех сечениях, за исключением точек $x^1 = 0$, $x^1 = L$. Фронты разгрузки начинают двигать-

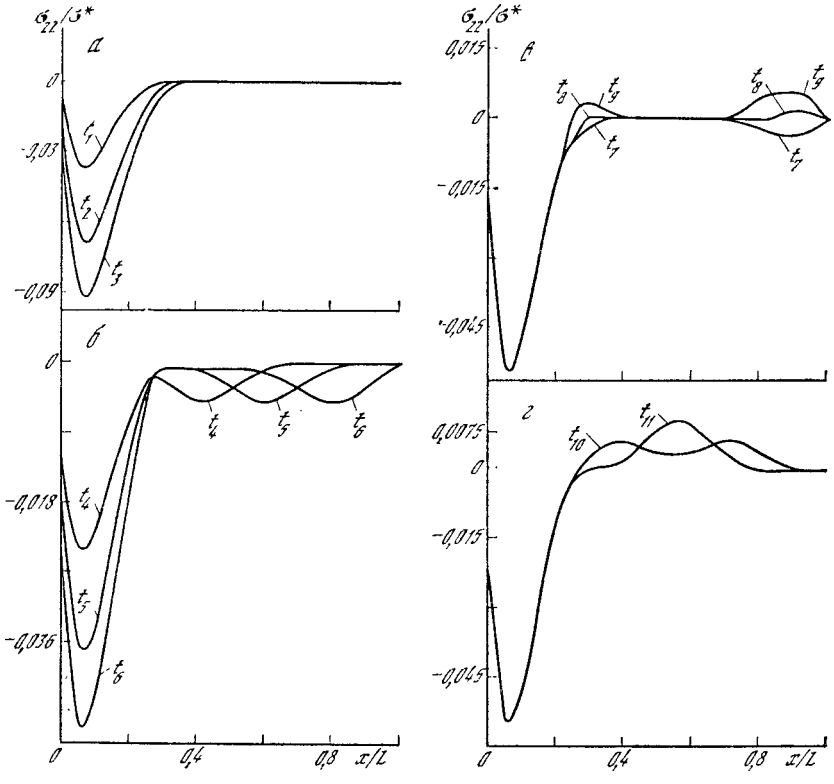


Рис. 4. Эволюция напряжения σ_{22} в облучаемой пластине толщины $L > R_0$ *а* — $t < t_{рет}$; *б* — $t_{рет} < t < t_n$; *в* — $t > t_n$; *г* — эффект суммирования амплитуд отраженного импульса и встречного импульса разгрузки

ся в глубь материала с двух сторон одновременно. В середине слоя они, взаимодействуя, формируют импульс растяжения всего слоя как целого (рис. 2, *б*). Таким образом, до окончания импульса энерговыделения упругие колебания слоя представляют собой знакопеременное нагружение с характерным периодом нагружения, равным $2t_{мех} = 2L/a$.

Окончание импульса нагрева приводит к формированию импульса разгрузки в слое. При этом момент формирования импульса разгрузки может прийтись на различные фазы первичных колебаний слоя. Если импульс разгрузки формируется одновременно с импульсом растяжений первичных колебаний, то импульсы суммируются, и амплитуда колебаний возрастает. В противном случае, когда импульс разгрузки приходится на фазу сжатия, импульсы взаимно компенсируются. Колебания слоя при этом вообще могут прекратиться. Указанные эффекты иллюстрирует рис. 3, где представлены временные зависимости напряжения σ_{11}

в центре слоя для различных толщин поглотителя. В первом случае (рис. 3, *а*) амплитуда нагружения пластины к моменту окончания импульса энерговыделения становится практически равной нулю, а во втором (рис. 3, *б*) — удваивается.

Переходя к анализу поведения компоненты σ_{22}, отметим, что согласно (4.4)

$$\sigma_{22} = \frac{3K - 2\mu}{3K + 4\mu}\sigma_{11} - \frac{18K\alpha_T\mu}{3K + 4\mu}(T - T_0), \tag{5.1}$$

т. е. напряжение σ_{22} включает в себя квазистатическую составляющую, определяемую температурным полем внутри слоя, и динамическую составляющую, пропорциональную компоненте σ_{11}. Такая «двойственность» компоненты σ_{22} объясняет специфику ее поведения в процессе импульсного нагрева.

При $t < t_{рел}$ поведение σ_{22} аналогично поведению σ_{11}, хотя значения амплитуды σ_{22} превышают соответствующие значения для σ_{11} (рис. 4, *а*).

При $t_{рел} < t < t_n$, в отличие от σ_{11}, рост амплитуды σ_{22} в зоне нагрева продолжается вследствие продолжающегося энерговыделения. При этом квазистатическая составляющая компоненты σ_{22} всегда отрицательна — слой сжат. Из зоны нагрева со скоростью a вдоль оси x^1 начинает двигаться импульс сжатия компоненты σ_{22}, пропорциональный по амплитуде компоненте σ_{11} (рис. 4, *б*).

В момент выключения импульса энерговыделения ($t > t_n$) в зоне нагрева формируется динамический импульс разгрузки (растяжения) и прекращается рост квазистатической составляющей компоненты σ_{22} (рис. 4, *в*).

Дальнейшая эволюция динамической составляющей компоненты σ_{22} происходит аналогично эволюции импульсов сжатия—растяжения компоненты σ_{11} (рис. 4, *г*).

Изменение квазистатической составляющей компоненты σ_{22} происходит в соответствии с изменением температурного поля внутри слоя, определяемого законом теплопроводности. При временах, много больших характерного времени теплопроводности

Таблица 1

Материал	Порог разрушения, Дж/г		
	σ_{11}	σ_{22}	Эксперимент [20]
SiO_2	70	240	71
NaCl	6,25	23	4—10

$t \geqslant t_{тепл} = R_0^2/a_{тепл}^2$, $a_{тепл}^2 = k/\rho c$, происходит сглаживание поля напряжений. В результате к моменту полного выравнивания температуры в слое он оказывается равномерно упруго сжат.

Поведение компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{11}(x^1, t)$ в соответствии с (4.4) в целом аналогично поведению σ_{22}.

Результаты расчетов порогов разрушения хрупких материалов представлены в табл. 1 в сравнении с известными экспериментальными данными. В качестве разрушающих компонент тензора напряжений принимались нормальные составляющие σ_{11} и σ_{22}. При этом условно полагалось, что прочность материалов на изгиб (σ_{22}) равна прочности на разрыв (σ_{11}).

Представленные данные показывают, что использование термоудара в качестве определяющего механизма взаимодействия оправдано и позволяет получить хорошее согласие расчетных и экспериментальных порогов разрушения, не требуя при данной точности расчетов учета других физических эффектов. Из данных табл. 1 следует, что при условии равной прочности материала на изгиб и разрыв более вероятным оказывается разрыв плоского образца под действием напряжения σ_{11}.

Проведенное сравнение свидетельствует также о том, что построенные в работе физическая и математическая модели процесса взаимодействия излучения с твердым телом могут быть успешно применены для прогнозирования радиационно-импульсной стойкости хрупких материалов.

5.2. Механика деформирования и процесс разрушения пластичных материалов

Закономерности процесса деформирования исследовались для модельного материала — алюминия. В качестве функции $\omega(x^1, t)$ выбиралась функция (3.10), характерная для объемного тепловыделения, обусловленного импульсным потоком электронов.

Приведенные ниже результаты расчетов полей напряжений соответствуют режиму обработки, для которого пробег излучения в веществе R_0 меньше толщины пластины ($R_0 < L$).

В качестве закона изотропного упрочнения принималась схема линейного упрочнения с симметричной характеристикой.

Результаты расчетов показали существенную зависимость механики деформирования слоя от интенсивности воздействия [46].

Выберем в качестве меры интенсивности воздействия среднюю скорость нагрева вещества $j = T_{\max}/t_n$, где $T_{\max}$ — максимальная температура вещества в зоне энерговыделения к моменту окончания процесса тепловыделения, т. е. к моменту $t = t_n$.

Очевидно, что, если достигаемая при некотором $j = j_0$ интенсивность напряжений σ_i не превышает динамический предел текучести σ_T, возбуждаемые механические колебания слоя должны носить упругий характер. Это подтвердили и расчеты (см. разд. 5.1), проведенные при интенсивностях воздействия, меньших определенного критического значения $j^1_{\text{кр}}$ (рис. 5, *а*).

При $j > j^1_{\text{кр}}$ интенсивность напряжений σ_i в зоне энерговыделения (в области максимума температурного поля) превышает предел текучести σ_T. Вследствие этого в зоне энерговыделения формируется область пластического течения материала (рис. 5, *б*). Начало течения соответствует моменту, когда σ_i превысило значение σ_T, а его окончание соответствует началу разгрузки материала.

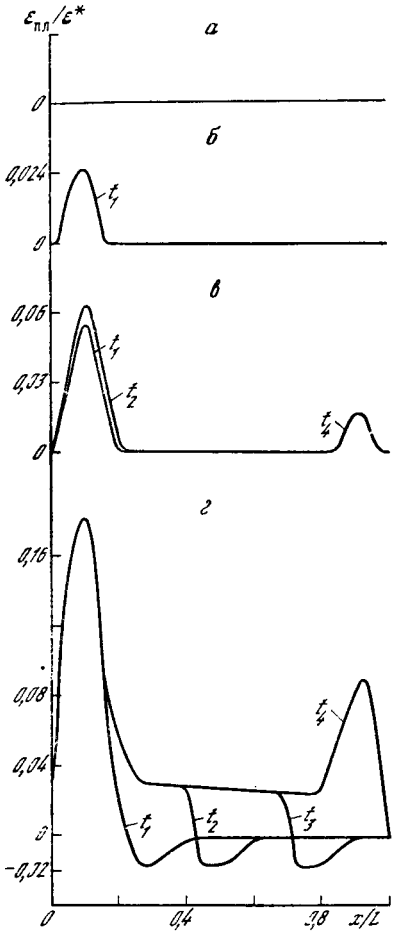


Рис. 5

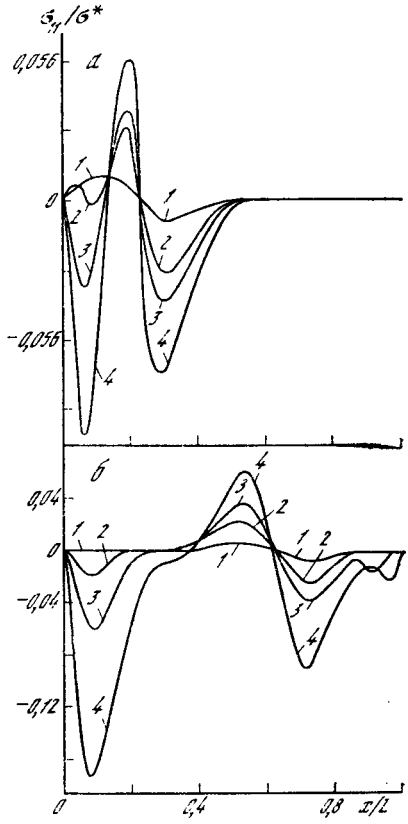


Рис. 6

Положительные значения пластической деформации $\varepsilon_{пл}$ говорят о том, что в рассматриваемой зоне происходит расширение слоя. По мере увеличения интенсивности воздействия размер зоны пластического течения возрастает, а начало течения смещается в область меньших времен. Тем не менее процесс формирования зоны продолжает носить квазистатический характер — однократно сформированная зона остаточных деформаций с течением времени изменений не претерпевает.

Наличие пластической деформации материала в зоне энерговыделения приводит к резкому уменьшению по сравнению с упругим случаем уровня возникающих здесь напряжений (как σ_{11}, так и $\sigma_{22} = \sigma_{33}$). Рис. 6, *а* иллюстрирует, как с увеличением $j > j_{кр}$ в зоне энерговыделения формируется квазистатическая область остаточных сжимающих напряжений.

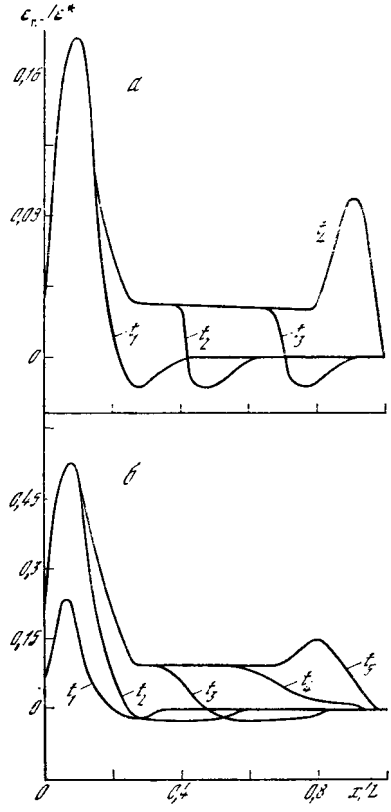


Рис. 5. Механика деформирования алюминиевой пластины при различных уровнях интенсивности воздействия

а — $j < j^1_{кр}$;

б — $j^1_{кр} < j < j^2_{кр}$;

в — $j^2_{кр} < j < j^3_{кр}$;

г — $j > j^3_{кр}$

Рис. 6. Эволюция напряжения σ_{11} в облучаемой алюминиевой пластине толщины $L > R_0$ при различных уровнях интенсивности воздействия

а — $t = 3t_n$; *б* — $t = 15t_n$;

1 — $j < j^1_{кр}$,

2 — $j^1_{кр} < j < j^2_{кр}$,

3 — $j^2_{кр} < j < j^3_{кр}$,

4 — $j > j^3_{кр}$

←

Рис. 7. Формирование биполярной волны пластической деформации в облучаемой алюминиевой пластине толщины $L > R_0$ при интенсивности воздействия $j > j^3_{кр}$

а — $t_n = 3 \cdot 10^{-8}$ с; *б* — $t_n = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ с

При скоростях ввода энергии, превышающих некоторое второе критическое значение интенсивности воздействия $j^2_{кр} > j^1_{кр}$ условия пластического течения ($\sigma_i > \sigma_T$) реализуются также в зоне суммирования двух волн разгрузки вблизи тыльной стороны облучаемого слоя (см. разд. 5.1). Здесь также возникает квазистатическая зона положительной пластической деформации (рис. 5, *в*) и соответствующая ей область остаточных сжимающих напряжений (рис. 6, *б*).

При дальнейшем возрастании интенсивности воздействия ($j > j^3_{кр}$) интенсивность напряжений σ_i становится выше динамического предела текучести уже в первичной волне сжатия—растяжения (рис. 5, *г*). В результате возникает биполярная волна пластической деформации, сопровождающая с некоторым опозданием волну напряжений. При этом амплитуда положительной полуволны пластической деформации оказывается несколько выше, чем амплитуда отрицательной. Отметим, что для интенсивности энерговыделения j порядка $j^3_{кр}$ суммарный нагрев вещества в зоне выделения энергии при длительностях воздействия $t_n \simeq 3 \cdot 10^{-8}$ с составляет величину порядка $0{,}15 \cdot T_{пл}$, где $T_{пл}$ — температура плавления материала.

С увеличением длительности воздействия это различие возрастает (рис. 7).

В целом полученные результаты имеют важное значение для понимания механики разрушения пластических материалов при импульсных объемных тепловых воздействиях. Приведенные выше результаты показывают, что наиболее опасной зоной с точки зрения разрушения пластически деформируемого твердого тела может оказаться сама область энерговыделения, где интенсивность деформации достигает своего максимального значения, тогда как для хрупких тел опасной зоной является область суммирования амплитуд прямой и отраженной волн разгрузки (так называемая область «тыльного» откола).

Переходя к результатам численного исследования разрушения пластических материалов, следует отметить, что существенным фактором, влияющим на рассматриваемый процесс, является скорость деформирования среды. Приведенный выше анализ механики упругопластического деформирования облучаемого слоя показывает, что скорость деформирования не является постоянной в процессе нагружения. В этом случае адекватность описания в рамках деформационной теории пластичности может быть достигнута путем задания некоторой средней по процессу скорости деформирования. Для рассматриваемого случая нагружения в качестве такой характеристики разумно выбрать скорость деформирования, пропорциональную скорости динамической релаксации напряжений в среде:

$$\dot{\varepsilon} \sim \dot{\sigma} \sim a/R^*, \tag{5.2}$$

где a — продольная скорость звука в среде, R^* — либо пробег излучения в веществе, либо толщина преграды.

Для получения количественных данных о порогах разрушения пластичного материала в процессе динамического нагружения необходимо знание зависимости $\sigma_i = f(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon})$, т. е. зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций и скорости деформирования. В литературе, однако, практически отсутствуют сведения о форме кривой $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ при сверхвысоких скоростях деформирования ($\sim 10^6 \div 10^7$ с$^{-1}$). Информация, как правило, ограничена данными, соответствующими скорости деформирования $\sim 10^4$ с$^{-1}$. Попытки получить требуемую информацию (в частности, о динамическом пределе текучести σ_T) методом экстраполирования не привели к желаемым результатам. Поэтому изучению влияния пластического состояния материала на порог его разрушения предшествовало нахождение определяющих параметров кривой нагружения $\sigma_i = f(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon})$ (предела текучести σ_T и модуля упрочнения E') на основе данных о натурных экспериментах [10, 14]. При этом соответствующие значения модуля упрочнения находились методом интерполяции в предположении, что $E' \to 0$ при $\dot{\varepsilon} \to \infty$, а значения σ_T — путем подбора в соответствии с экспериментальными значениями порога разрушения. Наборы констант, принятые для расчетов, иллюстрирует табл. 2.

Таблица 2

$\dot{\varepsilon}$, c^{-1}	σ_T, 10^6 Н/м²	E', 10^6 Н/м²	$\sigma_{i_{разр}}$, 10^6 Н/м²	Литература
10^1	3	3,9	—	[47]
10^2	5	3,8	—	[47]
10^3	7,5	3,1	—	[47]
10^4	10	2,5	—	[47]
10^6	20	1,8	3,23	[16]
10^7	56	1,6	5,6	[14]

Приведены также значения максимальной интенсивности напряжений в слое, соответствующие моменту разрушения ($\sigma_{i_{разр}}$).

Сравнение величин разрушающих напряжений и соответствующих пределов текучести показывает, что при скоростях деформирования $\dot{\varepsilon} \geqslant 10^7$ c^{-7} ($E_e \simeq 0{,}24$ МэВ [14]) разрушающее напряжение не превышает предела текучести. Другими словами, пластические свойства материала при таких скоростях деформирования не влияют на процесс разрушения. Действительно, расчет критических флюенсов излучения, приводящих к деструкции в упругопластическом и хрупком приближениях, дает практически равные величины $\Phi_{кр} = 1{,}7 \cdot 10^{19}$ част./м².

Снижение скорости деформирования до $\sim 10^6$ c^{-1} (энергия налетающих частиц $E_e \simeq 2{,}2$ МэВ) изменяет ситуацию. Согласно данным табл. 2 $\sigma_{i_{разр}}$ превышает предел текучести. В этом случае разрушение материала должно происходить в присутствии пластической деформации. Сравнение порогов разрушения, полученных в упругопластическом и хрупком приближениях, подтверждает высказанное предположение. Согласно расчетам, для разрушения материала как «пластического» требуется в 1,3—1,4 раза больший флюенс частиц, чем для разрушения того же материала как «хрупкого» ($3{,}75 \cdot 10^{19}$ част./м² и $3{,}0 \cdot 10^{19}$ част./м² соответственно).

Проведенные исследования показывают, что необходимость учета пластического состояния материала при расчетах стойкости к импульсному радиационному воздействию зависит от параметров и условий облучения. Если в процессе облучения реализуются скорости деформирования $\sim 10^7$ c^{-1} (малые энергии частиц либо тонкие преграды) пластичностью материала можно пренебречь. Если $\dot{\varepsilon} \sim 10^6$ c^{-1} (большая проникающая способность излучения и толстые преграды, разрушение квазистатическими составляющими напряжений), учет пластического состояния материала необходим. В противном случае ошибка вычислений может составить 30—50% и более.

В целом хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных свидетельствует о том, что принятая авторами концепция об определяющей роли термоудара в разрушении металлов импульсными электронными пучками является обоснованной. В ис-

следованном диапазоне энергий частиц при реализуемой точности расчетов учет иных факторов, способствующих разрушению металлов, не представляется целесообразным.

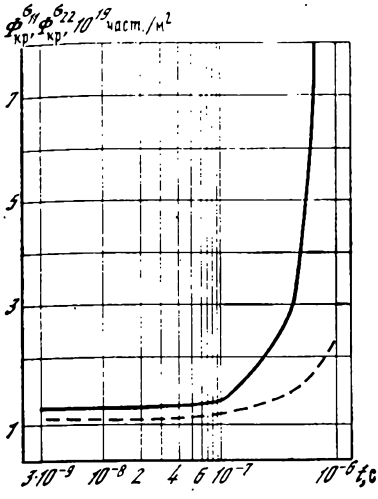
5.3. Численное исследование зависимости порога разрушения от параметров и геометрии облучения

Комплексное изучение процесса разрушения материалов под действием интенсивных импульсов проникающей радиации предполагает, в частности, исследование закономерностей изменения порога разрушения материалов от параметров внешнего воздействия и геометрии облучаемой мишени. В рассматриваемом одномерном приближении параметрами внешнего воздействия являются энергия частиц пучка E_e (или проникающая способность излучения — пробег излучения в веществе R_0), длительность воздействия t_n (или временна́я структура пучка — соотношение длительности импульсов тока и пауз между ними). С точки зрения геометрии облучения параметром служит толщина мишени L (или отношение L/R_0). Исследованию указанных зависимостей и посвящен данный раздел.

Влияние длительности воздействия на порог хрупкого разрушения. Расчет порогов разрушения проведен для силикатного стекла (SiO_2) в диапазоне длительностей нагрева $3\cdot10^{-9}$ — $8\cdot10^{-6}$ с для энергии частиц $E_e = 0{,}4$ МэВ. Толщина преграды принималась равной $L = 2\cdot10^{-3}$ м.

Анализ зависимости $\Phi_{кр}$ для случая разрушающей компоненты σ_{11} (рис. 8) свидетельствует о том, что при $t_n < (3 \div 4)\cdot10^{-8}$ с порог разрушения $\Phi_{кр}$ не зависит от длительности нагрева. При увеличении времени энерговвода критический флюенс начинает резко расти, затем возрастает все медленнее и снова становится не зависящим от длительности воздействия (последняя область графически не отображена).

Полученный результат можно интерпретировать, сравнивая длительность энерговвода t_n со временем релаксации акустических колебаний в зоне эффективного нагрева $[0, R_0)$. Если $t_n < {}^1/_2 t_{рел} \approx R_0/2a \simeq 3\cdot10^{-8}$ с, рост напряжений в зоне энерговыделения продолжается вплоть до момента «выключения» нагрева, так как вводимая энергия еще не успевает выноситься оттуда формирующимся импульсом сжатия. В противном случае импульс сжатия успевает «вобрать в себя» лишь часть энергии, равную $\sim t_{рел}/t_n$, остальное идет на собственно нагрев материала. Отсюда следует, что при $t_n > t_{рел}$ увеличение длительности воздействия должно приводить к пропорциональному росту порога разрушения динамическими составляющими напряжений. Расчеты, однако, этого не подтверждают. Последнее обстоятельство связано с тем, что при возрастании t_n увеличивается температура образца и соответственно уменьшается его механическая прочность, что учитывает критерий разрушения (4.29). Это и



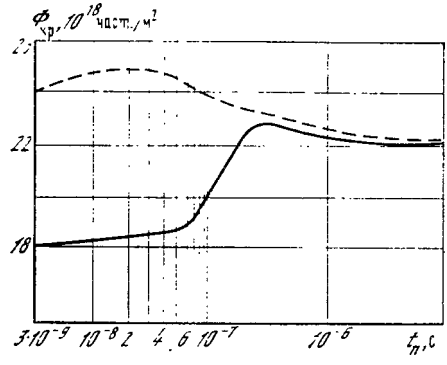


Рис. 8. Зависимость порога хрупкого разрушения от длительности воздействия динамического σ_{11} и квазистатического σ_{22} напряжений

Сплошная кривая — $\Phi_{кр}^{\sigma_{22}}$, штриховая — $\Phi_{кр}^{\sigma_{11}}$

Рис. 9. Влияние длительности воздействия на порог разрушения пластичных материалов

Сплошная кривая — упругое приближение, штриховая — упругопластическое приближение

приводит к достаточно сильному замедлению роста порога разрушения с увеличением длительности нагрева вплоть до полной остановки этого роста при переходе к механизму теплового разрушения.

Влияние длительности воздействия на порог хрупкого разрушения под действием компоненты σ_{22} представлено на рис. 8 в сравнении с $\Phi_{кр}^{\sigma_{11}}$. Легко видеть, что $\Phi_{кр}^{\sigma_{22}} > \Phi_{кр}^{\sigma_{11}}$ во всем диапазоне исследованных длительностей воздействия. Этот результат можно объяснить следующим образом. Согласно «двойственному» характеру компоненты σ_{22}, имеющей как динамическую, так и квазистатическую составляющую (см. разд. 5.1), амплитуда положительной полуволны σ_{22} всегда меньше амплитуды положительной полуволны σ_{11}, поэтому порог разрушения под действием компоненты σ_{22} будет всегда больше порога разрушения компонентой σ_{11}.

Таким образом, в случае закрепленной периферии наиболее вероятным разрушением слоя является его продольное расслоение.

Влияние длительности воздействия на процесс разрушения пластичных материалов. Механизм разрушения пластичных материалов определяется их низким сопротивлением сдвигу. По-

этому в качестве разрушающего напряжения использовалось значение $\tau_{окт}$.

Расчеты проведены для пластины из алюминия толщины $L = 2 \cdot 10^{-3}$ м в диапазоне длительностей пучка $t_n \sim 2 \cdot 10^{-9} \div 10^{-5}$ с для энергии налетающих электронов $E_e = 0{,}4$ МэВ в хрупком и упругопластическом приближениях.

Результаты расчетов, представленные на рис. 9, показывают, что в случае жесткого закрепления периферии порог разрушения в хрупком приближении практически не зависит от длительности воздействия.

Слабая зависимость величины порога разрушения от длительности воздействия получена и в упругопластическом приближении. В исследованном диапазоне времен «пластичный» порог имеет тенденцию приближения к «хрупкому». Из анализа механики деформирования мишени следует, что при увеличении длительности воздействия соответственно увеличивается среднее время нагружения материала максимальными амплитудами касательного напряжения. В соответствии с кинетической концепцией прочности при фиксированной скорости деформации это приводит к снижению уровня разрушающих напряжений и величины разрушающей пластической деформации. Последнее обстоятельство снижает энергозатраты на пластическое деформирование материала и тем самым уменьшает влияние пластического состояния материала на порог разрушения.

Влияние толщина пластины на порог разрушения. Одной из особенностей процесса разрушения материалов под действием интенсивного импульса высокоэнергетичных электронов, обнаруженных экспериментально, является зависимость порога электронного раскалывания образцов от их характерных размеров (так называемый размерный эффект) [48].

Анализировался диапазон толщин поглотителей от 10 до $2 \cdot 10^3$ мкм при облучении электронами с энергией $E_e = 0{,}4$ МэВ при длительности $t_n = 3 \cdot 10^{-8}$ с.

Хрупкие материалы. На рис. 10 приведена зависимость $\Phi_{кр} = \Phi_{кр}(L)$ для силикатного стекла, разрушаемого напряжением σ_{11}. На кривой можно выделить три характерные зоны.

В области малых толщин (менее 100 мкм) с уменьшением толщины наблюдается резко осциллирующее увеличение порогового флюенса. При этом «пространственный» период осцилляций (разница в толщинах пластин, соответствующих двум ближайшим максимумам порога) также уменьшается.

В области толщин 100—1000 мкм порог разрушения меняется слабо.

При дальнейшем увеличении L отмечается слабое увеличение порога разрушения (примерно в 3 раза при увеличении толщины на порядок).

Наблюдаемые особенности размерного эффекта можно объяснить исходя из анализа общей картины взаимодействия волн растяжения—сжатия, возникающих в пластине в процессе облу-

чения. Как показано в разд. 5.1, в момент «выключения» пучка в зоне нагрева формируется волна разгрузки (растяжения). В зависимости от толщины пластины взаимодействие отраженной волны (первоначальной волны сжатия) и волны разгрузки может происходить в различных фазах. В частности, возможно как удвоение амплитуды, так и полное или частичное погашение волн. Легко видеть, что полное погашение $2N$ раз отраженной волны сжатия и формирующейся волны разгрузки должно происходить, если

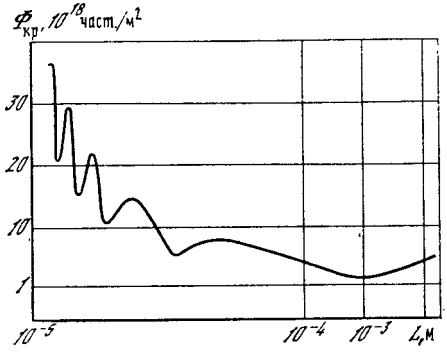


Рис. 10. Зависимость порога хрупкого разрушения динамическим напряжением σ_{11} от толщины пластины

$$2NL = at_n, \tag{5.3}$$

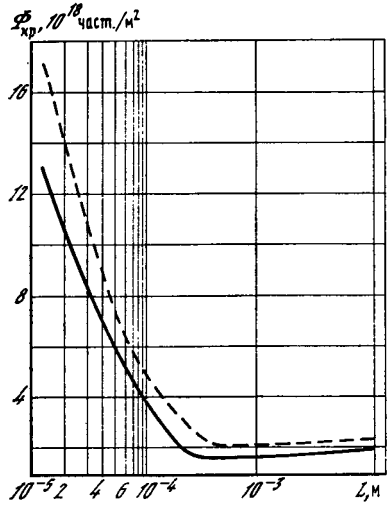
где N — натуральное число, а удвоение амплитуды, если

$$(2N - 1)L = at_n. \tag{5.4}$$

Соотношения (5.3), (5.4) дают наглядную интерпретацию наличию зоны осцилляций порогового значения флюенса.

Общий рост $\Phi_{кр}$ с уменьшением толщины поглотителя связан с формой кривой энерговыделения. Известно, что кривая энерговыделения $\omega_0(x^1) \sim d\mathscr{E}(x^1)/dx^1$ пучка электронов в веществе имеет максимум на глубине $l_{max} \simeq {}^1/_3 R_0$ (см. разд. 3). Пусть $L < l_{max}$. В таком образце тепло выделяется с меньшей интенсивностью, что приводит к уменьшению возникающих при этом тепловых напряжений приблизительно в 1,5—2 раза по сравнению с «толстыми пластинами». Кроме того, и это является определяющим, для «тонких» образцов на величину максимального значения напряжения существенное влияние оказывает разгрузка материала со стороны свободных границ. Действительно, если $t_n < t_{мех}$, то максимальное напряжение, возникающее в образце, как указывалось выше, будет пропорционально не t_n, а $t_{мех}$, которое в свою очередь пропорционально толщине поглотителя. Отсюда легко понять общую тенденцию уменьшения порога разрушения с увеличением толщины поглотителя.

Медленный рост порога разрушения с увеличением размера «толстой» пластины $t_n < t_{мех}$ также легко объяснить, если учесть, что в данном случае анализируется разрушение пластины вследствие эффекта «тыльного» откола. Разрушение данного типа связано с резким увеличением интенсивности растягивающих напряжений в результате суммирования амплитуд волны разгрузки и отраженной волны вблизи «тыльной» поверхности пластины. Очевидно, что эти амплитуды с ростом толщины образца умень-



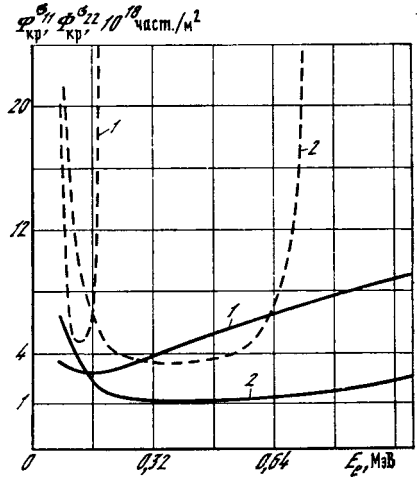


Рис. 11. Влияние толщины поглотителя на порог разрушения пластичных материалов

Сплошная кривая — упругое приближение, штриховая — упругопластическое приближение

Рис. 12. Влияние энергии частиц на порог хрупкого разрушения пластины динамическим σ_{11} и квазистатическим σ_{22} напряжениями

Сплошные кривые — $\Phi^{\sigma_{11}}_{кр}$, штриховые — $\Phi^{\sigma_{22}}_{кр}$

шаются вследствие эффектов затухания. Поэтому при прочих равных условиях интенсивность суммарной нагрузки уменьшается, а порог разрушения соответственно возрастает.

Проведенные исследования показывают, что закономерности влияния толщины на разрушение хрупких материалов, наблюдаемые экспериментально [20], достаточно хорошо описываются в рамках динамической модели хрупкого разрушения. Кроме того, выявлена новая особенность влияния толщины, а именно осцилляция порога разрушения в области толщин $L \lesssim 100$ мкм ($L < {}^1/_2 a t_n$). Последний фактор может оказаться важным при выборе толщины обрабатываемого изделия и параметров обработки с точки зрения повышения ее интенсивности.

Пластичные материалы. Зависимости порога разрушения алюминиевой пластины от ее толщины в хрупком и упругопластическом приближениях приведены на рис. 11. Физико-механические эффекты, определяющие характер этих зависимостей, остаются теми же, что и при разрушении хрупких материалов. Обращает на себя внимание отсутствие зоны осцилляций порога разрушения в области малых толщин. Это связано с тем, что анализируется разрушение под действием $\tau_{окт}$, в которое основной вклад вносит квазистатическая «тепловая» составляющая напряжения

σ_{22}. В этом случае амплитуда высокочастотных изменений величины $\tau_{окт}$ невелика, и точности расчетов, видимо, не хватает для выявления слабых осцилляций порога разрушения.

Учет пластических свойств материала повышает расчетный порог разрушения на 20—30%.

Зависимость от энергии излучения. Увеличение энергии падающих частиц приводит к увеличению размеров зоны энерговыделения R_0 и уменьшению интенсивности энерговвода при одних и тех же токовых параметрах пучка электронов, что, в целом, изменяет условия формирования полей напряжений в обрабатываемой пластине и тем самым влияет на ее порог разрушения. Для изучения особенностей этого влияния были проведены исследования зависимости $\Phi_{кр}$ от энергии налетающих электронов в упругом (хрупком) приближении.

На рис. 12 приведены пороги разрушения силикатного стекла в диапазоне энергий электронов $E_e \sim 0{,}08 \div 1{,}0$ МэВ, рассчитанные для двух толщин поглотителя (10^{-4} м (*1*) и 10^{-3} м (*2*)). Приведенные результаты показывают наличие у каждой кривой широкого минимума. Положение минимума зависит от толщины пластины. Другими словами, для каждой толщины пластины существует своя, оптимальная с точки зрени разрушения, энергия электронов. Результаты показывают, что оптимальная разрушающая энергия возрастает с увеличением толщины поглотителя. Более того, каждому значению E_e^*, как известно, соответствует определенное значение пробега R_0^*. Для толщин $L \sim R_0^*$ значение энергии E_e^* будет близким к оптимальному.

Полученные закономерности требуют объяснения. Как известно, с ростом энергии электронов интенсивность энерговыделения в максимуме уменьшается (см. разд. 3). Поэтому, казалось бы, порог разрушения с уменьшением E_e должен убывать. Однако расчет дает иную картину. Дело, видимо, в следующем. С уменьшением энергии налетающих частиц размер области энерговыделения сокращается. При этом уменьшается и время разгрузки материала в зоне нагрева $t_{рел} \approx R_0/a$. Если с уменьшением энергии электронов E_e время релаксации $t_{рел}$ станет меньше длительности пучка t_n, то энергия, вкладываемая в импульс растяжения, будет зависеть от величины $t_{рел}$, а не от t_n. Другими словами, за время $t \sim t_{рел}$ механическая энергия будет успевать выноситься из зоны нагрева. Таким образом, обсуждаемое явление должно способствовать возрастанию порога разрушения с уменьшением энергии налетающих частиц. Можно отметить и ряд других факторов, способствующих росту порога разрушения с уменьшением E_e. В соответствии с критерием разрушения (4.29), основанном на кинетическом подходе, предельное разрушающее напряжение возрастает с уменьшением длительности приложения нагрузки. С уменьшением энергии частиц формируемый импульс напряжения сокращается. Это и должно приводить к уменьшению разрушающего напряжения

и соответственно к росту порога разрушения. Кроме того, для коротких импульсов более существенно сказывается эффект затухания с расстоянием, что в целом снижает уровень возникающих в пластине напряжений.

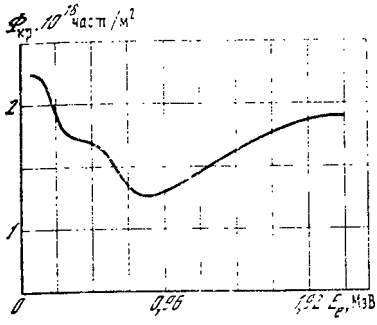
Взаимодействие рассмотренных выше физико-механических эффектов и определяет вид энергетической зависимости $\Phi_{кр} = \Phi_{кр}(E_e)$, характеризующейся наличием минимума порога разрушения. Обращает на себя внимание зависимость положения минимума кривой $\Phi_{кр} = \Phi_{кр}(E_e)$ от толщины пластины. Положение минимума соответствует толщине слоя порядка R_0, т. е. пробегу излучения в веществе. Этот факт, по-видимому, связан с тем, что при некоторой энергии частиц E_e, соответствующей условию $R_0 > L$, перестают действовать факторы, связанные с затуханием волны и длительностью воздействия. Увеличение порога в этой области энергий электронов с ростом E_e определяется лишь уменьшением интенсивности энерговыделения.

Рассмотренная выше особенность зависимости $\Phi_{кр} = \Phi_{кр}(E_e)$ для процесса хрупкого разрушения характеризует разрушение материала на разрыв (действие динамической компоненты тензора напряжений σ_{11}).

На рис. 12 также представлена зависимость порога разрушения на изгиб, т. е. под действием компоненты σ_{22}. Как правило, рассчитанный порог разрушения на изгиб оказывается выше порога разрушения на разрыв. Характер зависимостей $\Phi_{кр}^{\sigma_{11}}(E_e)$ и $\Phi_{кр}^{\sigma_{22}}(E_e)$ близок, однако рост $\Phi_{кр}^{\sigma_{22}}$ при больших значениях E_e происходит более интенсивно. Здесь в действие вступает дополнительный фактор: с ростом E_e пробег становится больше толщины пластины, резко повышается «равномерность» прогрева пластины пучком, а следовательно, резко уменьшается абсолютная величина σ_{22}.

Близкая по характеру зависимость $\Phi_{кр} = \Phi_{кр}(E_e)$ получается для случая квазихрупкого (т. е. под действием касательных напряжений) разрушения металлов (рис. 13). Обращает на себя внимание ярко выраженный перелом на кривой, соответствующий ситуации $R_0 \geqslant L$. Резкое уменьшение порога с ростом E_e в этом случае связано с тем, что при $R_0 \geqslant L$ зона максимума энерговыделения совпадает с областью суммирования волн разгрузки. Это приводит к увеличению максимально достигаемой в процессе деформирования амплитуды касательных напряжений.

Влияние временнóй структуры пучка на порог разрушения. При создании ускорителей электронных пучков в ряде случаев удобнее и проще сформировать пучки с периодической временнóй структурой (серия токовых импульсов), чем непрерывные. В связи с этим встает вопрос о сравнительной эффективности воздействия на материал пучков различной временнóй структуры, он представляется важным с точки зрения оптимизации с целью достижения максимальной интенсивности неразрушающего воздействия.



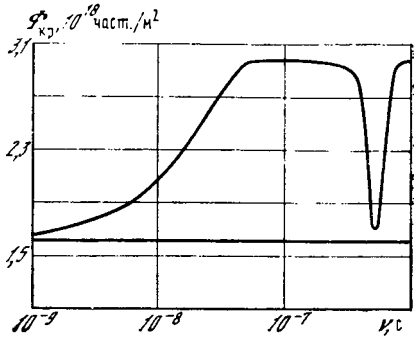


Рис. 13. Влияние энергии частиц на порог разрушения алюминиевой пластины октаэдрическим касательным напряжением $\tau_{окт}$

Рис. 14. Влияние временнóй структуры пучка на порог хрупкого разрушения облучаемой пластины

Для решения поставленной задачи была проведена серия расчетов порогов хрупкого разрушения силикатного стекла моноимпульсным пучком и пучком, состоящим из двух одинаковых по амплитуде и длительности импульсов (по $3\cdot10^{-8}$ с каждый), разделенных варьируемой временной паузой ν. Результаты исследования представлены на рис. 14 в виде зависимости $\Phi_{кр}$ от длительности паузы. На этом же рисунке прямой линией нанесен порог разрушения моноимпульсным пучком с длительностью $6\cdot10^{-8}$ с.

Порог разрушения с увеличением длительности паузы меняется немонотонно. Так, при $\nu = 0$ порог разрушения равен порогу разрушения моноимпульсом с длительностью $t_n = 6\cdot10^{-8}$ с. С ростом ν порог увеличивается. При $\nu \simeq 2t_{мех} \simeq 7\cdot10^{-7}$ с наблюдается резкий «провал» порога практически до уровня разрушения моноимпульсом с $t_n = 6\cdot10^{-8}$ с.

Понять наблюдаемую зависимость позволяет анализ механики деформирования. Действительно, если $\nu < t_{рел} = R_0/a$, механическая энергия, вносимая напряжением σ_{11} от второго импульса тока, успевает суммироваться с энергией первого. Поэтому при $\nu < t_{рел}$ порог разрушения $\Phi_{кр}$ двумя импульсами по $t_n = 3\cdot10^{-8}$ с не отличается от $\Phi_{кр}$ для моноимпульса с $t_n = 6\cdot10^{-8}$ с. Если $\nu > t_{рел}$, механическая энергия первого импульса выносится волной сжатия—растяжения из зоны энерговыделения. Энерговыделение второго импульса формирует новую волну сжатия—растяжения, разделенную в пространстве с первой. Амплитуда этих волн в 2 раза меньше, чем амплитуда волны от моноимпульса удвоенной длительности. Простой анализ по критерию

разрушения (4.29) показывает, что в случае $\nu > t_{рел}$ порог разрушения должен быть примерно в 2 раза выше, чем при разрушении моноимпульсом.

При $\nu \sim 2t_{мех}$, как отмечалось в разд. 5.1, происходит совмещение в пространстве дважды отраженной волны сжатия—растяжения от первого импульса тока с вновь сформированной волной от второго импульса. Энергия волн при этом почти удваивается. Полное удвоение амплитуды не происходит вследствие нелинейных эффектов взаимодействия волн, а также вследствие затухания волны от первого импульса тока при ее прохождении через слой и обратно.

Легко видеть, что в общем случае рассмотренный эффект должен иметь место при $\nu = 2Nt_{мех}$, где N — любое натуральное число. Однако с увеличением N амплитуда «провала» будет уменьшаться вследствие эффекта затухания многократно отраженных волн. Обнаруженный эффект выявлен для случая хрупкого разрушения динамическим напряжением σ_{11}. В случае разрушения слоя компонентами тензора напряжений, содержащими квазистатические составляющие, релаксационные процессы будут связаны не только со временем механической релаксации $t_{рел}$, но и с характерным временем теплопроводности. В зависимости от интенсивности разрушающего напряжения превалирующими могут быть как динамические эффекты, так и квазистатические. При этом динамический эффект всегда будет выражен слабее, чем это имеет место при разрушении компонентой σ_{11}. Квазистатический эффект станет заметен лишь при длительностях паузы $\nu = R_0^2/a^2_{тепл}$ и более, где $a^2_{тепл}$ — температуропроводность.

Полученные результаты показывают, что для тепловой обработки поверхности хрупких материалов целесообразнее применять электронный пучок периодической временнóй структуры, а не моноимпульсы, так как есть возможность выбором пауз между импульсами достигнуть более высоких температур неразрушающей обработки. И наоборот, если требуется минимизация энергетических затрат на разрушение (при размерной обработке материалов, разрушении горных пород и пр.), этого также можно достичь выбором соответствующей длительности пауз.

Результаты вычислительного эксперимента, изложенные в данной статье, не исчерпывают возможностей разработанного программного обеспечения. В области исследования радиационно-импульсной стойкости материалов они многообразнее и глубже.

Пользуясь возможностью, авторы выражают признательность профессору В. П. Малкову за участие в обсуждении результатов исследований.

Abstract

The article considers problems of interaction of moderate intensity radiation flows (10^9 — 10^{15} Wt/m^2) with solid body. Some one-dimensional models are proposed for the process of mechanical distruction of materials caused by the impulse radiation. The models are based on thermo-impact theory as well as kinetic solidity theory, the latter being modified to take into account characteristic interaction duration times 10^{-4} — 10^{-9} c. The results of detailed parametric study of the problem are presented based on computer experiments and employment of real data.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радиационная стойкость материалов радиотехнических конструкций: Справочник / Под ред. Н. А. Сидорова, В. К. Князева. М.: Сов. радио, 1976. 567 с.
2. Радиационная стойкость в оптоэлектронике / Под ред. В. Г. Средина. М.: Воениздат, 1987. 167 с.
3. Разработка и применение источников интенсивных электронных пучков. Новосибирск: Наука, 1976. 191 с.
4. Импульсный разряд в диэлектриках. Новосибирск: Наука, 1985. 162 с.
5. Сильноточные импульсные электронные пучки в технологии. Новосибирск: Наука, 1983. 168 с.
6. V Всесоюзный симпозиум по сильноточной электронике (22—24 мая): Тез. докл. Томск, 1984. Ч. 2. 263 с.
7. Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов. М.: Высш. шк., 1983. Т. 2: Обработка материалов с использованием высококонцентрированных источников энергии / Б. А. Артамонов, Ю. С. Волков, В. И. Дрожалкова и др. 208 с.
8. Термомеханические методы разрушения горных пород: Тр. Первой Всесоюзн. науч-техн. конф. (28 окт.— 1 нояб. 1969 г.) Киев: Наук. думка, 1969, 269 с.
9. *Беспалько А. А., Геринг Г. И.* Акустическая дозиметрия интенсивных электронных пучков // Журн. теорет. физики. 1980. Т. 50. С. 213—215.
10. *Steverding* E., *Austin C. W., Werkneiser A. H.* Fracture by superimposing stress waves // J. Appl. Phys. 1972. Vol. 43. P. 3217—3219.
11. *Oswald R. B.* Fracture of silicon and germanium induced by pulsed electron irradiation // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1966. Vol. 13, N 6. P. 63—69.
12. *Avery R. T., Keefe D., Brekke T. L., Finnie I.* Shattering rock with intense bursts of energetic electrons // Ibid. 1973. Vol. 20, N 3. P. 1010—1017.
13. *Вайсбурд Д. И., Балычев И. И.* Разрушение твердого тела в результате сверхплотного возбуждения его электронной подсистемы // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 15, вып. 9. С. 537—540.
14. *Волков В. Г., Гайнулин К. Г., Недосеев С. Л.* и др. Моделирование мгновенного термоудара в веществе с помощью релятивистских электронных пучков (РЭП) // Вопр. атом. науки и техники. Термоядер. синтез. 1981. Вып. 1(7). С. 36—41.
15. *Самарский А. А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестн. АН СССР. 1979. № 5. С. 38—49.
16. *Oswald R. B., McLean F. B., Schallhorn D. R., Buxton L. D.* One-dimensional thermoelastic response of solids to pulsed energy deposition // J. Appl. Phys. 1971. Vol. 42, N 9. P. 3463—3473.
17. *Вайсбурд Д. И.* Свойства ионных кристаллов при высоких плотностях ионизации: Автореф. дис. ... д-ра тех. наук. ИОФ АН СССР, М., 1984. 49 с.

18. *Perry F. C.* Thermoelastic response of polycrystalline metals to relativistic electron beam absorption // J. Appl. Phys. 1970. Vol. 41, N 2. P. 5017—5022.
19. *Атаманова Г. Н.*, *Мелькер А. И.*, *Токмаков И. Л.* Разрушение алюминиевого сплава импульсными электронными пучками // Физика и химия обраб. материалов. 1976. № 4. С. 29—32.
20. *Вайсбурд Д. И.*, *Семин Б. Н.*, *Таванов Э. Г.* Высокоэнергетическая электроника твердого тела / Под ред. Д. И. Вайсбурда. Новосибирск: Наука, 1982. 227 с.
21. *Мухин К. Н.* Экспериментальная ядерная физика. М.: Атомиздат, 1974. Т. 1. 584 с.
22. *Анисимов С. И.*, *Имас Я. А.*, *Романов Г. С.*, *Ходаков Ю. В.* Действие излучений большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970. 272 с.
23. *Зельдович Я. Б.*, *Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
24. *Регель В. Р.*, *Слуцкер А. И.*, *Томашевский Э. Е.* Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974. 560 с.
25. *Канель Г. И.* О работе откольного разрушения // Физика горения и взрыва. 1982. Т. 18, № 4. С. 84—88.
26. *Молодец А. М.*, *Дремин А. Н.* Распространение принципов кинетической концепции прочности на процесс откольного разрушения // Там же. 1983. Т. 19, № 1. С. 88—94.
27. *Молодец А. М.*, *Дремин А. Н.* Температурная зависимость откольной прочности // Там же. № 5. С. 154—158.
28. *Spenser L. V.* Theory of electron penetraition // Phys. Rev. 1955. Vol. 98, N 6. P. 1597—1615.
29. *Евдокимов О. Б.* Некоторые общие вопросы переноса быстрых электронов. 3. Многократное рассеяние быстрых электронов в неоднородной пластине // Изв. вузов. Физика. 1973. № 1. С. 17—23.
30. *Кольчужин А. М.*, *Учайкин В. В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978. 255 с.
31. *Аккерман Л. Ф.*, *Никитушев Ю. М.*, *Ботвин В. А.* Решение методом Монте-Карло задач переноса быстрых электронов в веществе. Алма-Ата: Наука, 1972. 163 с.
32. *Евдокимов О. Б.*, *Королев Ю. Д.*, *Пономарев В. Б.* Метод упрощенного расчета распределения потерь энергии быстрых электронов // Сильноточные импульсные электронные пучки в технологии. Новосибирск: Наука, 1983. С. 85—93.
33. *Tabato T.*, *Ito R.* An algorithm for energy deposition by fast electrons // Nucl. Sci. and Eng. 1974. Vol. 53, N 2. P. 226—239.
34. *Tabato T.*, *Ito R.*, *Okabe S.* Generalized semiempirical equations for the extrapolated range of electrons // Nucl. Instrum. and Meth. 1972. Vol. 103. P. 85—191.
35. *Tabato T.*, *Ito R.*, *Okabe S.* An empirical equation for the backscattering coefficients of electrons // Ibid. 1971. Vol. 94. P. 509—513.
36. *Tabato T.*, *Ito R.*, *Okabe S.* An empirical equation for the average energy-loss fraction of back scattered electrons. 2 // Jap. J. Appl. Phys. 1972. Vol. 11, N 8. P. 1220.
37. *Koch H. W.*, *Motz I. W.* Bremsstrahlung cross-section formula and related data // Rev. Mod. Phys. 1959. Vol. 31. P. 920—955.
38. *Rester D. H.*, *Dance W. E.*, *Dirrickson I. H.* Thick target bremsstrahlung produced by electron bombardment of targets of Be, Sn and Au in the energy range 0,2—2,8 MeV // J. Appl. Phys. 1970. Vol. 41. P. 2682—2692.
39. *Мелькер А. И.*, *Токмаков И. Л.* Разрушение твердых тел при облучении электронами // Физика и химия обраб. материалов. 1977. № 5. С. 62—68.
40. *Шубин А. Ф.*, *Ротштейн В. Н.*, *Проскуровский Д. И.* Пластическая деформация металла под действием интенсивного электронного пучка длительностью 10^{-8}—10^{-7} с // Изв. вузов. Физика. 1974. № 7. С. 50—53.

41. *Zaker T. A.* Stress waves generated by heat addition in elastic solid // Trans. ASME E. 1965. Vol. 32. P. 143—152.
42. *Белова М. М., Гончаренко В. М., Иванов А. В.* и др. Численное решение задачи о динамическом деформировании пластины при импульсном тепловом воздействии // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 9. С. 98—103.
43. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
44. *Новацкий В. К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.
45. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
46. *Белова М. М., Иванов А. В., Проценко С. С.* Динамика деформирования упругопластического слоя при импульсном энерговыделении / Пробл. прочности. 1987. № 12. С. 87—91.
47. *Орленко Л. П.* Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. М.: Машиностроение, 1964. 168 с.
48. *Белова М. М., Иванов А. В., Проценко С. С.* Резонансный характер размерного эффекта в явлении хрупкого разрушения «тонких» пластин при импульсном объемном энерговыделении // Докл. АН УССР. Физ.-мат. и техн. науки. 1987. № 3. С. 42—45.

2. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 519.6 : 551.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛИМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Г. Л. Стенчиков, Д. С. Степанов

1. Введение

Масштабы современного воздействия человека на природу столь велики, что люди, сами того не желая, могут изменить один из важнейших факторов существования жизни на Земле — климат.

Устойчивые средние многолетние термические и гидрологические режимы различных регионов Земного шара (климат) являются результатом взаимодействия разнообразных физических процессов, протекающих в окружающей человека естественной среде: атмосфере, океане, на суше. Важнейшими факторами формирования климата являются оптические свойства атмосферы, ее химический состав, физические характеристики подстилающей поверхности.

Уже сейчас эти свойства подвергаются активному воздействию со стороны человека в результате расширения его хозяйственной деятельности. Поверхность Земли преобразуется, меняет свой облик, а с ним и многие физические характеристики. Промышленные предприятия и транспорт выбрасывают в атмосферу сотни миллионов тонн аэрозолей, углекислого и сернистого газов, изменяющих оптику атмосферы [1, 2]. Последнее десятилетие во всем мире возрастает интерес к проблеме оценки крупномасштабных антропогенных воздействий на климат [3, 4], подогреваемый резким ухудшением экологической обстановки в густонаселенных и промышленных регионах.

В настоящее время опустынивание, горные разработки и строительство отнимают в год $7 \cdot 10^6$ га земель, пригодных для земледелия. Леса исчезают со скоростью 20 га в минуту. Уменьшение площади тропических лесов составляет приблизительно 1% в год. При таких темпах через 50 лет исчезнет половина из ныне существующих $4 \cdot 10^9$ га лесов.

Промышленные выбросы CO_2 достигают $5 \cdot 10^9$ т/год [5], золы — $120 \cdot 10^6$ т/год, SO_2 — $150 \cdot 10^6$ т/год. Кислотные дожди, выпадающие над Скандинавией, в результате выбросов предприятий, расположенных в ФРГ в Руре, привели к засолению почв, озер, гибели лесов и живых организмов [1]. С начала промышленной

© Г. Л. Стенчиков, Д. С. Степанов, 1989

революции концентрация CO_2 увеличилась на 25%. Это вызвало усиление поглощения длинноволнового излучения в тропосфере и среднеглобальное повышение приземной температуры на 0,5° С [3].

Наряду с индустриальными воздействиями на окружающую среду серьезную опасность представляет военное разрушение биосферы [5—8]. Например, после ядерных испытаний в атмосфере в начале 60-х годов существенно подскочила фоновая радиоактивность. Огромные площади, обработанные дефолиантами во время войны во Вьетнаме, до сих пор остаются безжизненными. Быстрое наращивание ядерных арсеналов, развитие химического оружия и совершенствование обычных вооружений, исследования в области активных воздействий на метеорологические процессы неизмеримо расширяют возможности нарушения климатического и экологического равновесия густонаселенных регионов Земного шара. Широкий международный резонанс вызвали данные о возможных экологических и климатических последствиях, которые может вызвать крупномасштабный ядерный конфликт [9].

В связи с этим актуальна разработка математического обеспечения для исследования чувствительности климата к крупномасштабным антропогенным воздействиям на природные системы для определения предельно допустимых нагрузок на окружающую среду, предупреждения катастрофических последствий и планирования природоохранных и оборонных мероприятий.

2. Математическое моделирование геофизических процессов

Наиболее важными элементами климатической системы являются океан и атмосфера, представляющие соответственно газообразную и жидкую сплошные среды, движение которых описывается уравнениями гидродинамики на вращающейся сфере [10—12].

Упрощение уравнений для конкретных условий крупномасштабных течений атмосферы и океана приводит к условию гидростатики вместо уравнения для вертикального импульса. Это приближение принято называть примитивными или полными уравнениями [11].

Для течений в атмосфере, когда выполняется условие гидростатики, естественной вертикальной координатой является давление, которое монотонно зависит от высоты. Однако в P-координатах область течения $P_t \leqslant P \leqslant P_s$ (λ, φ, t) имеет сложную форму и меняется со временем. Использование введенной Филлипсом σ-координаты [13] упрощает форму области. Здесь σ-координата вводится в форме, удобной для описания течений в тропосфере, ограниченной сверху изобарической поверхностью $P = P_t$, а снизу поверхностью Земли, где давление $P = P_s$:

$$\sigma = (P - P_t)/(P_s - P_t) \tag{1}$$

Область течения в σ-координатах принимает простой вид:

$$G = \{0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi,\ -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 1\}.$$

Роль вертикальной скорости в σ-системе координат играет лагранжевская производная от σ по времени t:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \sigma}{\partial z}. \tag{2}$$

Здесь λ, φ, z — долгота, широта и высота, u, v, w — компоненты вектора скорости, a — радиус Земли. Уравнения движения записываются следующим образом:

$$\frac{\partial (\Pi u)}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial (\Pi u^2)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\Pi u v \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial (\Pi \dot{\sigma} u)}{\partial \sigma} - \\ - 2\Omega \sin \varphi \Pi v - \frac{\Pi u v \operatorname{tg} \varphi}{a} + \frac{\Pi}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \\ + \frac{\sigma \Pi}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = \Pi F^u, \tag{3}$$

$$\frac{\partial (\Pi v)}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial (\Pi u v)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\Pi v^2 \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial (\Pi \dot{\sigma} v)}{\partial \sigma} + \\ + 2\Omega \sin \varphi \Pi u + \frac{\Pi u^2 \operatorname{tg} \varphi}{a} + \frac{\Pi}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\sigma \Pi}{\rho a} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \Pi F^v, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial (\Pi u)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\Pi v \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial (\Pi \dot{\sigma})}{\partial \sigma} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial (\Pi T)}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial (\Pi T u)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\Pi T v \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial (\Pi \dot{\sigma} T)}{\partial \sigma} - \\ - \frac{\Pi}{\rho c_p} \frac{d \Pi \sigma}{dt} = \Pi Q^T - \Pi \frac{\partial F^T}{\partial \sigma}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial (\Pi q)}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial (\Pi q u)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\Pi q v \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right) + \\ + \frac{\partial (\Pi \dot{\sigma} q)}{\partial \sigma} = \Pi Q^q - \Pi \frac{\partial F^q}{\partial \sigma}, \tag{7}$$

$$\partial \Phi / \partial \sigma + \Pi / \rho = 0, \tag{8}$$

где

$$P = R \rho T, \ \Phi = gz, \ \Pi = P - P_t, \tag{9}$$

ρ — плотность, T — температура, R — газовая постоянная, Φ — геопотенциал, z — высота, q — отношение смеси водяного пара.

Граничные условия на поверхности $\sigma = 1$, $\sigma = 0$, $\Phi = \Phi_s(\lambda, \varphi)$, $F_{\uparrow}^T = \Gamma_T + Q_{IR}$: $F^q = E$ и на верхней границе расчетной области $\sigma = 0$, $\dot{\sigma} = 0$, $F^T = S_0$. Здесь S_0 — нисходящий поток солнечного излучения, падающий на верхнюю границу расчетной области, $F_{\uparrow}^T$, $F_{\downarrow}^T$ — восходящая и нисходящая составляющие теплового потока в атмосфере, $F^T = F_{\uparrow}^T - F_{\downarrow}^T$, Γ_T и Q_{IR} — соответственно турбулентный поток тепла и поток теплового излучения от поверхности.

Условие $\dot{\sigma} = 0$ на верхней границе и на подстилающей поверхности эквивалентно соответственно кинематическому усло-

вию на свободной границе и условию непротекания. Источники Q_T и Q_q связаны с фазовыми переходами влаги, а потоки F^u, F^v приближенно описывают трение. Потоки F^T, F^q определяются соответственно лучистым переносом, а также турбулентной диффузией тепла Γ_T и испарением E, формирующимися в приземном пограничном слое.

В начальный момент задаются распределения приземного давления, горизонтальных скоростей, температуры и концентрация водяного пара.

3. Математическое моделирование климата

Получение оценок климатических сдвигов, которые намечаются сегодня и могут заметно усилиться завтра, представляет трудную новую задачу. Использование экспериментальных методов для исследования изменчивости климата наталкивается на целый ряд технических трудностей. Масштабы климатической системы настолько грандиозны, что эксперимент даже в каком-то одном регионе чрезвычайно дорог, не говоря уже о том, что вывести такую систему из равновесия было бы небезопасно.

Наиболее универсальным средством исследования глобальных климатических процессов является в настоящее время математическое моделирование [12, 14—16]. Именно математическая модель системы и позволяет ставить вычислительные эксперименты по чувствительности климата.

Физическая модель системы существенно зависит от интервала времени, на котором рассматривается эволюция климатической системы. Например, для описания возникновения и разрушения оледенений (на временах порядка сотен тысяч лет) необходимо учитывать взаимодействие атмосферы и океана, ледниковых щитов, реакцию литосферных плит, изменение химического состава атмосферы и т. д. [17, 18]. Для расчета эволюции климата на сотни лет следует описывать и верхний слой океана, и глубокий океан наряду с подсистемами, имеющими меньшие характерные времена изменений. Для краткосрочного прогноза погоды на 1—2 суток достаточно описания только гидродинамических процессов в атмосфере. При увеличении срока прогноза необходим более аккуратный учет энергетических процессов, включающий взаимодействие атмосферы и океана [12].

Климат является важным экологическим фактором существования человечества. Климатические колебания оказывают существенное воздействие на эффективность мирового хозяйства и имеют большое практическое значение с точки зрения оптимизации распределения ресурсов, выбора стратегии развития и т. д. Изменение параметров окружающей среды может оказаться существенным лимитирующим фактором развития человеческой цивилизации [19].

Когда исследуются антропогенные воздействия, интересуются изменениями климата, происходящими достаточно быстро, в те-

чение десятилетий. В этом случае инертные, не меняющиеся за этот временной интервал элементы климатической системы [20] — литосферу, мощные материковые льды и глубинную часть океана — можно считать неизменными. Изменение климата на этих характерных временах определяется взаимодействием атмосферы, верхнего слоя океана и приповерхностного деятельного слоя суши.

4. Климатическая модель ВЦ АН СССР

Климатическая модель Вычислительного центра АН СССР включает гидродинамическую модель общей циркуляции атмосферы и термодинамическую интегральную модель верхнего слоя океана с параметризованной термической структурой.

Отличительной чертой этой модели является грубое пространственное разрешение. Расчетная сетка имеет ячейки размером $12° \times 15°$. Таким образом, модель описывает крупномасштабную динамику атмосферы и основные энергетические балансы. Она предназначена для расчетов на длительные сроки с целью оценки климатических эффектов в результате крупномасштабных изменений внутренних свойств климатической системы.

Модель атмосферы построена на основе двухуровневой модели Минца—Аракавы и в рамках примитивных уравнений описывает атмосферные движения в слое от поверхности Земли до изобарической поверхности $P_T = 200$ мбар, приближенно аппроксимирующей границу между стратосферой и тропосферой. Облачность и осадки рассчитываются.

Для расчета изменения температуры поверхности океана использована интегральная термодинамическая модель верхнего деятельного слоя океана, позволяющая описать основные эффекты обмена энергий между океаном и атмосферой [21—23]. Термическая вертикальная структура океана задается в виде автомодельной функции, зависящей от ряда рассчитываемых параметров. Зависимость температуры воды от глубины в значительной степени определяется турбулентностью, возбуждаемой ветровым волнением и конвекцией.

Интегральные модели позволяют рассчитать эффективную теплоемкость деятельного слоя океана и учесть его демпфирующее влияние на эволюцию климатической системы. Они не требуют высокого пространственного разрешения и легко включаются в совместные модели эволюции океана и атмосферы. Следует отметить, что меридиональные потоки тепла в океане имеют тот же порядок, что и в атмосфере [24], и оказывают существенное влияние на динамику системы в целом. Но при грубом пространственном разрешении описание динамики океана в рамках обсуждающейся здесь модели не представляется возможным.

Условие непротекания и кинематическое условие на свободной поверхности использованы для гидродинамических уравнений, описывающих течение атмосферы соответственно на подстилаю-

щей поверхности и на верхней границе расчетной области. Теплоемкость деятельного слоя суши считается бесконечно малой, и на ее поверхности задается условие баланса потоков энергии. Альбедные характеристики поверхности Земли, распределение морских и материковых льдов и снежного покрова задаются. Температура океана изменяется в соответствии с его эффективной теплоемкостью в результате обмена энергией с атмосферой.

При двухуровневой аппроксимации [25] тропосфера разбивается на два слоя одинаковой массы. Границы слоев соответствуют $\sigma = 0,\ {}^1/_2,\ 1$. Искомые функции задаются в центрах слоев $\sigma = {}^1/_4$ и ${}^3/_4$, на границе между слоями при $\sigma = {}^1/_2$ определяется только вертикальная скорость $\dot{\sigma}$, а на поверхности $\sigma = 1$ — температура воздуха на верхней границе бесконечно тонкого пограничного слоя.

Горизонтальная дискретизация проводится на равномерной по угловым переменным сетке

$$\lambda_i = (i-1)\Delta\lambda,\ \varphi_k = -\pi/2 + (k-1)\Delta\varphi,\ 1 \leqslant i \leqslant 24,$$

$$1 \leqslant k \leqslant 16,\ \Delta\lambda = 15^\circ,\ \Delta\varphi = 12^\circ.$$

В целых точках (i, k) сетки задаются термодинамические характеристики атмосферы Π_{ik}, T_{ik}, q_{ik} и вертикальная скорость $\dot{\sigma}_{ik}$. Горизонтальные скорости определяются в полуцелых точках $(i + {}^1/_2,\ k - {}^1/_2)$, а потоки рассчитываются в центрах граней ячеек $(i, k + {}^1/_2)$, $(i, k - {}^1/_2)$, $(i + {}^1/_2, k)$, $(i - {}^1/_2, k)$.

Горизонтальная аппроксимация выполнена по схеме Аракавы [25, 26]. Пространственная дискретизация континуальных уравнений не нарушает баланса полной энергии [27].

Для замыкания системы уравнений движения необходимо определить источники в правых частях уравнений энергии, импульса и переноса влаги на обоих слоях и потоки влаги и энергии на подстилающей поверхности. Большинство физических процессов (перенос излучения, конвекция, фазовые переходы влаги, процессы в пограничном слое), ответственных за формирование источников, являются мелкомасштабными и не могут быть аппроксимированы в рамках крупномасштабной модели общей циркуляции атмосферы. Однако качество описания этих подсеточных явлений в значительной степени определяет адекватность всей модели общей циркуляции атмосферы.

Схема по времени явная, типа предиктор—корректор.

5. Расчет климатических характеристик

Проблема изучения климатических режимов требует определения основных статистических характеристик установившихся полей метеорологических переменных. Для этого необходимо не только описывать крупномасштабные гидродинамические течения, но и достаточно точно воспроизводить физические процессы в атмосфере (в том числе и мелкомасштабные), такие, как перенос излу-

чения, фазовые переходы влаги, образование облаков и формирование осадков.

При математическом моделировании климатических процессов интегрируются уравнения модели, описывающие эволюцию климатической системы. Расчеты проводятся с некоторого начального условия до установления квазистационарного или квазипериодического решения (в зависимости от того, фиксирован ли поток солнечного излучения на верхней границе атмосферы или меняется в соответствии с сезонным ходом). Установившееся решение обладает постоянной во времени функцией распределения вероятностей метеорологических характеристик. Результаты расчетов рассматриваются как соответствующие климатические реализации. Климатические характеристики определяются осреднением по ансамблю таких реализаций или, в рамках гипотезы эргодичности, по достаточно длительному интервалу времени. Расчеты, проведенные при различных значениях параметров климатической системы, позволяют определить их влияние на климат.

Таким образом, квазиравновесные климатические поля метеоэлементов рассчитываются методом установления в результате решения смешанной задачи Коши для системы (3)—(9) с граничными и начальными условиями. Температура океана при этом либо фиксируется, либо рассчитывается по модели океана.

В описанной конфигурации модель была использована для исследования невозмущенных режимов (среднегодового, среднеиюльского и среднеянварского) циркуляции атмосферы, а также чувствительности климата к естественному аэрозольному загрязнению и увеличению концентрации CO_2. Квазиравновесные поля, соответствующие невозмущенной атмосфере, и результаты расчетов чувствительности [28—32] удовлетворительно согласуются с данными наблюдений и расчетами других авторов [33].

Рассчитанные и наблюдаемые поля температуры приземного воздуха для января и июля представлены на рис. 1 и 2. Модель воспроизводит все важнейшие особенности поля температуры: минимумы в приполярных районах и над материками зимой, максимумы в тропиках и над материками летом. Однако можно отметить, что над материками Северного полушария температура воздуха летом несколько выше наблюдаемой: изотермы 20° С и 30° С сдвинуты довольно далеко к северу. Напротив, зимой наблюдается переохлаждение воздуха над континентом, причем над Европой изотермы проходят почти зонально, а минимальные значения температур над Евразией (—45° С и ниже) наблюдаются не в Восточной Сибири, а примерно на севере Европейской территории СССР и Западной Сибири. В тропических районах над континентами Северного полушария температура воздуха несколько выше наблюдаемой (особенно в июле). В Южном полушарии как абсолютные значения температуры воздуха, так и ее изменения от зимы к лету хорошо описываются моделью и для материков и для океанических регионов.

Имеющиеся недостатки в описании поля приземной темпера-

туры воздуха — повышенный контраст тропики—полюс зимой в Северном полушарии, а также повышенная величина разности между температурами января и июля — объясняются, по-видимому, подавлением вихревого переноса, который в умеренных широтах играет важную роль в тепло- и влагообмене как между тропиками и приполярными районами, так и между океанами и континентами.

Зонально осредненные профили радиационного баланса на верхней границе атмосферы и на поверхности Земли для января и июля представлены на рис. 3 и 4 вместе с наблюдаемыми значениями, взятыми из [34]. Анализ графиков показывает хорошее совпадение рассчитанных и наблюдаемых величин радиационного баланса. Лишь в приполярных районах значения радиационного баланса несколько повышены.

Анализ полей давления, температуры воздуха, скорости ветра, радиационного баланса поверхности и системы в целом показывает, что модель с грубым пространственным разрешением достаточно хорошо описывает глобальные особенности циркуляции атмосферы в различные сезоны года. В то же время грубое описание вихревых процессов в атмосфере приводит к пониженным градиентам давления в умеренных широтах, а также к повышенным градиентам температуры воздуха и значениям скорости зонального ветра, особенно в зимнем полушарии.

6. Разномасштабность и жесткость геофизических процессов

Специфика геофизических процессов такова, что не представляется возможным реализовать достаточно полные модели некоторых подсистем в рамках совместной модели всей климатической системы. Иными словами, при численном моделировании климата не удается добиться удовлетворительной аппроксимации всех физически важных явлений. Это связано с тем, что энергетика системы во многом определяется мелкомасштабными процессами, пренебрежение которыми может привести не только к количественному, но и к качественному изменению результатов. Примером может служить облачность, которая оказывает существенное влияние на энергетический баланс поверхности и системы в целом. Таким образом, в численных моделях климата параметр дискретизации — шаг пространственной сетки — является физическим параметром модели, так как играет роль масштаба осреднения и в значительной степени определяет характер описаний подсеточных процессов — параметризации.

При одновременном расчете эволюции атмосферы и верхнего слоя океана ситуация усугубляется, так как океанские характерные времена существенно больше соответствующих атмосферных. Верхний слой океана обладает почти в 100 раз большей теплоемкостью и временем энергетической реакции, чем атмосфера (характерное время последней не превышает 10 сут). Диаметр

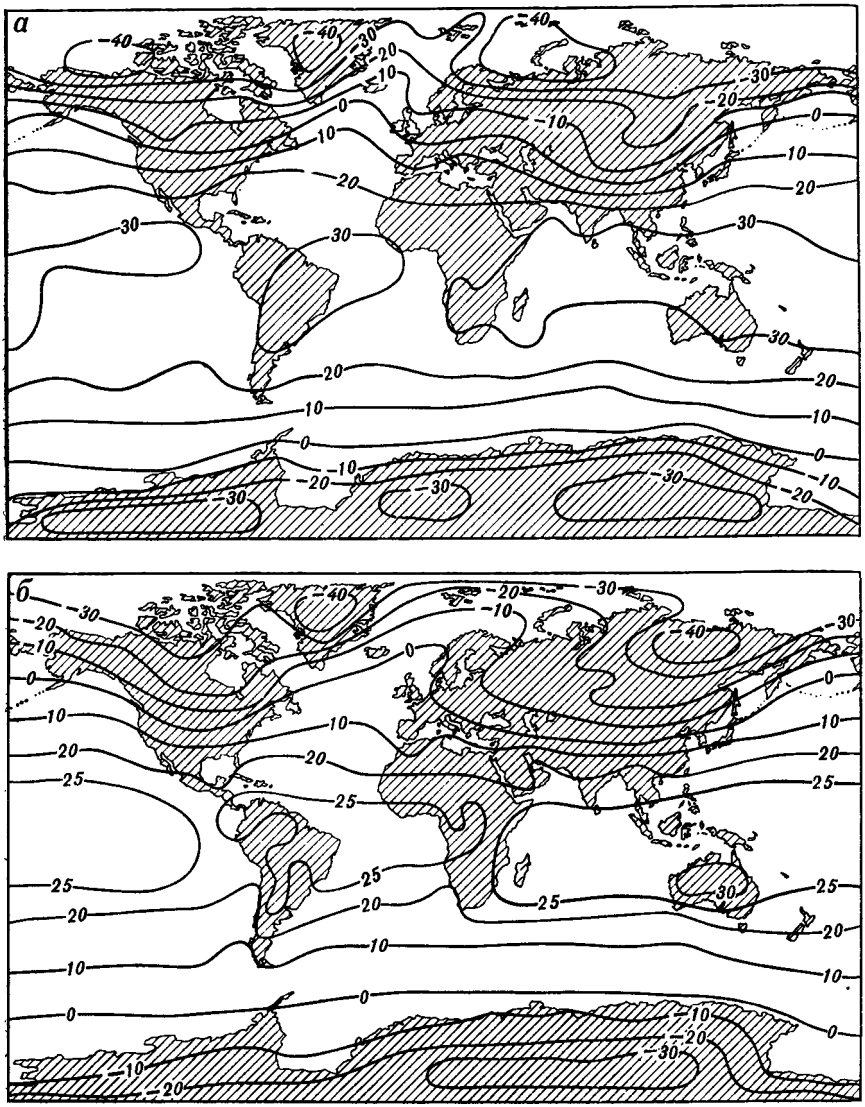


Рис. 1. Температура воздуха (°С) у подстилающей поверхности по данным расчетов (*а*) и наблюдений (*б*) для января

циклонов в средних широтах — около 1000 км, а время жизни — недели. Мезомасштабные вихри в океане на порядок меньше и могут существовать месяцами. Таким образом, требования к пространственной аппроксимации для расчета океанской циркуляции, вообще говоря, более высокие, чем при расчете общей циркуляции атмосферы. Более медленные процессы в океане можно рассчитывать с более крупными шагами по времени. Характерные

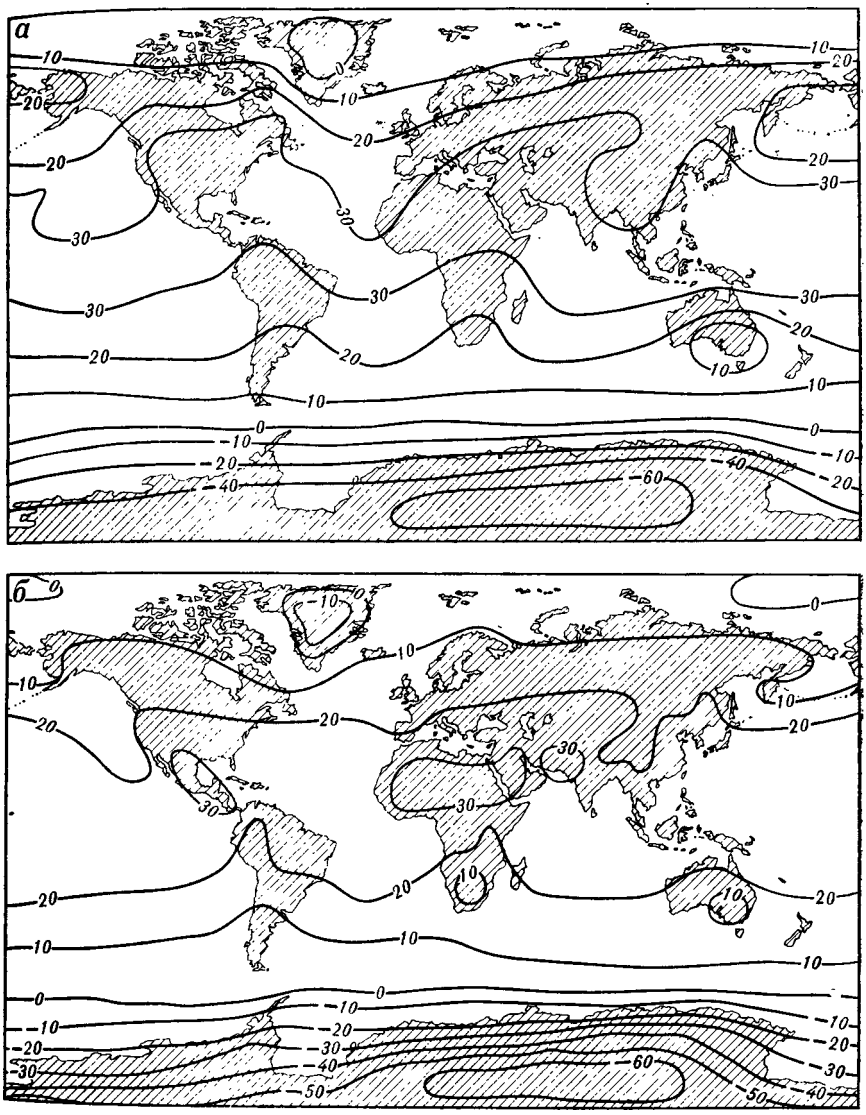
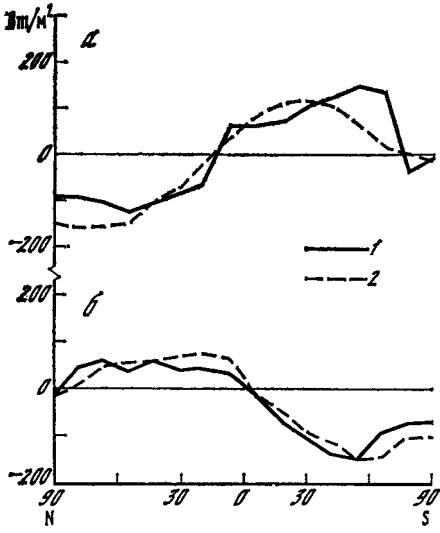


Рис. 2. Температура воздуха (° С) у подстилающей поверхности по данным расчетов (*а*) и наблюдений (*б*) для июля

времена энергетической реакции верхнего слоя океана, определяющего короткопериодные климатические вариации, порядка десятков лет.

Уравнения, которые используются для описания эволюции климатической системы, написаны не для средних по времени климатических полей, а для мгновенных погодных распределений, осредненных по характерному пространственному масштабу. Кли-



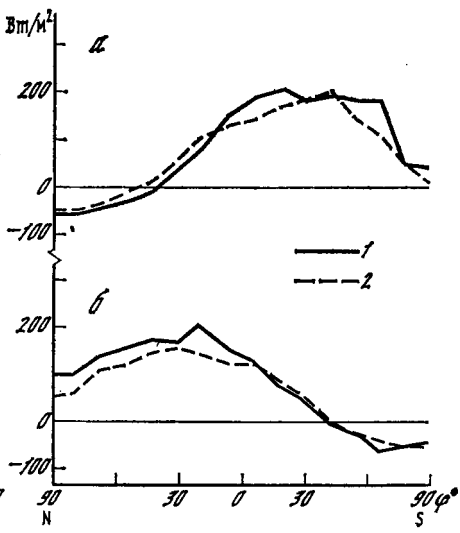


Рис. 3. Среднезональные распределения радиационного баланса (Вт/м²) на верхней границе атмосферы для января (*а*) и июля (*б*)

1 — расчет, *2* — наблюдения

Рис. 4. Среднезональные распределения радиационного баланса (Вт/м²) на подстилающей поверхности для января (*а*) и июля (*б*)

1 — расчет, *2* — наблюдения

матическая информация может быть получена лишь путем апостериорного осреднения результатов серий расчетов, которые проводятся в характерных временах быстрой подсистемы (атмосферы) до тех пор, пока не установятся статистические характеристики решения (средние и дисперсии метеорологических полей). Полный интервал расчета определяется океанскими процессами и в атмосферных временах оказывается большим.

Таким образом, основные проблемы, возникающие при разработке климатических моделей, можно сформулировать следующим образом:

необходимо добиться адекватного описания важных мелкомасштабных физических процессов в атмосфере и океане;

необходимо разработать климатические модели, работающие в характерных временах медленного блока системы — океана — и позволяющие проводить расчеты на длительное время.

В решении этих проблем можно пытаться продвинуться, используя более высокое пространственное разрешение и детализацию физических параметризаций в климатических моделях. В зарубежной литературе это направление получило название метода «грубой силы». Лимитирующим фактором на этом пути являются возможности доступной вычислительной техники. Другой подход, который исследуется в данной работе, основан на использовании

приближенных моделей для наиболее быстропеременной подсистемы — атмосферы,— позволяющих увеличить вычислительную эффективность совместных моделей атмосферы и океана. В данной работе предпринята попытка частично реализовать эту идею для динамических процессов в атмосфере на примере содержательной модели мелкой воды на сфере.

7. Описание динамических процессов в атмосфере

В атмосфере протекает большое количество процессов, обладающих широким спектром характерных пространственных и временных масштабов. Характерное время термического отклика на вынуждающие изменения внешних условий составляет для атмосферы порядка одного месяца, в то время как динамическая часть атмосферных моделей обладает характерными временами от нескольких дней для движения синоптических масштабов до нескольких часов в случае быстрых гравитационных волн. Динамическая часть атмосферных моделей налагает наиболее жесткие ограничения на шаг по времени при численном интегрировании, определяя тем самым большие затраты машинного времени для выполнения одного расчета [35—37].

Рассмотрим динамические процессы в атмосфере, пользуясь модельными уравнениями мелкой воды (УМВ) на вращающейся сфере, выписанными в переменных вихрь—дивергенция:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi, \ \xi = \Delta\psi, \ D = \Delta\chi, \\
&\varepsilon\partial\xi/\partial t + \nabla\cdot((f + \varepsilon\xi)\mathbf{V}) = 0, \\
&\varepsilon\partial D/\partial t - \mathbf{k}\cdot\nabla \times (f + \varepsilon\xi)\mathbf{V} + \Delta\,(h + \varepsilon\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}/2) = 0, \\
&\varepsilon\partial h/\partial t + \nabla\cdot\,(\mathbf{V}\,(\varepsilon h - h_s)) + D = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения выписаны в безразмерной форме на вращающейся сфере с рельефом h_s. Здесь ξ — вертикальная компонента вихря, D — горизонтальная дивергенция, h — высота слоя жидкости, ψ — функция тока, χ — потенциал скоростей, $\mathbf{V}$ — горизонтальный вектор скорости, f — параметр Кориолиса, $\mathbf{k}$ — вертикальный единичный вектор. Обезразмеривание проведено на характерные значения физических переменных [38]: $V^* = 10$ м/с, $H^* = 10$ км — высота атмосферы, $L^* = \sqrt{g^*H^*}/2\Omega^*$ — радиус деформации Россби (здесь Ω^* — угловая скорость вращения Земли). Характерное время конвективных процессов — $\tau^* = L^*/V^*$ — примерно 2,5 сут. Безразмерный параметр $\varepsilon = V^*/2\Omega^*L^*$ — число Россби (порядка $^1/_{30}$), $h^* = \varepsilon H^*$ — масштаб изменения высоты жидкости. Такое обезразмеривание соответствует крупномасштабным синоптическим процессам в атмосфере.

Уравнения мелкой воды описывают движения с несколькими характерными временами: медленно меняющийся зональный поток, процессы синоптических масштабов с характерным временем не-

сколько дней и быстрые гравитационные волны с характерным временем несколько часов.

Запись уравнений мелкой воды в переменных ξ, D разделяет движение на вихревую и потенциальную (дивергентную) части. Силы Кориолиса и нелинейные члены приводят к взаимодействию между вихревой и потенциальной частью течения, однако медленные инерционные процессы определяются в основном вихревыми движениями, а быстрые гравитационные волны — потенциальными. Таким образом, запись УМВ в переменных вихрь, дивергенция физически обоснована, так как приводит к разделению движений по временным масштабам. Уравнение для ψ описывает распространение медленных инерционных волн (волн Россби), обусловленных взаимодействием вихревых течений с силами Кориолиса, уравнения для D и h определяют распространение быстрых гравитационных волн.

Для решения системы (10) используем метод Галеркина, в качестве базиса выберем сферические функции. В метеорологии такой подход называется спектральным и широко применяется [39, 40].

Рассматривается конечное число сферических гармоник, образующих треугольник в спектральной области с вершинами ($n = 0$, $m = 0$), ($n = J$, $m = 0$), ($n = J$, $m = J$), волновое число J выбрано равным 10, что позволяет описать крупномасштабные вихревые процессы. Так, для функции тока

$$\psi(\lambda, \varphi) = \sum_{m=-J}^{I} \sum_{n=|m|}^{I} \psi_{n,m} P_{n,m}(\sin\varphi) \exp(im\lambda),$$

где $P_{n,m}$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Треугольное усечение обеспечивает равномерное разрешение на сфере [37], что позволяет увеличить шаг по времени в сравнении с конечно-разностными моделями, имеющими более жесткое ограничение на шаг по времени.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения имеет вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon\, d\psi_{n,m}/dt &= -\varepsilon C^{*}_{n,m}/(n(n+1)) - (n-1)\, d_{n,m}\chi_{n-1,m}/n - \\
&\quad - (n+2)\, d_{n+1,m}\chi_{n+1,m}/(n+1) + im\psi_{n,m}/(n(n+1)), \\
\varepsilon\, d\chi_{n,m}/dt &= -\varepsilon C^{**}_{n,m}/(n(n+1)) + (n-1)\, d_{n,m}\psi_{n-1,m}/n + \\
&\quad + (n+2)\, d_{n+1,m}\psi_{n+1,m}/(n+1) + im\chi_{n,m}/(n(n+1)) - h_{n,m}, \\
\varepsilon\, dh_{n,m}/dt &= \varepsilon C^{***}_{n,m} + n(n+1)\chi_{n,m}/\varkappa^2,
\end{aligned} \tag{11}$$

где $d_{n,m} = ((n^2 - m^2)/(4n^2 - 1))^{1/2}$, $\varkappa$ — отношение радиуса Земли к характерному горизонтальному масштабу.

Коэффициенты разложения нелинейного члена $C^{*}_{n,m}$, $C^{**}_{n,m}$, $C^{***}_{n,m}$ вычисляются по методу преобразования Орзага. Метод включает восстановление полей сомножителей нелинейных членов в точках

сетки на сфере, перемножение и обратное разложение по сферическим гармоникам. Для сферических функций эта процедура требует меньшего числа операций по сравнению с перемножением рядов и, при использовании сетки с 31 эквидистантной точкой по долготе и 16 гауссовых точек по широте, является точной для $J = 10$ [41, 37].

Климатические задачи предъявляют ряд особых требований к аппроксимации по времени. Интегрирование на большие периоды времени, до нескольких десятков лет, требует создания достаточно эффективных численных методов, что в первую очередь связано с увеличением шага по времени. При этом схемы должны обладать хорошими консервативными свойствами, что чрезвычайно важно для интегрирования на большое время.

8. Описание высокочастотной части спектра

Характерные времена синоптически значимых процессов составляют несколько суток, однако для большинства моделей общей циркуляции атмосферы шаг по времени не больше 20—30 мин. Причины такого различия объясняются частотным спектром линеаризованных УВМ.

Ограничения на шаг по времени, связанные с адвекцией, очень слабые: $\Delta t < 30$ ч.

Частоты инерционных волн, обусловленных взаимодействием течения с силами Кориолиса (волны Россби) и несущих основную часть кинетической энергии атмосферы, малы и стремятся к нулю при увеличении волнового числа.

Частоты гравитационных волн значительно больше и стремятся к бесконечности при увеличении волнового числа, приводя тем самым к жестким ограничениям на шаг по времени.

Для численного интегрирования таких систем в метеорологии широко используется метод, предложенный Робером [42, 37]. Основная идея этого метода состоит в разделении быстрых и медленных движений, использовании полунеявного метода для медленных процессов и осредненных по времени быстрых процессов. Метод можно проиллюстрировать на спектральной форме УМВ, записанной в общем виде:

$$
\begin{aligned}
&d\psi_{n,m}/dt = A_{n,m},\\
&d\chi_{n,m}/dt = B_{n,m} + \alpha_{n,m}\Phi_{n,m},\\
&d\Phi_{n,m}/dt = C_{n,m} - \beta_{n,m}\chi_{n,m}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Обозначим $\delta_t(X) = (X^{t+\Delta t} - X^{t-\Delta t})/2\Delta t$ — центральную разность и $(\bar{X})^t = (X^{t+\Delta t} + X^{t-\Delta t})/2$ — осреднение по времени. Тогда метод Робера дает

$$
\begin{aligned}
&\delta_t\psi_{n,m} = A^t_{n,m}, \qquad \delta_t\chi_{n,m} = B^t_{n,m} + \alpha_{n,m}\overline{\Phi}^t_{n,m},\\
&\delta_t\Phi_{n,m} = C^t_{n,m} - \beta_{n,m}\overline{\chi}^t_{n,m}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Система (13) разрешается явно, и вычислительные затраты увеличиваются незначительно при увеличении шага по времени до 1 ч.

Осреднение по времени быстрых волн в методе Робера соответствует неявному методу их вычисления. Использование неявных методов позволяет увеличить шаг по времени при сохранении устойчивости [12, 16]. Повышение вычислительной эффективности методов в случае климатических задач требует максимального увеличения шага по времени, что нарушает аппроксимацию высокочастотных процессов и приводит к искажению дисперсионного соотношения.

Рассмотрим другой подход к представлению быстрых процессов, основанный на приближениях, использующих малость отношения характерных времен дивергентных и вихревых процессов. Выпишем уравнения для спектральных коэффициентов, описывающие распространение гравитационных волн. Дифференцируя в (13) второе уравнение и используя первое и третье, получим систему уравнений

$$\varepsilon^2 d^2\chi_{n,m}/dt^2 + a_{n,m}\chi_{n-2,m} + b_{n,m}\chi_{n,m} + c_{n,m}\chi_{n+2,m} = \\ = Y_{n,m}(t), \quad m = -J, \ldots, J, n = |m|, \ldots, J. \tag{14}$$

Система (14) имеет чисто мнимые собственные значения и описывает процесс распространения гравитационных волн. Правая часть (14) имеет вид

$$Y_{n,m}(t) = Y_{n,m}(\psi(t), \varepsilon C^*(t), \varepsilon^2 dC^{**}(t)/dt, \varepsilon C^{**}(t)).$$

Качественно решение системы (14) можно представить в виде $\chi(t) = C\chi_1(t) + \chi_2(t)$, где χ_1 задает свободное распространение гравитационных волн, а χ_2 — вынужденное решение. Выбор таких начальных условий, когда произвольная постоянная C равняется нулю, является частью сложной задачи инициализации численных моделей, решаемой в метеорологии [36, с. 33—52]. Данные метеорологических наблюдений известны с некоторой точностью и требуют согласования с приближенными модельными уравнениями и граничными условиями. При этом начальные условия формируются так, чтобы в начале интегрирования не возникал временной пограничный слой, порождающий гравитационные волны. Выбор $C = 0$ делает решение УМВ содержащим только низкочастотную часть спектра, связанную с инерционными волнами [44].

Учитывая, что частоты, содержащиеся в спектре $Y_{n,m}$, много меньше собственных частот системы (14) (кроме, быть может, слагаемых порядка ε^3, ε^4, . . ., связанных с нелинейными членами), в решении $\chi(t)$ можно пренебречь слагаемыми второго порядка малости $\varepsilon^2 d^2\chi/dt^2$ и $\varepsilon^2 dC^{**}/dt$. Тогда система (14) сведется к виду

$$a_{n,m}\chi_{n-2,m} + b_{n,m}\chi_{n,m} + c_{n,m}\chi_{n+2,m} = Y_{n,m}(t), \tag{15}$$

что соответствует предположению о бесконечной скорости распространения гравитационных волн по отношению к волнам Россби.

Построенная таким образом система (15) не содержит механизма свободного распространения гравитационных волн, но отличается от используемого в метеорологии уравнения баланса [35], получаемого из второго уравнения системы (11) отбрасыванием члена $\varepsilon d\chi_{n,m}/dt$. Основным является то, что в уравнении баланса дивергенция определяется как малая разность больших величин, что приводит к потере точности, в то время как система (15) свободна от этого недостатка.

9. Численное исследование приближенной модели

Обозначим через $M1$ модель, основанную на методе Робера, и через $M2$ приближенную модель со стационарным уравнением для дивергенции, описанную выше. Матрица системы (15) имеет диагональное преобладание, и система легко решается прямыми итерациями. Нелинейные члены порядка ε, входящие в правую часть (15), включают χ, поэтому проводится пересчет по нелинейности. Относительная малость χ (для атмосферных процессов $D \ll \xi$) позволяет ограничиться только одним пересчетом.

Для сравнения $M1$ и $M2$ проводились вычислительные эксперименты на модельной задаче разрушения зонального потока топографической возвышенностью. Исследовались поля течения и каскад энергии по пространственным масштабам. Возвышенность высотой 3 км и горизонтальным масштабом порядка 4 тыс. км находилась в Северном полушарии. Через 5 сут течение соответствовало образованию планетарной волны с волновым числом $m = 3$, через 12 сут нелинейные взаимодействия приводили к началу разрушения волны $m = 3$ и образованию волны $m = 6$. Через 24 сут формировалась система волн Россби, заполняющая весь спектр пространственных масштабов. Линии тока, полученные интегрированием моделей $M1$ и $M2$, практически совпадали через 5 и 12 сут, через 24 сут имелись лишь незначительные отличия (рис. 5).

Сравнение эволюции пространственного спектра энергии показывает хорошее качественное и количественное согласование моделей. Для первых 12 сут (рис. 6) отличия между моделями были в основном порядка различия между результатами по $M1$, проинтегрированной с шагами по времени 20 и 40 мин. Хорошее соответствие сохранялось и через 24 сут (рис. 7). Сравнение полей течения и энергетических спектров моделей $M1$ и $M2$ позволяет оценить адекватность в описании как фазовых скоростей возмущений, так и передачи энергии по спектру пространственных масштабов.

Использование подхода со стационарным уравнением для дивергенции в более полных моделях требует проверки адекватности воспроизведения высокочастотных составляющих $Y_{n,m}$ в системе (15), появляющихся при параметризациях различных физических процессов, в особенности пороговых. Исследование влияния высокочастотного возбуждения на поведение решения было

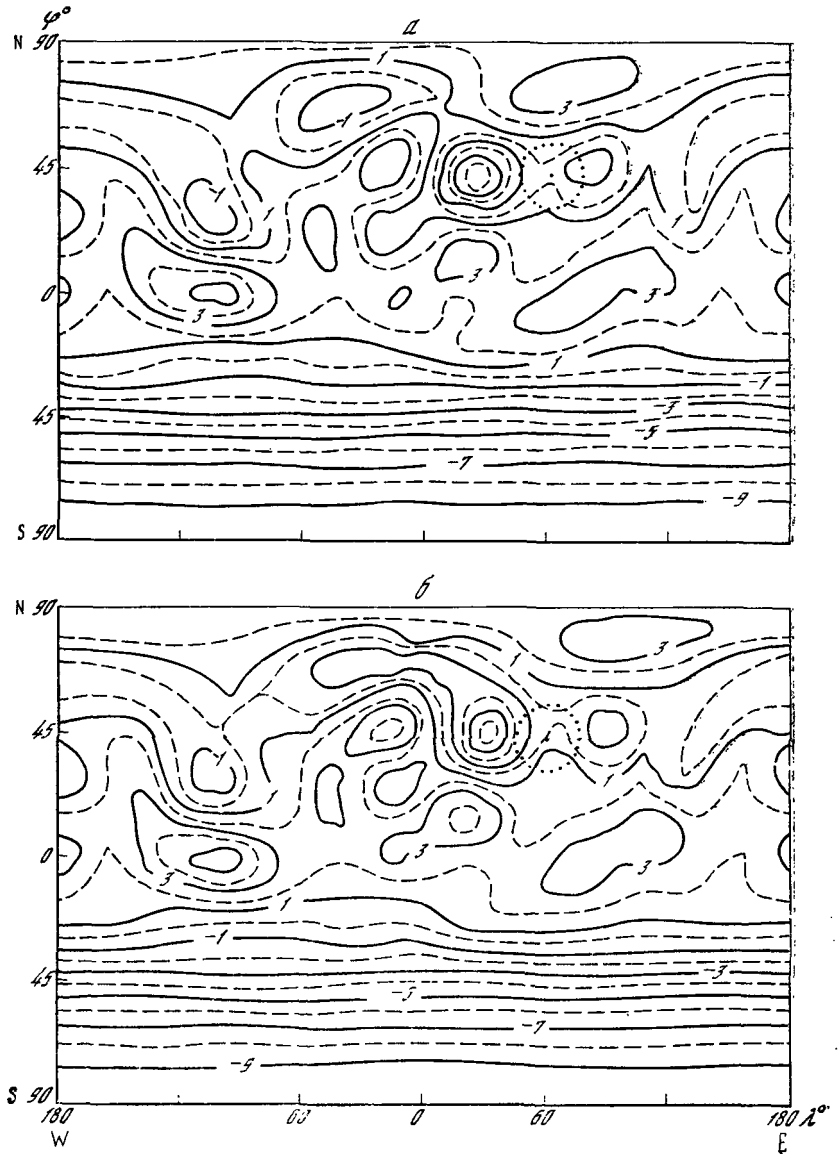


Рис. 5. Поле течения в задаче разрушения зонального потока топографической возвышенностью (отмечена точечной линией) через 24 сут модельного времени

а — 1600-й шаг расчета по модели *М*1, *б* — 128-й шаг расчета по модели *М*2. Изолинии функции тока даны в условных единицах

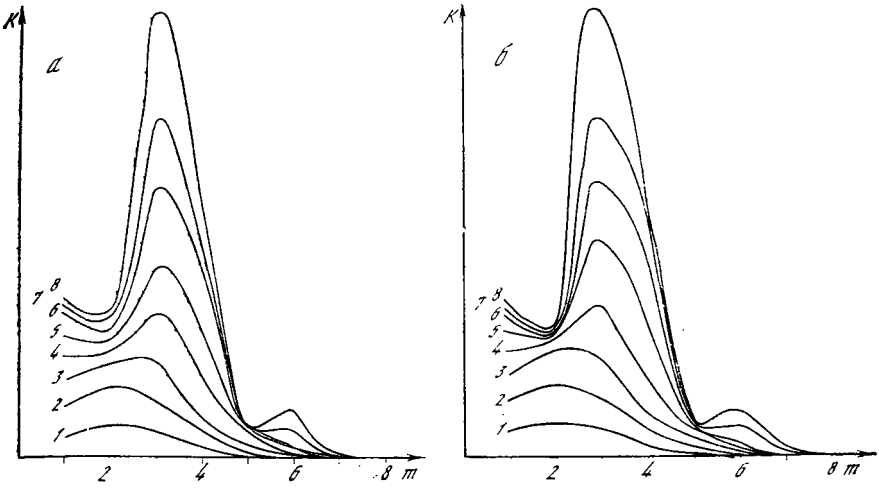


Рис. 6. Распределение кинетической энергии K (в усл. ед.) по пространственным масштабам, рассчитанное по моделям $M1$ (*а*) и $M2$ (*б*)

m — зональное волновое число. Кривые на рисунке приведены через 1,5 сут, при этом кривая *1* соответствует $t = 1{,}5$ сут, кривая *8* — $t = 12$ сут. Энергия зонального потока ($m = 0$) примерно на порядок больше энергии гармоник ($m \neq 0$) и не указана

Рис. 7. Распределение кинетической энергии K (в усл. ед.) через 24 сут модельного времени

1 — 128-й шаг расчета по модели $M2$, *2* — 1600-й шаг расчета по модели $M1$

проведено на расчетах, аналогичных предыдущим, однако топографическая возвышенность совершала гармонические колебания относительно своего значения с амплитудой 150—200 м и периодом от 3 до 7 ч, что возбуждает быстрые гравитационные волны.

В экспериментах с моделью $M2$ отличия от контрольного эксперимента были крайне малы. У $M1$ поведения спектра кинетической энергии и полей течения практически не отличались. Ряд экспериментов показал, что, несмотря на большую амплитуду возбуждения (порядка 50% от масштаба изменения уровня h), высокочастотная компонента не оказывает значительного влияния на поведение медленных вихревых движений, приводя лишь

к появлению бегущих гравитационных волн. По проведенным оценкам, возмущения начинают влиять на крупномасштабные синоптические процессы при периоде более 12—15 ч, и в этом отношении модели $M1$ и $M2$ дают одинаковый результат. Надо отметить, что существуют отличия в дивергентных движениях, связанные с наличием в $M1$ высокочастотной компоненты, однако она практически не влияет на медленные движения и ее вклад в кинетическую энергию мал.

Можно рассмотреть особый случай резонанса на собственных частотах гравитационных волн, который должен сопровождаться значительным ростом энергии гравитационных волн. В реальной атмосфере это не наблюдается и поэтому здесь не рассматривается.

10. Методы расчета инерционных процессов

Запись уравнений мелкой воды в переменных вихрь—дивергенция позволила явно разделить быстрые гравитационные и медленные инерционные волны, определяемые уравнением вихря. Рассмотрим теперь вихревые процессы, которые несут практически всю кинетическую энергию системы и построим для них численные алгоритмы с учетом требований, перечисленных выше.

Рассмотрим уравнение вихря. Обобщение полученных методов на вихревые процессы, описываемые уравнениями мелкой воды, проводится в разд. 11. Уравнение вихря получается из уравнений мелкой воды в предположении $D = 0$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \nabla\psi, \quad \xi = \Delta\psi, \quad \varepsilon d\xi/dt + \mathbf{V}\cdot\nabla(f + \varepsilon\xi) = 0, \tag{16}$$

где обозначения те же, что и в (10).

Система уравнений для спектральных коэффициентов:

$$\varepsilon d\psi_{n,\,m}/dt = -\varepsilon C_{n,\,m}/(n\,(n+1)) + ig_{n,\,m}\psi_{n,\,m}, \tag{17}$$

где $g_{n,\,m} = m/(n\,(n+1))$, $m = -J, \ldots, J$, $n = |\,m\,|, \ldots, J$.

Выбор конечного числа гармоник производится аналогично УМВ. Усеченная система (17) сохраняет инварианты уравнения вихря: кинетическую энергию $V^2/2$, энстрофию $\xi^2/2$, характеризующую завихренность движения, и средний вихрь [37]. Сохранение энергии и энстрофии исключает нелинейную неустойчивость и приводит к сохранению среднего волнового числа [26]. Отсутствие погрешностей в инвариантах из-за пространственной аппроксимации позволяет точно оценить консервативные свойства аппроксимации по времени. Для интегрирования инерционных членов метод Робера использует схему «чехарда»:

$$\psi_{t+\Delta t} = \psi_{t-\Delta t} + 2\Delta t\psi_t'. \tag{18}$$

Эта схема позволяет увеличить шаг по времени до 1 ч в метеорологических расчетах и обычно используется с шагом 30 мин в климатических для обеспечения точности сохранения инвариантов. Построим методы численного интегрирования уравнения вих-

ря, обеспечивающие аппроксимацию и удовлетворительное сохранение инвариантов при интегрировании с большими шагами по времени.

10.1. Методы с пересчетом

Исследуем сохранение квадратичных инвариантов при расчете по схеме «чехарда» и на основе анализа построим схемы с улучшенными свойствами сохранения. Используя выражения для энергии и энстрофии вихревого движения

$$E = \sum\sum n(n+1)\psi_{n,m}\psi^*_{n,m},$$
$$P = \sum\sum n^2(n+1)^2\psi_{n,m}\psi^*_{n,m} \tag{19}$$

(здесь знак * обозначает комплексное сопряжение, суммирование проводится по всем гармоникам), получим отклонение инвариантов для схемы «чехарда» на одном шаге:

$$\delta E_{t-\Delta t}(\tau) = -e_1\tau + e_2\tau^2, \quad e_1, e_2 > 0.$$

Аналогичное выражение получается и для энстрофии.

Сохранение среднего вихря при использовании спектрального метода выполняется автоматически. Парабола $\delta E_{t-\Delta t}(\tau)$ не симметрична относительно точки $\tau = \Delta t$, и в общем случае $\delta E_{t-\Delta t}(2\Delta t) \neq 0$. Симметрия относительно точки $\tau = \Delta t$ достигается, если производную по времени вычислять не от ψ_t, а от $\psi^*_t = \psi_{t-\Delta t} + \Delta t\psi^{*\prime}_t$. Такая модификация эквивалентна применению неявного метода Эйлера на участке t, $t - \Delta t$ и явного метода Эйлера на участке t, $t + \Delta t$. При этом погрешности инвариантов

$$\delta E_t(\tau)_{\text{явный}} = e\tau^2, \quad \delta E_t(\tau)_{\text{неявный}} = -e\tau^2, \quad e > 0,$$

и, следовательно, $\delta E_{t-\Delta t}(2\Delta t) = 0$ — квадратичные инварианты вычисляются точно. Отметим, что явный метод Эйлера для уравнения вихря всегда дает увеличение квадратичных инвариантов, а неявный — убывание. ψ_t является хорошим приближением к ψ^*, и схема с одним пересчетом улучшает сохранение инвариантов на 2—3 порядка:

$$\psi_{t+\Delta t} = \psi_{t-\Delta t} + 2\Delta t\psi^{*\prime}, \quad \psi^* = \psi_{t-\Delta t} + \Delta t\psi'_t. \tag{20}$$

Применение нескольких пересчетов дает возможность получить сколь угодно точное сохранение инвариантов, однако при этом вычислительное время на один шаг увеличивается примерно в 1,8 раза на пересчет.

10.2. Метод приведенной фазы (МПФ)

Спектральное уравнение вихря (17) содержит линейный член, описывающий распространение инерционных волн, и нелинейный, отражающий взаимодействие между волнами. Параметр ε

определяет слабость взаимодействия, однако именно нелинейные эффекты ответственны за формирование спектра и долгопериодные динамические процессы. Наиболее сильно волна взаимодействует с возмущениями, близкими к ее собственной частоте (резонансное взаимодействие). Перейдем в систему отсчета, движущуюся с фазовой скоростью волны. В этой системе

$$\psi^*_{n,m}(t) = \varepsilon \int_0^t C_{n,m}(t) \exp(-ig_{n,m}t)\, dt + \psi_{n,m}(0). \tag{21}$$

Наиболее точно вычисляется действие возмущений, вносящих долгопериодный вклад в амплитуду волны. В неподвижной системе координат распространение волны с соответствующей фазовой скоростью вычисляется точно:

$$\psi_{n,m}(t) = \psi^*_{n,m}(t) \exp(ig_{n,m}t). \tag{22}$$

На практике формулы (21), (22) используются на каждом шаге по времени в совокупности с любым методом интегрирования и их применение эквивалентно расщеплению по физическим процессам распространения волны и взаимодействия между волнами.

Метод приведенной фазы позволяет существенно увеличить шаг по времени. Таким образом, для уравнения вихря значение шага по времени оказывается порядка 8—12 ч. При применении схем с пересчетом удовлетворительные результаты достигались при шаге до 20 ч.

10.3. Схемы с динамическим управлением

При применении МПФ линейная часть (17) интегрируется аналитически и ограничения на шаг, вызванные линейной частью уравнения, снимаются. Поэтому максимальный шаг по времени определяется нелинейным взаимодействием (адвекцией). Автоматический выбор шага по времени повышает эффективность вычислений.

Для двухшаговой схемы

$$\psi_{t+\tau} = \psi_t + \tau\left((1+\alpha)\psi'_t - \alpha\psi'_{t-\Delta t}\right). \tag{23}$$

Построим функцию $\tau(\alpha)$ так, чтобы энергия (энстрофия) сохранялась точно. При этом она будет иметь вид, изображенный на рис. 8.

Функция $\tau(\alpha)$ легко вычисляется на каждом шаге по времени. При выборе $\tau = (0{,}5 \div 0{,}7)\,\tau_{max}$ относительная ошибка в сохранении второго инварианта составляет 10^{-5}—10^{-6}. Для схемы (23) значение τ_{max} меняется в пределах 1—1,5 ч, при применении МПФ τ_{max} достигает 20—30 ч. Аналогичным образом строится схема с динамическим управлением и для полунеявного метода.

Методы, описанные в разд. 10.1—10.3, проверялись на серии расчетов на устойчивость и аппроксимацию. В качестве одного из тестов использовалась инициализация Филлипса [41], которая

состоит в задании волны Гурвица, распространяющейся с востока на запад в бездивергентной атмосфере с сохранением формы. Для всех методов волна Гурвица была устойчива, а фазовая скорость совпадала с ее аналитическим значением. Если применять схему (20) с МПФ при периодическом применении схемы (23) с МПФ (для согласования n и $n+1$ шагов по времени), то на этом решении величина τ_{max} достигает 35—40 ч и год модельного времени требует 45 мин времени БЭСМ-6, при этом отклонение расчетных инвариантов составляет менее 0,06% за год. Полунеявная схема

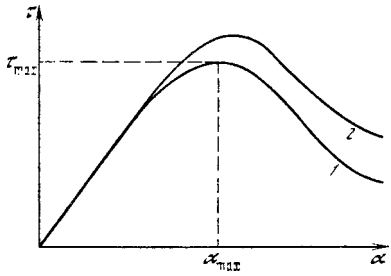


Рис. 8. Вид функции $\tau(\alpha)$ для схемы (23)

Кривая *1* соответствует точному сохранению энергии, кривая *2* — точному сохранению энстрофии. В общем случае разность $\tau_E - \tau_P$ может быть знакопеременной

требует соответственно 25 ч на год, а относительная ошибка расчета инвариантов достигает 7—8%.

11. Заключение

Численные методы, изложенные в предыдущих разделах, применимы для интегрирования полной системы уравнений мелкой воды. Использование стационарного уравнения для дивергенции снимает ограничения на шаг по времени, связанные с быстрыми волнами. Применение методов предиктор—корректор одновременно с итерациями по нелинейности улучшает сохранение инвариантов без заметного увеличения вычислительного времени.

Проведены численные исследования свойств методов при различных шагах по времени. Сравнение результатов интегрирования приближенных уравнений различными методами с контрольным расчетом уравнений мелкой воды проводилось по той же схеме, что и сравнение моделей $M1$ и $M2$ в разд. 9. Так, например, метод Робера дает хорошие результаты при шагах ~30—60 мин и быстро теряет аппроксимацию и устойчивость при шагах более 1 ч. Модель $M2$ с полунеявным методом интегрирования медленных процессов обладает хорошим сохранением инвариантов и устойчива вплоть до шагов порядка 3 ч. Применение метода МПФ к модели $M2$ позволило увеличить шаг по времени до 8 ч при удовлетворительном воспроизведении качественных и количественных характеристик решения. Одновременно с пересчетом по нелинейности использовалась схема предиктор—корректор для аппроксимации по времени (20), это улучшило консервативные свойства численной модели при расчетах на длительное время. Выявлено хорошее соответствие модельных полей течения и эво-

люции пространственных спектров кинетической энергии в пределах устойчивости методов (расчеты по модели $M2$, результаты которых показаны на рис. 5, 6, 7, выполнены с использованием построенных методов).

Проведенные исследования показывают, что использование приближения квазистационарности потенциальной составляющей течения дало возможность построить модели, позволяющие проводить вычисления с существенно большими шагами по времени (по сравнению с методом Робера шаг увеличился в 8—12 раз) и адекватно описывающие крупномасштабные движения мелкой воды на сфере.

Полученные результаты носят методологический характер и дают основание распространить метод на более полные модели динамики атмосферы. Применение разработанных методов к примитивным уравнениям потребует дальнейших исследований, чтобы учесть процессы, возникающие в трехмерных моделях, в частности появление внутренних гравитационных волн. Результаты, полученные в разд. 9, позволяют предположить, что включение параметризаций физических процессов не окажет существенного влияния па адекватность применения стационарного уравнения для дивергенции, однако необходимо более детальное исследование этого вопроса в рамках полных климатических моделей.

Следует отметить, что при описании динамики океана в совместной системе уравнений эволюции атмосферы и океана появляется новый малый параметр — отношение характерных времен процессов в атмосфере и в океане ($\tau_a \ll \tau_o$). Асимптотика при $\tau_a/\tau_o \to 0$ дает, вообще говоря, стационарную задачу для атмосферы. Однако открытым остается вопрос о существовании и единственности такого решения. Более того, расчеты при фиксированной температуре океана показывают, что статистически равновесные режимы нестационарны. Использование этой асимптотики для построения климатической модели представляется перспективным, хотя уже в нулевом приближении возникают вопросы, на которые в настоящее время нет ответа.

Abstract

A coupled atmospheric general circulation and ocean upper layer model on a corse grid is developed. The ability of the model to describe the quasiequilibrium circulation of the unperturbed atmosphere and the climate sensitivity are investigated. The main problems of the long term integrations of the joint model equations are formulated. The small time steps determined by the atmospheric processes are ordinary used for the climate simulation. But the whole range of integration is defined by the ocean energetic reaction and is extremely large in atmospheric characteristic times. The possibility of constructing of the climate models which are free from the time step restriction due to the gravity waves is investigated. The approximate equations guiding the dynamic atmo-

spheric processes are obtained. The approximation is based on the assumption of steady behavior of the potential part of motion towardes the slower vorticity component. This assumption makes it possible to increase the integration time step and to improve the computational climate model efficiency.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кислотные дожди / Ю. А. Израэль, И. М. Назаров, А. Я. Прессман и др. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 206 с.
2. *Кондратьев К. Я.* Радиационные факторы современных изменений глобального климата. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 279 с.
3. Антропогенные изменения климата / И. И. Борзенкова, М. И. Будыко, Э. К. Бютнер и др. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 406 с.
4. *Хотон Дж.*, *Морель П.* Всемирная программа исследования климата // Глобальный климат. Л.: Гидрометеоиздат. 1987. С. 14—34.
5. *Rotty R. M.* Data for global CO_2 production from fossil fuels and cement // Carbon cycle modelling. SCOPE 16. N. Y.: Wiley, 1981. P. 121—126.
6. *Смирнов Н. Н.* Военное разрушение биосферы // Природа. 1981. Т. 9. С. 62—67.
7. *Смирнов Н. Н.* Военное разрушение растительного покрова Земли // Мир науки: Междунар. журн. 1983. Т. 27, вып. 3. С. 17—18.
8. *Ackerman T. P.*, *Crutzen P. J.*, *Harwell M. A.* et al. The environmental consequences of nuclear war: Physical and atmospheric effects // SCOPE 28. N. Y.: Wiley, 1985. Vol. 1.
9. Климатические и биологические последствия ядерной войны / Под ред. Е. П. Велихова. М.: Наука, 1986. 208 с.
10. *Кочин Н. Е.*, *Кибель И. А.*, *Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 563 с.
11. *Кибель И. А.* Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. М.: Гостехиздат, 1957. 376 с.
12. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана / Г. И. Марчук, В. П. Дымников, В. Б. Залесный и др. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 320 с.
13. *Phillips N. A.* A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting // J. Met. 1957. Vol. 14, N 2. P. 184—185.
14. *Самарский А. А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестн. АН СССР. 1979. № 5. С. 38—49.
15. *Самарский А. А.* Проблемы применения вычислительной техники // Там же. № 11. С. 17—26.
16. *Марчук Г. И.* Моделирование изменений климата и проблема долгосрочного прогноза погоды // Метеорология и гидрология. 1979. Т. 7. С. 25—36.
17. *Сергин В. Я.*, *Сергин С. Я.* Системный анализ проблемы больших колебаний климата и оледенения Земли. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 279 с.
18. *Вербицкий М. Я.*, *Чаликов Д. В.* Моделирование системы ледники—океан—атмосфера. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 136 с.
19. *Форрестер Дж.* Мировая динамика. М.: Наука, 1978. 167 с.
20. *Монин А. С.* Введение в теорию климата. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 245 с.
21. *Реснянский Ю. Д.*, *Тросников И. В.* Параметризация деятельного слоя океана при моделировании зональной циркуляции атмосферы // Тр. Гидрометцентра СССР. 1980. Вып. 229. С. 18—31.
22. *Чаликов Д. В.*, *Реснянский Ю. Д.* Расчет планетарной циркуляции океана и атмосферы // Итоги науки и техники. Океанология. М.: ВИНИТИ, 1981. Т. 6. С. 4—80.
23. *Ганопольский А. В.*, *Гусев А. М.*, *Нефедов Н. Н.* Климатическая интегральная модель деятельного слоя океана // Океанология. 1987. Т. 27, № 4. С. 573—578.

24. *Vonder Haar T. H.*, *Oort A. H.* New estimate of annual poleward energy transport by Northern Hemisphere oceans // J. Phys. Oceanogr. 1973. Vol. 3. P. 169—172.
25. *Гейтс В. Л.*, *Баттен Е. С.*, *Кейл А. В.*, *Нельсон А. Б.* Двухуровенная модель общей циркуляции атмосферы Минца—Аракавы. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 240 с.
26. *Аракава А.*, *Лэмб В. Р.* Вычислительные схемы для основных динамических процессов в глобальной циркуляционной модели Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе // Модели общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. С. 196—283.
27. *Хвориков Н. А.* Исследование дисперсионных свойств двухуровенной модели общей циркуляции атмосферы // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 252—264.
28. *Александров В. В.*, *Архипов П. Л.*, *Пархоменко В. П.*, *Стенчиков Г. Л.* Глобальная модель системы океан—атмосфера и исследование ее чувствительности к изменению концентрации CO_2 // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19, № 5. С. 451—459.
29. *Александров В. В.*, *Стенчиков Г. Л.* Численная оценка влияния современного тропосферного аэрозоля на климат // ДАН СССР. 1985. Т. 282, № 6. С. 1324—1326.
30. *Stenchikov G. L.* Mathematical modelling of the influence of the atmospheric pollution on climate and nature. Moscow: Comput. Center of USSR Acad. Sci. 1985. 19 p.
31. *Архипов П. Л.*, *Стенчиков Г. Л.*, *Турков Д. В.* Расчет влияния свойств подстилающей поверхности на формирование климатических полей. М., 1987. 24 с. (Препр. ВЦ АН СССР).
32. *Стенчиков Г. Л.*, *Турков Д. В.* Расчет сезонных режимов циркуляции атмосферы. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 27 с.
33. *Schlesinger M. E.* A review of climate models and their simulation of CO_2-induced warming // Intern. J. Environ. Stud. 1983. Vol. 20. P. 103—114.
34. *Kondratyev K. Ya.* et al. The shortwave albedo and surface emissivity // Land surface process in atmosferic general circulation models. Cambridge: Univ. press, 1982. P. 463—514.
35. *Белов П. Н.* Численные методы прогноза погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 392 с.
36. *Бенгтсон Л.* Среднесрочный прогноз в ЕЦСПП: Обзор и анализ достижений // Долгосрочное и среднесрочное прогнозирование погоды. М., 1987. 285 с.
37. *Берк В.*, *Макавени Б.*, *Пури К.*, *Тюрлинг Р.* Моделирование глобальных атмосферных течений на основе спектрального метода // Модели общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. С. 267—323.
38. *Стенчиков Г. Л.* Вычислительные эксперименты с климатической моделью ВЦ АН СССР // Проблемы прикладной математики и информатики. М.: Наука, 1987. С. 125—137.
39. *Bourke W.* An efficient, one level, primitive equations spectral model // Month. Weather. Rev. 1974. Vol. 100. P. 683—689.
40. *McAvaney B.*, *Bourke W.*, *Puri K.* A global spectral model for simulation of the general circulation // J. Atmos. Sci. 1978. Vol. 35, N 9. P. 1557—1583.
41. *Orszag S.* Transform method for calculation of vector coupled sums: application to the vorticity equation // J. Atmos. Sci. 1970. Vol. 27, N 6. P. 890—895.
42. *Robert A.* Integration of a spectral model by the implicit method // Proc. WMO/IVGG symp. numerical weather prediction. Tokyo, 1968. C. VII-19—VII-24.
43. *Phillips N.* Numerical integration of the primitive equations on the hemisphere // Month. Weather. Rev. 1959. Vol. 87, N 9. P. 333—345.
44. *Kreiss H. O.* Problems with different time scales for partial differential equations // Commun. Pure and Appl. Math. 1980. Vol. 33. P. 399—439.

УДК 574.5

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОЛОГИИ: ОЗЕРА, ПРУДЫ, ВОДОХРАНИЛИЩА

А. А. Воинов

1. Введение

При анализе экосистем водоемов используются самые различные математические модели. В основе каждой из них лежит некоторое множество экспериментальных данных, изначально подразделенное исследователем на подмножество данных для построения модели и на подмножество данных, необходимых для проверки модели [1, 2]. После формализации и подгонки первичного описания на основании данных из первого подмножества, исследователь осуществляет верификацию построенной модели на независимых данных из второго подмножества. При неудовлетворительных результатах анализа модели приходится снова возвращаться к этапу формализации, и, таким образом, весь процесс моделирования зацикливается до тех пор, пока не будет выполнен определенный критерий адекватности.

Подобная процедура моделирования чаще всего используется в тех областях, в которых отсутствует строгая теория, где не известны законы, определяющие поведение объектов моделирования. При этом чем меньше у нас теорий, тем большим оказывается первое подмножество, нередко в ущерб второму. Как раз в экологии, где кроме общефизических законов сохранения вещества и энергии практически нет достоверных закономерностей, на которые можно было бы опереться как на теорию, такая методика является наиболее подходящей.

Рассмотрим два примера моделей, которые построены согласно этой процедуре и которые мы относим к классу имитационных. Принятая методика формализации позволяет выделить некоторые общие для разных моделей блоки, функции, взаимодействия. Это, в свою очередь, позволяет структуризировать модели и автоматизировать сам процесс моделирования.

2. Пример 1: Рыбоводный пруд

2.1. Построение модели

Моделировать искусственные экосистемы проще: ясно определены пространственные границы и биологические виды, входящие в экосистему. Рассмотрим мелководный пруд глубиной порядка 1 м и с площадью около 1 га, в котором выращивают три неконкурирующих вида рыб с использованием искусственного корма, а также естественных трофических взаимодействий, которые интенсифицируются за счет внесения искусственных удобрений.

© А. А. Воинов, 1989

Пусть нас интересует прогноз рыбопродуктивности пруда и описание динамики различных компонент экосистемы. Допустим, что имеются данные о приросте биомассы рыб, о внесении удобрений и искусственного корма, о концентрациях фито- и зоопланктона [3—6].

Можно было бы теперь, не задумываясь о структуре экосистемы, сопоставить временные ряды данных о внешних воздействиях с наблюдениями за биотическими компонентами и получить некоторые статистические закономерности, определяющие развитие экосистемы. Полученная модель, возможно, будет хорошо прогнозировать динамику тех или иных величин; однако очевидно, что она не сможет дать новых сведений о механизмах различных взаимодействий в водоеме. Предположим, что перед нами стоит задача не только описать динамику экосистемы, но и исследовать ее, и допустим, что мы можем предложить некоторую концептуальную модель (в которую заложены определенные гипотезы о природе процессов, происходящих в водоеме), правильность которой, однако, еще предстоит доказать.

В этом случае построение модели можно осуществить по следующей схеме. Определим сначала несколько терминов, которыми мы будем широко пользоваться в дальнейшем.

Модель характеризуется набором переменных, представляющих те компоненты экосистемы, динамика которых нас интересует и временные ряды для которых имеются в нашем распоряжении.

Параметры модели — это те константы, которые нужны для формализации взаимодействий между переменными. Хорошо, если параметры измерены или оценены в эксперименте, однако, как правило, большинство из них подбирается в процессе подгонки (калибровки) модели.

Внешние функции задают изменяющиеся во времени, но независимые от экосистемы воздействия. Это могут быть климатические факторы, антропогенные воздействия — короче, все те функции, которые влияют на экосистему, но не зависят от нее. Если в модели присутствуют управления, то их тоже можно считать внешними функциями. Естественно, что набор внешних функций определяется теми границами, которыми очерчен моделируемый объект в представлении исследователя; при изменении этих границ и, следовательно, причинно-следственных связей внешние функции могут стать фазовыми переменными, и наоборот.

В соответствии с целями нашего анализа и имеющимися экспериментальными данными в основу концептуальной модели можно положить диаграмму потоков, показанную на рис. 1 [7]. Этим самым мы конкретизируем переменные модели и связи между ними. Поскольку пруд не велик, имеет правильную геометрическую форму, мы можем пренебречь пространственными неоднородностями и строить так называемую точечную модель, описывая экосистему усредненными по пространству величинами. В качестве внешних функций в модель войдут климатические факторы:

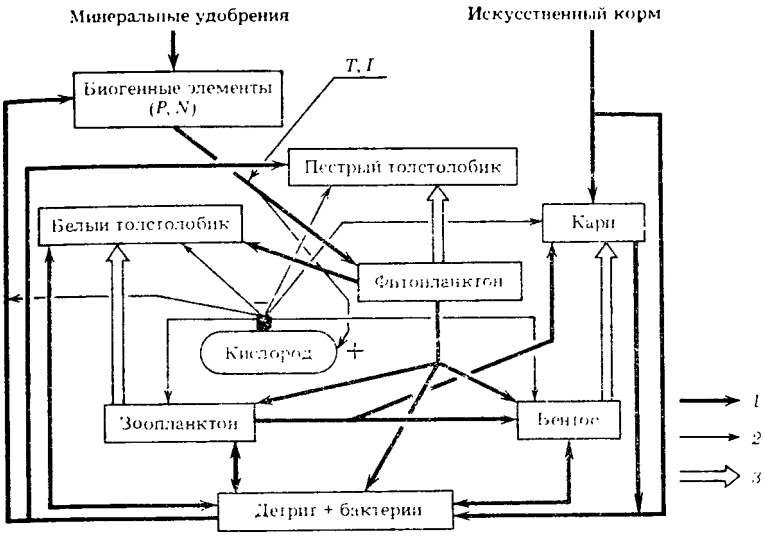


Рис. 1. Диаграмма потоков в модели рыбоводного пруда

1 — потоки вещества, *2* — информационные потоки, *3* — потребление излюбленного корма

температура воды и суммарная солнечная радиация,— а также управляющие воздействия — режимы аэрации воды и внесения искусственного корма и минеральных удобрений.

Концептуальная модель, кроме того, может содержать некоторые гипотезы относительно характера взаимодействий между переменными. Скажем, для описания выедания фитопланктона зоопланктоном можно использовать *s*-образную трофическую функцию, приведенную на рис. 2, *а*. Интенсивность этого взаимодействия будет еще определяться температурой (рис. 2, *б*) и кислородом (рис. 2, *в*), которые лимитируют скорость роста зоопланктона. Аналогичным образом можно охарактеризовать взаимодействия между другими трофическими уровнями. Но в каждом случае проявляется своя специфика. Так, при описании взаимодействия фитопланктона и биогенных элементов (фактически процесса фотосинтеза) необходимо учитывать лимитирующее влияние света (рис. 2, *г*). Кроме того, целесообразно учесть принцип лимитирующих факторов Либиха [8], согласно которому скорость прироста фитопланктона в каждый момент времени определяется одним биогенным элементом — тем, скорость потребления которого с учетом стехиометрических соотношений минимальна. Относительно многих других процессов, таких, как смертность, разложение мертвой органики (детрита), потери на метаболизм и др., можно предположить, что они линейны.

Следующий этап заключается в математической формализации концептуальной модели. Взаимодействия между различными переменными можно представить как потоки вещества из одной ком-

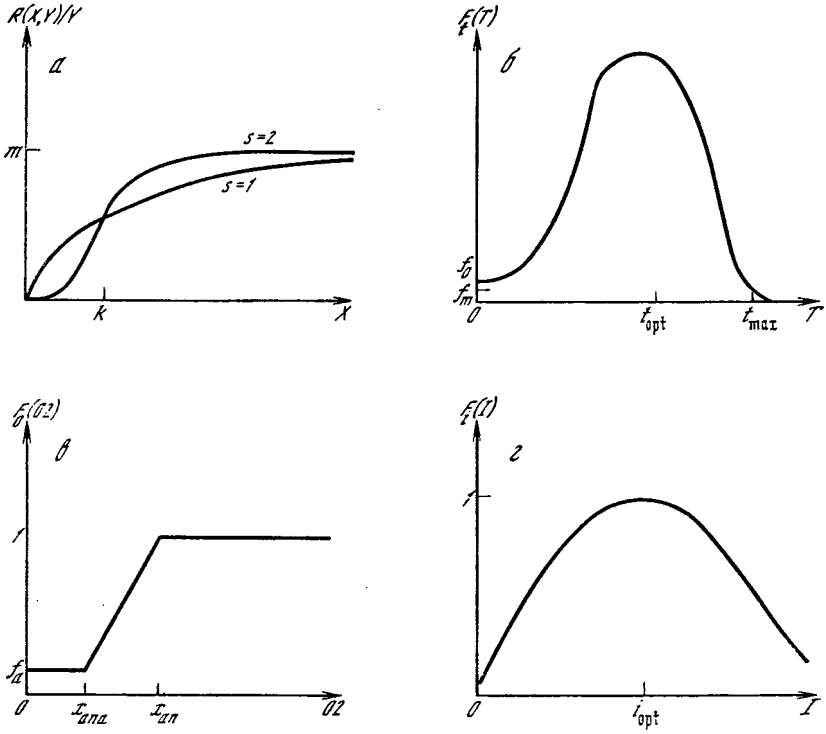


Рис. 2. Вид функций в концептуальной модели

Трофические функции (*а*), функции лимитирования роста температурой (*б*), кислородного лимитирования (*в*), лимитирования светом (*г*)

поненты экосистемы в другую. Соответственно для каждой из переменных можно выписать обыкновенное дифференциальное уравнение, правая часть которого является суммой всех приходящих потоков за вычетом всех выходящих потоков для данной компоненты. Для каждой из функций, представленных на рис. 2, нужно подобрать подходящую формулу. Здесь снова можно пойти по двум путям. С одной стороны, функции можно приблизить, скажем, многочленами с использованием методов регрессионного анализа. При этом мы можем выиграть в точности приближения, но потерять в физичности и универсальности описания. Если мы хотим сознательно видоизменять вид функций, варьируя входящие в нее параметры, то надо придумать такое математическое выражение, в которое только эти параметры и войдут. Тогда, например, температурную функцию (рис. 2, *б*) можно описать следующим выражением:

$$F_t(T) = \begin{cases} f_0^{(1-T/t_{opt})^{s_t}}, & \text{если } T \leqslant t_{opt}; \\ f_m^{((T-t_{opt})/(t_{max}-t_{opt}))^{s_t}}, & \text{если } T > t_{opt}, \end{cases} \qquad (1)$$

где f_0 — температурная поправка при $T = 0$; f_m — температурная поправка при $T = t_{max}$; t_{max} — максимальный предел толерантности организма; t_{opt} — оптимальная температура для развития; s_t — коэффициент крутизны кривой.

Входящие сюда параметры могут быть оценены для различных видов, что позволяет нам при формализации различных потоков использовать одну и ту же функцию, но с разными параметрами.

Для формализации s-образной трофической функции можно использовать модификацию функции Михаэлиса—Ментен:

$$R(X, Y) = mYX^s/(k^s + X^s), \quad (2)$$

где m — максимальная скорость роста или потребления; k — коэффициент полунасыщения; s — коэффициент крутизны кривой; Y — переменная, характеризующая концентрацию потребителя; X — переменная, характеризующая концентрацию субстрата. При $s = 1$ мы получаем классическую функцию Моно, которую, кстати, можно формализовать и другим выражением: $R_i(X, Y) = m(1 - 10^{-k_i X}))Y$ (функция Ивлева), где k_i — коэффициент, характеризующий крутизну кривой.

Световое лимитирование можно формализовать функцией вида

$$F_i(I) = (I/i_{opt}) \exp(1 - I/i_{opt}) \quad (3)$$

— функция Стила, где i_{opt} — оптимальная для данного вида освещенность, $I = I_0 \exp(-k_a h)$ — освещенность на глубине h, вычисленная по формуле Бэра—Ламберта при суммарной солнечной радиации на поверхности I_0 и коэффициенте затухания света k_a.

Тогда потребление фитопланктоном (F) биогенных элементов (азота N и фосфора P) с учетом принципа лимитирующих факторов можно формализовать следующим выражением:

$$Q(\mathrm{N, P, F}) = F_t(T) \cdot F_i(I) \cdot \min\{R(\mathrm{P, F})/c_p; R(\mathrm{N, F})/c_n\} \times \times (c_c + c_n + c_p),$$

где c_c, c_n и c_p — стехиометрические коэффициенты, отражающие соотношение углерода, азота и фосфора в живых организмах: $\mathrm{C : N : P} = c_c : c_n : c_p$.

Продолжая в том же духе, мы должны подобрать математические выражения для всех связей, показанных на рис. 1. Обратим внимание на особую роль, которую играет в экосистеме кислород. Практически не участвуя в круговороте сухой биомассы, он оказывает заметное управляющее воздействие на скорости трансформации веществ. Поэтому и потоки, связанные с ним, мы называем информационными. Кислород образуется при фотосинтезе пропорционально интенсивности потока Q (N, P, F). Потребляется он на дыхание биоты и главным образом при разложении мертвой органики. Он же, естественно, и лимитирует эти процессы. С кислородом связана и еще одна особенность концептуальной модели пруда. Дело в том, что характерное время большинства процес-

сов, показанных на рис. 1, имеет порядок одних суток. В то же время, очевидно, что в течение суток условия освещенности существенно меняются, что вызывает заметное снижение интенсивности фотосинтеза в ночные часы при той же скорости деструкции детрита, что и днем.

В результате именно в рыбных прудах, где мы имеем дело с высокими концентрациями органического вещества и, следовательно, интенсивными процессами разложения, нередки так называемые утренние заморы рыб, когда под утро происходит падение концентрации растворенного кислорода ниже критической. Ясно, таким образом, что для кислорода характерное время должно быть менее суток и что динамика кислорода должна моделироваться со своим временным шагом в рамках общей модели пруда. Формализация этой части концептуальной модели находит свое воплощение уже на этапе численной реализации системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которой в конечном счете описывается математическая модель экосистемы.

2.2. Исследование модели

Итак, предположим, что модель формализована: выписаны все уравнения и если, как в данном случае, аналитическое их исследование невозможно, то и программа для ЭВМ написана. Этап подгонки модели грамотнее всего начать с анализа ее чувствительности к изменению параметров и внешних функций. Определив из экспериментов или литературных данных по крайней мере возможные интервалы изменения параметров модели и взяв в качестве исходных некоторые значения из этих интервалов, мы рассчитываем траектории модели, после чего повторяем расчеты при возмущенных значениях параметров (например, $p = p \pm 0{,}1p$). При этом выясняется, изменение каких параметров приводит к наиболее существенным изменениям в траекториях модели. Существует большое количество различных методов анализа чувствительности [9—11 и др.]. Помимо определения значимости тех или иных процессов в системе, все они так или иначе сводятся к сокращению числа параметров, участвующих в процессе подгонки модели. Весьма неприятной особенностью большинства имитационных моделей является их большая неопределенность и размерность, значительно бо́льшая, чем, скажем, в моделях физики. В результате строго ставить задачу идентификации оказывается часто бессмысленно. Именно поэтому, во избежании двусмысленности, мы здесь говорим о подгонке или калибровке модели, имея в виду главным образом процедуру, основанную на методе проб и ошибок.

В модели рыбоводного пруда [7] в результате формализации концептуальной модели оказалось 112 параметров. В результате анализа чувствительности было выделено 15 параметров, среди которых были в основном температурные коэффициенты, максимальные скорости роста, коэффициент скорости окисления дет-

рита. Варьируя именно эти параметры, удалось модель подогнать так, чтобы она описывала имеющиеся экспериментальные данные.

Построенную таким образом модель нужно, с одной стороны, проверить на адекватность, т. е. верифицировать, с другой стороны, если мы собираемся использовать модель как инструмент исследования экосистемы, мы должны достаточно хорошо изучить возможности этого инструмента.

Описанный выше анализ чувствительности является одним из первых шагов на этом пути. Если расширить пределы варьирования параметров, можно определить такую характеристику имитационной модели, как ее грубость. Грубость модели характеризуется величиной ее области устойчивости. Под областью устойчивости мы понимаем следующее. Пусть $\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_k)$ — вектор параметров, $\mathrm{Y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))$ — вектор внешних функций, $\mathrm{X}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — вектор модельных траекторий. Тогда область устойчивости характеризуется многогранниками $Q = \{q_{1i} \leqslant p_i \leqslant q_{2i};\ i = 1, \ldots, k\}$ и $Z = \{z_{1j}(t) \leqslant y_j(t) \leqslant z_{2j}(t);\ j = 1, \ldots, m\}$, такими, что для всех $\mathbf{P} \in Q$ и $\mathbf{Y}(t) \in Z$ фазовые траектории не выходят за пределы некоторой ограниченной области, т. е.

$$\mathbf{X}(t) \in N = \{0 < c_{1i} \leqslant x_i(t) \leqslant c_{2i} < \infty;\ i = 1, \ldots, n\}. \quad (4)$$

Здесь c_{1i}, c_{2i} $(i = 1, \ldots, n)$ и q_{1j}, q_{2j} $(j = 1, \ldots, k)$ — положительные константы, такие, что траектории имеют экологический смысл, т. е. виды не вымирают и не растут до бесконечности; $z_{1j}(t)$ и $z_{2j}(t)$ — фиксированные функции, ограничивающие область возможных изменений для внешних функций модели. Можно определить область устойчивости модели как ту область изменения параметров и внешних функций, для которой траектории остаются устойчивыми по Лагранжу [12]. Заметим, что анализ многогранника Z можно было бы свести к анализу многогранника Q, расширив набор параметров модели. Действительно, параметризовав некоторым образом окаймляющие функции $z_{1j}(t)$ и $z_{2j}(t)$, $(j = 1, \ldots, m)$, можно было бы устроить перебор параметров в определенном интервале, покрыв с любой наперед заданной плотностью всю область Q (здесь естественно предполагается, что все наши функции достаточно гладкие). При этом процедура оценки устойчивости модели проще формализуется и сводится к постепенному увеличению области Q при условии выполнения (4).

Оценка грубости модели нужна в первую очередь для того, чтобы описывать различные режимы функционирования экосистемы и исследовать всевозможные сценарии ее развития. Под сценарием мы понимаем фиксированный набор внешних функций, описывающий некоторый осмысленный вариант воздействий на экосистему. Достаточно грубые модели могут работать в широких диапазонах изменения внешних функций, кроме того, они налагают менее жесткие требования на точность измерения параметров модели. Пока не существует каких-либо формальных

методов оценки устойчивости модели и приходится рассчитывать, как и в случае с подгонкой модели, лишь на приближенную ее оценку в имитационных экспериментах все по тому же методу проб и ошибок либо на проверку модели на устойчивость в тех частях областей Q и Z, в которых нам предстоит работать.

Ряд методов разработан для анализа чувствительности моделей к различным связям между их переменными [13, 14]. Эти методы позволяют упрощать структуру моделей, отбрасывая малозначимые связи и даже переменные. Разработаны специальные методики оценки адекватности моделей, анализа неопределенности прогнозов [15]. Все эти методы главным образом сводятся к изучению статистики, набранной на модели, в отличие от статистических методов анализа исходной экспериментальной информации (например, [16]). При этом более детальное изучение экспериментальных данных во многих случаях может избавить нас от излишних исследований структуры моделей, и потому тщательный первичный статистический анализ данных совершенно необходим для получения хорошей концептуальной модели. В то же время, убедившись в адекватности модели, из ее анализа можно вынести много полезной информации о качественных свойствах самой экосистемы (относительной важности тех или иных компонент и процессов, устойчивости к внешним воздействиям и т. д.).

3. Пример 2: Кайраккумское водохранилище

Рассмотрим пример еще одной имитационной модели. Кайраккумское водохранилище, расположенное в Таджикской ССР, имеет общую протяженность 56 км, наибольшую ширину — 15 км, максимальную глубину у плотины — 25 м, среднюю — 8 м. Нормальная сработка уровня воды составляет 5 м, а в маловодные годы достигает 7 м. При этом площадь водоема сокращается почти в 3 раза. Модель Кайраккумского водохранилища [17] строилась для прогнозирования качества воды и интенсивности эвтрофикации под действием возрастающей биогенной нагрузки, оценки потенциальной рыбопродуктивности водоема, анализа роли высшей водной растительности в экодинамике водоема. Экспериментальные данные были вновь главным образом почерпнуты из литературы [18—20 и др.]. В отличие от рыбоводного пруда, очевидно, что точечное описание здесь не пройдет: сильные колебания уровня, большая пространственная протяженность приводят к существенным пространственным неоднородностям. Для описания пространственно распределенных экосистем естественно воспользоваться аппаратом дифференциальных уравнений в частных производных. Однако при достаточно большой размерности вектора переменных, зависящих от времени и двух или трех пространственных координат, даже машинное решение задачи становится весьма сложной проблемой. Не менее сложной задачей оказывается обеспечение такой модели экспериментальной информацией.

В то же время в реальных водоемах всегда можно выделить достаточно крупные водные объемы с примерно однородными гидрологическими и экологическими условиями, для которых можно сформулировать соответствующие точечные модели. Если теперь представить весь водоем в виде совокупности точечных моделей, связанных между собой потоками вещества в соответствии со складывающимися полями течений, то мы получим «модельную сеть», описывающую динамику пространственно распределенной экосистемы водоема. Поскольку каждый узел сети связан с некоторым пространственным объемом, то говорят о разбиении водоема на сегменты (компартменты, камеры и т. п.), а о всей модельной сети говорят как о сегментной модели. Распределение экологических компонентов внутри каждого сегмента считается однородным. Поскольку число таких сегментов обычно не так уж велико, то реализовать такую модель оказывается легче, чем модель с непрерывным распределением компонент по пространству. Отметим, что подобное пространственное представление является достаточно естественным для конкретного специалиста, как правило, имеющего дело с данными, померенными на некоторой фиксированной сети станций. Естественно при этом предполагать, что каждая станция, в особенности если произведенные на ней замеры отличаются от данных по соседним станциям, описывает некоторую экологическую однородную область и, таким образом, представляет определенный сегмент модели.

Поскольку вся водная масса перемешивается ветровыми течениями и не образуется термоклин, в модели Кайраккумского водохранилища достаточно выделить два водных сегмента.

Сегмент 1 — мелководная зона (литораль) — занимает участки водохранилища с глубиной менее 5 м по всему периметру водоема. Сегмент характеризуется более высоким по сравнению с остальным водоемом содержанием взвешенных веществ, биогенных элементов и, следовательно, более высокой продуктивностью. В нем может развиваться высшая водная растительность (макрофиты).

Сегмент 2 — основная зона (эпи- и гиполимнион) — куда входят приплотинный и средний участки водоема с глубинами более 5 м. Здесь концентрации биоты и биогенных элементов меньше, меньше скорости течений и интенсивность обмена с седиментами.

В Кайраккумском водохранилище особо важную роль начинают играть процессы, связанные с дном, седиментами: из-за колебаний уровня воды, а значит, и границ водоема седименты активно вовлекаются в круговорот элементов. Поэтому в модели введены три донных сегмента.

Сегмент 3 — дно сегмента 1. Эта зона является субстратом для макрофитов, здесь активно идут процессы накопления и разложения отмершей органики.

Сегмент 4 — дно сегмента 2. Здесь большие глубины препятствуют развитию полупогруженных макрофитов, биота состоит

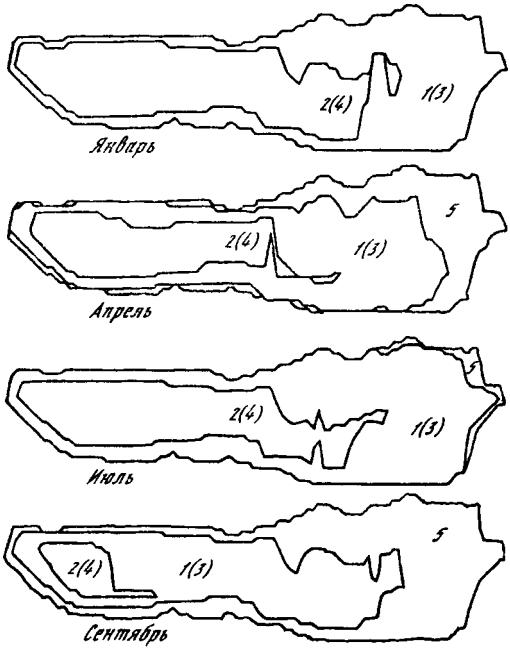
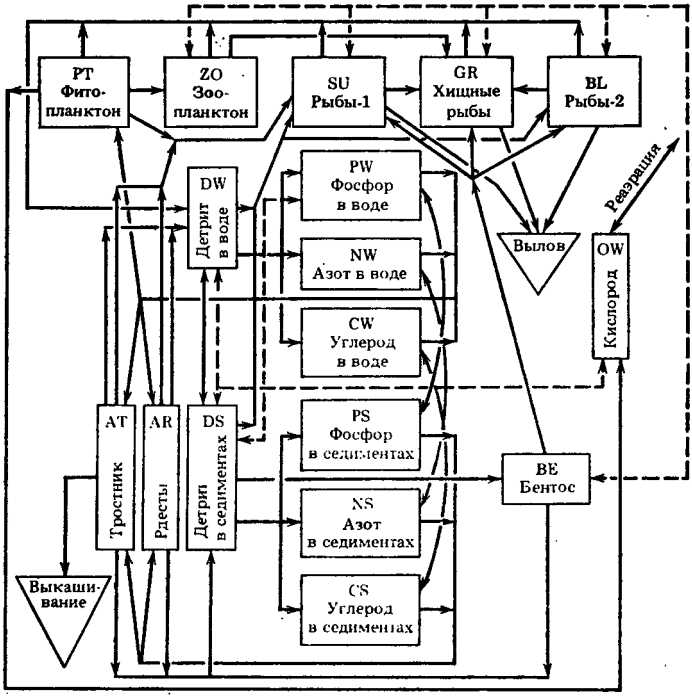


Рис. 3. Сегментация Кайраккумского водохранилища

Цифры — номера сегментов, цифры в скобках — номера подстилающих сегментов

Рис 4. Диаграмма потоков в модели Кайраккумского водохранилища



главным образом из бентоса и бактерий, осуществляющих разложение детрита.

Сегмент 5 — это безводная часть водохранилища, т. е. периодически затапливаемая, но в данный момент осушенная зона. Из гидробионтов здесь могут сохраняться лишь полупогруженные макрофиты.

Заметим, что при таком разбиении водоема сегменты не зафиксированы в пространстве и геометрически могут занимать различные положения, «перетекая» друг в друга (рис. 3).

Исходя из целей моделирования, для концептуальной модели можно предложить следующую диаграмму потоков вещества

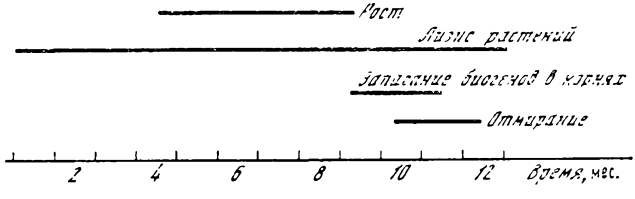


Рис. 5. Жизненный цикл полупогруженных макрофитов

(рис. 4). Внешними функциями для модели будут снова температура воды и суммарная солнечная радиация, биогенная и органическая нагрузки будут аналогами кормов и удобрений, вносимых в пруд. Кроме того, сила и направление ветра, а также величины притока из реки Сырдарья и оттока через плотину будут определять водообмен между сегментами. При формализации различных процессов, приведенных на рис. 4, мы сталкиваемся во многом с теми же проблемами, что и в случае рыбоводного пруда. Мы можем использовать ту же самую формализацию продукционного процесса (надо лишь добавить потребление и соответственно лимитирование углеродом). Точно так же можно представить трофические процессы, смертность, потери на метаболизм и т. д.

С макрофитами, однако, мы раньше не встречались и надо думать, как их описать. Рассмотрим, к примеру, полупогруженные макрофиты (тростник *Phragmitus australis*). Их жизненный цикл проходит согласно схеме, приведенной на рис. 5. Известно, что в основном они потребляют биогены со дна, но при обилии растворенных биогенных элементов они могут выпускать водные корни и потреблять биогены из воды. Это все относится к концептуальной модели. Как теперь можно формализовать эти процессы?

Потребление биогенов со дна пропорционально биомассе корней. Чтобы не вводить дополнительную переменную, предположим, что макрофиты имеют достаточно развитую корневую сеть, которая не лимитирует скорость их роста. Тогда скорость потребления биогенов дна можно задать той же *s*-образной функцией

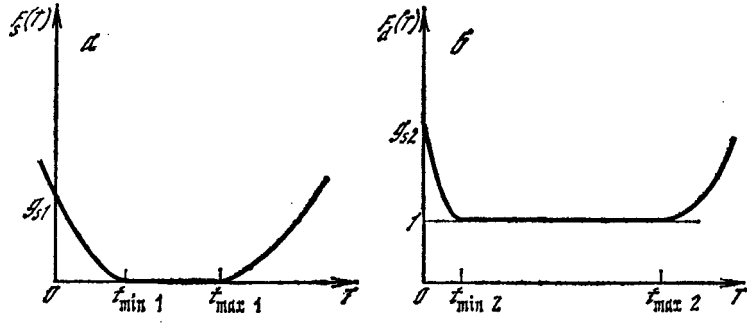


Рис. 6. Температурные функции для макрофитов

а — процесс запасания биогенов, *б* — отмирание макрофитов

(рис. 2, *а*): $R(k, r)$, где k = PS, NS или CS (т. е. представляет доступный фосфор, азот или углерод дна), а r — некоторая константа, характеризующая биомассу корней. Для описания потребления биогенов из воды естественно модифицировать s-образную функцию следующим образом:

$$R_t(X, Y) = \begin{cases} mY\,(X - x_t)^s/(k^s + (X - x_t)^s), & \text{если } X \geqslant x_t, \\ 0, & \text{если } X < x_t, \end{cases}$$

где x_t — пороговая концентрация растворенных биогенов, при которой начинается рост водных корней. Остальные параметры здесь и далее имеют тот же смысл, что и в рыбоводном пруде. Принимая все ту же гипотезу о лимитирующих факторах, рост полупогруженных макрофитов можно описать следующим образом:

$$Q\,(\mathrm{AT}) = F_t\,(T)\cdot F_i\,(I)\cdot(c_p + c_n + c_c)\ \times$$
$$\times \min\,\{(R\,(\mathrm{PS}, r) + R_t\,(\mathrm{PW}, \mathrm{AT}))/c_p,$$
$$(R\,(\mathrm{NS}, r) + R_t\,(\mathrm{NW}, \mathrm{AT}))/c_n,\ \ (R\,(\mathrm{CS}, r) + R_t\,(\mathrm{CW}, \mathrm{AT}))/c_c\}.$$

Для описания светового лимитирования здесь использована модификация формулы Стила (3):

$$F_m(I) = \begin{cases} F_i(I), & \text{если } \mathrm{AT} < a_t, \\ (I_0/i_{\mathrm{opt}})\exp(1 - I_0/i_{\mathrm{opt}}), & \text{если } \mathrm{AT} \geqslant a_t, \end{cases}$$

где a_t — пороговая концентрация макрофитов, которая соответствует моменту выхода растений из воды.

Предположим, что начало процесса запасания биогенных элементов в корнях, а также начало интенсивного отмирания макрофитов определяются температурой и формализуются следующими функциями (рис. 6) соответственно:

$$F_s(T) = \begin{cases} 0, & \text{если } t_{\min 1} \leqslant T \leqslant t_{\max 1}, \\ g_s\,(T - t_{\min 1})\,(T - t_{\max 1}), & \text{если } T > t_{\max 1} \text{ и } T < t_{\min 1}, \end{cases}$$

и $F_d(T) = 1 + F_{s1}(T)$, где функция F_{s1} отличается от F_s лишь величинами параметров $t_{\min 1}$ (минимальная температура), $t_{\max 1}$ (максимальная температура), и g_s (коэффициент крутизны кривой). Таким образом удается обеспечить динамику макрофитов в соответствии с биологическими представлениями об их жизненном цикле (рис. 5). Подобным образом формализуются и остальные потоки в модели.

Поля ветровых течений в модели Кайраккумского водохранилища вычисляются на основании стационарной модели Фельзенбаума [21], модифицированной для случая водоемов с переменным уровнем. Заметим, что моделирование гидродинамики в рамках имитационных моделей экосистем имеет свою специфику: гидродинамический блок не должен быть слишком сложным, поскольку в конечном счете он играет вспомогательную роль. Кроме того, с учетом точности измерения биологических параметров особо высокая точность гидродинамических характеристик будет просто избыточной.

4. Структуризация имитационных моделей водных экосистем

Рассмотрев лишь две модели водных экосистем, уже можно заметить, что между ними есть много общего. Если продолжить список моделей [22—25 и пр.], то мы убедимся, что целый ряд описаний перекочевывает из одной модели в другую с небольшими вариациями и модификациями. Поэтому естественно возникает идея о выделении неких общих блоков и структур, которые можно было бы в явном виде переносить из одной имитационной модели в другую.

Во-первых, сегментный подход дает достаточно четкий алгоритм пространственной структуризации водоема. Далее при помощи той или иной гидродинамической модели или на основании экспериментальных наблюдений можно определить водо- и, следовательно, массообмен между сегментами и между водоемом и окружающей средой.

Во-вторых, диаграмма потоков, которая, как правило, лежит в основе всякой концептуальной модели, позволяет также алгоритмизировать процесс моделирования. Сначала определяются переменные модели и внешние функции. Затем устанавливаются связи между ними, для каждой из которых на качественном уровне подбирается функциональное описание. Это может быть либо функция (линейная, с насыщением, s-образная, колоколообразная, убывающая и т. п.), либо функционал, возможно векторный (принцип лимитирующих факторов, деструкция по стехиометрии и т. п.). Вплоть до этого момента существенно участие конкретных специалистов в построении модели. Далее процедура может быть и вовсе формализована: подбираем соответствующие формализации для качественных описаний связей между переменными, записываем правые части для систем обыкновенных

дифференциальных уравнений, соответствующих точечным моделям, объединяем точечные модели в модельную сеть и пишем общую программу для модели, если аналитическое исследование невозможно. Далее все по общей схеме: предварительный анализ модели (чувствительность), подгонка, верификация, если удачно, то тщательный анализ модели, иначе — обратно к концептуальной модели.

Подобная структуризация модели и формализация процесса моделирования позволяют нам сделать следующий шаг и поставить задачу автоматизации процесса моделирования. По сути дела речь идет о сборке программ из заранее заготовленных блоков и обеспечении расчетов по некоторому заданному сценарию. Такая моделирующая система была бы весьма полезна и для тех, кто строит модели, избавляя их от рутинных процедур программирования одних и тех же блоков, и для конкретных специалистов, существенно упрощая для них использование методов имитационного моделирования как средства представления экспериментальных данных для формулирования и проверки гипотез о принципах функционирования экосистем и их различных звеньев. Следует заметить, что восприятие методов имитационного моделирования представителями слабо математизированных естественнонаучных областей — биологами, химиками, экологами — во многом упирается в удобный интерфейс, который, как это произошло в случае со статистикой, позволил бы даже людям, далеким от математики и программирования, самостоятельно использовать математические методы анализа и (в данном случае) строить и модифицировать математические модели.

Попытка создания такого интерфейса — Системы имитационного моделирования водоемов (СИМВО) — предпринята в Вычислительном центре АН СССР. Общая структура СИМВО представлена на рис. 7. Продуктом системы является переносимая ФОРТРАН-программа. Таким образом, расчеты для сложных моделей большой размерности и анализ их свойств может проводится на мощных ЭВМ, в то время как сборка самих программ и анализ простых моделей осуществляется на персональных компьютерах.

Минимально полагаясь на постулаты той или иной школы математического моделирования, моделирующий интерфейс должен быть достаточно гибким, чтобы охватить наиболее широкий класс моделей. Те же принципы, которые представляют собой неизменяемую часть системы, должны быть четко оговорены и открыты для критики.

Рассмотрим набор тех гипотез, которые «запаяны» в структуру СИМВО.

Пространственная структуризация экосистемы. Предполагается, что весь водоем мы можем разбить на некоторое число экологически однородных сегментов. В каждом из этих сегментов все компоненты экосистемы описываются усредненными по пространству переменными (численности, концентрации).

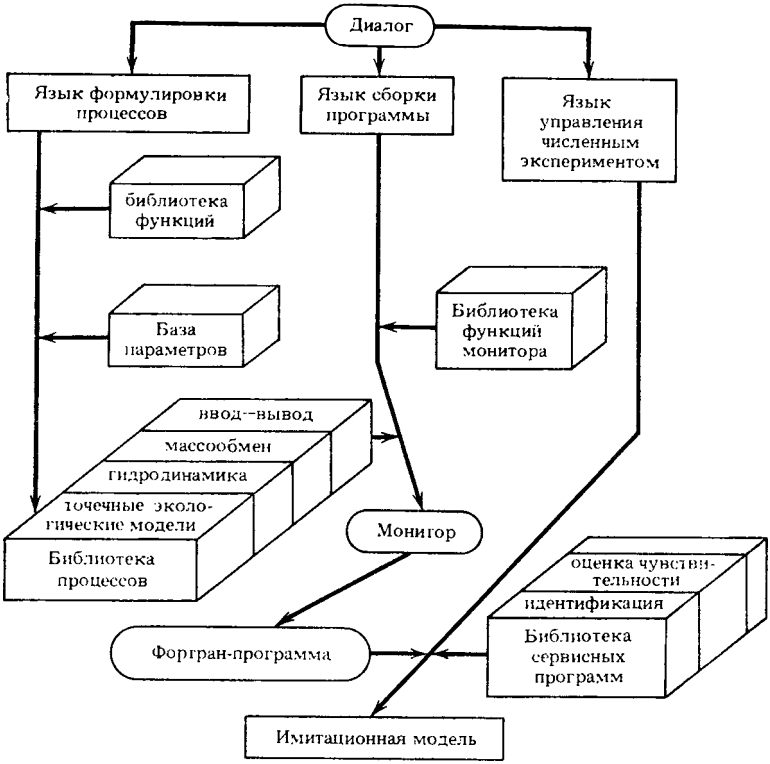


Рис. 7. Структурная схема системы имитационного моделирования водоемов

Временна́я дискретизация процессов. Предполагается, что на временно́й шкале можно выделить некоторую последовательность событий, каждое из которых соответствует осуществлению некоторых процессов в экосистеме. При этом предполагается, что осуществляются эти процессы мгновенно и в промежутках между событиями ничего не происходит. Тогда функционирование экосистемы можно представить себе, например, следующим образом: в момент времени t_0 в граничные сегменты водоема поступает биогенная нагрузка; затем, скажем в момент $t_0 + dt$, происходит изменение концентраций различных компонент в сегментах за счет перехода вещества по трофическим цепям или биогидрохимическим циклам (экологический блок); затем в момент $t_0 + 3dt$ формируется поле ветровых течений, которые определяют водообмен между сегментами (гидродинамический блок); далее в момент времени $t_0 + 7dt$ происходит перемешивание всего водоема за счет водообмена между сегментами и диффузионных потоков, при этом соответствующим образом меняются концентрации экологических компонент; затем в момент $t_0 + 10dt$ снова в водоем поступает биогенная нагрузка и т. д. Заметим, что содержание тех или иных событий, вообще говоря, произвольно.

Динамика экологических переменных. Внутри сегмента динамика переменных описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для их формулировки необходимо задать правые части, что осуществляется в СИМВО в терминах специального потокового языка. В принципе правые части могут формулироваться в произвольном файле в виде ФОРТРАН-подпрограмм пользователя. Если использовать средства СИМВО, то правые части вычисляются как суммы потоков, задающих переход вещества из одной компоненты экосистемы в другую. Для описания потоков можно использовать конструкции из библиотеки функций СИМВО или можно их задавать в виде фрагментов ФОРТРАН-программы. В любом случае в результате работы СИМВО для вычисления правых частей систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющих различные сегменты водоема, формируются подпрограммы на ФОРТРАН'е. Пользователь, не знающий ФОРТРАН'а, ограничен при формулировке моделей библиотекой функций СИМВО, которая, впрочем, включает в себя все наиболее часто применяемые при моделировании функции.

Запишем для примера модель рыбоводного пруда в терминах языка описания потоков СИМВО [26]. Здесь мы не будем давать полный синтаксис этого языка, отметим только основные моменты:

для определения потока из переменной X в переменную Y используется обозначение Q [X, Y];

потоки, приходящие извне системы в переменную x или уходящие из системы, обозначаются соответственно как QIN [X] и QOUT [X];

обозначения Q[*, X] и Q[X, *] приняты соответственно для обозначения суммы всех потоков, приходящих в X и уходящих из X;

символ $ служит для обозначения библиотечной функции СИМВО; с помощью конструкции #CH:NAME.EXT описываются различные параметры моделей (здесь CH, NAME и EXT — некоторые идентификаторы, обозначающие имя переменной, имя параметра и его расширения соответственно);

если в некотором выражении используется функция СИМВО, определяющая сразу несколько значений, то эти значения будут присвоены потокам, перечисленным в фигурных скобках в левой части выражения.

В остальном сохраняются основные правила синтаксиса ФОРТРАН'а (С — комментарий, запись с шестой позиции и т. д.).

Описание точечной модели начинается с определения ее имени, имен переменных и внешних функций, а также имени базы параметров — некоторого файла с определенной структурой, в котором хранится информация о различных параметрах, используемых при моделировании водных экосистем. После этого описываются все положительные потоки точечной модели. Текст СИМВО-программы с соответствующими комментариями для точечной модели приведен в табл. 1.

Заметим, что при использовании библиотечных функций СИМВО мы не определяем параметры этих функций. Все необходимые параметры будут автоматически выбираться из базы параметров, а в случае, когда они не определены в базе — будут запрошены при первой трансляции точечной модели.

Чтобы закончить формализацию модели, необходимо еще описать монитор (табл. 2). Здесь указываются начальные значения переменных, определяются правила изменения внешних функций, метод численного интегрирования системы уравнений, способ представления результатов имитации.

В этой же таблице заданы данные, которые используются в мониторе (в данном случае это начальные значения переменных, климатические факторы, режимы внесения кормов и удобрений).

Если бы мы имели дело с сегментной моделью, то в монитор нужно было бы включить соответствующие описания взаимосвязей между сегментами и в нужные моменты времени обеспечить водообмен между ними (перемешивание водоема).

Сформулированная таким образом модель автоматически транслируется на ФОРТРАН. Помимо большей наглядности записи мы получаем возможность легко модифицировать модель, поскольку очевидно, что вносить изменения в СИМВО-программу куда проще, чем переделывать программу, реализованную с помощью одного из традиционных языков (Бейсика, ФОРТРАН'а или других).

Процедура анализа модели, заложенная в комплекс сервисных программ СИМВО, включает в себя набор модулей, позволяющих

оценивать чувствительность модели к различным параметрам и внешним функциям;

оценивать устойчивость и грубость модели;

калибровать модель по экспериментальным данным.

Благодаря тому, что СИМВО позволяет легко менять саму модель, удается оценить «структурную чувствительность» модели, т. е. ее чувствительность к изменению структуры — добавлению или исключению переменных и связей, модификации описания тех или иных взаимодействий.

Во всех сервисных программах мы придерживались общей идеологии СИМВО, согласно которой продуктом системы является переносимая ФОРТРАН-программа, которую при необходимости можно прогонять на больших ЭВМ.

5. Заключение

Вернемся снова к процессу построения моделей. Можно заметить, что специфика создаваемой модели главным образом определяется на первом этапе — при формализации имеющейся информации об экосистеме. Если первичная модель представляет собой лишь формальную интерпретацию экспериментальных данных по принципу черного ящика, то мы будем получать статистические, регрес-

Таблица 1. СИМВО-программа для точечной модели рыбоводного пруда

```
MODEL Z
VAR F,Z,B,CR,S,H,P,N,OX,D,A;
FORC T,IL;
PARAM FISHPOND.PRM
C процесс фотосинтеза. $LIM1-векторный функционал. Углерод не
C      лимитирует рост и потребляется извне по стехиометрии
        {Q[P,F],Q[N,F]}=$FT1(T,F)*$FI1(IL,F,#HIGHT,$SHAD(F,D))*
       *                          $LIM1(F,P,N,$R2(P,F),$R2(N,F))
        QIN[F]=Q[P,F]*#F:C.C/#F:C.P
C потребление зоопланктоном фитопланктона и детрита
C      (лимитируется температурой и растворенным кислородом)
        {Q[F,Z],Q[D,Z]}=$FT1(T,Z)*$FOAE1(OX,Z)*
       *                                  {$R2(F,Z),$R2(D,Z)}
C бентос питается детритом и зоопланктоном
        {Q[D,B],Q[Z,B]}=$FT1(T,B)*{$R2(D,B),$R2(Z,B)}
C питание карпа: $SW-векторный функционал вычисляет питание с
C переключением на заменяющий и вынужденный корм.
C $FOAE1 - функция кислородного лимитирования
        {Q[B,CR],Q[Z,CR]}=$FT1(T,CR)*$FOAE1(OX,CR)*$SW(B,Z,CR)
        Q[A,CR]=$FT1(T,CR)*$FOAE1(OX,CR)*$R2(A,CR)
C питание пестрый толстолобика
        {Q[F,S],Q[D,S]}=$FT1(T,S)*$FOAE1(OX,S)*
       *                                  {$R2(F,S),$R2(D,S)}
C питание белого толстолобика
        {Q[Z,H],Q[F,H],Q[D,H]}=$FT1(T,H)*$FOAE1(OX,H)*
       *                                  $SW(Z,F,D,H)
C разложение детрита по стехиометрии - $ST1 - лимитируется
C температурой и кислородом
        {Q[D,P],Q[D,N],QOUT[D]}=$FT4(T,D)*$FOAN1(OX,D)*
       *                          $ST1(D,P,N,C,$DES(D))
        QOUT[D]=QOUT[D]+D*#DOUT
C далее следует вставка на ФОРТРАН'е написанная пользователем
C*** FO - кислор.функция для процесса седиментации фосфора ***
        FO=.0
        IF(OX.LE.#P:OCRSED) GOTO 100
        X=OX-#P:OCRSED
        FO=X/(X+#MCURV)
  100   CONTINUE
C обмен между растворенным фосфором и детритом
        Q[P,D]=P*FO*#P:KSED
C процессы отмирания биоты и потери на метаболизм
        Q[F,D]=Q[*,F]*#F:MB+#F:MOR*F
        Q[Z,D]=Q[*,Z]*#Z:MB+$FO4(OX,Z)*Z*#Z:MOR
        Q[B,D]=Q[*,B]*#B:MB+B*#B:MOR
        Q=Q[*,CR]
        Q[CR,D]=Q*(#CR:MB+#CR:ADDMB*Q/#CR:QMAX)
        Q=Q[*,S]
        Q[S,D]=Q*(#S:MB+#S:ADDMB*Q/#S:QMAX)
        Q=Q[*,H]
        Q[H,D]=Q*(#H:MB+#H:ADDMB*Q/#H:QMAX)
C определенная доля искусственного корма уходит в детрит
        Q[A,D]=A*#ALPHA
C поступление кислорода за счет реаэрации и фотосинтеза
        QIN[OX]=$REA(OX,T,#RE)+Q[*,F]*#F:PHOTO
C потребление кислорода на дыхание и деструкцию
        QOUT[OX]=F*#F:RESP+Z*#Z:RESP+B*#B:RESP+CR*#CR:RESP+
       +                          S*#S:RESP+H*#H:RESP+D*#D:OK
END
```

Таблица 2. СИМВО-программа монитора для модели рыбоводного пруда

```
MONITOR
MOD Z;
INITIAL
C считывание начальных данных
      $READ(INIT) VAR
DYNAMIC TEND=150;
ST=1,1;
C начиная с первого дня с шагом в сутки счет уравнений мето-
C дом Рунге-Кутта и подготовка данных для построения графиков
      $RUNGE Z,VAR,FORC,15
      $FOR_PLOT VAR,FORC
ST=1,10;
C с шагом 10 суток читаем данные о климатических факторах
      $READ(TEMP) T
      $READ(ILLUM) IL
ST=1,30;
C раз в 30 суток меняется режим искусственного кормления
      $READ(TOA) TOA
ST=2,2;
C раз в двое суток вносится искусственный корм
      A=A+TOA
ST=1,7;
C раз в 7 суток вносятся искусственные удобрения
      $READ(TON) TON
      $READ(TOP) TOP
      N=N+TON
      P=P+TOP
TERMINAL
C рисуем графики траекторий
      $PLOT
END
```

```
DATA
INIT:   20, 1, 1, 23.6, 26, 0, 0.1, 2, 7, 2, 40;
TEMP:   13,13,14,15,15,16,17,17,18,18,19,19,20,19,18;
ILLUM:  507, 124, 191, 416, 274, 639, 261, 270, 508, 663,
        630, 628, 632, 343, 367;
TOA:    0.9, 2.6, 4.7, 7, 3.8;
TON:    0.8, 0.4, 1.0, 7.3,18.4,25.7, 9.1,14.2, 4.9,22.0,
        2.0, 1.0, 9.8, 6.1, 6.8, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0;
TOP:    0.06,0.06,0.1, 0.3, 0.4, 0.7, 0.9, 0.2, 0.9, 0.9,
        0.7, 0.1, 0.8, 0.1, 0.8, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1;
```

сионные и т. п. модели. Если же исследователь задумывается о механизмах, лежащих в основе тех или иных экологических процессов, и может сформулировать некоторые гипотезы относительно этих механизмов, то он создает свою концептуальную модель, представляющую собой набор качественных описаний и гипотез. Эта концептуальная модель, с одной стороны, является основой для дальнейших программ сбора экспериментальной информации. С другой стороны, она может служить для изучения принципов функционирования экосистемы в целом и отдельных ее звеньев в частности. Для этого концептуальная модель исследователя формализуется и получается математическая модель, которая далее проходит через все остальные этапы анализа. В результате мы получаем возможность судить о правильности и непротиворечивости описания отдельных процессов и компонент, входящих в экосистему, по данным о поведении всей экосистемы как со-

вокупности различных процессов. Таким образом, в нашем понимании имитационная модель есть математическая формализация множества гипотез о функционировании экосистемы, о правильности которых мы судим по экспериментальным данным о динамике всей экосистемы.

В отличие от других моделей, имитационные строят в физически и биологически осмысленных терминах, их параметры в принципе могут быть всегда измерены в эксперименте. При таком определении несколько более оправданным представляется и сам термин: мы хотим подчеркнуть, что при моделировании имитируется физическая и биологическая структура экосистемы.

При использовании моделей надо хорошо понимать, что они могут дать исследователю и чего от них в принципе нельзя требовать. В соответствии с крылатой фразой С. Йоргенсена [27], ни одна модель не может быть лучше тех данных, на которых она основана. Действительно, в конечном счете все модели являются формализациями тех представлений исследователя об изучаемом объекте, которые он получил из натурных экспериментов, и адекватность модели может быть установлена только на основании сопоставления результатов моделирования с данными об экосистеме. Поэтому в любом случае точность модельных прогнозов не может быть большей, чем точность натурных измерений; неграмотно проведенный эксперимент может свести на нет все усилия, которых стоила модель.

Все это лишь еще раз подтверждает, сколь важно, чтобы между создателем модели и экспериментатором существовало полное взаимопонимание и обратная связь на протяжении всего периода исследований, начиная с этапа определения целей и задач, выработки программы экспериментов и расчетов и вплоть до этапа интерпретации результатов и подготовки выводов для принятия решений. К сожалению, на сегодняшний день в отечественной практике (в отличие от зарубежной) трудно найти пример исследовательского проекта, в котором с начала и до конца усилия конкретных специалистов были бы объединены с работами математиков, программистов, в котором математическая модель строилась бы параллельно с экспериментальными изысканиями и так или иначе влияла бы на них.

По мере все более широкого распространения компьютерной техники методы математического моделирования становятся все более доступными для широких масс пользователей и все более актуальными оказываются задачи разработки удобного инструментария, ориентированного на пользователя без специальной математической подготовки. Не случайно наибольший успех сопутствует тем программным разработкам, которые помимо некоторого идейного ядра поставляют и так называемую среду — набор вспомогательных и обучающих программ, существенно упрощающих использование самого пакета.

Именно эта ориентированность на пользователя позволяет нам надеяться, что СИМВО и другие подобные моделирующие

системы сумеют непосредственно связать экологические и математические разработки достаточно высокого уровня в интерактивном режиме для получения более адекватных представлений о динамике и принципах функционирования экосистем.

Abstract

The notion of a simulation model is defined and the methodology of simulation modelling in ecology is discussed in brief. Basing on a number of aquatic ecosystem models (a fishpond and the Kairakkum reservoir) it is shown how common blocks, functions and interactions can be distinguished. This allows us to structurize models and make the modelling process automatic. An overview of basic principles of the Simulation Modelling System for Aquatic Bodies (SIMSAB) is presented. Within the framework of this user-friendly computer system one can formalize the ecosystem processes using a special metha-language then automatically translate this formalization producing a portable FORTRAN programme and carry out all the necessary computer runs to obtain an adequate simulation model.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Свирежев Ю. М.* Методы системного анализа в проблеме «Человек и биосфера» // Имитационное моделирование и экология. М.: Наука, 1975. С. 10—17.
2. *Hall C. A. S., Day J. W. (Jr).* Systems and models: terms and basic principles // Ecosystem modelling in theory and practice. N. Y.: Wiley, 1977. P. 5—36.
3. *Grygierek E.* The influence of the silver carp on eutrophication of carp ponds. 4. Zooplankton // Rocz. nauk rol. H. 1978. T. 99. S. 81—92.
4. *Januszko M.* The influence of the silver carp on eutrophication of carp ponds. 3. Phytoplankton // Ibid. S. 55—80.
5. *Opuszynski B.* The influence of the silver carp on eutrophication of carp ponds. 7. Recapitulation // Ibid. S. 127—151.
6. *Piotrowska W.* The influence of the silver carp on eutrophication of carp ponds. 1. Physico-chemical conditions // Ibid. S. 7—32.
7. *Svirezhev Yu. M., Krysanova V. P., Voinov A. A.* Mathematical modelling of a fish pond ecosystem // Ecol. Modell. 1984. Vol. 21. P. 315—337.
8. *Liebig J.* Chemistry and its application to agriculture and physiology. Taylor and Walton, 1843. 328 p.
9. *Fedra K.* Austrian lake ecosystem case study: achievements, problems, and outlook after the first year of research. Laxenburg, 1980. 148 p. (IIASA Collaborative pap.; N CP-80—41).
10. *Summers J. K., McKellar H. N. (Jr).* A sensitivity analysis of an ecosystem model of estuarine carbon flow // Ecol. Modell. 1981. Vol. 13. P. 283—301.
11. *Комилов Ф. С., Воинов А. А.* Об одном способе проверки имитационных моделей на чувствительность // Прикладные вопросы математики. Душанбе: ТГУ, 1986. С. 12—16.
12. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ: М.: Наука, 1978. 352 с.
13. *Halfon E.* Is there a best model structure? 1. Modelling the fate of a toxic substance in a lake // Ecol. Modell. 1983. Vol. 20. P. 135—152.
14. *Halfon E.* Is there a best model structure? 2. Comparing the model structures of different fate models // Ibid. P. 153—163.

15. *Shaeffer D. L.* A model evaluation methodology applicable to environmental asessment models // Ibid. 1980. Vol. 8. P. 275.
16. *Михайловский Г. Е.* Описание и оценка состояний планктонных сообществ. М.: Наука, 1988. 214 с.
17. *Воинов А. А.*, *Комилов Ф.* Имитационная модель Кайраккумского водохранилища. М.: ВЦ АН СССР, 1986. 39 с.
18. *Ожегова В. Е.*, *Максунов В. А.* Сборник работ по Кайраккумскому водохранилищу. Душанбе, 1963. 148 с. (Тр. ИЗИП; Т. 26).
19. Кайраккумское водохранилище: Результаты исслед. по гидробиологии. Душанбе: Дониш, 1982. 288 с.
20. *Максунов В. А.* Гидробиология и ихтиология. Душанбе: Дониш, 1969. 278 с.
21. *Фельзенбаум А. И.* Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 127 с.
22. *Svirezhev Yu. M.*, *Voinov A. A.*, *Tonkikh A. P.*, *Lovas L.* Simulation modelling of Lake Balaton // Papers on mathematical ecology. Budapest, 1986. Vol. 1. P. 223—250.
23. *Воинов А. А.*, *Тонких А. П.* Имитационная модель экосистемы озера Плещеево. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 48 с.
24. *Jorgensen S. E.* A eutrophication model for a lake // Ecol. Modell. 1976. Vol. 2. P. 147—165.
25. *Jorgensen S. E.*, *Meijer H.*, *Friis M.* Examination of a lake model // Ibid. 1978. Vol. 4. P. 253—278.
26. *Ахременков А. А.* Моделирующий комплекс для имитации водных экосистем. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 48 с.
27. *Jorgensen S. E.* State of the art of eutrophication models // State of the art in ecological modelling. Vaerlose, 1979. Vol. 7. P. 293—298.

3. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 519.86

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИКИ: ПРОБЛЕМА АГРЕГИРОВАННОГО ОПИСАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ

А. А. Петров, А. А. Шананин

Математическое направление в экономической науке развивается примерно сто пятьдесят лет и достигло определенных успехов. Теория экономического равновесия и теория экономического роста дают количественное объяснение некоторым общим закономерностям товарно-денежных отношений, определяющим состояние и рост экономики. Метод затраты—выпуск стал рабочим инструментом эмпирического анализа экономики. Математические модели, основанные на схеме затраты—выпуск, позволили проанализировать влияние структуры производственного базиса на равновесие и рост экономики. Развитие получили теория экономических индексов и теория потребительского спроса. Перечень теоретических достижений можно было бы продолжить. Теоретические соображения в разных комбинациях закладывают в основу эконометрических моделей, с помощью которых прогнозируют развитие экономики стран и регионов. Известно, что в середине 60-х годов эконометрика переживала определенный бум, потому что в США, в Японии делали весьма точные эконометрические прогнозы. Однако энергетический кризис начала 70-х годов предсказать не смогли.

И в нашей стране к середине 60-х годов выдвинули лозунг: «Методы оптимального программирования — в практику народнохозяйственного планирования». Однако до сих пор эти методы не стали инструментом народнохозяйственного планирования, несмотря на многочисленные теоретические достижения и развитие методов математического программирования и теории игр.

Проанализируем нынешнее положение дел. Развитие ЭВМ вызвало развитие новых направлений математического анализа, в частности численных методов. Была поставлена новая проблема — синтез сложных систем. Сначала успешно решили проблему синтеза управляемых объектов, и возникла современная ракетно-космическая и другая подобная техника. Потом, естественно, появилось желание попытаться использовать новые методы, чтобы привлечь вычислительную технику к решению задач плани-

© А. А. Петров. А. А. Шананин, 1989

рования и управления в экономической области приложений. Достигли успехов при решении отдельных задач технико-экономического планирования, планирования стратегии фирм на рынках и т. п. Однако при решении проблемы синтеза экономической системы, которая непосредственно касается интересов и условий жизни миллионов людей, не достигли столь же впечатляющих успехов, как при решении проблемы синтеза ракетно-космических систем.

Экономическая система неизмеримо сложнее ракетно-космической. Можно сказать, что ракетно-космическая система есть бесконечно малый элемент материального производственного базиса экономики, ее породившей. Но экономика — это возникшая на производственном базисе система отношений многих людей. Политическая экономия учит, что состояние экономики и ее развитие определяется взаимодействием способов производства и производственных отношений.

До сих пор еще нет удовлетворительного математического описания взаимодействия производственных процессов, в которых участвуют люди, интересы и возможности которых находятся в определенных отношениях. А ведь это еще не проблема синтеза, а проблема анализа экономической системы. Поэтому не удивительно, что практические выгоды от прикладной математики в экономике скуднее, чем в технике.

Много разных трудностей предстоит преодолеть, прежде чем будет создана теория математического анализа экономических систем. Одна из главных связана с самой спецификой экономической системы как единства способов производства и производственных отношений. В экономике используются сотни тысяч взаимодействующих технологических процессов, в которых участвуют десятки миллионов специалистов и выпускаются десятки миллионов наименований продуктов. При этом постоянно изменяются номенклатура продуктов и специальностей, производственные процессы и связи. Если наблюдать за всем этим, то представляется весьма хаотическая картина. В экономической науке принято характеризовать состояние экономики суммарными показателями: валовым продуктом, национальным доходом с выделением фондов накопления и потребления, совокупными производственными фондами, фондами непроизводственного назначения и т. д., ценами продуктов, доходами и расходами населения и т. п. Показатели исчисляются в совокупности или в разрезе основных подразделений общественного производства или в разрезе чистых отраслей. На протяжении длительных промежутков времени показатели изменяются «плавно», и развитие экономики характеризуют темпами их изменения.

Набор показателей, конечно, зависит от теоретических соображений, но в основном складывается в процессе многолетних эмпирических наблюдений за экономикой. Разные разрезы исчисления показателей, в частности набор и структура чистых отраслей, устанавливаются экономической статистикой, главным образом,

эмпирически. По-видимому, только теория экономических индексов дает некоторые строгие основания для формирования набора показателей и правил их исчисления. Однако теория не дает достаточных количественных связей, на основании которых можно было бы установить между показателями зависимость и вычислить изменение их в будущем.

Модели математической экономики записываются тоже в терминах суммарных показателей и, собственно, представляют собой совокупность связей, достаточную для установления зависимостей между ними и вычисления изменения их со временем. Однако теоретические работы по математической экономике традиционно начинаются так: «Пусть экономика разделена на N чистых отраслей...» или «В рассматриваемой экономике выделим m производителей, выпускающих n продуктов...». Как «сконструированы» отрасли, производители или продукты, теорию, как правило, не интересует. Связи между показателями формализуют некоторые гипотезы общего характера, и остается открытым вопрос, согласованы ли гипотезы с жестко заданной структурой модели: разбиением на отрасли, производителей, продукты. Уже в этом месте, по нашему мнению, возникает разрыв между современной математической теорией экономических систем и эмпирическим экономическим анализом систем.

Ликвидировать разрыв может теория агрегирования описаний экономических систем, если удается такую теорию построить. В общем проблему агрегирования можно охарактеризовать следующим образом. Задано исходное микроописание фрагментов экономической системы. Микроописанием могут быть наблюденные зависимости между показателями, характеризующими отдельные способы производства, или поведение отдельных агентов, или результаты деятельности агентов. Микроописанием может быть система «элементарных», фундаментальных принципов описания взаимодействий экономических агентов в условиях сложившихся способов производства. Сообразуясь с некоторыми содержательными правилами, надо сконструировать агрегированные показатели — функции от исходных — и установить минимальное число агрегированных показателей и связей между ними, совместных с исходным микроописанием. Далее, по ходу изложения постановка проблемы агрегирования будет конкретизироваться и наполняться содержанием.

Теория агрегирования описаний экономических систем еще только начинается. Еще не удается сформулировать систему постулатов микроописания экономических взаимодействий. Однако из опыта естественных наук, в первую очередь физики, известно, что формулировкой системы постулатов как раз завершается содержательное развитие теории и начинается быстрое совершенствование математического аппарата и расширение области ее приложений. Можно найти много поучительного, если пытаться осмыслить опыт, накопленный в физике. Попробуем взглянуть на проблему агрегирования со стороны более или менее развитых

физических теорий и рассмотрим некоторые задачи, возникшие в связи с проблемой макроописания сложных систем. Потом рассмотрим известные результаты в проблеме агрегирования описаний экономической системы, чтобы обсудить, что может быть общим для физики и экономики и какие особенности вносит специфика экономических систем.

1. Процедуры агрегирования соответствуют структуре сложной системы

Начнем с того, что рассмотрим два примера агрегированного описания механических систем.

Рассмотрим движение N материальных точек с массами m_i, $i = 1, \ldots, N$. С центром масс C системы свяжем поступательно движущуюся систему координат, положение ее задается радиусом-вектором $\mathbf{r}_C$ центра масс относительно неподвижной системы. Движение системы точек m_i относительно подвижных координат подчиняется системе уравнений

$$m_i\left(\frac{d^2\mathbf{r}_C}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_i}{dt^2}\right) = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.1}$$

в которой $\boldsymbol{\rho}_i$ — радиус-вектор точки m_i относительно C; $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{f}_i$ — равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на точку. Это исходное описание системы, назовем его микроописанием. Оно замкнуто, если заданы силы $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{f}_i$.

Сложив уравнения (1.1), затем сложив их после умножения слева векторно на $\boldsymbol{\rho}_i$, получим агрегированное описание системы в форме теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении момента количества движения относительно центра масс:

$$M\frac{d^2\mathbf{r}_C}{dt^2} = \mathbf{R}, \qquad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{\rho}_i \times m_i\frac{d\boldsymbol{\rho}_i}{dt}\right) = \mathbf{Q}_C. \tag{1.2}$$

Здесь $M = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ — суммарная масса системы, $\mathbf{R} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i$ — главный вектор внешних сил, $\mathbf{Q}_C = \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i$ — главный момент внешних сил относительно C. Главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю в силу третьего закона механики.

В общем случае агрегированное описание (1.2) незамкнуто. Но предположим, что во все время движения расстояние между любыми точками можно считать неизменным:

$$(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j,\ \boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j) = \text{const}. \tag{1.3}$$

Отсюда немедленно следует, что в (1.2) $d\boldsymbol{\rho}_i/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$, а центр инерции неподвижен относительно системы.

Известно, что $\sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_i \times m_i\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{J}$ — тензор инерции

тела, постоянный относительно осей, жестко связанных с системой. Уравнения (1.2) преобразуются к виду

$$M\, d\mathbf{v}_C/dt = \mathbf{R}, \qquad \mathbf{J}\, d\boldsymbol{\omega}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}_C,$$

где $\mathbf{v}_C = d\mathbf{r}_C/dt$. Агрегированное описание замыкается, если внешние силы заданы.

Условием агрегируемости можно считать условие (1.3), оно показывает, что замкнутое агрегированное описание возможно лишь в вырожденном случае, когда поле скоростей системы определяется двумя параметрами — скоростью центра масс $\mathbf{v}_C$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Заметим, что уравнения (1.2) допускают в качестве группы симметрий ортогональные преобразования.

Рассмотрим еще один пример. Твердое тело имеет полость, заполненную жидкостью, и движется под действием внешних сил. С центром масс системы тело—жидкость свяжем поступательно движущуюся систему координат и систему координат, жестко связанную с телом. Количество движения системы складывается из количества движения тела и количества движения жидкости. То же самое верно и относительно момента количества движения вокруг центра инерции. Поэтому можно записать, используя агрегированное описание движения твердого тела, следующую систему уравнений:

$$M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} + M_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \frac{d}{dt}\int\limits_D \beta\mathbf{v}\, dD = \mathbf{R},$$

$$\mathbf{J}_1\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_1\boldsymbol{\omega} + \frac{d}{dt}\int\limits_D (\boldsymbol{\rho} \times \beta\mathbf{v})\, dD = \mathbf{Q}_C,$$

в которой M — масса системы, $\mathbf{v}_C$ — скорость центра инерции системы относительно неподвижной системы координат, M_1, $\mathbf{J}_1$ — масса и тензор инерции твердого тела относительно связанных с телом осей координат, $\mathbf{v}_1$ — скорость центра масс твердого тела относительно поступательно движущейся системы координат, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость твердого тела, D — объем полости с жидкостью, β — плотность жидкости, $\mathbf{v}$ — скорость жидкости относительно поступательно движущейся системы координат, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки жидкости относительно начала координат, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}_C$ — главный вектор и главный момент относительно центра масс внешних сил.

Во-первых, легко видеть, что

$$M_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \frac{d}{dt}\int\limits_D \beta\mathbf{v}\, dD = 0.$$

Во-вторых, предположим, что жидкость можно считать идеальной, несжимаемой, а движение жидкости безвихревым. Тогда [1]

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0. \tag{1.4}$$

Следовательно, $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$, а скалярная функция φ — потенциал скорости — определяется как решение краевой задачи

$\Delta\varphi = 0$ в области D, $\partial\varphi/\partial n = v_n$ на границе S области D. Здесь Δ — оператор Лапласа, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе S области D, v_n — нормальная составляющая скорости границы S относительно поступательно движущейся системы координат.

Так как $v_n = \mathbf{n}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_S) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\rho}_S \times \mathbf{n})$, где $\boldsymbol{\rho}_S$ — радиус-вектор точки границы S, то потенциал скорости можно представить в виде

$$\varphi = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}),$$

где $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1\mathbf{e}_1 + \varphi_2\mathbf{e}_2 + \varphi_3\mathbf{e}_3$, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — единичные орты осей жестко связанной с телом системы координат. Вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ является решением краевой задачи

$$\Delta\boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ в области } D, \ \partial\boldsymbol{\varphi}/\partial n = \boldsymbol{\rho}_S \times \mathbf{n} \text{ на границе } S$$

и, следовательно, зависит только от формы полости. Поэтому [2]

$$\int_D \beta\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}\, dD = \int_D \beta\boldsymbol{\rho} \times \nabla(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega})\, dD = \mathbf{J}_2\boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{J}_2$ — симметричный тензор Жуковского с компонентами $\mathbf{J}_{ij} = \beta\int_D \nabla\varphi_i\nabla\varphi_j dD$, которые зависят только от плотности жидкости и формы полости.

Мы получили агрегированное описание системы

$$M\, d\mathbf{v}_C/dt = \mathbf{R}, \quad \mathbf{J}\, d\boldsymbol{\omega}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}_C$$

как эквивалентного твердого тела с массой M и с тензором инерции $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, при условии, что движение жидкости безвихревое. Условие агрегируемости (1.4) налагает некоторое требование симметрии поля скоростей жидкости в полости тела.

В рассмотренных примерах представлены две из множества моделей классической механики. Механика изучает сложные системы взаимодействующих материальных объектов, перемещающихся в пространстве и времени. Фундаментальное понятие механики — материальная точка. С ней связаны понятия координаты, скорости, ускорения, массы, силы, через которые выражаются принципы механики. Они образуют исходное общее микроописание механических систем. Механические системы состоят из бесчисленного числа материальных точек, и если их редко называют сложными, то потому что достаточно хорошо развиты агрегированные описания. Агрегированное описание справедливо, пока выполняются условия агрегируемости. Как только они нарушаются, приходится переходить к другой модели. Скажем, если становятся существенными изменения расстояний между точками, приходится переходить от модели твердого тела к модели жидкости. От характера взаимодействий элементов системы, от

внешних условий зависит состояние системы и, следовательно, выполнение условий агрегируемости. Например, движение идеальной несжимаемой жидкости будет безвихревым, если началось из состояния покоя и происходит в потенциальном поле сил.

Как уже говорилось, формальные условия агрегируемости (1.3), (1.4) требуют определенных свойств поля скоростей механической системы. Это означает, что агрегированное описание возможно лишь в особых, вырожденных случаях. Факт, проиллюстрированный здесь на примерах, имеет общее значение. Развитие методов группового анализа динамических систем, начатых трудами С. Ли, привело к возникновению математической теории агрегирования (см., например, [3]). Групповой анализ динамических систем показывает, что агрегирование возможно лишь при наличии симметрий. Следовательно, процедура агрегирования должна соответствовать структуре системы, ее симметриям. Симметрии возникают вследствие взаимодействия элементов системы, например механизмов самоорганизации. А это означает, что процедура агрегирования должна быть согласована с микроописанием внутренних взаимодействий в системе.

2. Внутренние взаимодействия в системе: иерархия характерных времен и процедура агрегирования

Рассмотрим еще один пример. Снова рассмотрим движение твердого тела, полость которого заполнена несжимаемой жидкостью. Однако вязкость жидкости велика, поэтому жидкость нельзя считать идеальной. Тогда условия агрегируемости (1.4) заведомо нарушаются.

Как и в предыдущем примере, с центром инерции системы свяжем две системы координат: поступательно движущуюся и жестко связанную с телом (для краткости — связанную). Движение системы будем рассматривать относительно поступательно движущейся системы координат. Следуя [4], скорость точки системы представим в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ — скорость относительно связанной системы. В точках твердого тела $\mathbf{u} = 0$. Уравнения изменения количества движения и момента количества движения относительно центра инерции системы гласят

$$M d\mathbf{v}_C/dt = \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{I}\, d\boldsymbol{\omega}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + d\mathbf{L}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{Q}_C. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{I}$ — тензор инерции «отвердевшей» системы относительно связанных осей, а

$$\mathbf{L} = \beta \int_D \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{u}\, dD \tag{2.3}$$

— момент количества движения жидкости относительно связанных осей, остальные обозначения сохранены прежними.

Движение жидкости относительно связанных осей описывается уравнением Навье—Стокса

$$\frac{d\omega}{dt} \times \rho + 2\omega \times \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\nu\nabla q + \nu\Delta\mathbf{u}, \tag{2.4}$$

уравнением неразрывности

$$\nabla\mathbf{u} = 0, \tag{2.5}$$

граничным условием на стенке полости

$$\mathbf{u} = 0 \tag{2.6}$$

и начальным условием

$$\mathbf{u}\,(\rho,\ 0) = \mathbf{u}_0\,(\rho). \tag{2.7}$$

В уравнении Навье—Стокса переменная

$$q = \frac{1}{\nu}\left[U + \frac{p}{\beta} + \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}\,\rho - \frac{1}{2}(\omega \times \rho)^2\right]$$

обозначает сумму всех потенциальных слагаемых. Кроме того, ∇ обозначает оператор Гамильтона, ν — кинематическую вязкость жидкости, p — давление жидкости, U — потенциал внешних массовых сил.

Мы считаем, что внешние непотенциальные силы отсутствуют, а движение вызвано ударными воздействиями. Последнее позволяет считать, что внешний и внутренний моменты, действующие на твердое тело, порядка $I\omega^2$, где I — характерная величина моментов инерции системы, а ω — характерная величина угловой скорости. Тогда из (2.2) следует, что $|\,d\omega/dt\,| \sim \omega^2 \sim 1/T^2$. Через T обозначен характерный масштаб времени относительного движения системы вокруг центра инерции. Таковы внешние условия движения системы.

Что касается внутренних взаимодействий элементов системы, то пусть можно считать жидкость сильно вязкой, так что число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = l^2/\nu T \ll 1. \tag{2.8}$$

Через l обозначен характерный линейный размер полости.

Условие (2.8) определяет иерархию характерных времен движения системы. В самом деле, характерное время, за которое силы вязкости успевают существенно изменить течение в полости, $T' \sim l^2/\nu$. Следовательно, условие (2.8) означает, что $T' \ll T$, т. е. что под действием сил вязкости течение перестраивается значительно быстрее, чем изменяются внешние условия (скажем, угловое положение твердого тела). Интуитивно ясно, что в таком случае относительное движение жидкости будет квазистационарным, быстро подстраивающимся под движение твердого тела.

Асимптотические методы позволяют выделить это квазистационарное движение. Примем l и T за единицы измерения длины и времени. Тогда можно положить $l = 1$, $T = 1$ и из условия (2.8) вывести, что $1/\nu \ll 1$. Уравнение (2.4), оказывается, содержит большой параметр ν.

В [4] решение задачи (2.4)—(2.7) строится в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{W}, \quad q = \varphi + \Phi,$$

где функции $\mathbf{w}$ и φ удовлетворяют условиям (2.4), (2.6). Тогда $\mathbf{W}$ и Φ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{W} + (\mathbf{W}\cdot\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{W}\cdot\nabla)\mathbf{W} = \\ &\quad = -\nu\nabla\Phi + \nu\Delta\mathbf{W}, \\ &\nabla\mathbf{W} = 0, \\ &\mathbf{W} = 0 \text{ на границе } S, \\ &\mathbf{W}(\rho, 0) = -\mathbf{w}(\rho, 0) + \mathbf{u}_0(\rho). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Функции $\mathbf{w}$ и φ ищутся в виде разложений

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^0 + (1/\nu)\,\mathbf{w}^1 + \ldots, \quad \varphi = \varphi^0 + (1/\nu)\,\varphi^1 + \ldots$$

Из (2.4)—(2.7) следует, что $\mathbf{w}^0$ можно положить равным нулю, а $\mathbf{w}^1$ является решением краевой задачи

$$\Delta\mathbf{w}^1 = \nabla\varphi^1 - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho}, \quad \nabla\mathbf{w}^1 = 0 \text{ в области } D;\ \mathbf{w}^1 = 0 \text{ на границе } S. \tag{2.10}$$

Задача (2.10) квазистационарна, решение ее зависит от времени t как от параметра.

Функции $\mathbf{W}$ и Φ ищутся в виде разложений

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^0(\rho, \tau) + \frac{1}{\nu}\mathbf{W}^1(\rho, \tau) + \ldots, \quad \Phi = \Phi^0(\rho, \tau) + \frac{1}{\nu}\Phi^1(\rho, \tau) \ldots,$$

где $\mathbf{W}^0$, $\mathbf{W}^1$, ..., Φ^0, Φ^1, ... зависят от быстрого времени $\tau = \nu t$. Из (2.9) можно выписать краевые задачи для $\mathbf{W}^0$, Φ^0, $\mathbf{W}^1$, Φ^1. В [4] показано, что решения этих задач $\overline{\mathbf{W}}^0 + (1/\nu)\,\overline{\mathbf{W}}^1$ стремятся к нулю как $e^{-c\nu t}$, где $c > 0$. Следовательно, если рассматривать решение задачи (2.4)—(2.7) при $t > O(1)$, а решение этой задачи и интеграл в (2.3) вычислять с погрешностью $O(1/\nu^2)$, то можно положить приближенно $\mathbf{u} = (1/\nu)\,\mathbf{w}^1(\rho, t)$.

Под действием внутренних сил вязкости влияние начального распределения скоростей $\mathbf{W}$, $\nabla\Phi$ затухает за время порядка $1/\nu$, и движение жидкости в полости становится близким к вращению твердого тела вместе со стенками полости. Относительная скорость жидкости при этом порядка $1/\nu$.

Решение краевой задачи (2.10) имеет вид

$$\mathbf{w}^1(\rho, t) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \mathbf{g}_i(\rho); \qquad \varphi^1(\rho, t) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \psi_i(\rho),$$

где ε_i — проекции вектора $d\omega/dt$ на оси связанной системы. Функции $g_i(\rho)$, $\psi_i(\rho)$ находятся решением краевых задач

$$\nabla \mathbf{g}_i = \nabla \psi_i + \mathbf{e}_i \times \rho, \ \nabla \mathbf{g}_i = 0 \text{ в области } D, \ \mathbf{g}_i = 0 \text{ на границе } S$$

и зависят только от формы полости.

По относительной скорости жидкости

$$\mathbf{u}(\rho, t) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \mathbf{g}_i(\rho)$$

вычисляется интеграл в (2.3):

$$\mathbf{L} = \frac{\beta}{\nu} \int_D \rho \times \sum_{i=1}^{3} \mathbf{g}_i(\rho)\, dD = \frac{\rho}{\nu} \mathbf{P} \frac{d\omega}{dt}.$$

Здесь $\mathbf{P}$ — симметричный тензор, соответствующий положительно определенной квадратичной форме, с компонентами

$$P_{ij} = \int_D \mathbf{e}_j (\rho \times \mathbf{g}_i)\, dD.$$

Движение системы подчиняется уравнениям

$$M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{R}, \quad (\mathbf{I} + \mathbf{P}) \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (\mathbf{I} + \mathbf{P})\omega = \mathbf{Q}_C,$$

и это означает, что с принятой точностью описание движения тела с полостью, заполненной сильно вязкой жидкостью, агрегируется в описание движения эквивалентного твердого тела.

Этот пример иллюстрирует важное свойство структуры сложных систем. Иерархия характерных временных масштабов процессов внутри системы проявляет механизмы взаимодействия элементов системы, если угодно — механизмы самоорганизации. Различие характерных временных масштабов объясняет возникновение симметрий в сложной системе. В нашем примере действие сил вязкости «замораживает» степени свободы жидкости и проявляет симметрию, характерную для движения твердого тела.

Разделение движения на быстрые и медленные дает возможность построить приближенное агрегированное описание системы. Агрегированное описание строится на основе теории асимптотических методов усреднения Боголюбова и сингулярно возмущенных уравнений Тихонова.

Пусть в результате содержательного анализа исходного микроописания оказалось, что динамическая система описывается системой уравнений

$$\varepsilon d\mathbf{y}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad d\mathbf{z}/dt = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

где положительный параметр $\varepsilon \ll 1$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ — векторы. Пусть система $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ имеет единственное решение $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}(\mathbf{z})$ при любом допустимом $\mathbf{z}$ и точка $\mathbf{y}(\mathbf{z})$ при фиксированном $\mathbf{z}$ — асимптотически устойчивая по первому приближению точка равновесия «быстрой» системы

$$\varepsilon d\mathbf{y}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

причем в область притяжения попадают все допустимые точки $\mathbf{y}$. Тогда выполнены условия теоремы Тихонова, и приближенное решение исходной системы сводится к решению системы для медленных переменных $\mathbf{z}$:

$$d\mathbf{z}/dt = \varphi(\mathbf{y}(\mathbf{z}), \mathbf{z}).$$

По отношению к исходному описанию это описание естественно назвать агрегированным, особенно если размерность вектора $\mathbf{z}$ значительно меньше размерности вектора $\mathbf{y}$.

Заметим, что при любом допустимом $\mathbf{z}_0$ функцию $\mathbf{y}(\mathbf{z})$ можно представить как решение задачи $H(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \to \min$ при условии $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$; надо только подходящим образом подобрать функцию $H(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Очевидно, что таких функций может быть много. Оказывается, это формальное соображение имеет глубокий эвристический смысл и позволяет распространять методы агрегированного описания на системы, для которых еще не открыты принципы микроописания, так что можно высказать только общие гипотезы относительно характера механизмов самоорганизации системы. Именно такие системы чаще всего мы называем сложными.

Итак, пусть сложная система может быть описана системой уравнений

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{2.11}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор, а $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — вектор-функция, относительно которой предполагается, что она обладает всеми необходимыми далее свойствами. Примем гипотезу [1], что в сложной системе можно выделить иерархию характерных временных масштабов. Именно, будем предполагать [5], что решения системы (2.11) независимо от начальных значений $\mathbf{x}^0$ попадают в малую окрестность линейного многообразия

$$\sum_j a_{ij} x_j = Y_i,$$

а потом во все время движения остаются в малой окрестности многообразия; так что с хорошей точностью можно считать, что $\mathbf{x}$ является функцией $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots)$: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\mathbf{Y})$.

---

[1] Применительно к задачам статистической физики такую гипотезу высказал Н. Н. Боголюбов. Для краткости дальше эту гипотезу будем называть гипотезой Боголюбова.

Тогда в силу (2.11) справедливы уравнения

$$\frac{dY_i}{dt} = \sum_j a_{ij} F_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{Y})) \tag{2.12}$$

для агрегатов Y_i.

Систематическая ошибка вследствие замены $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}^*$, по-видимому, не успеет накопиться, если система (2.12) имеет единственную устойчивую точку равновесия. В этом случае можно высказать некоторые соображения, как построить функцию $\mathbf{x}^*(\mathbf{Y})$. Пусть известна функция Ляпунова $H(\mathbf{x})$ системы (2.11), убывающая вдоль траектории. Тогда можно попытаться построить функцию $\mathbf{x}^*(\mathbf{Y})$ как решение экстремальной задачи:

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{Y}) = \arg\min_{A\mathbf{x}=\mathbf{Y}} H(\mathbf{x}), \qquad A = \| a_{ij} \|. \tag{2.13}$$

Гипотезу Боголюбова вместе с принципом минимума функции Ляпунова часто используют при выводе макроописаний физических систем. В качестве примера рассмотрим схему обоснования макроуравнений химической кинетики, описывающих процесс установления равновесия в замкнутой системе [6].

Предполагают, что на макроскопических временах, много больших характерного времени межмолекулярных взаимодействий, процесс релаксации является марковским. Для простоты, следуя [5], предположим, что система может находиться в конечном числе состояний [2] $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Обозначим через q_{ij} коэффициенты переходов $E_j \to E_i$ марковской цепи, $q_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, $\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 0$. Распределение вероятностей состояний системы задается вектором $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где p_i — вероятность системы находиться в состоянии E_i. Если считать, что $q_{ij} > 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то у марковской цепи существует стационарное распределение вероятностей $\mathbf{p}^*$, $p_i^* > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Вектор $\mathbf{p}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} p_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которую после исключения величин q_{ij} с помощью условия стационарности $\mathbf{p}^*$ можно привести к виду

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} q_{ij} p_j^* \left(\frac{p_j}{p_j^*} - \frac{p_i}{p_i^*} \right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

В силу (2.14) любое начальное распределение $\mathbf{p}(0)$ стремится к $\mathbf{p}^*$ при $t \to \infty$.

---

[2] Скажем, произведено разбиение фазового пространства.

Функция

$$H_h(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i^* h\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right), \tag{2.15}$$

где $h(\xi)$ — выпуклая при $0 < \xi < \infty$ функция из класса C_2, $d^2h/d\xi^2 > 0$, в силу уравнений (2.14) имеет производную

$$\frac{dH_h}{dt} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} q_{ij}p_j^*\left[h\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right) - h\left(\frac{p_j}{p_j^*}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{dh(p_i/p_i^*)}{d\xi}\left(\frac{p_j}{p_j^*} - \frac{p_i}{p_i^*}\right)\right] \leqslant 0$$

и, следовательно, является функцией Ляпунова системы (2.14). Среди всех функций Ляпунова функция

$$H(\mathbf{p}) = + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right)$$

аддитивна при объединении статистически независимых частей системы. $-H(\mathbf{p})$ — энтропия системы, и она играет важную роль в термодинамике. Второй закон термодинамики гласит: в замкнутых системах неравновесные процессы протекают так, что энтропия возрастает. Значит, исходная гипотеза о марковости процесса релаксации согласуется со вторым законом термодинамики.

При выводе макроуравнений из микроописания (2.14) используют гипотезу Боголюбова и принцип максимума энтропии. Из физических соображений вводят агрегаты $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, которые имеют смысл средних некоторых функций $g_1, g_2, \ldots, g_k$, определенных в фазовом пространстве системы. Значение функции g_s в состоянии E_i обозначим g_{si}, тогда

$$Y_s = \sum_{j=1}^{n} g_{si}p_i, \quad s = 1, \ldots, k. \tag{2.16}$$

Предполагают, что процесс релаксации содержит быструю компоненту: вероятности $p_i(t)$ быстро принимают квазиравновесные значения $p_i(\mathbf{Y})$, потому что за это время средние Y_s не успевают существенно измениться. Потом эволюция вероятностей $p_i(t)$ определяется медленным изменением средних Y_s. Квазиравновесное распределение вероятностей $p_i(\mathbf{Y})$ находят как решение задачи о максимуме энтропии при условии, что средние заданы:

$$\begin{gathered} -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln\frac{p_i}{p_i^*} \to \max, \\ \sum_{i=1}^{n} g_{si}p_i = Y_s, \quad s = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Из (2.16) в силу (2.14) и (2.17) получают агрегированное описание системы

$$\frac{dY_s}{dt} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} g_{si} q_{ij} p_j^* \left(\frac{p_j(\mathbf{Y})}{p_j^*} - \frac{p_i(\mathbf{Y})}{p_i^*} \right), \quad s = 1, \ldots, k.$$

В работе [6] предложена форма записи этой системы в виде уравнений макродинамики, не использующая явного вида выражений для $p_i(\mathbf{Y})$.

Гипотеза, на которой основано микроописание, правдоподобна постольку, поскольку верен второй закон термодинамики. Происхождение второго закона термодинамики относится к классическим проблемам теоретической физики (см. [7, 8]). Для обсуждения проблемы агрегирования наиболее интересна формулировка второго закона термодинамики, предложенная Каратеодори [9]. Пусть $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — набор независимых переменных, которые определяют состояние термодинамической системы, и пусть работа системы при бесконечно малом обратимом изменении состояния задается дифференциальной формой

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} F_i(\mathbf{Y})\, dY_i.$$

По Каратеодори, второй закон термодинамики гласит (см. [9, 10]): дифференциальная форма работы α удовлетворяет условиям интегрируемости Фробениуса $\alpha \wedge d\alpha = 0$ или в координатной форме записи

$$F_i(\mathbf{Y}) \left(\frac{\partial F_j(\mathbf{Y})}{\partial Y_k} - \frac{\partial F_k(\mathbf{Y})}{\partial Y_j} \right) + F_j(\mathbf{Y}) \left(\frac{\partial F_k(\mathbf{Y})}{\partial Y_i} - \frac{\partial F_i(\mathbf{Y})}{\partial Y_k} \right) +$$
$$+ F_k(\mathbf{Y}) \left(\frac{\partial F_i(\mathbf{Y})}{\partial Y_j} - \frac{\partial F_j(\mathbf{Y})}{\partial Y_i} \right) = 0, \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant m.$$

Условия интегрируемости означают вырожденность дифференциальной формы α.

Мы обсудили, как тесно процедуры агрегирования описания системы связаны со спецификой механизмов взаимодействия элементов системы в определенных внешних условиях; обсудили гипотезы о механизмах самоорганизации сложной системы, на которых основаны агрегированные описания в физике. Теперь мы приступим к обсуждению гипотез о самоорганизации сложной системы, на которых основываются агрегированные описания экономических отношений, и постараемся показать, *что* нового в проблему агрегирования вносит специфика экономических систем.

3. Проблема интегрируемости в теории экономических индексов

Экономика изучает законы общественного воспроизводства. В общей форме они отражают взаимодействие способов производства и производственных отношений в данной экономической системе. Иными словами, экономические законы проявляют в агрегированной форме взаимодействия людей, обладающих интересами и определенными ресурсами в процессах производства материальных благ, обращения произведенных благ и их потребления. В экономической системе заняты миллионы людей, выпускающих десятки миллионов разнородных продуктов на сотнях тысяч разных предприятий. Например, номенклатура продуктов, выпускаемых в развитых промышленных странах, достигает 25 млн наименований и изменяется ежеквартально. Такая видимая разнородность элементов отличает экономическую систему от физической и усложняет проблему агрегированного описания. Между тем устойчивое описание состояния и эволюции экономики возможно лишь в агрегатах, подобных тем, которые фигурируют в экономических законах. Эти агрегаты называют экономическими индексами.

Дело осложняется еще и тем, что экономика для нас типично сложная система: элементы ее не имеют удовлетворительных исходных микроописаний. Поэтому процедуры агрегирования в экономике строятся аксиоматически — из феноменологических соображений, а не из анализа микроописаний — и подчиняются некоторым априорным требованиям. Одно из них называют принципом универсальности. Дело в том, что агрегирование, как правило, бывает многоступенчатым. Процедура агрегирования переводит описания с одного уровня подробности на другой, более укрупненный. Процедура перехода должна быть одинаковой для всех уровней. В этом и состоит принцип универсальности: в результате агрегирования должно получиться описание того же типа, что и исходное.

В общественном воспроизводстве выделяют процессы производства, обмена, распределения и потребления. Соответственно математические модели экономических систем содержат описания подсистем производства, потребления, обмена и распределения. Агрегированное описание производства задается функциями предложения или производственными функциями, агрегированное описание потребления — функциями спроса. Из подсистем обмена и распределения лучше всего изучены рынки, агрегированное описание которых связывает функции спроса и предложения.

Далее мы хотим обсудить гипотезы о механизмах саморегулирования подсистем и экономических систем в целом, которые соответствуют обычным процедурам агрегирования. Начнем с обзора результатов анализа процедур агрегирования описаний потребительского спроса.

В работах [11, 12] исследована задача об агрегировании группы из m разнородных продуктов при известных ценах на них в индекс продуктов и индекс цен. Исходным описанием считаются наборы потребляемых продуктов $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ при заданных ценах на них $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$. Конкретный вид индекса продукта $F(\mathbf{X})$ и индекса цен $q_0(\mathbf{q})$ определяется структурой спроса на продукты. Структуру спроса можно определить лишь при условии, что изучаемая группа продуктов обладает свойством отделимости. Содержательно отделимость означает полноту группы продуктов, связанных отношениями взаимозаменяемости и взаимодополняемости. Если группа отделима, то структура спроса на продукты описывается функциями спроса $\mathbf{Y}(\mathbf{q}) = (Y_1(\mathbf{q}), \ldots, Y_m(\mathbf{q}))$ или обратными функциями спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X}) = (P_1(\mathbf{X}), \ldots, P_m(\mathbf{X}))$.

Обсуждению разных типов свойств отделимости посвящены специальные исследования (см. [13, 14]). Будем предполагать, что агрегируется описание спроса на группу отделимых продуктов, свойство отделимости которой формулируется следующим образом. Пропорции спроса $Y_1(\lambda\mathbf{q}) : Y_2(\lambda\mathbf{q}) : \ldots : Y_m(\lambda\mathbf{q})$ определяются лишь пропорциями цен $q_1 : q_2 : \ldots : q_m$ и не зависят от скалярного масштаба λ и от цен на продукты, не входящие в группу. Итак, исходное описание спроса на продукты задается функциями спроса $Y_i(\mathbf{q})$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющими сформулированному условию отделимости.

Индекс продукта $F(\mathbf{X})$ должен обладать некоторыми априорными свойствами. В [11] требуется, чтобы индекс $F(\mathbf{X})$ принадлежал классу $\mathfrak{A}$, т. е. 1) был положительно однородным, 2) принадлежал классу $C(R_m^+) \cap C_2(\operatorname{int} R_m^+)$, 3) монотонно не убывал по каждому аргументу, 4) был положительным в $\operatorname{int} R_m^+$, 5) удовлетворял неравенству

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_i \partial X_j} v_i v_j < 0$$

при любом $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m) \neq 0$, удовлетворяющем условию $(\operatorname{grad} F(\mathbf{X}), \mathbf{v}) = 0$. В [11] обсуждается содержательный смысл этих требований.

Связь между экономическими индексами $F(\mathbf{X})$, $q_0(\mathbf{q})$ и функциями спроса $\mathbf{Y}(\mathbf{q})$ определяется основной формулой теории экономических индексов

$$q_0(\mathbf{P}(\mathbf{X}))\, dF(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X})\, dX_i. \tag{3.1}$$

В [11] доказано, что с учетом положительности $q_0(\mathbf{q})$ и априорных требований на $F(\mathbf{X})$ связь (3.1) эквивалентна соотношениям

$$q_0(\mathbf{q}) F(\mathbf{X}) \leqslant \mathbf{q}\mathbf{X},\ q_0(\mathbf{q}) F(\mathbf{Y}(\mathbf{q})) = \mathbf{q}\mathbf{Y}(\mathbf{q}) \text{ при } \mathbf{q} \geqslant 0, \mathbf{X} \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что индекс цен $q_0(\mathbf{q})$ и индекс продукта $F(\mathbf{X})$ не являются независимыми:

$$q_0(\mathbf{q}) = \inf_{\mathbf{X} \geqslant 0} \frac{\mathbf{qX}}{F(\mathbf{X})}. \tag{3.3}$$

Более того, определенный по формуле (3.3) индекс цены $q_0(\mathbf{q})$ принадлежит классу $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $F(\mathbf{X}) \in \mathfrak{A}$, причем

$$F(\mathbf{X}) = \inf_{\mathbf{q} \geqslant 0} \frac{\mathbf{qX}}{q_0(\mathbf{q})}.$$

В [11] доказано, что для существования индексов продукта $F(\mathbf{X})$ и цены $q_0(\mathbf{q})$, принадлежащих классу $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы 1) дифференциальная форма

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} Y_i(\mathbf{q})\, dq_i$$

удовлетворяла условиям интегрируемости Фробениуса $\omega \wedge d\omega = 0$; 2) функции спроса $\mathbf{Y}(\mathbf{q})$ удовлетворяли закону Хикса: для любого вектора $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \neq 0$ при условии $(\mathbf{v}, \mathbf{Y}(\mathbf{q})) = 0$ выполнялось неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial Y_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} v_i v_j < 0. \tag{3.4}$$

Эти условия могут быть аналогично сформулированы в терминах обратных функций спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X})$.

Н. Георгеску-Роген показал (см. [11]), что закон Хикса выражается условием типа неравенства на функции спроса и поэтому может выполняться в случае общего положения. Будем предполагать далее, что закон Хикса выполняется [3].

Условия интегрируемости, наоборот, выражаются условиями типа равенства, выполнение их возможно лишь в вырожденном случае. Вопрос об экономическом смысле и выполнимости условий интегрируемости называют проблемой интегрируемости (см. [16, 17]). Условия интегрируемости появились в экономической литературе в связи с исследованием задачи о рациональном поведении потребителя в работе Дж. Антонелли (см. [16]), опубликованной в 1886 г.[4] Однако внимание экономистов к проблеме

---

[3] Закон Хикса возник как ослабление закона убывания предельной полезности. Однако он имеет самостоятельное значение, так как не предполагает выполнения условий интегрируемости. Вопрос о справедливости закона Хикса широко обсуждался в литературе. Он связан с условиями устойчивости равновесных цен. В [15] высказана гипотеза, что из-за неустойчивости не наблюдаемы те области в пространстве цен, где закон Хикса нарушается.

[4] Интересно отметить, что Каратеодори дал формулировку второго начала термодинамики в виде условий интегрируемости в 1909 г.

интегрируемости привлекла работа Вольтерра 1906 г. (см. [16, с. 365—369]).

Многие известные экономисты (П. Самуэльсон [18], Х. Хаутеккер [19] и другие) безуспешно пытались обосновать выполнение условий интегрируемости. Эти попытки привели к созданию теории выявленного предпочтения, в терминах которой условия интегрируемости формулируются так, что выполнение их можно проверять по статистическим данным.

По Самуэльсону [18], набор продуктов $\mathbf{X}$ выявленно лучше, чем набор $\mathbf{Y}$, тогда и только тогда, когда стоимость в ценах $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ набора $\mathbf{Y}$ не больше стоимости $\mathbf{X}$; иначе говоря, выполнено условие $\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X} \geqslant \mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{Y}$. Теория выявленного предпочтения основывается на двух аксиомах.

Слабая аксиома. *Для любых двух различных наборов продуктов* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *если* $\mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{X} \geqslant \mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{Y}$, *то* $\mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{X} > \mathbf{P}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}$.

Сильная аксиома. *Для любых несовпадающих наборов продуктов* $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \ldots, \mathbf{X}^l$ *если* $\mathbf{P}(\mathbf{X}^1)\mathbf{X}^1 \geqslant \mathbf{P}(\mathbf{X}^1)\mathbf{X}^2$, $\mathbf{P}(\mathbf{X}^2)\mathbf{X}^2 \geqslant \mathbf{P}(\mathbf{X}^2)\mathbf{X}^3, \ldots, \mathbf{P}(\mathbf{X}^{l-1})\mathbf{X}^{l-1} \geqslant \mathbf{P}(\mathbf{X}^{l-1})\mathbf{X}^l$, *то* $\mathbf{P}(\mathbf{X}^l)\mathbf{X}^1 > \mathbf{P}(\mathbf{X}^l)\mathbf{X}^l$.

Слабая аксиома является частным случаем сильной аксиомы при $l = 2$. Слабая аксиома «почти» эквивалентна закону Хикса [20]. Из закона Хикса следует слабая аксиома, из слабой аксиомы следует закон Хикса с заменой строгого неравенства в (3.4) на нестрогое. Сильная аксиома эквивалентна условиям интегрируемости [19].

На сильной аксиоме основаны условия разрешимости задачи о построении экономических индексов в дискретной постановке [21, 22]. Исходную информацию для построения индексов дают временные ряды $\{\mathbf{P}^t, \mathbf{X}^t\}_{t=0}^T$, где $\mathbf{P}^t$ — цены на рассматриваемые продукты в период времени t, а $\mathbf{X}^t$ — количества потребляемых при этих ценах продуктов. Поскольку функции спроса заданы лишь в точках $\mathbf{P}^t$, основная формула теории экономических индексов (3.1) заменяется соотношениями

$$\frac{1}{q_0(\mathbf{P}^t)}\mathbf{P}^t \in \partial F(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^t}, \quad t = 0, 1, \ldots, T, \tag{3.5}$$

где $\partial F(\mathbf{X})$ — субдифференциал функции $F(\mathbf{X})$. Без ограничения общности индекс продукта можно искать в виде

$$F(\mathbf{X}) = \min_{t=\overline{0,T}} (\lambda_t \mathbf{P}^t \mathbf{X}), \tag{3.6}$$

где $\lambda_t > 0$ определяются так, чтобы выполнялись соотношения (3.5), которые на функциях вида (3.6) эквивалентны системе линейных неравенств

$$\lambda_\tau \mathbf{P}^\tau \mathbf{X}^t \geqslant \lambda_t \mathbf{P}^t \mathbf{X}^t \quad (t, \tau = 0, 1, \ldots, T). \tag{3.7}$$

Линейная система (3.7) содержит $T(T+1)$ неравенств относительно $(T+1)$ неизвестного $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_T$. Для ее совместности

необходимо и достаточно, чтобы ряд $\{\mathbf{P}^l, \mathbf{X}^l\}_{l=0}^T$ удовлетворял однородной сильной аксиоме.

Однородная сильная аксиома. *Для любых неколлинеарных векторов из* R_m^+, $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \ldots, \mathbf{X}^l$ *не существует такого набора чисел* $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \ldots, \mu_l > 0$, *что*

$$(\mu_1\mathbf{X}^1 - \mu_2\mathbf{X}^2)\,P(\mathbf{X}^1) \geqslant 0, \quad (\mu_2\mathbf{X}^2 - \mu_3\mathbf{X}^3)\,\mathbf{P}(\mathbf{X}^2) \geqslant 0, \ldots$$
$$\ldots, (\mu_{l-1}\mathbf{X}^{l-1} - \mu_l\mathbf{X}^l)\,\mathbf{P}(\mathbf{X}^{l-1}) \geqslant 0, (\mu_l\mathbf{X}^l - \mu_1\mathbf{X}^1)\,\mathbf{P}(\mathbf{X}^l) \geqslant 0.$$

Для решения линейной системы вида (3.7) разработан эффективный алгоритм, учитывающий специфику задачи [22].

В отличие от термодинамики, где выполняется второе начало, в экономике нет оснований считать, что условия интегрируемости всегда выполняются. Более того, спады в циклах Кондратьева, соответствующие смене технологических укладов хозяйства, сопровождаются, по-видимому, возникновением новых потребностей и нарушением условий интегрируемости. Поэтому имеет смысл рассматривать задачу об агрегировании конечных продуктов при нарушении условий интегрируемости (см. [11, 12]). Будем использовать теперь набор индексов продуктов $F_1(\mathbf{X})$, $F_2(\mathbf{X}), \ldots, F_k(\mathbf{X})$ и соответствующих им индексов цен $Q_1(\mathbf{q})$, $Q_2(\mathbf{q}), \ldots, Q_k(\mathbf{q})$. Функция $F_j(\mathbf{X})$ определяет степень удовлетворения j-й потребности, а функция $Q_j(\mathbf{q})$ — цену удовлетворения j-й потребности. Как и прежде, предполагаем, что функции $F_j(\mathbf{X})$ принадлежат классу $\mathfrak{A}$, функции $Q_j(\mathbf{q})$ полагаем положительно однородными, неотрицательными. Связь экономических индексов с функциями спроса определяется соотношениями (сравнить с (3.2))

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j(\mathbf{q})\,F_j(\mathbf{X}) \leqslant \mathbf{q}\mathbf{X}, \quad \sum_{j=1}^{k} Q_j(\mathbf{q})\,F_j(\mathbf{Y}(\mathbf{q})) = \mathbf{q}\mathbf{Y}(\mathbf{q}) \text{ при любых } \mathbf{X} \geqslant 0, \mathbf{q} \geqslant 0. \tag{3.8}$$

При сделанных предположениях соотношения (3.8) эквивалентны равенству

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j(\mathbf{P}(\mathbf{X}))\,dF_j(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X})\,dX_i. \tag{3.9}$$

В агрегированные описания вместо прямых и обратных функций спроса можно ввести агрегированные функции спроса. Агрегированными обратными функциями спроса называются функции $\mathbf{D}(\mathbf{F}) = (D_1(\mathbf{F}), \ldots, D_k(\mathbf{F}))$, где $\mathbf{F} \in R_k^+$, удовлетворяющие равенству $\mathbf{D}(\mathbf{F}(\mathbf{X})) = \mathbf{Q}(\mathbf{P}(\mathbf{X}))$. Существование агрегированных обратных функций спроса налагает дополнительное ограничение на выбор системы экономических индексов, при выполнении которого равенство (3.9) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X})\,dX_i = \sum_{j=1}^{k} D_j(\mathbf{F}(\mathbf{X}))\,dF_j(\mathbf{X}). \tag{3.10}$$

Чтобы получить описание в максимально укрупненных показателях, стремятся так выбрать экономические индексы, чтобы минимизировать их число k. Дальнейшие рассуждения будем проводить локально в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{X}^0 > 0$, в которой $\mathbf{P}(\mathbf{X}^0) > 0$. Если требовать существования агрегированных обратных функций спроса, то выполнено (3.10) и вопрос сводится к известной задаче Картана о приведении дифференциальной формы

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{X})\, dX_i$$

к наименьшему числу переменных (см. [23]). Э. Картан разработал исчисление внешних дифференциальных форм, в терминах которого, используя лишь дифференцирование и арифметические операции, удается вычислить минимальное значение k. Для этого достаточно рассмотреть последовательность внешних дифференциальных форм $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = d\alpha$, $\alpha_3 = \alpha \wedge d\alpha$, $\alpha_4 = d\alpha \wedge \wedge d\alpha, \ldots, \alpha_{2l} = (d\alpha)^l$, $\alpha_{2l+1} = \alpha \wedge (d\alpha)^l, \ldots$ Классом ρ формы α в точке $\mathbf{X}^0$ называется наименьшее целое число r, такое, что $\alpha_{r+1}(\mathbf{X}^0) = 0$. Класс $\rho(\mathbf{X})$ дифференциальной формы α является положительной, полунепрерывной снизу, кусочно постоянной функцией с целыми значениями (см. [24]). Если класс $\rho(\mathbf{X})$ постоянен в окрестности точки $\mathbf{X}^0$, то наименьшее число переменных, к которому можно привести форму α, равно $\rho(\mathbf{X}^0)$. В отличие от задачи Картана, в рассматриваемой задаче функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ не произвольные, а из класса $\mathfrak{A}$. В [11, 25] доказано, что если выполняется закон Хикса, то функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ можно выбрать из класса $\mathfrak{A}$ так, чтобы $k = \rho(\mathbf{X}^0)$, а агрегированные прямые и обратные функции спроса удовлетворяли закону Хикса, условиям отделимости и требованию положительности.

Изменение класса формы α при изменении функций спроса или базового набора продуктов $\mathbf{X}^0$ можно интерпретировать как перестройку структуры потребностей.

Если не требовать существования агрегированных обратных функций спроса, то число индексов продукта, удовлетворяющих (3.9), может быть сокращено до $k = [(\rho(\mathbf{X}^0) + 1)/2]$. Доказательство этого утверждения основано на теореме Дарбу о каноническом виде дифференциальной формы (см. [25]). У сокращенной системы индексов пропорции $Q_1(\mathbf{P}(\mathbf{X})) : Q_2(\mathbf{P}(\mathbf{X})) : \ldots : Q_k(\mathbf{P}(\mathbf{X}))$ не зависят от $\mathbf{F}(\mathbf{X})$.

Забегая вперед, отметим, что последнее обстоятельство не позволяет корректно поставить многокритериальную задачу об агрегированном описании производства. Чтобы объяснить это утверждение, надо уточнить, что такое «многокритериальная задача» и как многокритериальность связана с условиями интегрируемости.

Предположим сначала, что обратные функции спроса $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ таковы, что существует соответствующий им индекс продукта $F(\mathbf{X})$. Функция $F(\mathbf{X})$ является непрерывно дифференцируемой,

монотонно неубывающей, строго вогнутой функцией. Рассмотрим задачу вогнутого программирования

$$\max_{X \in E} F(X), \tag{3.11}$$

где E — множество возможных выпусков потребительских продуктов некоторым производством. Естественно предполагать, что E выпуклое подмножество R_+^m и что если $0 \leqslant Y \leqslant X$ и $X \in E$, то $Y \in E$. Задача (3.11) имеет единственное решение X^0, которое обладает следующими свойствами: 1) оно является парето-оптимальной точкой E; 2) гиперплоскость с направляющим вектором $P(X^0)$ является опорной в точке X^0 к множеству E. Выполнение условий 1) и 2) необходимо и достаточно для того, чтобы X^0 являлось решением задачи (3.11).

Если $P(X)$ не удовлетворяюту условиям интегрируемости, то целевой функции $F(X)$ не существует, и задача становится многокритериальной. Вместо целевой функции $F(X)$ приходится рассматривать поле гиперплоскостей $\alpha = 0$, порожденное системой функций спроса $P(X)$. Назовем решением задачи многокритериальной оптимизации точку X^0, в которой выполняются условия 1) и 2) [5]. Обобщением требования строгой вогнутости целевой функции является слабая аксиома теории выявленного предпочтения. При ее выполнении решение задачи многокритериальной оптимизации существует и единственно (см. [27]). Приведенная постановка многокритериальной задачи является естественным обобщением задачи оптимизации (3.11).

Таким образом, многокритериальность связана с нарушением условий интегрируемости. Задача многокритериальной оптимизации может допускать постановку в агрегированной форме. Пусть $F(Y)$ система индексов продукта и $D(F)$ агрегированные обратные функции спроса, порожденные функциями $P(X)$. Обозначим через $\Gamma = \{F \mid 0 \leqslant F \leqslant F(X),\ X \in E\}$ проекцию множества E в критериальное пространство. Тогда $F(X^0)$ является 1) парето-оптимальной точкой множества Γ; 2) гиперплоскость с направляющим вектором $D(F(X^0))$, проходящая через точку $F(X^0)$, является опорной к множеству Γ в точке $F(X^0)$. Точку $F(X^0)$ можно найти из решения агрегированной задачи многокритериальной оптимизации на множестве Γ поля гиперплоскостей, порожденного системой функций $D(F)$.

Для сокращенной системы индексов $F(X)$ нельзя определить $D(F)$. Можно утверждать, что $F(X^0)$ является парето-оптимальной точкой множества Γ, но неизвестно, какой именно. Таким образом, в этом случае не удается корректно поставить агрегированную задачу многокритериальной оптимизации.

Итак, мы видим, что по сравнению с термодинамикой развитие проблемы интегрируемости в экономике оказывается богаче со-

[5] При развернутом описании множества E в задаче о функционировании системы отраслей, связанных нелинейным межотраслевым балансом, в точке X^0 достигается равенство спроса и предложения (см. [26] или § 5).

держанием. Во-первых, в рамках теории выявленного предпочтения получен «дискретный аналог» условий интегрируемости. Во-вторых, в отличие от термодинамики в экономике условия интегрируемости могут не выполняться, что приводит к концепции задач многокритериальной оптимизации.

4. Агрегирование описаний производства

Современное производство в высокой степени специализировано и кооперировано. Это значит, что полная номенклатура продуктов разделена между многочисленными предприятиями, каждое из которых, используя определенные технологии, выпускает незначительную часть номенклатуры продуктов и для их производства нуждается в продуктах, выпускаемых другими предприятиями. В исходном описании явным образом должна отражаться эта мозаика и сверх того — механизмы управления производством на предприятиях, механизмы установления связей и обменов между предприятиями, а также механизмы расширения производства. В общих словах, при агрегировании такого описания надо подходящим образом выбрать группу предприятий и изолировать ее, разрезав связи их с предприятиями, не вошедшими в группу. На разрезанных связях ввести потоки выпускаемых и затрачиваемых продуктов. Затем, используя явное описание экономических механизмов регулирования производства и обращения внутри группы, исключить из описания внутренние выпуски—затраты и явным образом или параметрически — через параметры экономических механизмов регулирования — связать выходные потоки выпускаемых продуктов с входными потоками затрачиваемых факторов производства. В результате рассматриваемая группа предприятий заменяется агрегатом — производственной единицей. При этом уменьшается число продуктов за счет исключения обращающихся внутри группы. Число продуктов можно уменьшить еще более, если функции спроса на выпускаемые продукты и функции спроса на затрачиваемые продукты агрегируются в индексы. В соответствии со сказанным математическая модель производства содержит описания производственных единиц и описания связей между ними. Теперь наша задача — обсудить агрегированное описание производственных единиц и агрегирование описаний связанных производственных единиц. В этом разделе рассмотрим агрегированное описание производственных единиц.

Агрегированное описание производственной единицы задается производственной функцией. Производственной функцией называют зависимость максимально возможного выпуска производственной единицы от количества затрачиваемых ею производственных факторов. Производственные функции широко используются в математической экономике для описания производственных возможностей самых разных объектов. В неоклассической теории свойства производственных функций постулируются априорно. Однако производственную функцию следует получать

агрегированием описания структуры производственной единицы. Такой подход называется структурным [28]. В [29] отмечается, что при этом возможно адекватным образом отразить структурные изменения в производстве. Структурный подход был предложен Х. Хаутеккером [30] и Л. Иохансеном [31].

Структурный подход основывается на гипотезе А. Маршалла о разделении времен. По этой гипотезе характерное время изменения производственных возможностей и функций спроса много больше характерного времени изменения параметров экономических механизмов, балансирующих спрос и предложение продуктов [6]. Согласно гипотезе А. Маршалла, механизмы управления производством можно разделить на краткосрочные (определение загрузки производственных мощностей) и долгосрочные (стратегию расширения производственных мощностей). Сразу же на ум приходит аналогия между гипотезой Маршалла и гипотезой Боголюбова.

Первые попытки описания структуры производственных мощностей связаны с моделями межотраслевого баланса леонтьевского типа. В этих моделях производство описывается как система «чистых» (т. е. выпускающих однородную продукцию) отраслей. Предполагается, что в каждой отрасли имеется одна или несколько технологий производства. Технология описывается вектором затрат первичных ресурсов и продукции других отраслей на выпуск единицы продукции. Интенсивности использования технологий ограничены имеющимися в отрасли мощностями. Предполагается, что при создании мощности выбирается одна из технологий, и по ней эта мощность функционирует. Тогда в любой фиксированный момент времени мощности отрасли оказываются распределенными по технологиям. Требование конечности числа технологий в каждой отрасли оказывается неудобным для описания изменений технологической структуры мощностей. Именно это требование было отброшено в [30, 31].

Распределение мощностей по технологиям положено в основу описания структуры чистой отрасли. Агрегированием этого описания можно получить производственную функцию. Такая процедура описана в [31]. Будем считать, что отрасль использует различные технологические процессы, каждый из которых требует затрат n видов производственных факторов текущего пользования в заданных пропорциях. Каждая технология задается вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ затрат на выпуск единицы продукции (в [31] рассматривался случай $n = 2$). Распределение мощностей по технологиям определяется неотрицательной мерой $\mu(\cdot)$.

Суммарная мощность отрасли равна $\mu(R_+^n)$. Для полной загрузки мощностей необходимо, чтобы поток производственных факторов текущего пользования i-го вида, $i = 1, 2, \ldots, n$,

---

[6] В рыночной экономике — цен.

который поступает в распоряжение отрасли, был не меньше, чем

$$L_i = \int\limits_{R_+^n} x_i \mu(dx).$$

Пусть $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ — вектор потоков производственных факторов текущего пользования, поступающих в распоряжение отрасли. Если $l_i < L_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то нельзя полностью загрузить все мощности. Обозначим через $u(\mathbf{x})$ коэффициент загрузки мощности, соответствующий технологии $\mathbf{x}$. Будем предполагать, что $u(\mathbf{x})$ — измеримая по Лебегу функция, определенная на R_+^n, и что мера $\mu(d\mathbf{x})$ абсолютно непрерывна, т. е. $\mu(d\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, где $\xi(\mathbf{x})$ — неотрицательная локально суммируемая функция. Рассмотрим задачу о такой загрузке мощностей отрасли, при которой имеющиеся потоки производственных факторов $\mathbf{l}$ распределяются так, чтобы суммарный выпуск продукции был максимален:

$$\int\limits_{R_+^n} u(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}) dx_1 \ldots dx_n \to \max_{u(\mathbf{x})}, \tag{4.1}$$

$$\int\limits_{R_+^n} \mathbf{x} u(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}) dx_1 \ldots dx_n \leqslant \mathbf{l}, \tag{4.2}$$

$$0 \leqslant u(\mathbf{x}) \leqslant 1. \tag{4.3}$$

Задача (4.1)—(4.3) соответствует обычным процедурам агрегирования описания «чистой» отрасли. Производственной функцией $F(\mathbf{l})$ называется функция, которая сопоставляет вектору $\mathbf{l} \geqslant 0$ оптимальное значение функционала в задаче (4.1)—(4.3). Опишем класс экономических механизмов оперативного управления, которые соответствуют таким процедурам агрегирования [7].

Предположим, что все продукты распределяются посредством актов купли—продажи, причем каждый продукт продается и покупается по одной и той же цене. Пусть $p_0 > 0$ — цена на выпускаемую отраслью продукцию, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \geqslant 0$ — вектор цен на производственные факторы текущего пользования, которые используются отраслью. Прибыль от выпуска единицы продукции по технологии $\mathbf{x}$ при данных ценах p_0, $\mathbf{p}$ равна $p_0 - \mathbf{px}$. Предположим, что прибыльные технологии $\mathbf{x}$, удовлетворяющие условию $p_0 - \mathbf{px} > 0$, действуют на полную мощность и обеспечиваются необходимыми для этого производственными факторами. Обозначим через $G(\mathbf{p}: p_0) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in R_n^+, p_0 > \mathbf{px}\}$ множество прибыльных при ценах p_0, $\mathbf{p}$ технологий. Предположим, что убыточные технологии $\mathbf{x}$, удовлетворяющие условию $p_0 - \mathbf{px} < 0$, не используются и не обеспечиваются производственными факторами текущего пользования. Экономические механизмы, удовлет-

[7] Математическое оправдание этого соответствия является утверждением, близким к обобщенной лемме Неймана—Пирсона (см. [32]).

воряющие сформулированным выше предположениям, будем называть экономическими механизмами рыночного типа.

Суммарный выпуск отрасли при ценах $p_0 > 0$, $\mathbf{p} \geqslant 0$, определяется функцией предложения

$$g_0(\mathbf{p}, p_0) = \int\limits_{G(\mathbf{p}; p_0)} \xi(\mathbf{x})\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Суммарные затраты отрасли определяются функциями спроса

$$g_i(\mathbf{p}, p_0) = \int\limits_{G(\mathbf{p}; p_0)} x_i \xi(\mathbf{x})\, dx_1 \ldots dx_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Суммарная прибыль отрасли определяется функциями прибыли

$$\Pi(\mathbf{p}, p_0) = \int\limits_{R^n_+} (p_0 - \mathbf{px})_+ \xi(\mathbf{x})\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{4.4}$$

где

$$(p_0 - \mathbf{px})_+ = \begin{cases} p_0 - \mathbf{px} & \text{при } p_0 - \mathbf{px} > 0, \\ 0 & \text{при } p_0 - \mathbf{px} \leqslant 0. \end{cases}$$

Определенные выше производственные функции $F(\mathbf{l})$ обладают многими свойствами, которые постулируются в неоклассической теории производства: вогнутостью, непрерывностью, монотонным неубыванием, обращением в нуль на $R^n_+ \setminus \operatorname{int} R^n_+$, законом предельной производительности (см. [32]).

Исходной информацией для построения производственных функций при структурном подходе является распределение мощностей по технологиям. Такая информация использовалась для анализа конкретных отраслей экономики Норвегии, Швеции, США и других стран (см., например, [33]).

Исследование взаимосвязи между производственными функциями и распределениями мощностей по технологиям непосредственно из анализа задачи оптимизации (4.1)—(4.3) затруднительно (хотя такие попытки делались в [33]). Более естественным путем является исследование интегрального оператора прибыли (см. [32, 34]) с учетом того, что производственные функции $F(\mathbf{l})$ связаны с функциями прибыли преобразованием Лежандра (см. [32]):

$$\Pi(\mathbf{p}, p_0) = \sup_{\mathbf{l} \geqslant 0} [p_0 F(\mathbf{l}) - \mathbf{pl}], \; F(\mathbf{l}) = \frac{1}{p_0} \inf_{\mathbf{p} \geqslant 0} [\Pi(\mathbf{p}, p_0) + \mathbf{pl}]. \tag{4.5}$$

Отметим, что через функцию прибыли $\Pi(\mathbf{p}, p_0)$ легко выражаются функции предложения $g_0(\mathbf{p}, p_0)$ и функции спроса $g_i(\mathbf{p}, p_0)$:

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{p}, p_0)}{\partial p_0} = g_0(\mathbf{p}, p_0), \; \frac{\partial \Pi(\mathbf{p}, p_0)}{\partial p_i} = -g_i(\mathbf{p}, p_0) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4.6}$$

До сих пор рассматривалась процедура агрегирования описания структуры отрасли в данный момент времени или не зависящей от времени. Если структура отрасли явно зависит от времени, то надо принимать дополнительные гипотезы, которые в терминах распределения мощностей по технологиям допускают естественную интерпретацию (см., например, [31]). Проиллюстрируем это на примере.

Рассмотрим «чистую» отрасль, которая использует единственный вид производственных факторов текущего пользования — однородные трудовые ресурсы [8]. Будем считать, что в каждый момент времени отрасль описывается гладкой функцией плотности распределения мощностей по технологиям $\xi(\lambda, t)$, где λ — норма затрат труда на единицу выпускаемого продукта. Функция $\xi(\lambda, t)$ изменяется со временем в результате процессов старения существующих и строительства новых мощностей. Будем считать, что построенные в интервале времени $[t, t+dt]$ новые мощности $I(t)\,dt$ используют технологию с наименьшей нормой затрат труда $\nu > 0$. Предположим, что старение вызывает экспоненциальное уменьшение с темпом $\mu > 0$ количества выпускаемого на этих мощностях продукта при прежних затратах трудовых ресурсов. Можно показать (см. [35]), что при $\lambda \geqslant \nu$

$$\frac{\partial \xi(\lambda, t)}{\partial t} + \mu\lambda \frac{\partial \xi(\lambda, t)}{\partial \lambda} = -2\mu\xi(\lambda, t), \quad \xi(\nu, t) = \frac{I(t)}{\mu\nu}. \tag{4.7}$$

Если заданы $\xi(\lambda, 0) = \xi_0(\lambda)$ и $I(t)$ при $t \geqslant 0$, то из (4.7) функция $\xi(\lambda, t)$ определяется однозначно. Суммарная мощность отрасли равна

$$M(t) = \int_{\nu}^{+\infty} \xi(\lambda, t)\, 2\lambda.$$

Численные эксперименты с замкнутыми моделями экономического роста (см. [35]) показывают, что среди решений (4.7) с различными начальными условиями роль аттракторов играют режимы экспоненциального роста. В режиме экспоненциального роста с темпом γ величина $I(\tau) = M(0)(\gamma + \mu)e^{\gamma\tau}$ при $\tau \leqslant t$ и решение (4.7) имеет вид

$$\xi(\lambda, t) = M(t)\frac{(\gamma+\mu)}{\mu\nu}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{\gamma+2\mu}{\mu}} \quad \text{при } \lambda \geqslant \nu. \tag{4.8}$$

Обозначим через $p > 0$ цену на выпускаемую продукцию и через $s > 0$ ставку заработной платы. Нетрудно найти функцию прибыли

$$\Pi_t(s, p) = M(t)\,p\left(1 + \frac{\mu}{\gamma}\left(\frac{s\nu}{p}\right)^{\frac{\gamma+\mu}{\mu}}\right) - M(t)\,s\nu\left(\frac{\gamma+\mu}{\mu}\right);$$

[8] Конкретная интерпретация производственного фактора текущего пользования несущественна.

производственную функцию

$$F_t(l) = \begin{cases} \left[1-\left(1-\frac{l}{M(t)\,\nu}\,\frac{\gamma}{(\gamma+\mu)}\right)^{\frac{\gamma+\mu}{\mu}}\right]M(t) & \text{при } 0 \leqslant l \leqslant \nu M(t)\left(\frac{\gamma+\mu}{\gamma}\right), \\ M(t) & \text{при } l \geqslant \nu M(t)\left(\frac{\gamma+\mu}{\gamma}\right); \end{cases}$$

функцию спроса

$$g_1^t(s, p) = M(t)\left[1-\left(\frac{\nu s}{p}\right)^{\frac{\gamma}{\mu}}\right]\nu\left(\frac{\gamma+\mu}{\gamma}\right);$$

функцию предложения

$$g_0^t(s, p) = M(t)\left[1-\left(\frac{s\nu}{p}\right)^{\frac{\gamma+\mu}{\mu}}\right]. \tag{4.9}$$

В режиме экспоненциального роста зависимость рассмотренных функций от времени входит через суммарную мощность отрасли.

5. Агрегированное описание группы связанных «чистых» отраслей

Теперь проанализируем агрегированное описание группы связанных чистых отраслей. Но прежде заметим, что в предыдущем разделе рассматривалось агрегирование описания производственной единицы, которая выпускала однородный продукт, а затрачивала в процессе производства только поступающие извне факторы.

Часто в процессе производства конечного продукта приходится создавать и потреблять промежуточные продукты. В этом случае технологии производства конечного продукта определяются вектором нормативных затрат внешних производственных факторов и промежуточных продуктов. Тогда изложенный выше подход непосредственно неприменим. В [36] рассматривалась процедура агрегирования, исключающая из описания системы отраслей, выпускающих однородный конечный продукт, описание процессов производства и потребления промежуточных продуктов.

В предыдущем разделе мы отметили, что обычным процедурам агрегирования соответствуют экономические механизмы, осуществляющие оптимальное распределение первичных ресурсов. Эти экономические механизмы эквивалентны равновесным экономическим механизмам рыночного типа, при которых цены на промежуточные продукты устанавливаются так, что спрос на промежуточные продукты равен предложению.

В [26] исследовалась задача об агрегированном описании группы из m «чистых» отраслей, выпускающих разные конечные продукты и использующих первичные ресурсы n видов. Связи в рассматриваемой группе отраслей описывались статической нелинейной моделью межотраслевого баланса, а каждая из отраслей

описывалась производственной функцией, выведенной агрегированием распределения мощностей по технологиям. Предположим, что система отраслей продуктивна и неразложима. Обозначим производственную функцию i-й отрасли через $F_i(\mathbf{X}^i, \mathbf{l}^i)$, где $\mathbf{X}^i = (X^i_{j_1}, X^i_{j_2}, \ldots, X^i_{j_i})$ — вектор затрат i-й отраслью продукции других отраслей из группы, а $\mathbf{l}^i = (l^i_1, l^i_2 \ldots, l^i_n)$ — вектор затрат i-й отраслью первичных ресурсов. Обозначим через $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ вектор первичных ресурсов, поступающих в распоряжение всей системы отраслей, $\mathbf{X}^0 = (X^0_1, X^0_2, \ldots, X^0_m)$ — вектор конечных выпусков. Балансовые соотношения имеют вид

$$F_i(\mathbf{X}^i, \mathbf{l}^i) - \sum_{j \in J(i)} X^j_i - X^0_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{l}^j \leqslant \mathbf{l}, \mathbf{X}^i \geqslant 0, \mathbf{l}^i \geqslant 0, \mathbf{X}^0 \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.2}$$

где $J(i)$ — множество номеров отраслей, использующих продукцию i-й отрасли. Соотношения (5.1) и (5.2) определяют выпуклое множество $E(\mathbf{l})$ конечных выпусков.

Обычные процедуры агрегирования предполагают оптимальность функционирования системы отраслей. Поскольку отрасли выпускают разные конечные продукты, возникает вопрос об уточнении понятия оптимальности. В обычных процедурах агрегирования постулируется существование индекса продукта $F_0(\mathbf{X}^0)$ и рассматривается задача об оптимальном распределении первичных ресурсов:

$$F_0(\mathbf{X}^0) \to \max \tag{5.3}$$

при ограничениях (5.1), (5.2). Задача (5.1)—(5.3) является задачей вогнутого программирования.

Опишем экономические механизмы, соответствующие процедуре агрегирования (5.1)—(5.3) (см. [24]). Обозначим через $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ вектор цен на выпускаемые продукты, через $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ вектор цен на первичные ресурсы. Пусть $q_0(\mathbf{q})$ — индекс цены, соответствующий индексу продукта $F_0(\mathbf{X}^0)$ в силу (3.3). Обозначим через $\mathbf{X}_0(\mathbf{q}, \mathbf{s})$ вектор функций предложения конечных продуктов. Экономические механизмы оптимального распределения первичных ресурсов эквивалентны экономическим механизмам рыночного типа, при которых цены $\mathbf{q}$ на выпускаемые конечные продукты устанавливаются так, что

$$q_0(\mathbf{q}) \frac{\partial F_0}{\partial X^0_i}(\mathbf{X}^0(\mathbf{q}, \mathbf{s})) = q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.4}$$

Сравнивая (5.4) и (3.1), получаем, что (5.4) выражает совпадение при ценах q структуры функций предложения $X^0_1(\mathbf{q}, \mathbf{s}) : X^0_2(\mathbf{q}, \mathbf{s}) : \ldots : X^0_m(\mathbf{q}, \mathbf{s})$ со структурой функций спроса, которые соответствуют индексу продукта $F_0(\mathbf{X}^0)$. Такие экономиче-

ские механизмы естественно назвать равновесными экономическими механизмами рыночного типа.

Агрегированной производственной функцией $F^A(\mathbf{l})$ системы отраслей называется функция, сопоставляющая вектору первичных ресурсов оптимальное значение функции (5.3) в задаче (5.1)— (5.3). В [24] показано, что суммарная прибыль, спрос на первичные ресурсы и предложение агрегированного продукта $F_0(\mathbf{X}^0(\mathbf{q}, \mathbf{s}))$ однозначно определяются ценами первичных ресурсов $\mathbf{s}$ и ценой агрегированного продукта $q_0 = q_0(\mathbf{q})$ при условии, что система регулируется равновесными экономическими механизмами рыночного типа. Поэтому корректно определены агрегированные функции прибыли $\Pi^A(\mathbf{s}, q_0)$, предложения $g_0^A(\mathbf{s}, q_0)$ и спроса на первичные ресурсы $g_i^A(\mathbf{s}, q_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Функции $F^A(\mathbf{l})$, $\Pi^A(\mathbf{s}, q_0)$, $g_0^A(\mathbf{s}, q_0)$, $g_i^A(\mathbf{s}, q_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ связаны между собой соотношениями, аналогичными (4.5) и (4.6).

Агрегированная функция прибыли выражается через функции прибыли исходных отраслей $\Pi_i(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ по формуле

$$\Pi^A(\mathbf{s}, q_0) = \min_{\mathbf{q},\, q_0(\mathbf{q}) \geq q_0} \sum_{i=1}^{m} \Pi_i(\mathbf{s}, \mathbf{q}). \tag{5.5}$$

При фиксированных ценах $q_0 > 0$, $\mathbf{s} > 0$ цены $\mathbf{q}$, на которых достигается минимум в (5.5), являются равновесными, следовательно, удовлетворяют (5.4). Задача минимизации (5.5) относится к типу задач об определении квазиравновесного состояния в процедурах агрегирования описания физических систем (см. разд. 2).

Поскольку описание экономики является многоуровневым, представляет интерес попытка рассматривать процедуры агрегирования как процедуры перехода к очередному уровню в более укрупненных показателях. Для этого нужно, чтобы выполнялся принцип универсальности описания (см. [37]), т. е. описание агрегированного объекта было того же типа, что и описание исходных. В нашем случае это предполагает возможность корректно определить понятие агрегированного распределения мощностей по технологиям. В [26] доказано, что для того, чтобы распределение мощностей по технологиям порождало функции $F^A(\mathbf{l})$, $\Pi^A(\mathbf{s}, q_0)$, $g_0^A(\mathbf{s}, q_0)$, $g_i^A(\mathbf{s}, q_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, достаточно, чтобы оно порождало функцию $\Pi^A(\mathbf{s}, q_0)$. Таким образом, проблема универсальности описания сводится к разрешимости интегрального уравнения прибыли

$$\Pi^A(\mathbf{s}, q_0) = \int_{R_n^+} (q_0 - \mathbf{s}\mathbf{x})_+ \mu(d\mathbf{x}) \tag{5.6}$$

в классе неотрицательных мер $\mu(\cdot)$. Из (5.6) следует, что при фиксированном $\mathbf{s} > 0$

$$\int_{R_n^+} e^{-\mathbf{s}\mathbf{x}} \mu(d\mathbf{x}) = \int_0^{-\infty} e^{-q_0} d\left[\frac{\partial \Pi^A(\mathbf{s}, q_0)}{\partial q_0}\right].$$

Таким образом, интегральное уравнение (5.6) оказывается связанным с преобразованием Фурье—Лапласа. Это замечание позволяет доказывать теоремы единственности для уравнений (4.4), (5.6) (см. [34, 38]). В [34] разрешимость уравнения прибыли и вопрос о неотрицательности решения рассматривались раздельно. При этом одно из условий разрешимости получилось труднопроверяемым, поскольку использовало процедуру аналитического продолжения. Существенное упрощение этого условия получается, если исследовать разрешимость (5.6) сразу в классе неотрицательных мер. В [38] получено многомерное обобщение теоремы Бернштейна о вполне монотонных функциях в форме, удобной для доказательства теорем существования решений уравнения (5.6). Построение явных формул обращения для оператора прибыли при $n \geqslant 2$ оказывается связанным с задачей об обращении преобразования Радона по неполным данным (см. [38]).

В случае, когда система отраслей использует лишь один первичный ресурс ($n = 1$), труднопроверяемое условие исчезает (см. [34]) и можно доказать существование агрегированного распределения мощностей по технологиям (см. [26]). Формула обращения уравнения (5.6) также упрощается и принимает вид [9]

$$\xi(x) = \partial^2 \Pi(1, x)/\partial x^2. \tag{5.7}$$

Проиллюстрируем процедуры агрегирования на примере. Рассмотрим систему из двух отраслей. Первая отрасль выпускает конечный продукт и использует при этом продукцию второй отрасли в фиксированной пропорции a. Предположим сначала, что отрасли используют однородный первичный ресурс. Технологии производства в отраслях различаются нормами затрат первичного ресурса на выпуск единицы продукции. Обозначим через $\xi_1(z)$ и $\xi_2(y)$ плотности распределений мощностей по технологиям в первой и второй отрасли соответственно. Пусть ν_1 и ν_2 — наилучшие технологии производства в первой и второй отрасли, требующие наименьших затрат первичного ресурса. Тогда наилучшей агрегированной технологией производства в системе отраслей будет $\nu_1 + a\nu_2$. Используя формулы (5.5), (5.7), получаем, что плотность агрегированного распределения мощностей по технологиям $\xi^A(x)$ определяются по формулам

$$\xi^A(x) = \frac{\xi_1(x - ay(x))\,\xi_2(y(x))}{a^2\xi_1(x - ay(x)) + \xi_2 y(x))} \quad \text{при } x \geqslant \nu_1 + a\nu_2, \tag{5.8}$$

где функция $y(x)$ определяется из решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{a\xi_1(x - ay(x))}{a^2\xi_1(x - ay(x)) + \xi_2(y(x))}, \; y(\nu_1 + a\nu_2) = \nu_2. \tag{5.9}$$

---

[9] При $n \geqslant 2$ $\partial^2\Pi(s, q_0)/\partial q_0^2$ определяет интеграл функции $\xi(\mathbf{x})$ по гиперплоскости $s\mathbf{x} = q_0$. Поэтому восстановление $\xi(\mathbf{x})$ сводится к обращению преобразования Радона по неполным данным (так как $s \geqslant 0$).

Например, в режиме сбалансированного экспоненциального роста

$$\xi_1(z) = M_1(t)\frac{\gamma+\mu}{\mu\nu_1}\left(\frac{\nu_1}{z}\right)^{\frac{\gamma+2\mu}{\mu}} \quad \text{при } z \geqslant \nu_1,$$

$$\xi_2(y) = M_2(t)\frac{\gamma+\mu}{\mu\nu_2}\left(\frac{\nu_2}{y}\right)^{\frac{\gamma+2\mu}{\mu}} \quad \text{при } y \geqslant \nu_2,$$

где $M_1(t) = aM_2(t)$, (см. (4.8)) и из (5.9) получаем, что $y(x) = \frac{\nu_2}{\nu_1 + a\nu_2}x$. При этом плотность агрегированного распределения также имеет вид (4.8):

$$\xi^A(x) = M_1(t)\frac{\gamma+\mu}{\mu(\nu_1+a\nu_2)}\left(\frac{\nu_1+a\nu_2}{x}\right)^{\frac{\gamma+2\mu}{\mu}} \quad \text{при } x \geqslant \nu_1 + a\nu_2.$$

Таким образом, на режимах экспоненциального роста процедуры агрегирования сводятся к естественному пересчету параметров.

Из формул (5.8), (5.9) следует, что агрегированная технология x образуется в результате спаривания технологий $x - ay(x)$ из первой отрасли и $y(x)$ из второй. При этом спаривание технологий однозначно определяется распределениями мощностей. Новый эффект возникает в случае, когда система отраслей использует несколько видов первичных ресурсов ($n \geqslant 2$). Приведем простейший пример (см. [38]) для случая $n = 2$. Предположим, что в первой отрасли имеется единственная технология производства $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ с мощностью m_0, а во второй отрасли две технологии $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_2^1)$ и $\mathbf{y}^2 = (y_1^2, y_2^2)$ с мощностями m_1 и m_2 соответственно. Предположим, что среди технологий второй отрасли нет наилучшей (без ограничения общности, $y_1^1 > y_1^2$ и $y_2^1 < y_2^2$) и что $am_0 < m_1 + m_2$. Преобразуя в данном частном случае выражение для агрегированной функции прибыли (5.5), получаем

$$\begin{aligned}\Pi^A(s_1, s_2, q_0) = \max\{&\min(m_0 - m_2/a, 0)(q_0 - \mathbf{s}(\mathbf{z} + a\mathbf{y}^1))_+ + \\ &+ \min(m_0, m_2/a)(q_0 - \mathbf{s}(\mathbf{z} + a\mathbf{y}^2))_+, \min(m_1/a, m_0) \times \\ &\times (q_0 - \mathbf{s}(\mathbf{z} + a\mathbf{y}^1))_+ + \min(m_0 - m_1/a, 0) \times \\ &\times (q_0 - \mathbf{s}(\mathbf{z} + a\mathbf{y}^2))_+\}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что существуют две агрегированные технологии $\mathbf{z} + a\mathbf{y}^1$ и $\mathbf{z} + a\mathbf{y}^2$. Спаривание технологий первой и второй отрасли осуществляется по-разному, в зависимости от структуры цен на первичные ресурсы. Агрегированное распределение мощностей по технологиям $\mu^A(\mathbf{x})$ равно

$$\mu^A(\mathbf{x}) = \begin{cases} \min\left(m_0 - \frac{m_2}{a}, 0\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z} - a\mathbf{y}^1) + \min\left(m_0, \frac{m_2}{a}\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z} - a\mathbf{y}^2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } \mathbf{s}\mathbf{y}^1 > \mathbf{s}\mathbf{y}^2, \\ \min\left(\frac{m_1}{a}, m_0\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z} - a\mathbf{y}^1) + \min\left(m_0 - \frac{m_1}{a}, 0\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z} - a\mathbf{y}^2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } \mathbf{s}\mathbf{y}^1 < \mathbf{s}\mathbf{y}^2, \end{cases}$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака. Значит, не существует агрегированного распределения мощностей $\mu^A(\mathbf{x})$, удовлетворяющего уравнению (5.6) при всех $\mathbf{s} \geqslant 0$. Пространство цен на первичные ресурсы разбивается на два конуса $K_1 = \{\mathbf{s} \geqslant 0 \mid \mathbf{s}\mathbf{y}^1 > \mathbf{s}\mathbf{y}^2\}$ и $K_2 = \{\mathbf{s} \geqslant 0 \mid \mathbf{s}\mathbf{y}^1 < \mathbf{s}\mathbf{y}^2\}$, в каждом из которых уравнение (5.6) имеет единственное решение. Это обстоятельство интерпретируется как изменение технологической структуры мощностей в результате изменения структуры цен на первичные ресурсы.

В экономической литературе большое внимание уделяется кондратьевским циклам (см. [39]), связанным с процессами смены технологических укладов экономики. Описанный выше эффект показывает, что технологическая структура экономики может изменяться за счет перестройки связей между экономическими агентами, а не только в результате физической конверсии мощностей [10]. Это изменение связей реализуется равновесными экономическими механизмами рыночного типа при перестройке структуры цен на первичные ресурсы.

Рассмотренные простейшие процедуры агрегирования предполагают возможность описания конечного спроса с помощью одного индекса продукта. Если функции конечного спроса не удовлетворяют условиям интегрируемости, то для их описания используется система индексов продукта $\mathbf{F}_0(\mathbf{X}^0) = (F_0^1(\mathbf{X}_0), \ldots, F_0^k(\mathbf{X}^0))$ и агрегированных обратных функций спроса $\mathbf{D}(\mathbf{F}_0) = (D_1(\mathbf{F}_0), \ldots, D_k(\mathbf{F}_0))$. Определим системы векторных производственных функций $\mathbf{F}^A(\mathbf{l}) = (F_1^A(\mathbf{l}), \ldots, F_k^A(\mathbf{l}))$. Для этого спроектируем множество конечных выпусков $E(\mathbf{l})$, определенное соотношениями (5.1), (5.2), в пространство критериев $\Gamma(\mathbf{l}) = \{\mathbf{G}_0 \in R_k^+ \mid \exists \mathbf{X}^0 \in E(\mathbf{l}): \mathbf{G}_0 \leqslant \mathbf{F}_0(\mathbf{X}^0)\}$. Множество $\Gamma(\mathbf{l})$ выпукло. Тогда $\mathbf{F}^A(\mathbf{l})$ является решением задачи многокритериальной оптимизации на множестве $\Gamma(\mathbf{l})$, порожденной агрегированными обратными функциями спроса $\mathbf{D}(\mathbf{F}_0)$. Описанию системы отраслей с помощью функций $\mathbf{F}^A(\mathbf{l})$ также соответствуют равновесные экономические механизмы рыночного типа (см. [26]).

Итак, общепринятые процедуры агрегирования описаний экономических систем предполагают, что механизмы краткосрочного управления ими эквивалентны равновесным экономическим механизмам рыночного типа. Иначе говоря, эти процедуры агрегирования предполагают, что в основе самоорганизации экономической системы лежит закон стоимости Адама Смита. Теорию таких процедур агрегирования, основанных на гипотезе об оптимальном распределении ресурсов, естественно назвать равновесной теорией агрегирования.

---

[10] Это эффект может оказаться важным для объяснения резкого сокращения энергоемкости в США после энергетического кризиса 70-х годов.

6. Устойчивость рыночных механизмов

Как показано выше, в рамках равновесной теории формально определенные экономические механизмы рыночного типа являются наилучшими. Многие содержательно интересные экономические явления связаны с проблемой их реализации.

В [40, 41] разрабатывается эволюционная теория рынка, из которой следует, что равновесные экономические механизмы рыночного типа могут быть «асимптотически» реализованы в результате деятельности посредников, осуществляющих торговые операции. Тем самым в рамках эволюционной теории объясняется происхождение реального экономического института рынка, который реализует эти формально определенные механизмы. В моделях эволюционной теории рынка естественным образом возникают такие экономические понятия, как прибыль, цена продукта, нормативный запас продукта на рынке, цена фирмы.

Для анализа устойчивости рыночных механизмов проанализируем упрощенную модель изменения цены (см. [42]). Рассмотрим рынок однородных товаров. При построении модели изменения цены, основываясь на гипотезе А. Маршалла, можно считать функции спроса и предложения неизменными. Обозначим через p_n цену на рассматриваемые товары на шаге n. Пусть $C(p)$ — функция спроса, $g(p)$ — функция предложения. Предположим, что покупатели товара на шаге n, ориентируясь на цену p_{n-1}, расходуют сумму денег $p_{n-1}C(p_{n-1})$, а продавцы производят товары в количестве $g(p_{n-1})$. Тогда

$$p_n = p_{n-1}C(p_{n-1})/g(p_{n-1}). \tag{6.1}$$

В качестве функции $g(p)$ возьмем функцию предложения, соответствующую (4.8), на режиме экспоненциального роста

$$g(p) = M(t)[1 - (sv/p)^{(\gamma-\mu)/\mu}]. \tag{6.2}$$

Предположим, что рассматриваемый продукт является товаром первой необходимости [11], т. е. $C(p) = C$. Тогда, используя обозначения $x_n = sv/p_n$, $\alpha = (\gamma + \mu)/\mu$, $A = M/C$, получаем из (6.1), (6.2), что

$$x_n = Ax_{n-1}(1 - x_{n-1}^{\alpha}). \tag{6.3}$$

Естественно предполагать, что выполнено условие неубыточности наилучшей технологии $0 \leqslant x_n = sv/p_n \leqslant 1$. Для того чтобы отображение (6.3) переводило $x_{n-1} \in [0, 1]$ в $x_n \in [0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$0 \leqslant A \leqslant (1 - \alpha)^{(1+\alpha)/\alpha}\alpha = A_M(\alpha).$$

Отображение (6.3) определяет дискретную динамическую систему с отрицательным шварцианом (см. [43]). Равновесная цена

[11] Дополнительный анализ показывает, что это предположение не существенно для дальнейших качественных выводов.

p_r ($g(p_r) = C$) совпадает с неподвижной точкой динамической системы (6.1) и соответствует отличной от нуля неподвижной точке $x_r = (1 - A^{-1})^{1/\alpha}$ динамической системы (6.3), она существует при $A \geqslant 1$. При $A < A_1 = (\alpha + 2)/\alpha$ равновесная цена устойчива, при $A > A_1$ равновесная цена неустойчива. Численные эксперименты показывают, что при увеличении параметра A наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода $\{A_k\}$. Иначе говоря, при $A_{k-1} < A < A_k$ существует аттрактор периода 2^{k-1}, к которому сходятся траектории системы (4.3) при почти всех начальных условиях. При переходе через значение $A = A_k$ он теряет устойчивость и из него рождается аттрактор периода 2^k. График зависимости аттрактора от параметра образует дерево бифуркаций. Численные расчеты показывают, что ветви дерева бифуркаций быстро отдаляются друг от друга на существенное расстояние. Последовательность $\{A_k\}$ сходится к A_∞ как асимптотически геометрическая прогрессия со знаменателем $1/\delta$, где $\delta = 4.6692\ldots$ — универсальная постоянная Фейгенбаума (см. [43]). Поэтому значение A_∞ мало отличается от значений A_2 или A_3. Из результата М. Мисюревича следует, что динамическая система (6.3) при $A = A_M(\alpha)$ имеет стохастическое поведение (см. [43]).

Итак, при увеличении параметра A равновесная цена теряет устойчивость и затем возникает сложное (непрогнозируемое) поведение цены. Заметим, что увеличение $A = M/C$ означает увеличение отношения производственной мощности к суммарному спросу, с которым экономисты (см. [44]) связывают кризисы перепроизводства [12], сопровождающиеся «бурями» в изменении цен. Таким образом, последовательность бифуркационных значений $\{A_k\}$ характеризует запас устойчивости рыночных механизмов, причем в качестве меры устойчивости можно использовать A_∞. Это позволяет проанализировать, как влияют экономические характеристики агентов, связанных рынком, на его устойчивость.

Численные эксперименты показывают, что мера устойчивости рынка быстро уменьшается по гиперболической зависимости с ростом α, т. е. с ростом темпа экспоненциального роста производственных мощностей [13]. Это обстоятельство согласуется с известным экономистам явлением возникновения кризисов в «перегретой» экономике.

Функцию предложения (6.2) можно рассматривать как результат равновесного агрегирования описаний системы двух отраслей из разд. 5. Если связать отрасли рынком, аналогичным рынку конечного продукта, то, как показывают численные расчеты, устойчивость рыночных механизмов резко уменьшится. Причем на устойчивость рынка существенно влияют такие технологиче-

---

[12] Можно доказать, что на периодическом аттракторе системы (6.3) усредненное предложение превосходит спрос.

[13] По существу оказывается, что рынок неустойчив, если темп роста мощностей γ значительно превышает темп амортизации μ.

ские характеристики отраслей, как v_1/av_2, M_2/aM_1. Подобные исследования позволяют качественно проанализировать, какие отрасли могут быть связаны устойчивыми рыночными механизмами, а какие нет.

Можно высказать следующую гипотезу. В рыночной экономике разбиение производственной системы на отрасли определяется ее технологической структурой. Экономические кризисы вызывают перестройку этого разбиения в направлении повышения устойчивости рыночных механизмов.

Abstract

The aggregation problem is one of the fundamental problems of the system analysis of developed economics. The survey of the aggregation methods in economy is done and some unsolved problems are discussed in this paper.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1. 453 с.
2. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Избр. соч. М.: Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 31—152.
3. *Павловский Ю. Н.* Приближенная декомпозиция моделей управляемых процессов // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 265—280.
4. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 261 с.
5. *Горбань А. Н.* Обход равновесия: Уравнения хим. кинетики и их термодинам. анализ. Новосибирск: Наука, 1984. 226 с.
6. *Розоноэр Л. И.* Термодинамика необратимых процессов вдали от равновесия // Термодинамика и кинетика биологических процессов. М.: Наука, 1980. С. 169—186.
7. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 338 с.
8. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. М.: Прогресс, 1986. 432 с.
9. *Каратеодори К.* Об основах термодинамики // Развитие современной физики. М.: Наука, 1964. С. 193—222.
10. *Борн М.* Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики // Там же. С. 223—256.
11. *Шананин А. А.* Агрегирование конечных продуктов и проблема интегрируемости функций спроса. М.: ВЦ АН СССР. 1986. 66 с.
12. *Шананин А. А.* Условие интегрируемости в задаче об агрегировании конечных продуктов // ДАН СССР. 1987. Т. 294, № 3. С. 553—555.
13. *Strotz R. H.* The utility tree — a correction and further appraisal // Econometrica. 1959. Vol. 27, N 3. P. 482—488.
14. *Blackarby C., Primont D., Russell R.* Duality, separability and functional structure: Theory and economic applications. N. Y.: North-Holland, 1978. 395 p.
15. *Wong S.* The foundations of Paul Samuelson's revealed preference theory: A study by the method of rational reconstruction. L., 1978. 148 p.
16. Preferences, utility and demand / J. Chipman, L. Hurwicz, M. Richter, H. Sonneneschein. Harcourt, 1971. 510 p.
17. *Samuelson P.* The problem of integrability in utility theory // Economica. N. S. 1950. Vol. 17, N 68. P. 355—385.

18. *Samuelson P.* A note on the pure theory of consumer's behaviour // Ibid. 1938. Vol. 5, N 17. P. 61—71.
19. *Houthakker H. S.* Revealed preference and the utility function // Ibid. 1950. Vol. 17, N 66. P. 159—174.
20. *Kihlstrom R., Mas-Colell A., Sonneschein H.* The demand theory of the weak axiom of revealed preference // Econometrica. 1976. Vol. 44, N 5. P. 971—978.
21. *Afriat S. N.* The construction of utility functions from expenditure data // Intern. Econ. Rev. 1967. Vol. 8, N 1. P. 67—77.
22. *Шананин А. А.* К равновесной теории агрегирования. М.: ВЦ АН СССР, 1986. 40 с.
23. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 355 с.
24. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.
25. *Шананин А. А.* Об агрегации функций спроса // Экономика и мат. методы. 1989. Т. 25, № 6.
26. *Шананин А. А.* Агрегированное описание групп отраслей при помощи функции приведения разных конечных продуктов к однородному продукту // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 106—147.
27. *Данилов В. И., Сотсков А. И.* Рациональный выбор и выпуклые предпочтения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 2. С. 14—23.
28. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984. 392 с.
29. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: К теории производственных функций. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 2. С. 18—27.
30. *Houthakker H. S.* The Pareto distribution and the Cobb—Douglas production function in activity analysis // Rev. Econ. Stud. 1955/1956. Vol. 23 (1), N 60. P. 27—31.
31. *Johansen L.* Production functions. Amsterdam; L.: North-Holland, 1972. 274 p.
32. *Шананин А. А.* Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. № 12. С. 1799—1811.
33. *Hildenbrand W.* Short-run production functions based on microdata // Econometrica. 1981. Vol. 49, N 5. P. 1095—1125.
34. *Шананин А. А.* Исследование одного класса функций прибыли, возникающих при макроонисании экономических систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 1. С. 53—65.
35. *Оленев Н. Н., Петров А. А., Поспелов И. Г.* Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 46—59.
36. *Шананин А. А.* Системный анализ развивающейся экономики: К вопросу об агрегировании производственных функций и функций прибыли // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1981. № 4. С. 36—43.
37. *Дюкалов А. Н.* Некоторые задачи прикладной математической экономики. М.: Наука, 1983. 119 с.
38. *Хенкин Г. М., Шананин А. А.* Теоремы Бернштейна и преобразование Радона: Прил. в теории произв. функций // Проблемы кибернетики. М., 1989.
39. *Кондратьев Н. Д.* Большие циклы экономической конъюнктуры // Кондратьев Н. Д., Опарин Д. И. Большие циклы конъюнктуры: Докл. и их обсуждение в Ин-те экономики. М., 1928.
40. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка с посредником // Модели и методы в прогнозировании научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1984. Вып. 2. С 37—44.
41. *Поспелов И. Г.* Вариационный принцип в описании экономического по-

ведения // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 148—163.
42. *Шананин А. А.* О стохастическом поведении цены в одной детерминированной модели ценообразования // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 1. С. 63—65.
43. *Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 3. С. 3—37.
44. *Меньшиков С. М.* Инфляция и кризис регулирования экономики. М.: Мысль, 1979. 367 с.

УДК 519.86

ДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ НА РЫНКЕ

И. Г. Поспелов

1. Введение

Проблема создания, внедрения и отладки нового хозяйственного механизма в нашей стране ставит новую для математического моделирования экономики задачу — выяснить, насколько глубоко взаимосвязаны между собой отдельные элементы существующих в разных странах экономических механизмов. Для решения этой задачи надо научиться строить модели более фундаментальные, чем существуют сейчас. Такие модели должны не просто экстраполировать экономические закономерности, но объяснять причины их возникновения и указывать условия, в которых эти закономерности реализуются. Чтобы построить такие модели, надо исходить не из феноменологических закономерностей поведения людей в той или иной сложившейся экономической системе, а из небольшого числа ясных принципов, выражающих необходимые условия устойчивости и согласованности этой системы.

Мы считаем, что одним из них должно быть следующее условие, которое мы называем эволюционным принципом: цели экономических агентов [1] согласованы с их функцией в экономике таким образом, что, когда агент достигает своей цели, он одновременно обеспечивает максимальную устойчивость своего положения в качестве исполнителя данной функции. Такое согласование функций и интересов возникает в процессе отбора поведения экономических агентов экономической системой, который навязывает, воспитывает у агента интересы, соответствующие его функции (объективные интересы).

© И. Г. Поспелов, 1989

[1] Экономическими агентами мы называем отдельных лиц, коллективы или организации, которые выполняют определенную функцию в экономике и принимают конкретные хозяйственные решения, связанные с этой функцией.

Особенно естественным представляется применение эволюционного принципа к описанию рыночных экономических механизмов, поскольку на рынке есть явный и обезличенный механизм отбора поведения — ненужные, неумелые или неудачливые агенты разоряются и тем самым выбывают из системы. Некоторые модели рыночного обмена, построенные на основе эволюционного принципа, описаны в [1—4]. Настоящая работа продолжает этот цикл исследований, поэтому сначала дадим краткий обзор полученных результатов.

В [1—3] рассматривалась динамическая стохастическая модель деятельности торговца-перекупщика на рынке, где некоторый однородный продукт обменивается на деньги. Предполагалось, что торговец закупает продукт у производителей, накапливает запас его Q, а затем продает потребителям. Предполагалось также, что покупки и продажи продукта происходят в дискретные случайные (пуассоновские) моменты времени, причем в каждый из этих моментов торговец имеет дело с одним случайно выбранным внешним контрагентом — производителем или потребителем. Торговец может купить у этого производителя (продать потребителю) любое количество продукта, заплатив (получив) количество денег, определяемое фиксированной для каждого производителя (потребителя) и известной торговцу функцией предложения (спроса). Предполагалось, что все доходы и расходы торговца учитываются на едином счете в некотором идеализированном банке, причем в типичной ситуации остаток этого счета отрицателен, т. е. торговец должен банку. Процент на эту задолженность, исчисляемый по фиксированной ставке r, непрерывно добавляется к сумме долга. Если долг превысит некоторую заданную достаточно большую величину, то торговец считается разорившимся. Поведение (стратегия) торговца в описанной модели — это правило, по которому он определяет объемы покупок или продаж продукта у каждого из контрагентов в зависимости от текущих размеров запаса и задолженности.

В соответствии с рассмотренным выше эволюционным принципом объективным интересом торговца считается стремление избежать разорения. Это означает, что в качестве описания реального поведения торговца нужно рассматривать стратегию, минимизирующую вероятность его разорения. Оказывается что в рассматриваемой модели при достаточно малой величине нормы процента r указанная стратегия одновременно обеспечивает максимум ожидаемой дисконтированной прибыли торговца [2]. Таким образом эволюционный принцип позволяет объяснить стремление торговца к прибыли. Кроме того, оказывается, что оптимальное в указанном смысле поведение торговца приводит к установлению динамического равновесия на рынке, обладающего многими свойствами классического рыночного равновесия.

---

[2] Показателем дисконтирования служит норма процента r.

Важнейшую роль при анализе модели играет величина максимальной ожидаемой дисконтированной прибыли торговца $R(Q)$, рассматриваемая как функция от текущего запаса продукта Q (функция Беллмана). Эта вогнутая ограниченная неотрицательная функция выражает объективно складывающуюся на рынке денежную оценку товарных запасов торговца. Отдельные характеристики этой функции можно естественно истолковать как цену торговой фирмы, оборотные фонды, меновую стоимость товарных запасов и равновесную цену продукта. Функция R определяет и оптимальное поведение торговца. Если, например, торговец, имеющий запас Q, встречает потребителя с функцией спроса $V_i(v)$, то он должен продать ему партию товара

$$\hat{v}_i(Q) = \arg\max_{0 \leqslant v \leqslant Q} [V_i(v) + R(Q - v) - R(Q)]. \tag{1.1}$$

В [4] изучается аналогичная модель, отличающаяся тем, что торговцев не один, а много. При этом исследуется вопрос о существовании и свойствах эффективных (парето-оптимальных) относительно ожидаемой дисконтированной прибыли стратегий торговцев. Эта модель очень похожа на рассматриваемую ниже, поэтому мы опишем основные результаты [4] параллельно с изложением нового материала, посвященного исследованию вопроса о реализуемости эффективных стратегий торговцев.

2. Описание модели рынка

Представим себе группу $\mathfrak{S}$ собственников, располагающих запасами Q_i, $i \in \mathfrak{S}$, некоторого однородного продукта. Время от времени собственники получают возможность обменять друг у друга часть своего запаса продукта на деньги. Как и в [1—4], предполагается, что моменты возможных сделок для каждой пары собственников (i, j), $i, j \in \mathfrak{S}$ (сделок (i, j)), образуют пуассоновский поток с частотой λ_{ij}, причем для разных пар эти потоки независимы [3]. Если моменты всех сделок объединить в одну последовательность, то она тоже будет пуассоновским потоком с частотой $\Lambda = \sum_{i, j \in \mathfrak{S}} \lambda_{ij}$, причем если какая-то сделка произошла, то вероятность того, что это именно сделка (i, j) составляет $\alpha_{ij} = \lambda_{ij}/\Lambda$. Если $\lambda_{ij} + \lambda_{ji} = 0$, то это означает, что прямые обмены между i-м и j-м собственниками невозможны и они могут передавать продукт друг другу лишь косвенно, через посредничество других собственников.

Всюду ниже для описания сделок используются следующие обозначения: объем продукта, отданного k-м собственником в сделке (i, j), обозначается через w_{ij}^k, а сумма полученных им в этой

[3] Для удобства записи формул сделка (i, j) и сделка (j, i) считаются разными событиями, так что фактически средняя частота сделок между i-м и j-м собственниками составляет $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$.

сделке денег — через W_{ij}^{i}. Очевидно, что

$$w_{ij}^{i} = -w_{ij}^{j}; \quad w_{ij}^{k} = 0 \text{ при } k \neq i, j; -Q_j \leqslant w_{ij}^{i} \leqslant Q_i; \tag{2.1}$$

$$W_{ij}^{i} = -W_{ij}^{j}; \quad W_{ij}^{k} = 0 \text{ при } k \neq i, j. \tag{2.2}$$

Если W_{ij}^{i}, $w_{ij}^{i} < 0$, то это означает, что при обмене i-й собственник фактически получает продукт и платит деньги. Второе условие в (2.2) выражает предположение об отсутствии побочных платежей при сделках. В (2.1) Q_i, Q_j — запасы продукта у контрагентов непосредственно перед сделкой. В результате сделки (i, j) исходное распределение запасов $\mathbf{Q} \stackrel{\Delta}{=} \{Q_i, i \in \mathcal{S}\}$ превращается в новое

$$\mathbf{Q}' = \{Q_1, \ldots, Q_i - w_{ij}^{i}, \ldots, Q_j + w_{ij}^{i}, \ldots, Q_S\} = \mathbf{Q} - w_{ij}^{i}\mathbf{g}^{ij}, \tag{2.3}$$

где $S = |\mathcal{S}|$, а $\mathbf{g}^{ij}$ — вектор размерности S, у которого i-я компонента равна 1, j-я — —1, а все остальные 0.

Предполагается, что собственники разделяются на торговцев $\mathcal{N}$ и внешних контрагентов $\mathcal{T}$, $\mathcal{S} = \mathcal{N} + \mathcal{T}$. Поведение внешних контрагентов считается заданным и характеризуется функциями T^i денежной оценки своих запасов. Эти функции внешние контрагенты используют, чтобы соизмерять доходы и расходы от сделок с изменением запасов: i-й внешний контрагент согласен на обмен (W_{ij}^{i}, w_{ij}^{i}) тогда и только тогда, когда [4]

$$W_{ij}^{i} + T^i(\mathbf{Q} - w_{ij}^{i}\mathbf{g}^{ij}) - T^i(\mathbf{Q}) \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Кроме того, предполагается, что прямые сделки между внешними контрагентами невозможны ($\lambda_{ij} = 0$ при $i, j \in \mathcal{T}$), и их запасы изменяются только в результате сделок с торговцами. В этих сделках внешние контрагенты выполняют пассивную роль — принимают любое предложение о сделке, сделанное торговцем, если оно удовлетворяет (2.4).

Соотношение (2.4) показывает, что функцию $V_i^{(j,\mathbf{Q})}(w) \stackrel{\Delta}{=} \stackrel{\Delta}{=} T^i(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{ij}) - T^i(\mathbf{Q})$, $i \in \mathcal{T}$, $j \in \mathcal{N}$, можно рассматривать как функцию спроса (при $w < 0$) или предложения (при $w > 0$) продукта i-м внешним контрагентом в сделках с j-м торговцем, зависящую от текущего распределения запасов $\mathbf{Q}$ как от параметра. Зависимость функций спроса и предложения от запасов и номера торговца — это единственное отличие описываемой модели от модели, рассматривавшейся в [4], где функции спроса и аналогичные функции предложения задаются как в (1.1). Фактически эти две модели соответствуют двум противоположным предельным случаям динамики запаса внешних контрагентов: независимость функций спроса и предложения от запаса в [4] отвечает предположению, что в промежутке между сделками купленный внешними

[4] В общем случае мы допускаем, что T^i зависит не только от Q_i, но и от запасов других собственников.

контрагентами продукт полностью потребляется и исчезает из системы, а проданный — полностью воспроизводится. Принятые здесь предположения, напротив, означают, что внешние контрагенты в промежутках между сделками сохраняют весь купленный продукт и не восполняют проданный. Функции T^i в (2.4) подобны функции R в (1.1), поэтому, как мы увидим ниже, торговцы и внешние контрагенты в модели получают единообразное описание. Следует, впрочем, отметить, что это единообразие достигается

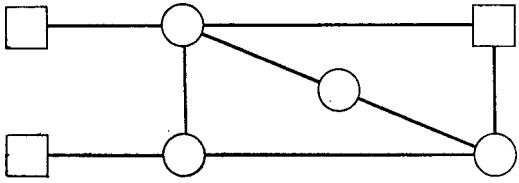


Рис. 1

дорогой ценой — в рассматриваемой модели суммарный запас продукта в системе остается неизменным и лишь перераспределяется между собственниками. Таким образом, мы имеем здесь дело не с открытой, как в [1—4], а с гораздо менее реалистичной замкнутой системой обменов, аналогичной классической модели «чистого обмена» [5]. Причины предпринятой здесь модификации модели обсудим в конце разд. 3, а сейчас займемся описанием поведения главных действующих лиц — торговцев.

Торговцы могут обменивать на деньги продукт как у внешних контрагентов, так и у других торговцев. Наглядно систему возможных обменов можно представить в виде графа, пример которого изображен на рис. 1. Кружки изображают торговцев, квадратики — внешних контрагентов, а дуги графа соединяют собственников, для которых $\lambda_{ij} + \lambda_{ji} > 0$. Торговцы заинтересованы в деньгах и продукт приобретают только для последующей продажи.

Мы рассуждаем следующим образом. Предположим, как и в [1—3], что торговцы покупают продукт в кредит. Возникающая в связи с этим возможность разорения и соответствующий процесс отбора поведения вырабатывает у торговцев цель избежать разорения. Трактуя несколько расширительно результаты, полученные в [1—3], будем считать, что адекватное выражение этой цели — стремление максимизировать ожидаемую дисконтированную прибыль:

$$m^i(t) = \mathbf{M} \sum_{t_n > t} e^{-r(t-t_n)} W^i(t_n). \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания, r — норма процента, t — текущий момент времени, t_n — моменты будущих сделок, W^i — случайные величины доходов от этих сделок:

$$W^i(t_n) = W^i_{ij}(t_n) \text{ с вероятностью } \alpha_{ij}. \tag{2.6}$$

Доходы $W_{ij}^{i}(t_n)$ от сделки (i, j), происшедшей в момент t_n, определяются соглашениями собственников. Соотношения (2.1), (2.4) показывают, что возможности сделок ограничены только наличными запасами продукта, поэтому естественно считать распределение этих запасов Q полным описанием состояния системы и описывать поведение собственников функциями $W_{ij}^{i}(\mathbf{Q})$, $w_{ij}^{i}(\mathbf{Q})$, удовлетворяющими (2.1), (2.2), (2.4). Содержательно такие функции выражают условные соглашения между собственниками произвести обмен $(W_{ij}^{i}(\mathbf{Q}), w_{ij}^{i}(\mathbf{Q}))$, если к моменту сделки (i, j) сложится распределение запасов Q. Такие соглашения подразумевают возможность получить в любой момент полную информацию о состоянии системы. Вопрос, насколько необходима фактически такая информация,— один из центральных в настоящей работе, он будет подробно обсуждаться ниже.

Итак, будем считать допустимыми стратегиями торговцев наборы $\Omega = \{W_{ij}^{i}(\cdot), w_{ij}^{i}(\cdot)\}$ ограниченных борелевских функций от Q, определенных на положительном ортанте $\mathbf{R}_{+}^{S}$ S-мерного линейного пространства и удовлетворяющих условиям (2.1), (2.2), (2.4). Если задана некоторая допустимая стратегия Ω, то, как легко показать (см. [3]), последовательность состояний системы перед сделками $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}(t_n - 0)$ образует дискретный марковский процесс (см. (2.3))

$$\mathbf{Q}_{n+1} = \mathbf{Q}_n - w_{ij}^{i}(\mathbf{Q}_n)\,\mathfrak{g}^{ij} \text{ с вероятностью } \alpha_{ij}, \tag{2.7}$$

который с вероятностью 1 будет продолжаться неограниченно долго. Ряд (2.5), (2.6) для этого процесса определен и сходится с вероятностью 1. В силу свойств пуассоновского процесса сумма этого ряда m^i не будет зависеть явно от времени: $m^i(t) = m_{\Omega}^{i}(\mathbf{Q}(t))$, причем функция $m_{\Omega}^{i}(\cdot)$ ограничена и удовлетворяет уравнению (см. [4]):

$$m_{\Omega}^{i}(\mathbf{Q}) = (\hat{T}_{\Omega} m_{\Omega}^{i})(\mathbf{Q}) \triangleq$$
$$\triangleq \frac{1}{1+\rho}\left\{\sum_{k\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{S}}\alpha_{kj}\left[m_{\Omega}^{i}(\mathbf{Q} - \mathfrak{g}^{kj} w_{kj}^{i}(\mathbf{Q})) + W_{kj}^{i}(\mathbf{Q})\right]\right\}, \tag{2.8}$$

где $\rho = r/\Lambda$. Внешнее суммирование в правой части не распространяется на внешних контрагентов, поскольку мы исключили прямые обмены между ними. Оператор $\hat{T}_{\Omega}$ в правой части (2.8) обладает следующими двумя легко доказываемыми свойствами.

Лемма 2.1. *Оператор $\hat{T}_{\Omega}$ сжимает полное пространство* B *ограниченных борелевских функций над* $\mathbf{R}_{+}^{S}$. *Если* Ω_1, Ω_2 — *две допустимые стратегии, а функции* b_1, $b_2 \in \mathbf{B}$, *такие, что*

$$b_1 = \hat{T}_{\Omega_1} b_1; \quad b_2 = \hat{T}_{\Omega_2} b_2; \quad (\forall \mathbf{Q} \in \mathbf{R}_{+}^{S}) \;\; \hat{T}_{\Omega_1} b_1 \gtreqless \hat{T}_{\Omega_2} b_1, \tag{2.9}$$

то

$$(\forall Q \in \mathbf{R}^S_+)\ b_1(Q) \gtreqless b_2(Q). \tag{2.10}$$

Из леммы 2.1 вытекает, что уравнение (2.8) имеет единственное решение в B, которое и задает ожидаемую дисконтированную прибыль i-го торговца при стратегии Ω.

Итак, каждый торговец стремится увеличить свою дисконтированную прибыль, но решения о сделках с другим торговцем он вынужден принимать совместно с ним, поскольку в сделке, рассматриваемой как единая операция (нерасчлененная на последовательность предложений и контрпредложений, из которых складывается торг), невозможно выделить индивидуальные управления контрагентов. В теории игр такие ситуации называются кооперативными играми, и опыт их исследования (см., например, [6]) показывает, что в этих играх нет объективно выделенного «наилучшего» решения, подобного, скажем, седловой точке антагонистической игры. С нашей точки зрения это означает, что в ситуациях типа торга существенную роль играет индивидуальность участников. Поэтому, если мы хотим извлекать из моделей поведения объективные, не зависящие от индивидуальности экономические закономерности, то следует рассматривать целые классы разумных решений и не нужно стремиться получить однозначный прогноз поведения. Иными словами, экономические законы должны указывать в первую очередь, чего не может быть в обществе, допуская любые возможности в рамках этих «запретов».

Для рассматриваемой модели подходящим классом решений представляется класс $\mathcal{P}$ эффективных стратегий. Допустимую стратегию $\hat{\Omega}$ будем называть *эффективной* (парето-оптимальной), если для любой другой допустимой стратегии Ω найдется торговец i и состояние Q, такие, что $m^i_{\hat{\Omega}}(Q) < m^i_{\Omega}(Q)$.

В рассматриваемой модели при естественных ограничениях эффективные стратегии — это стратегии $\hat{\Omega}$, максимизирующие суммарную дисконтированную прибыль торговцев $m^{\mathcal{N}}_{\Omega} \triangleq \sum_{i \in \mathcal{N}} m^i_{\Omega}$:

$$m^{\mathcal{N}}_{\hat{\Omega}}(Q) = R(Q) \triangleq \sup_{\Omega} m^{\mathcal{N}}_{\Omega}(Q). \tag{2.11}$$

Теорема 2.2. *Пусть функции* T^i, $i \in \mathcal{T}$ (*см.* (2.4)), *вогнуты и ограничены на* $\mathbf{R}^S_+$, *а граф допустимых обменов между торговцами гамильтонов* [5], *тогда*:

I. *Максимальная величина суммарной дисконтированной прибыли* $R(Q)$ — *вогнутая ограниченная функция на* $\mathbf{R}^S_+$, *которая*

---

[5] Это означает, что торговцев можно занумеровать так, чтобы $\lambda_{i,\,i+1} > 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, |\mathcal{N}| - 1$ (см. [7, с. 7—17]). При выполнении этого условия все пары собственников оказываются связанными цепочками возможных обменов.

может быть найдена методом итераций из уравнения Беллмана:

$$R(\mathbf{Q}) = \frac{1}{1+\rho} \sum_{k \in \mathcal{N}^\circ} \Big\{ \sum_{j \in \mathcal{N}^\circ} \alpha_{kj} \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_k} R(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{kj}) +$$

$$+ \sum_{j \in \mathcal{T}} \alpha_{kj} \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_k} [R(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{kj}) + T^j(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{kj}) - T^j(\mathbf{Q})]. \tag{2.12}$$

II. *Допустимые стратегии* $\widehat{\Omega} = \{\widehat{W}^i_{ij},\ \widehat{w}^i_{ij}\}$, *удовлетворяющие* (2.11), *существуют и имеют вид*

$$\widehat{w}^i_{ij}(\mathbf{Q}) = \arg\max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_i} [R(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{ij}) + T^j(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{ij})], \quad j \in \mathcal{T}, \tag{2.13}$$

$$\widehat{w}^i_{ij}(\mathbf{Q}) = \arg\max_{-Q_j \leqslant \alpha \leqslant Q_i} R(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{ij}), \quad j \in \mathcal{N}, \tag{2.14}$$

$$\widehat{W}^i_{ij}(\mathbf{Q}) = T^j(\mathbf{Q} - \widehat{w}^i_{ij}(\mathbf{Q})\mathbf{g}^{ij}) - T^j(\mathbf{Q}), \tag{2.15}$$

$\widehat{W}^i_{ij}(\cdot)$ — *любые функции из* $\mathbf{B}$, *удовлетворяющие* (2.2), $j \in \mathcal{N}$.

III. *Эффективны стратегии вида* (2.14)—(2.16) *и только они.*

IV. *Для любого набора функций* $\{f_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, *таких, что* $\sum_{i \in \mathcal{N}^\circ} f_i \equiv R(\mathbf{Q})$, *найдется стратегия* $\widehat{\Omega} \in \mathcal{P}$, *такая, что* $f_i \equiv m^i_{\widehat{\Omega}}$.

Ниже будем считать условия теоремы 2.2 выполненными, а доказывается она так же, как аналогичная теорема в [4]. Из (2.14)—(2.16) видно, что эффективные стратегии отличаются друг от друга только взаимными платежами торговцев — потоки продукта определяются однозначно. Функция $R(\mathbf{Q})$ играет ту же роль, что и функция $R(\mathbf{Q})$ в модели с одним торговцем (см. (1.1)), но не имеет столь простого экономического смысла. В [4], однако, показано, что в случае, когда функции спроса и предложения внешних контрагентов не зависят от $\mathbf{Q}$, а процент достаточно мал (в (2.12) $\rho \ll 1$), в (2.14)—(2.16) функцию $R(\mathbf{Q})$ можно приближенно заменить функцией $R_0\left(\sum_{i \in \mathcal{N}^\circ} Q_i\right)$, которая удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению Беллмана в модели с одним торговцем. Таким образом, оказывается, что в первом приближении все эффективные стратегии регулируют проходящий через систему торговцев поток продуктов так же, как стратегия одного торговца, стремящегося избежать разорения. Это очень интересный результат, который оправдывает модель с одним торговцем, дает пример агрегирования целого класса поведений и показывает, как проявляются экономические категории при укрупнении описания экономической системы. В свете этого результата эффективные стратегии представляются естественным с экономической точки зрения описанием коллективного поведения торговца на рынке. Однако возникает вопрос, могут ли самостоятельные независимые торговцы найти и поддерживать коллективное эффективное поведение? Изучение этого вопроса составляет предмет настоящей работы.

3. Реализуемость эффективных стратегий: автономные стратегии

Вряд ли можно дать общее формальное определение реализуемости коллективной стратегии поведения. Однако, как бы мы ни подходили к вопросу о реализуемости, важную роль в его решении играет свойство устойчивости стратегии [6]. В рассматриваемой модели стратегия — это, по существу, договор между всеми торговцами, который реализуется не совместными действиями, а парными сделками. Такой договор будет устойчивым, если он не противоречит личным интересам участников сделки.

Второй важный аспект реализуемости — информационная сложность стратегии. Устойчивая и эффективная стратегия может оказаться нереализуемой просто потому, что требует слишком детальной информации о состоянии всей системы, а такую информацию отдельный агент просто не в силах собрать и обработать. К этому вопросу вернемся позже, а сейчас займемся устойчивостью и прежде всего проанализируем с этой точки зрения сделки торговца с внешним контрагентом.

Пусть стратегия Ω обеспечивает торговцу $i \in \mathcal{N}$ ожидаемую дисконтированную прибыль $m^i_\Omega(\mathbf{Q})$ и в сделке с внешним контрагентом $j \in \mathcal{T}$ диктует торговцу обмены $(W^i_{ij}(\mathbf{Q}), w^i_{ij}(\mathbf{Q}))$. Предположим, что торговец нарушит это требование и сменит функции $W^i_{ij}(\mathbf{Q})$, $w^i_{ij}(\mathbf{Q})$ на другие $\widetilde{W}^i_{ij}(\mathbf{Q})$, $\widetilde{w}^i_{ij}(Q)$. Если все остальные сделки будут заключаться в соответствии со стратегией Ω и окажется, что для всех $\mathbf{Q}$

$$m^I_\Omega(\mathbf{Q} - \widetilde{w}^i_{ij}(\mathbf{Q})\,\mathbf{g}^{ij}) + \widetilde{W}^i_{ij}(\mathbf{Q}) \geqslant m^i_\Omega(\mathbf{Q} - w^i_{ij}(\mathbf{Q})\,\mathbf{g}^{ij}) + W^j_{ij}(\mathbf{Q}),$$

то в силу (2.8) и леммы 2.1 ожидаемая дисконтированная прибыль торговца возрастет при нарушении договора Ω. В силу (2.4), (2.2) максимально возможное значение W^i_{ij} составляет $T^j(\mathbf{Q} - w^i_{ij}g^{ij}) - T^j(\mathbf{Q})$, поэтому стратегия Ω будет устойчивой относительно сделки (i, j), $j \in \mathcal{T}$, если

$$\Delta^{ij}_\Omega m^i_\Omega + \Delta^{ij}_\Omega T^j = \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_i} (\Delta^{ij}_w m^i_\Omega + \Delta^{ij}_w T^j), \qquad j \in \mathcal{T}, \tag{3.1}$$

$$W^i_{ij} = \Delta^{ij}_\Omega T^j, \qquad i \in \mathcal{N},\ j \in \mathcal{T}. \tag{3.2}$$

Здесь и ниже для функции $F \in \mathbf{B}$

$$\Delta^{ij}_w F \triangleq F(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{ij}) - F(\mathbf{Q});\ \Delta^{ij}_\Omega F \triangleq F(\mathbf{Q} - w^i_{ij}(\mathbf{Q})\,\mathbf{g}^{ij}) - F(\mathbf{Q}).$$

Теперь обратимся к сделке (i, j) между торговцами $i, j \in \mathcal{N}$. Исходя из (2.8) и леммы 2.1, нетрудно показать, что если все остальные сделки заключаются в соответствии со стратегией Ω, то обмены $\widetilde{W}^i_{ij}(\mathbf{Q})$, $\widetilde{w}^i_{ij}(Q)$, удовлетворяющие условию

$$m^i_\Omega(\mathbf{Q} - \widetilde{w}^i_{ij}(\mathbf{Q})\,\mathbf{g}^{ij}) + m^j_\Omega(\mathbf{Q} - \widetilde{w}^i_{ij}(\mathbf{Q})\,\mathbf{g}^{ij}) >$$
$$> m^i_\Omega(\mathbf{Q} - w^i_{ij}(\mathbf{Q})\,\mathbf{g}^{ij}) + m^j_\Omega(\mathbf{Q} - w^i_{ij}(\mathbf{Q})\,\mathbf{g}^{ij}),$$

обеспечивают торговцам i и j бо́льшую сумму ожидаемых дисконтированных прибылей, чем стратегия Ω. Дополнительную суммарную прибыль торговцы могут разделить между собой любым способом, выбирая подходящее правило взаимных платежей [6] $W^i_{ij} = -W^j_{ji}$. Поэтому для устойчивости стратегии Ω в сделке (i, j) необходимо, чтобы

$$\Delta^{ij}_{\Omega} m^i_{\Omega} + \Delta^{ij}_{\Omega} m^j_{\Omega} = \max_{-Q_j \leq w \leq Q_i} [\Delta^{ij}_w m^i_{\Omega} + \Delta^{ij}_w m^j_{\Omega}], \quad i, j \in \mathcal{N}. \tag{3.3}$$

Однако этим условия устойчивости не исчерпываются. Один торговец не может навязать другому условия сделки, но он всегда может от сделки отказаться. Это означает, что i-й торговец может заменить обмен $(W^i_{ij}(\mathbf{Q}), w^i_{ij}(\mathbf{Q}))$ на обмен $(0, 0)$ при любых j и $\mathbf{Q}$. Опять-таки из (2.8) и леммы 2.1 заключаем, что отказ от обмена $(W^i_{ij}(\mathbf{Q}), w^i_{ij}(\mathbf{Q}))$ торговцу невыгоден, если $m^i_{\Omega}(\mathbf{Q} - w^i_{ij}(\mathbf{Q})\, g^{ij}) + W^i_{ij}(\mathbf{Q}) > m^i_{\Omega}(Q)$. Записывая симметричное условие для $W^j_{ij}(\mathbf{Q}) = -W^i_{ij}(\mathbf{Q})$, приходим к соотношению

$$W^i_{ij} = -\varkappa^j_{ij} \Delta^{ij}_{\Omega} m^i_{\Omega} + \varkappa^i_{ij} \Delta^{ij}_{\Omega} m^j_{\Omega}, \quad i, j \in \mathcal{N}, \tag{3.4}$$

где $\varkappa^i_{ij}(\cdot)$, $\varkappa^i_{ij}(\cdot)$ — произвольные функции из $\mathbf{B}$, такие, что

$$\varkappa^j_{ij}(\mathbf{Q}), \quad \varkappa^i_{ij}(\mathbf{Q}) \in [0, 1], \quad \varkappa^i_{ij}(\mathbf{Q}) + \varkappa^j_{ij}(\mathbf{Q}) \equiv 1. \tag{3.5}$$

Будем называть *устойчивыми* допустимые стратегии, удовлетворяющие (3.1)—(3.5). На языке теории игр условия (3.3), (3.4) означают, что обмены $(W^i_{ij}(\mathbf{Q}), w^i_{ij}(\mathbf{Q}))$ при устойчивости стратегии Ω должны при каждом $\mathbf{Q}$ попадать в так называемое «переговорное» множество [6] игры торговцев i и j с функциями полезности $U^i(w) = \Delta^{ij}_w m^i_{\Omega}$, $U^j(w) = \Delta^{ij}_w m^j_{\Omega}$, зависящими от состояния $\mathbf{Q}$ как от параметра. Иными словами, условие устойчивости эквивалентно тому, что торговец оценивает свой запас продукта суммой денег m^i_{Ω}, так же как оценивает свой запас суммой денег T^i внешний контрагент. Таким образом, при изучении устойчивых стратегий мы имеем для торговца и внешнего контрагента однородное описание.

Подставляя (3.1)—(3.5) в (2.8), после несложных преобразований получаем следующие условия, которым должны удовлетворять функции m^i_{Ω} при устойчивой стратегии:

$$\begin{aligned} \rho m^i_{\Omega} = {} & \sum_{j \in \mathcal{N}} \alpha_{ij} \varkappa^i_{ij} \max_{-Q_j \leq w \leq Q_i} (\Delta^{ij}_w m^i_{\Omega} + \Delta^{ij}_w m^j_{\Omega}) + \\ & + \sum_{j \in \mathcal{N}} \alpha_{ji} \varkappa^i_{ji} \max_{-Q_i \leq w \leq Q_j} (\Delta^{ji}_w m^i_{\Omega} + \Delta^{ji}_w m^j_{\Omega}) + \\ & + \sum_{j \in \mathcal{T}} \alpha_{ij} \max_{-Q_j \leq w \leq Q_i} (\Delta^{ij}_w m^i_{\Omega} + \Delta^{ij}_w T^j) + \sum_{k \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{N} \\ k, j \neq i}} \alpha_{kj} \Delta^{kj}_{\Omega} m^i_{\Omega}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

---

[6] Этот факт доказывается так же, как утверждение IV теоремы 2.1.

Вопрос о существовании устойчивых стратегий в общем случае остается открытым. Мы сосредоточим свое внимание на одном специальном классе стратегий, для которого условия эффективности и устойчивости оказываются тесно связанными между собой[7]. Назовем допустимую стратегию *автономной*, если ожидаемая дисконтированная прибыль торговца не зависит от обменов, в которых этот торговец не участвует:

$$\Delta_w^{ij} m_\Omega^k = 0 \quad \text{при всех} \quad \mathbf{Q} \in \mathbf{R}_+^S, \quad w \in [-Q_j, Q_i],$$
$$\text{для } i, j \in \mathcal{S}, k \in \mathcal{N}, \text{ таких, что } i, j \neq k \text{ и } \alpha_i > 0. \tag{3.7}$$

Теорема 3.1. I. *Если стратегия* Ω *автономна и устойчива, то она эффективна.*

II. *Если стратегия* Ω *автономна и эффективна, то выполнены условия устойчивости* (3.1)—(3.3).

Доказательство. Если выполнено (3.7), то последняя сумма в (3.6) исчезает, а для суммарной прибыли $m_\Omega^{\mathcal{N}}$ имеем

$$\Delta_w^{ij} m_\Omega^{\mathcal{N}} = \Delta_w^{ij} m_\Omega^i + \Delta_w^{ij} m_\Omega^j. \tag{3.8}$$

В силу этого суммирование уравнений (3.6) по $i \in \mathcal{N}$ с учетом (3.5) дает для $m_\Omega^{\mathcal{N}}$ уравнение, эквивалентное (2.12). По теореме 2.2 отсюда следует I. Если стратегия автономна и эффективна, то из (2.11), (2.14), (3.8) следует (3.3), из (2.11), (2.12), (3.8) — (3.1), а из (2.15) — (3.2).

Заметим теперь, что если m_Ω^i не зависит от результатов сделки (j, k) в смысле (3.7), то $m_\Omega^i(Q_1, \ldots, Q_j, \ldots, Q_k, \ldots, Q_S) \equiv m_\Omega^i(Q_1, \ldots, Q_j + Q_k, \ldots, 0, \ldots, Q_S)$, т. е. функция m_Ω^i (а с ней, в силу (3.3), при устойчивой стратегии Ω и функции w_{ij}^i) зависит не от переменных Q_j, Q_k по отдельности, а лишь от их суммы. Таким образом, автономная устойчивая стратегия для своей реализации требует лишь агрегированной информации о состоянии системы Q.

Итак, автономные устойчивые стратегии (если они есть) образуют подмножество эффективных стратегий, удовлетворяющих обоим условиям реализуемости, указанным в начале раздела, поэтому представляется интересным выяснить, существуют ли такие стратегии? Исследование с этой точки зрения модели, предложенной в [4], показывает, что в ней устойчивых автономных стратегий нет, причем нарушается (хотя и в некотором смысле слабо) аналог требования (3.1) устойчивости стратегии относительно сделок с внешним контрагентом. Именно поэтому здесь по сравнению с [4] изменено описание поведения внешних контрагентов.

Из (3.7) видно, что ответ на вопрос о существовании автономных устойчивых стратегий в рассматриваемой модели зависит от конфигурации графа возможных обменов между торговцами — чем

[7] Такая связь a priori неожиданна. Как правило, в игровых ситуациях требования устойчивости и эффективности противоречат друг другу [6].

больше связей (т. е. пар (i, j), для которых $\alpha_{ij} > 0$), тем больше ограничений на m_Ω^i налагает условие (3.7). Поэтому мы начнем с исследования линейной цепочки обменов — гамильтонова графа с минимальным числом дуг.

4. Автономные стратегии на монопольном рынке

Рассмотрим рынок (рис. 2), на котором два внешних контрагента ($\mathcal{T} = \{0, N+1\}$) связаны цепочкой торговцев $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$

$$\alpha_{k,k+1} = \nu_k > 0 \text{ при } k = 0, 1, \ldots, N, \tag{4.1}$$

$$\alpha_{ij} = 0 \text{ при } j \neq i+1.$$

Такой рынок естественно назвать монопольным, так как на нем каждый торговец полностью контролирует поток продуктов между внешними контрагентами. При некоторых естественных ограничениях на вид функций T^0, T^{N+1}, описывающих поведение внешних контрагентов, автономные устойчивые стратегии на монопольном

Рис. 2

рынке существуют. Доказательство этого факта распадается на несколько этапов. Окончательный результат приведен в конце раздела. Хочется обратить внимание читателя на своеобразные математические задачи, возникающие в процессе доказательства.

Мы используем обозначения:

$$\sigma_k^j \triangleq \sum_{i=k}^{j} Q_i, \ \sigma_k^j = 0 \ \text{ при } \ j < k, \sigma_k^j + \sigma_{j+1}^m \equiv \sigma_k^m, \tag{4.2}$$

$$\hat{\theta}^k F \triangleq \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_i} F(\mathbf{Q} - wg^{k,k+1}) \text{ для } F \in \mathbf{B} \tag{4.3}$$

и следующий легко доказываемый факт:

Лемма 4.1. *Функция m_Ω^k удовлетворяет условию автономности* (3.7) *для монопольного рынка* (4.1) *тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$m_\Omega^k(\mathbf{Q}) = \psi(\sigma_0^{k-1}, Q_k, \sigma_{k+1}^{N+1}). \tag{4.4}$$

Как мы уже отмечали выше, при отыскании устойчивых стратегий мы имеем единообразное описание интересов торговца и внешнего контрагента. Естественно сохранить это единообразие и при отыскании автономных стратегий, т. е. считать, что зависимость функций T^0, T^{N+1} от $\mathbf{Q}$ подобна (4.4). По этой причине всюду ниже мы полагаем, что

$$T^0 = T^0(Q_0, \sigma_1^{N+1}), \quad T^{N+1} = T^{N+1}(\sigma_0^N, Q_{N+1}). \tag{4.5}$$

Если устойчивая автономная стратегия Ω_a существует, то по Лемме 4.1 функция

$$G \triangleq \sum_{i=1}^{N} m^i_{\Omega_a} + T^0 + T^{N+1} \tag{4.6}$$

должна иметь вид

$$G = \sum_{k=1}^{N} \psi_k (\sigma_0^{k-1}, Q_k, \sigma_{k+1}^{N+1}). \tag{4.7}$$

С другой стороны, по теоремам 2.2, 3.1 функция $R = G - T^0 - T^{N+1}$ должна удовлетворять уравнению (2.12). Из этого уравнения с учетом (4.1), (4.3) получаем уравнение для G

$$G = \hat{A}G \triangleq \frac{1}{1+\rho}\left[\sum_{k=1}^{N} \nu_k \hat{\theta}^k G + \rho (T^0 + T^{N+1})\right]. \tag{4.8}$$

Оказывается, что требование совместности (4.7) и (4.8) еще более упрощает возможный вид функции G и приводит к необходимым и достаточным условиям существования автономных устойчивых стратегий.

Теорема 4.2. I. *Если функция вида* (4.7) *удовлетворяет уравнению* (4.8), *то*

$$G(\mathbf{Q}) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k (\sigma_0^k, \sigma_{k+1}^{N+1}). \tag{4.9}$$

II. *Если решение уравнения* (4.8) *представимо в виде* (4.9) *через непрерывные ограниченные на* $\mathbf{R}_+^{N+2}$ *функции* φ_k, *то существует устойчивая автономная стратегия* Ω_a *и функции* $m^i_{\Omega_a}$ *непрерывны.*

Доказательство этой теоремы довольно сложно, и за недостатком места мы вынуждены ограничиться лишь изложением его краткой схемы. Для доказательства I надо подставить в (4.8) последовательно $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(k)} \triangleq (0, \ldots, 0, x, \underset{k}{y}, z, 0, \ldots, 0)$, в левых частях представить G в виде (4.9) и учесть, что $(\hat{\theta}^{k-1}G)(\mathbf{Q}^{(k)}) = f^{(k)}(x+y, z)$, $(\hat{\theta}^k G)(\mathbf{Q}^{(k)}) = g^{(k)}(x, y+z)$. Тогда для функций ψ^k получатся соотношения, из которых следует, что каждая из этих функций имеет вид (4.9). Для доказательства II надо найти функции $m^i_{\Omega_a}$, удовлетворяющие (2.8), (3.1)—(3.5), (3.7). Функции $m^i_{\Omega_a}$ ищем в виде [8]

$$m^i_{\Omega_a} = \varphi^{i-1} + \xi^i (\sigma_0^i, \sigma_{i+1}^{N+1}) - \xi^{i-1} (\sigma_0^{i-1}, \sigma_i^{N+1}), \tag{4.10}$$

где $\xi^0 = T^0$, $\xi^N = T^{N+1}$, а остальные $\xi^i(\cdot, \cdot)$ — пока неизвестные непрерывные функции. При любых ξ^i функции (4.10) при условии

[8] Опираясь на приводимую ниже лемму 4.3, можно показать, что формула (4.10) задает общий вид распределения ожидаемой дисконтированной прибыли между торговцами при автономной устойчивости стратегии.

(4.1) удовлетворяют (3.7). По $m^i_{\Omega_a}$ из (3.1), (3.3) определяются значения w^i_{ij}, затем из (2.8) W^i_{ij} и, наконец, из (3.4) $\varkappa^i_{ij}$. При этом автоматически выполняется (3.2) и второе условие в (3.5). Самое трудное — доказать, исходя из (4.7), что выбором ξ^i можно удовлетворить первое условие в (3.5).

Теорема 4.2 сводит вопрос о существовании автономных устойчивых стратегий на монопольном рынке к вопросу о возможности представить решение уравнения (4.8) в виде (4.9). Оказывается, что функция Φ: $\mathbf{R}^{N+2}_+ \to \mathbf{R}^1$ разлагается в сумму вида (4.9) тогда и только тогда, когда она определенным образом выражается через свои значения на границе $\mathbf{R}^{N+2}_+$. Например, при $N = 1$

$$\Phi(Q_0, Q_1, Q_2) \equiv \Phi(Q_0, Q_1 + Q_2, 0) + \Phi(0, Q_0 + Q_1, Q_2) - \Phi(Q_0 + Q_1 + Q_2, 0, 0) - \Phi(0, Q_0 + Q_1 + Q_2, 0).$$

Лемма 4.3. I. *Функция* Φ: $\mathbf{R}^{N+2}_+ \to \mathbf{R}^1$ *представима в виде*

$$\Phi(\mathbf{Q}) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(\sigma_0^k, \sigma_{k+1}^{N+1}) \tag{4.11}$$

тогда и только тогда, когда

$$\Phi \equiv \hat{\Gamma}\Phi \triangleq \sum_{k=0}^{N} \Phi(\sigma_0^k \mathbf{e}^k + \sigma_{k+1}^{N+1} \mathbf{e}^{k+1}) - \sum_{k=0}^{N} \Phi(\sigma_0^{N+1} \mathbf{e}^k), \tag{4.12}$$

где $\mathbf{e}^k$ — *единичные векторы пространства* $\mathbf{R}^{N+2}$.

II. *Функции* φ_k *из* (4.11) *выражаются через* Φ *в виде*

$$\varphi_k(u, v) = \Phi(u\mathbf{e}^k + v\mathbf{e}^{k+1}) - \Phi((u + v)\mathbf{e}^k) + c_k(u + v), \tag{4.13}$$

где c_k — *произвольные функции, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{k=0}^{N} c_k(x) = \Phi(x, 0, \ldots, 0). \tag{4.14}$$

III. *Если* Φ *непрерывна, то* φ_k *можно выбрать непрерывными.*

Доказательство. Из (4.12) очевидно следует (4.11). С другой стороны, при $Q = u\mathbf{e}^k + v\mathbf{e}^{k+1}$ из (4.11) получаем

$$\varphi_k(u, v) = \Phi(u\mathbf{e}^k + v\mathbf{e}^{k+1}) - \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_i(0, u + v) - \sum_{i=k+1}^{N} \varphi_i(u + v, 0). \tag{4.15}$$

Полагая в этом тождестве сначала $u = 0$, $v = x$, а потом $u = x$, $v = 0$ и вычитая получившиеся равенства, находим, что $\varphi_k(0, x) = \varphi_k(x, 0) + \Phi(x\mathbf{e}^{k+1}) - \Phi(x\mathbf{e}^u)$. Подставляя эти выражения в (4.15), получаем

$$\varphi_k(u, v) = \Phi(u\mathbf{e}^k + v\mathbf{e}^{k+1}) + \varphi_k(u + v, 0) + \Phi((u + v)\mathbf{e}^0) - \Phi((u + v)\mathbf{e}^k) - \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(u + v, 0). \tag{4.16}$$

Кроме того, из (4.11) при $Q = ue^0$ получаем

$$\Phi(xe^0) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x, 0). \tag{4.17}$$

Подставляя (4.16) в (4.11) и учитывая (4.17), получим (4.12). Тем самым I доказано. Докажем II. Из (4.16), (4.17) следует, что φ_k имеют вид (4.13), (4.14). С другой стороны, если подставить (4.13) в (4.11) и учесть (4.14), (4.17), то получится тождество. III получается из (4.13), (4.14), если взять

$$c_0(x) = \Phi(xe^0), \quad c_1 = \ldots = c_N = 0.$$

Вернемся к уравнению (4.8). По теореме 2.2 его можно решать итерациями, поэтому его решение имеет вид (4.9), если оператор, стоящий в правой части этого уравнения, сохраняет представление (4.9) для некоторого класса функций. Неожиданно таким классом оказываются функции, унимодальные на симплексах.

Лемма 4. 4. *Пусть* φ: $R^{N+2} \to \mathbf{R}^1$ *имеет вид* $\varphi = f(\sigma_0^k, \sigma_{k+1}^{N+1})$ *и функция* $h(a) \stackrel{\Delta}{=} f(a, x - a)$ *унимодальна при всех* $x \geqslant 0$ *в том смысле, что все ее локальные максимумы по* a *на отрезке* $[0, x]$ *одинаковы по величине. Тогда*

$$\hat{\Gamma}\hat{\theta}^k\varphi \equiv \hat{\theta}^k\varphi. \tag{4.18}$$

Операторы $\hat{\Gamma}$, $\hat{\theta}^k$ *определены в* (4.12), (4.3).

Доказательство. Для доказательства удобно обозначить

$$\|A, B\| \stackrel{\Delta}{=} \max_{A \leqslant a \leqslant B} h(a). \tag{4.19}$$

В частности, заменяя переменную максимизации в (4.3), получаем

$$\hat{\theta}^k\varphi = \|\sigma_0^{k-1}, \ \sigma_0^{k+1}\|. \tag{4.20}$$

Поэтому из (4.12) имеем (δ_{ij} — символ Кронекера):

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}\hat{\theta}^k\varphi = &\sum_{j=0}^{N} \Big\| \sum_{i=0}^{k-1} (\delta_{ij}\sigma_0^j + \delta_{i,j+1}\sigma_0^{N+1}), \quad \sum_{i=0}^{k+1} (\delta_{ij}\sigma_0^j + \delta_{i,j+1}\sigma_0^{N+1}) \Big\| - \\
&- \sum_{j=0}^{N} \Big\| \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{ij}\sigma_0^{N+1}, \quad \sum_{i=0}^{k+1} \delta_{ij}\sigma_0^{N+1} \Big\| = \\
&= \sum_{j=0}^{k-2} \|\sigma_0^j + \sigma_{j+1}^{N+1}, \quad \sigma_0^j + \sigma_{j+1}^{N+1}\| + \|\sigma_0^{k-1}, \quad \sigma_0^{k-1} + \sigma_k^{N+1}\| + \\
&+ \|0, \quad \sigma_0^k + \sigma_{k+1}^{N+1}\| + \|0, \quad \sigma_0^{k+1}\| + \sum_{j=k+2}^{N} \|0, \quad 0\| - \\
&- \sum_{j=1}^{k-1} \|\sigma_0^{N+1}, \quad \sigma_0^{N+1}\| - \|0, \quad \sigma_0^{N+1}\| - \|0, \quad \sigma_0^{N+1}\| - \\
&- \sum_{j=k+2}^{N} \|0, \quad 0\| = \|\sigma_0^{k-1}, \quad \sigma_0^{N+1}\| + \|0, \quad \sigma_0^{k+1}\| - \\
&- \|0, \quad \sigma_0^{N+1}\|.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Если теперь положить $m_1 = \| 0, \quad \sigma_0^{k-1} \|, \quad m_2 = \| \sigma_0^{k-1}, \quad \sigma_0^{k+1} \|$, $m_3 = \| \sigma_0^{k+1}, \sigma_1^{N+1} \|$, то из (4.19), (4.20), (4.21), в силу очевидного неравенства $0 \leqslant \sigma_0^{k-1} \leqslant \sigma_0^{k-1} \leqslant \sigma_0^{N+1}$, получится, что тождество (4.18) эквивалентно тождеству

$$m_2 + \max \{m_1, m_2, m_3\} = \max \{m_2, m_3\} + \max \{m_1, m_2\}. \quad (4.22)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что (4.22) выполнено при всех возможных между тремя действительными числами m_1, m_2, m_3 соотношениях порядка, за исключением двух случаев: $m_2 < m_3 \leqslant m_1$, $m_2 < m_1 \leqslant m_2$, но именно эти случаи исключаются условием унимодальности h.

Теперь можно сформулировать окончательный результат.

Теорема 4.5. *Если функции T^0, T^{N+1}, описывающие поведение внешних контрагентов,— строго вогнутые ограниченные функции вида* (4.5), *то на монопольном рынке существуют устойчивые автономные стратегии.*

Доказательство. Покажем, что для строго вогнутой функции Φ и оператора $\hat{A}$ в (4.8)

$$\hat{\Gamma}\hat{A}\Phi = \hat{A}\Phi, \quad \text{если } \hat{\Gamma}\Phi = \Phi. \quad (4.23)$$

Из (4.8) и леммы 4.3 получаем, что

$$\hat{A}\Phi = \frac{1}{1+\rho}\left[\sum_{k=1} \nu_k \left(\hat{\theta}^k \varphi_k + \sum_{j \neq k}^{N} \varphi_j\right) + \rho T^0 + T^{N+1}\right], \quad (4.24)$$

где функции φ_k выражаются через Φ в виде (4.10). Это выражение показывает, что если Φ строго вогнута, то φ_k тоже строго вогнуты, и, следовательно, функции $h_k(a) \triangleq \varphi_k(a, x-a)$ унимодальны по a на $[0, x]$ при любом $x \geqslant 0$. По лемме 4.4 следует, что

$$\hat{\Gamma}\hat{\theta}^k \varphi_k = \hat{\theta}^k \varphi_k. \quad (4.25)$$

Из леммы 4.4, (3.7), (4.10) также следует, что

$$\hat{\Gamma}\varphi_k = \varphi_k, \quad \hat{\Gamma}T^i = T^i, \quad i = 1, N+1. \quad (4.26)$$

В силу линейности оператора $\hat{\Gamma}$ из (4.24)—(4.26) следует (4.23). Оператор $\hat{A}$ сжимает пространство ограниченных непрерывных функций над $\mathbf{R}_+^{N+2}$ и при строго вогнутых T^i сохраняет строгую вогнутость (см. [3, 4]). Поэтому для любой вогнутой ограниченной функции Φ вида (4.9)

$$G = \lim_{n \to +\infty} \hat{A}^n \Phi, \quad \hat{\Gamma}\hat{A}^n\Phi = \hat{A}^n\Phi. \quad (4.27)$$

Поскольку оператор $\hat{\Gamma}$ очевидно непрерывен, из (4.27) следует, что $\hat{\Gamma}G \equiv G$. Отсюда по лемме 4.3 и теореме 4.2 вытекает существование устойчивых автономных стратегий в рассматриваемой модели.

5. Обсуждение результатов: автономные стратегии

Итак, на монопольном рынке возможно устойчивое, эффективное коллективное поведение торговцев. Из (4.7), (2.12) легко заключить, что для реализации этого поведения каждый из торговцев должен знать лишь величину своего запаса и агрегированные показатели σ_0^k, σ_{k+1}^{N+1} (суммарные запасы, см. (4.2)) состояния остальных собственников. Таким образом, это поведение фактически не зависит от числа собственников на рынке. Этот результат пред-

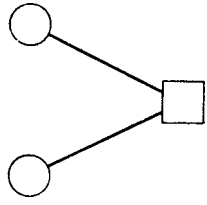


Рис. 3

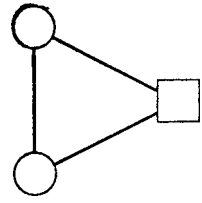


Рис. 4

ставляется интересным потому, что систему, которую мы назвали монопольным рынком, можно рассматривать как простейший пример группы предприятий, связанных в технологическую цепочку. Вопрос о гибком управлении такой цепочкой предприятий — это один из наиболее трудных и острых в проблеме совершенствования социалистического хозяйственного механизма. В свете полученных выше результатов можно наметить следующий путь решения этого вопроса. Планирующий орган должен создать систему стимулов, при которой у предприятий, составляющих цепочку, существует автономная устойчивая стратегия, и помочь найти эту стратегию. Свойства этой стратегии позволяют рассчитывать на устойчивую, эффективную, согласованную и добровольную реакцию всей технологической цепочки на изменяющийся внешний спрос.

Кроме монопольного рынка, характеризующегося единственным путем движения продукта от одного собственника к другому, мы рассматривали еще два примера «конкурентных» рынков. Соответствующие графы возможных обменов приведены на рис. 3, 4, причем функция T^1, описывающая поведение единственного внешнего контрагента, имеет вид (3.7). В обоих случаях автономных устойчивых стратегий нет. За недостатком места мы не приводим доказательства. Отметим лишь, что для рынка, изображенного на рис. 3, оно опирается на следующий любопытный факт.

Лемма 5.1. *Если три непрерывные функции* f_1, f_2, f_3: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ *удовлетворяют на* $\mathbf{R}_+^3$ *условию* $f_1(x, y+z) + f_2(x+y, z) + f_3(x+z, y) \equiv 0$, *то* $f_i(u, v) = g_i(u+v)$, $i = 1, 2, 3$.

Полученные результаты кажутся противоречащими классической теории рынка, которая утверждает, что при совершенной конкуренции эффективное равновесие есть, а при монополии его существование, по меньшей мере, сомнительно [5]. Надо, однако, учесть принципиальную разницу моделей. Классическая теория

исходит из существования единой цены. Такая цена, настолько, насколько она вообще существует в реальности, возникает в результате деятельности торговцев. Таким образом, классическая теория описывает формирование поведения внешних контрагентов при заданном поведении торговцев. Мы же, напротив, стремимся описать поведение торговцев, находящихся под угрозой разорения, но при этом вынуждены задаваться определенным поведением внешних контрагентов. На наш взгляд, одной классической теории недостаточно хотя бы потому, что монополизированные рынки XX века демонстрируют гораздо большую устойчивость, нежели конкурентные рынки XIX века.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору А. А. Петрову за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения, а также канд. физ.-мат. наук А. А. Шананину за полезные консультации.

Abstract

Collective behaviour of dealers, striving to avoid ruin is considered. It is shown, that any Pareto-optimal behaviour of such a collective may be described approximately as the optimal behaviour of a single dealer also striving to avoid ruin. Stability of Pareto-optimal behaviour is also considered. It appears to be depending on the configuration of graph of possible exchanges between dealers and to be closely connected with the possibility for dealer to form his optimal behaviour on the base of aggregated description of other dealer's states.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка // Экономика и мат. методы. 1988. Т. 24, № 3. С. 497—508.
2. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка с посредником // Модели и методы прогнозирования научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1984. Вып. 2. С. 37—44.
3. *Поспелов И. Г.* Вариационный принцип в описании экономического поведения // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 46—59.
4. *Поспелов И. Г.* Парето-оптимальные стратегии поведения в динамической модели рынка // АиТ. 1989. № 1. С. 33—41.
5. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 617 с.
6. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 198 с.
7. *Басакер Р.*, *Саати Т.* Конечные сети и графы. М.: Наука, 1986.

УДК 519.86

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ ФИРМ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЫНОЧНОГО ТИПА

Н. Н. Оленев, И. Г. Поспелов

В настоящей работе изучается замкнутая многосекторная модель экономики рыночного типа, односекторный вариант которой рассмотрен в [1]. Основу модели составляет описание жизненного цикла экономической деятельности промышленной фирмы, начиная от ее возникновения и кончая ее ликвидацией. При исследовании модели особое внимание уделяется циклическим процессам в рыночной экономике, которые привлекали и продолжают привлекать внимание многих исследователей. Как правило, для моделирования этих процессов строятся специальные модели цикла, в которые в явном виде вводятся факторы, вызывающие колебания.

В неокейнсианских моделях постулируется наличие стремления капиталистов сравнять фактический капитал с некоторым его равновесным уровнем [2]. Определяющим фактором циклического развития в моделях неоклассиков является связь колебаний прибыли с ростом заработной платы при ограниченности предложения трудовых ресурсов. В третьей группе моделей цикла предполагается связь колебаний инвестиций с наличием заданных «горбов» в возрастном распределении капитала [3].

В рассматриваемой ниже модели никаких предположений о колебательном характере поведения экономических агентов нет, тем не менее благодаря последовательному микроописанию всего процесса расширенного воспроизводства она воспроизводит одновременно все отмеченные выше явления, связанные с циклом.

1. Описание модели

Будем рассматривать хозяйство, в котором производится N продуктов. Выпуск продуктов осуществляют отдельные производственные единицы. При выпуске i-го продукта используется живой труд, который мы предполагаем однородным, и, возможно, другие продукты в качестве сырья.

Для простоты предполагаем, что каждая из производственных единиц может выпускать только один продукт. Совокупность производственных единиц, выпускающих i-й продукт, называем отраслью или сектором. Считаем, что все производственные единицы каждой i-й отрасли используют одну и ту же технологию производства и различаются между собой величиной производственной

© Н. Н. Оленев, И. Г. Поспелов, 1989

мощности [1] и своим возрастом. Технология производства в i-й отрасли характеризуется нормами затрат труда (номинальной трудоемкостью) ν_i и j-го продукта a_{ji} на выпуск единицы i-го продукта, а также коэффициентами фондоемкости b_{ji}, которые показывают, сколько единиц j-го продукта надо затратить на создание единичной мощности в i-й отрасли.

Процесс старения производственных единиц описываем так же, как в [5, 1]. Предполагается, что число рабочих мест на производственной единице остается неизменным в течение всего срока ее службы, а мощность ее постепенно падает. Падение мощности вызвано тем, что старое оборудование чаще ломается и с течением времени все большая доля рабочего времени уходит на простои и ремонт сломавшегося оборудования. Случайный процесс поломок и ремонта оборудования с медленно нарастающей частотой поломок соответствует, как показал А. А. Шананин [4], падению мощности с постоянным темпом. Этот темп будем обозначать μ, называть темпом выбытия мощности и считать одинаковым для всех производственных единиц хозяйства.

Уменьшение мощности при постоянном числе рабочих мест приводит к росту фактической трудоемкости производства. В силу сделанных предположений на производственной единице возраста θ в i-й отрасли фактическая трудоемкость λ_i составляет (см. [1])

$$\lambda_i = \nu_i e^{\mu\theta}. \tag{1.1}$$

Что касается коэффициентов прямых затрат a_{ji}, то мы считаем их неизменными в течение всего срока использования мощности.

Предполагается, что старая производственная мощность может быть демонтирована, причем при демонтаже единицы мощности i-й отрасли возраста θ получается $B_{ji}(\theta)$ единиц j-го продукта. Функции $B_{ji}(\theta)$ — это тоже технологические характеристики i-й отрасли. Предполагается, что они не возрастают по θ и удовлетворяют неравенству

$$B_{ji}(\theta) < b_{ji}. \tag{1.2}$$

Продукты, получаемые при демонтаже производственных мощностей, ниже кратко называем остаточными продуктами i-й отрасли. При полном демонтаже мощности некоторой производственной единицы эта единица ликвидируется. Предполагается, что демонтаж, в отличие от выбытия, сопровождается соответствующим уменьшением числа рабочих мест, так что соотношение (1.1) остается в силе при любом темпе демонтажа.

Предполагается, что каждая производственная единица управляется самостоятельной фирмой. Эта фирма продает произведенный и остаточные продукты, а также закупает сырье по единым для всего хозяйства ценам продуктов p_k, нанимает рабочую силу

---

[1] Максимальным выпуском продукции при полной обеспеченности сырьем и рабочей силой (см. [4]).

по единой для каждой отрасли ставке заработной платы s_i и ведет свои финансовые операции с единой банковской системой.

Предполагается, что фирма образуется вместе с соответствующей производственной единицей и ликвидируется при полном демонтаже мощности, поэтому в дальнейшем мы отождествляем фирмы и производственные единицы; более того, фирмы, образующиеся одновременно, в модели неразличимы, поэтому считается, что в момент τ образуется одна фирма, а момент создания τ служит меткой, выделяющей эту фирму среди других. По этой причине будем говорить «фирма τ» вместо «фирма, образовавшаяся в момент τ». Модель предназначена для описания экономики с совершенной конкуренцией, т. е. экономики, в которой действует множество мелких фирм, поэтому формально будем считать фирмы «бесконечно малыми» и предполагать, что образуются они непрерывно, в каждый момент времени. Строгое описание такого процесса на языке теории меры дано в [5], а здесь мы ограничимся уровнем строгости, принятым в классической математической физике.

Образующаяся в i-й отрасли фирма τ берет в банке кредит $\Phi_i^I(\tau)\,d\tau$. На эти средства она закупает фондообразующие продукты $X_j^I(\tau)\,d\tau$ и создает производственную мощность $I_i(\tau)\,d\tau$

$$X_j^I(\tau) = \sum_{j=1}^{N} b_{ji} I_i(\tau), \quad I_i(\tau) = \Phi_i^I(\tau) / \sum_{j=1}^{N} p_j b_{ji}. \tag{1.3}$$

В дальнейшем эта мощность выбывает и частично демонтируется [2]. Так что фирма τ располагает в момент $t \geqslant \tau$ мощностью $m_i(t, \tau)\,d\tau$, где

$$\frac{\partial m_i}{\partial t}(t, \tau) = -\mu m_i(t, \tau) - u_i(t, \tau)\, m_i(t, \tau), \; m_i(\tau, \tau) = I_i(\tau), \tag{1.4}$$

а $u_i \geqslant 0$ — темп демонтажа, который определяется решением фирмы. Демонтаж приносит фирме τ доход

$$z_i^U(t, \tau) = u_i(t, \tau) \sum_{j=1}^{N} B_{ji}(t - \tau)\, p_j(t)\, m_i(t, \tau). \tag{1.5}$$

Выпуск продукции в момент t фирмой τ i-й отрасли обозначим через $y_i(t, \tau)\,d\tau$, $0 \leqslant y_i(t, \tau) \leqslant m_i(t, \tau)$. Для того чтобы его осуществить, надо в силу (1.1) привлечь трудовые ресурсы в количестве $y_i \nu_i \exp[\mu(t - \tau)]\,d\tau$ и закупить $a_{ji} y_j d\tau$ единиц j-го продукта в качестве сырья. Поэтому выпуск продукта $y_i d\tau$ приносит фирме τ прибыль $z_i^L d\tau$:

$$z_i^L(t, \tau) = \left\{p_i(t) - s_i(t)\, \nu_i e^{\mu(t-\tau)} - \sum_{j=1}^{N} a_{ji} p_j(t)\right\} y_i(t, \tau). \tag{1.6}$$

[2] Восстановление изношенной мощности в модели не рассматривается. Предполагается, что восстановление эквивалентно созданию новой мощности и этим занимается новая фирма.

В момент образования фирмы τ у нее возникает задолженность (см. (1.3)) $\Phi_i^I(\tau)\,d\tau$, которая в дальнейшем растет за счет начисления процента по единой текущей ставке $r(t)$, а уменьшается за счет платежей погашения $h_i(t, \tau)$ (см. [1, 6]) и составляет в момент $t \geqslant \tau$ величину $l_i(t, \tau)\,d\tau$, такую, что

$$\partial l_i/\partial t = r(t)\,l_i(t, \tau) - h_i(t, \tau), \quad l_i(\tau, \tau) = \Phi_i^I(\tau). \tag{1.7}$$

Чистый доход фирмы τ

$$d_i d\tau = (z_i^L + z_i^U - h_i)\,d\tau \tag{1.8}$$

поступает собственникам этой фирмы. Предполагается, что весь этот доход собственники сберегают в виде вклада $q_i(t, \tau)\,d\tau$ в том же едином банке, где берут кредит фирмы. На этот вклад (депозит) банк постоянно начисляет процент по единой текущей ставке $\rho(t)$:

$$\partial q_i/\partial t\,(t, \tau) = d_i(t, \tau) + \rho(t)\,q_i(t, \tau), \quad q_i(\tau, \tau) = 0. \tag{1.9}$$

Депозит q_i сохраняется после ликвидации фирмы. Предполагается, что депозит q_i не может использоваться для погашения долга (т. е. фирма есть общество с ограниченной ответственностью):

$$z_i^U + z_i^L \geqslant h_i, \tag{1.10}$$

а ссудный счет l_i не может использоваться для накоплений:

$$l_i(t, \tau) \geqslant 0. \tag{1.11}$$

Предполагается также, что банк требует обеспечивать задолженность балансовой стоимостью фирмы k_i:

$$l_i(t, \tau) \leqslant k_i(t, \tau). \tag{1.12}$$

Балансовая стоимость фирмы τ $k_i(t, \tau)\,d\tau$ определяется как (см. [1, 6])

$$\frac{\partial k_i}{\partial t}(t, \tau) = -\beta k_i - u_i k_i, \quad k_i(\tau, \tau) = \Phi_i^I(\tau), \tag{1.13}$$

где β — единый для всего хозяйства коэффициент амортизации. Член $u_i k_i$ учитывает списание балансовой стоимости демонтированных мощностей. При нарушении неравенства (1.12) фирма объявляется банкротом. Ее мощность мгновенно демонтируется, выручка от продажи остаточного продукта идет в погашение долга и, если ее не хватает, остаток долга списывается (фактически раскладывается на всех собственников, см. ниже).

Выше были описаны условия деятельности фирм. Теперь опишем модель их поведения, которая аналогична предложенной в [1], но учитывает специфику многоотраслевого описания производства.

Мы изложим ее в два этапа. Сначала укажем некоторую идеализированную схему, вполне пригодную лишь в предположении

постоянства и сбалансированности цен, а затем опишем ее «сглаженный» вариант, который фактически применялся в приведенных ниже расчетах. Итак, начнем со схемы: фирма стремится максимизировать депозит собственников $q_i(\tau + T, \tau)$ в достаточно отдаленный момент $\tau + T$ при ограничении (1.12). В силу (1.5) — (1.8), (1.13) для выполнения неравенства (1.12) при $t = \tau + \Delta$, $\Delta \to 0$, необходимо, чтобы $\frac{\partial}{\partial t}(l_i - k_i)_{t=\tau} \leqslant 0$ или [3]

$$r(t) \leqslant r_i(t) = \frac{p_i(\tau) - \nu_i s_i(\tau) - \sum_{j=1}^{N} a_{ji} p_j(\tau)}{\sum_{j=1}^{N} b_{ji} p_j(\tau)} - \beta. \tag{1.14}$$

В [1] показано, что при достаточно большом $\beta > \mu$ и ограниченных ценах и проценте условие (1.14) гарантирует выполнение неравенства (1.12) при всех $t \geqslant \tau$. Поэтому можно считать, что условие $r_i \geqslant r$ есть условие образования фирмы. Условие максимальности $q_i(\tau + T, \tau)$ при достаточно большом T, выполнении условий (1.11), (1.12) и постоянных r, ρ и p_k требует, чтобы (см. [1]) мощность m_i была мгновенно демонтирована в момент $\theta(\tau)$, когда первый раз нарушается неравенство

$$\psi_i(\theta, \tau) \triangleq p_i - \nu_i e^{\mu(\theta-\tau)} s_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ji} p_j + \sum_{j=1}^{N} B'_{ji}(\theta - \tau) p_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} B_{ji}(\theta - \tau) p_j [\mu + \rho] - \frac{l_i(\theta, \tau)}{k_i(\theta, \tau)} [r - \rho] \geqslant 0, \tag{1.15}$$

т. е.

$$u_i = \delta(t - \theta(\tau)), \tag{1.16}$$

причем

$$y_i(t, \tau) = m_i(t, \tau) \{p_i - s_i \nu_i e^{\mu(\theta-\tau)} - \sum_{j=1}^{N} a_{ji} p_j\}_+,$$

$$h_i(t, \tau) = [z_i^L + z_i^U] \, 1(l_i(t - \tau)). \tag{1.17}$$

Здесь и ниже $\delta(\cdot)$ — функция Дирака, $1(\cdot)$ — функция Хэвисайда ($1(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $1(x) = 1$ при $x > 0$) и $\{x\}_+ = x\,1(x)$. При выполнении (1.14), (1.16) и (1.17) $\psi_i(\tau, \tau) \geqslant 0$, $\frac{\partial}{\partial t}\psi_i(t, \tau)|_{t=\tau} > 0$ и $q_i(\tau + T, \tau)$ тем больше, чем больше $\Phi_i^I(\tau)$. Поэтому спрос на кредит i-й отрасли имеет вид

$$\hat{\Phi}_i^I = \begin{cases} 0 \text{ при } r_i < r, \\ \text{любое число при } r_i = r, \\ +\infty, \text{ при } r_i > r. \end{cases} \tag{1.18}$$

[3] При вычислении производных в (1.13) полагаем $u_i(\tau, \tau) = 0$, т. е. предполагаем, что фирмы создаются для выпуска продукции, а не для спекуляции мощностями.

Так как предложение кредита Φ_i^I банком ограничено (см. ниже), то для равновесия на рынке капитала надо, чтобы (см. (1.14)) $r = \max_k r_k$ и кредит брали только те отрасли, у которых $r_i = \max_k r_k$. Распределение суммы кредита $\check{\Phi}^I$ между этими отраслями в равновесии может быть любым.

Были проведены численные эксперименты, реализующие эту схему «в лоб»: весь кредит отдавался отрасли с максимальным r_i, фирма τ в i-й отрасли ликвидировалась, если до этого не случалось банкротства, в момент t, когда первый раз нарушалось неравенство (1.15), где в качестве p_j, s_j, r, ρ брались текущие значения $p_j(t)$, $s_j(t)$, $r(t)$, $\rho(t)$. Оказалось, что такое поведение фирм порождает неестественно резкие колебания цены и других показателей из-за слишком быстрой распродажи мощности и слишком резких перемещений потока инвестиций из отрасли в отрасль. Поэтому было принято «сглаженное» описание поведения.

Предполагается, что при нарушении неравенства (1.15) фирма продает свои мощности с достаточно высоким, но конечным темпом, до тех пор пока ее мощность не станет исчезающе малой. Что же касается объема кредитов, то будем считать, что доля χ_i^I-й отрасли в общей сумме кредитов $\left(\chi_i^I \geqslant 0, \sum_{j=1}^N \chi_j^I \equiv 1\right)$ обладает инерционностью, увеличиваясь, когда r_i в данной отрасли больше, чем в других, и падая в противном случае:

$$\frac{d\chi_i^I}{dt} = \frac{1}{\Delta^I} \sum_{j=1}^N (r_i - r_j), \tag{1.19}$$

где Δ^I — характерное время изменения структуры капиталовложений.

Кроме того, считаем, что процент устанавливается банком не на максимальном уровне $\max_k r_k$, а на уровне, усредненном в соответствии с долями χ_i^I отраслей в общей сумме кредитов:

$$r(t) = \sum_{i=1}^N r_i(t)\chi_i^I(t), \quad \Phi_i^I = \chi_i^I \check{\Phi}_i^I. \tag{1.20}$$

Интересно заметить, что условие (1.20) в силу (1.3), (1.5)—(1.8), (1.13)—(1.14) означает, что (1.12) выполняется в среднем по отраслям

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N [l_i(t,\tau) - k_i(t,\tau)]_{t=\tau} = 0. \tag{1.21}$$

Отметим, что если выполнено (1.20) и не все r_i одинаковы, то по крайней мере для одной отрасли при небольших значениях $t - \tau$ нарушится соотношение (1.12). Поэтому при расчетах по «сгла-

женной» модели считалось, что банкротство фирмы наступает, если (1.12) нарушается при $t > \tau + \Delta$, где Δ — заданный небольшой интервал времени. Этого оказалось достаточно, чтобы исключить систематические банкротства фирм в модели. Описание поведения фирм завершено, и мы переходим к описанию остальных элементов процесса расширенного воспроизводства.

В хозяйстве i-й продукт появляется в результате производства его фирмами i-й отрасли, а также, возможно, как остаточный продукт при демонтаже мощностей других отраслей; i-й продукт будет выпускаться в количестве [4]

$$Y_i = \int d\tau y_i(t, \tau) + \sum_{j=1}^{N} \int d\tau u_j(t, \tau) m_j(t, \tau) B_{ij}(t - \tau). \tag{1.22}$$

Спрос на этот продукт предъявляют трудящиеся и инвесторы, организующие новые фирмы. Предполагается, что трудящиеся i-й отрасли тратят на покупку весь свой доход $s_i R_i^L$, где R_i^L — численность занятых в i-й отрасли:

$$R_i^L = \int d\tau \nu_i e^{\mu(t-\tau)} y_i(t, \tau). \tag{1.23}$$

Потребительские вкусы трудящихся можно задавать составом $c_1, \ldots, c_N$ их «потребительской корзины» (см. [7]). Тогда потребительские расходы i-й отрасли составят $\Phi_i^C = c_i p_i \sum_{j=1}^{N} s_j R_j^L \Big/ \sum_{j=1}^{N} c_j p_j$.

Инвесторы j-й отрасли расходуют средства $\Phi_{ij}^I = I_j b_{ji} p_j$, взятые в кредит в банковской системе.

Как и в [1] (в отличие от [7]), мы здесь предполагаем, что рынки продуктов находятся в равновесии:

$$p_i(t) = \Phi_i^C(t) \Big/ \left[Y_i(t) - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} I_j(t)\right]. \tag{1.24}$$

Мы считаем ставки s_i заработной платы дифференцированными по отраслям, поскольку допускаем свой для каждой отрасли рынок трудовых ресурсов. Общее предложение трудовых ресурсов, которое считаем растущим с заданным постоянным темпом n, $\hat{R}^L(t) = \hat{R}_0^L e^{nt}$, в каждый момент времени t распределено между втраслями. Динамику этого распределения опишем так же, как о [7]. С каждой отдельной отраслью связано определенное количество ищущих в ней работу $\hat{R}_i^L$:

$$\hat{R}_i^L = \chi_i^L \hat{R}^L; \quad \sum_{i=1}^{N} \chi_i^L(t) \equiv 1, \quad \chi_i^L \geqslant 0. \tag{1.25}$$

Мотивом перехода безработных из отрасли в отрасль считается разница уровней занятости $R_i^L / \hat{R}_i^L$ в отраслях: чем выше этот

[4] Здесь и далее выражение $\int d\tau$ означает суммирование по всем фирмам [1, 5].

уровень в отрасли, тем больше миграционный поток в нее:

$$\frac{d\chi_i^L}{dt} = \frac{1}{\Delta^L} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{R_i^L}{\hat{R}_i^L} - \frac{R_j^L}{\hat{R}_j^L} \right]. \tag{1.26}$$

Здесь Δ^L — характерное время миграции. Изменение заработной платы опишем как в [1, 7]:

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{s_i}{\Delta_i^s} \left[\frac{R_i^L(t) - \hat{R}_i^L(t)}{\hat{R}_i^L(t)} \right]_+, \tag{1.27}$$

где Δ_i^s — характерное время изменения заработной платы, R_i^L — численность занятых (см. (1.23)), а $\hat{R}_i^L$ — предложение трудовых ресурсов (см. (1.25)). Мы допускаем в модели, что в отраслях может возникать «перегрузка» трудовых ресурсов, т. е. выполняется неравенство $R_i^L > \hat{R}_i^L$. Содержательно эта ситуация может интерпретироваться как использование фирмами сверхурочных работ. Уравнение (1.27) выражает предположение о том, что отраслевая ставка заработной платы растет при перегрузке трудовых ресурсов и не изменяется в противном случае.

Подробное описание функционирования банковской системы приводится в [1]. Здесь приведем только сводку уравнений [5], которые определяют депозиты собственников фирм D

$$\frac{dD}{dt} = \rho D + \sum_{i=1}^{N} \int d\tau\, d_i(t, \tau) + E, \tag{1.28}$$

задолженность фирм L

$$\frac{dL}{dt} = \Phi^I + \Lambda, \quad \Lambda = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{m_i(t,\tau)>0} d\tau l_i(t, \tau), \tag{1.29}$$

резерв банковской системы

$$\frac{dR}{dt} = E, \quad R \geqslant \xi D, \quad E = \sum_{i=1}^{N} \pi_i Y_i, \tag{1.30}$$

предложение кредитов

$$\check{\Phi}^I = -\Lambda + \frac{1-\xi}{\xi} E \tag{1.31}$$

---

[5] В этих уравнениях слагаемое E — эмиссия платежных средств. В работе [1] в уравнениях, соответствующих (1.28), (1.29), допущена ошибка. Уравнения должны выглядеть так, как указано здесь (при $E = \pi Y$). Повторение численных экспериментов с односекторной моделью показало, что эта ошибка не сказывается на качественном характере результатов, за исключением того, что значение процента ρ фактически должно быть меньше, чем указано на графиках, приведенных в [1].

и норму процента по депозитам

$$\rho D + \sum_{i=1}^{N} \int d\tau\, d_i(t, \tau) = \Phi^I + \Lambda. \tag{1.32}$$

Здесь ξ — законодательно установленная норма обеспечения депозитов [6], Λ — прирост задолженности фирм за вычетом непогашенной задолженности банкротов. Уравнение (1.31) определяет спрос на кредит, а (1.32) показывает, что долги банкротов фактически погашаются за счет уменьшения доходов вкладчиков ρD. Если в (1.31) $\tilde{\Phi}^I < 0$, то это означает крах банковской системы [1]. Если в (1.20) $r < 0$, то полагаем $r = 0$, $\tilde{\Phi}^I = 0$. В этом случае $\xi D < R$. В остальных случаях $\xi D = R$ [1].

На этом описание многосекторной модели завершается. В следующем разделе рассмотрим результаты численных экспериментов с двухсекторной моделью. Заметим, что описанную схему нетрудно обобщить на случай, когда номинальные трудоемкости ν_i зависят от времени [1], а коэффициенты прямых затрат a_{ij} — от времени и возраста [8].

2. Численные эксперименты с двухсекторной моделью

Будем рассматривать двухсекторную модель, в которой первый сектор выпускает фондообразующий, а второй — потребительский продукт. В такой модели $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$, $b_{21} = b_{22} = B_{21} = B_{22} = 0$, b_{11}, b_{12}, B_{11}, $B_{12} > 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Если заданы начальные распределения мощности $m_i(t_0, \tau)$, долга $l_i(t_0, \tau)$ и балансовой стоимости $k_i(t_0, \tau)$ по возрастам $t_0 - \tau > 0$ фирм, начальный размер депозитов $D(t_0)$ банковского резерва $R(t_0)$ и заработной платы $s_i(t_0)$, а также начальные распределения предложения трудовых ресурсов $\chi_i^L(t_0)$ и спроса на кредит $\chi_i^I(t_0)$, то при заданной динамике общего предложения трудовых ресурсов $\hat{R}^L(t)$, $t \geqslant t_0$, приведенные в разд. 1 соотношения однозначно определяют эволюцию модельной экономической системы при $t > t_0$. При расчетах дифференциальные уравнения заменялись разностными по схеме Эйлера с постоянным шагом, а непрерывные распределения по возрастам — дискретными с тем же шагом.

Прежде чем описывать результаты конкретных численных экспериментов над моделью, обрисуем общий характер наблюдавшихся в них траекторий. На начальной стадии развития при избытке трудовых ресурсов наблюдается переходный процесс, который заканчивается одним из следующих режимов: а) сбалансированный рост, на котором объемные показатели растут экспоненциально с одинаковым темпом, б) развал системы (полная потеря рентабельности, банкротство всех фирм либо крах банковской системы (см. [1])); в) незатухающие колебания около сбалансированного роста. Если темп сбалансированного роста (или средний темп роста в режиме колебаний) превышает темп

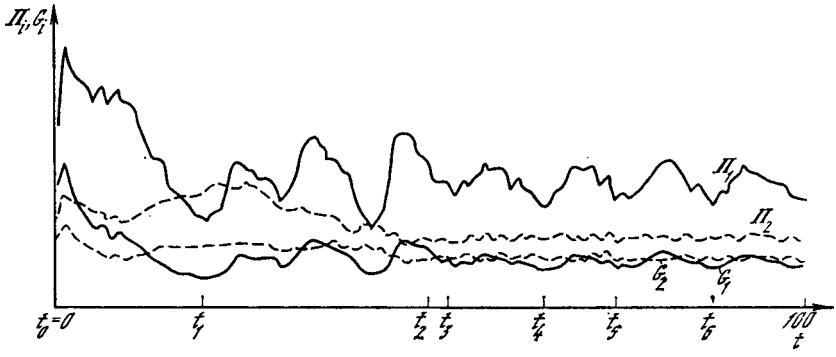


Рис. 1

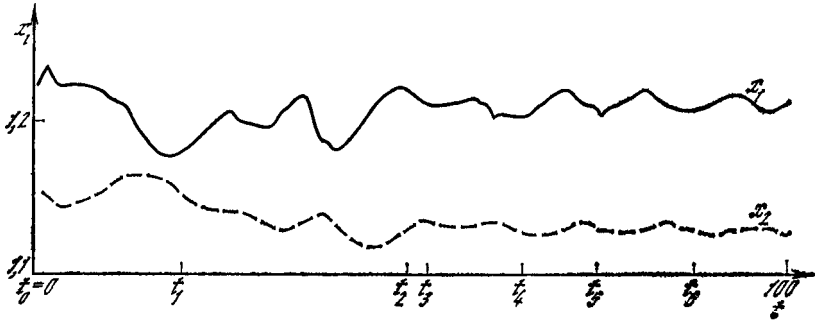


Рис. 2

роста предложения трудовых ресурсов, то развитие системы приводит к их исчерпанию и возникновению нового переходного процесса, в котором растут цены и ставки заработной платы. После этого процесса устанавливается один из следующих режимов: а) сбалансированный рост с темпом, не превышающим темп роста трудовых ресурсов, б) развал системы, в) колебания со средним темпом роста, меньшим темпа роста трудовых ресурсов, г) инфляционный режим, в котором происходят периодические переходы от недостатка трудовых ресурсов к их избытку и обратно в обеих отраслях.

Наиболее характерен для двухсекторной модели колебательный режим развития. Он возникает даже, если система не испытывала никаких потрясений (начальные условия вблизи сбалансированного роста, не возникало недостатка трудовых ресурсов, не было банкротств фирм). По-видимому, в случае двухсекторной модели мы имеем дело с автоколебаниями. Затухание колебаний наблюдается редко, да и в этом случае выход на режим сбалансированного роста требует очень большого времени. Для сравнения отметим, что для односекторной модели характерны как раз затухающие колебания и при отсутствии перечисленных выше потрясений односекторная модель быстро выходит на сбаланси-

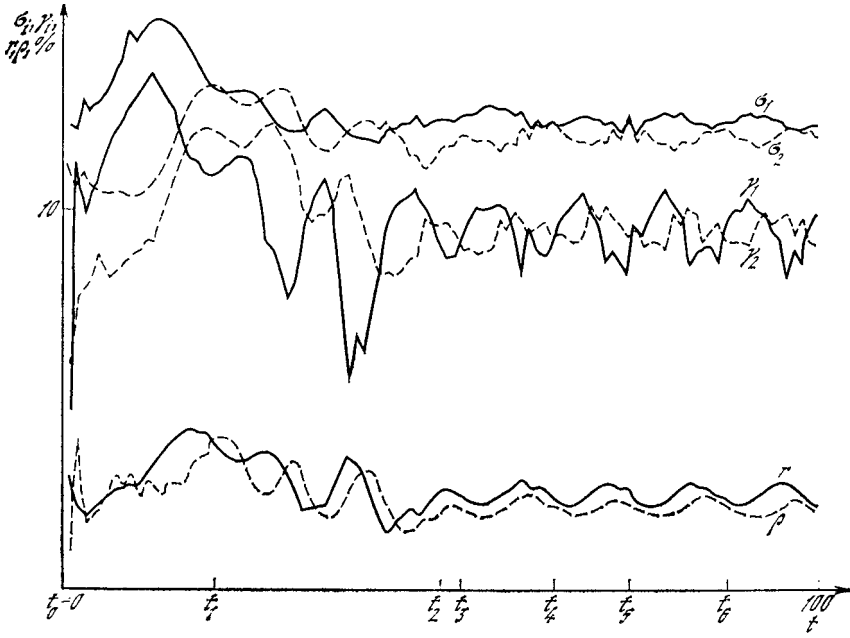


Рис. 3

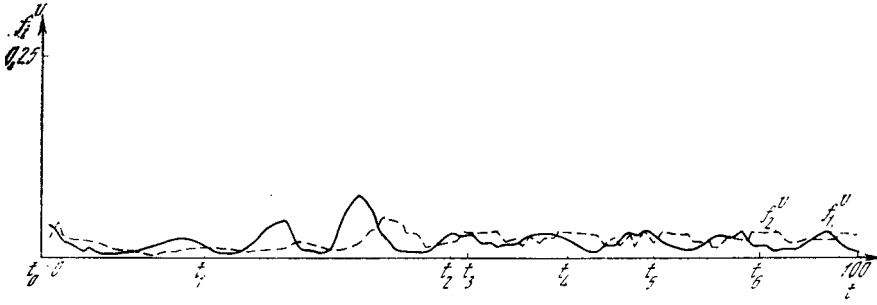


Рис. 4

рованный рост. На рис. 1—5 представлены типичные результаты численного эксперимента с двухсекторной моделью: переходный процесс при $t < t_1$, режим с недостатком (перегрузкой) трудовых ресурсов при $t \in [t_1, t_2]$, автоколебательный режим при $t > t_3$.

Рассмотрим сначала переходный процесс. Несмотря на колебательный характер траектории на этом отрезке, можно заметить, что в целом в обеих отраслях снижаются нормы прибыли $G_i = \int d\tau d_i(t, \tau)/[\int d\tau \beta k_i(t, \tau) + s_i R_i^L]$ и нормы прибавочной стоимости (в текущих ценах) $\Pi_i = \int d\tau d_i(t, \tau)/s_i R_i^L$ (рис. 1). Снижается средняя трудоемкость в первой отрасли $x_1 = R_1^L/v_1 Y_1$ (рис. 2). В целом увеличиваются темпы роста выпуска продукции $\gamma_i =$

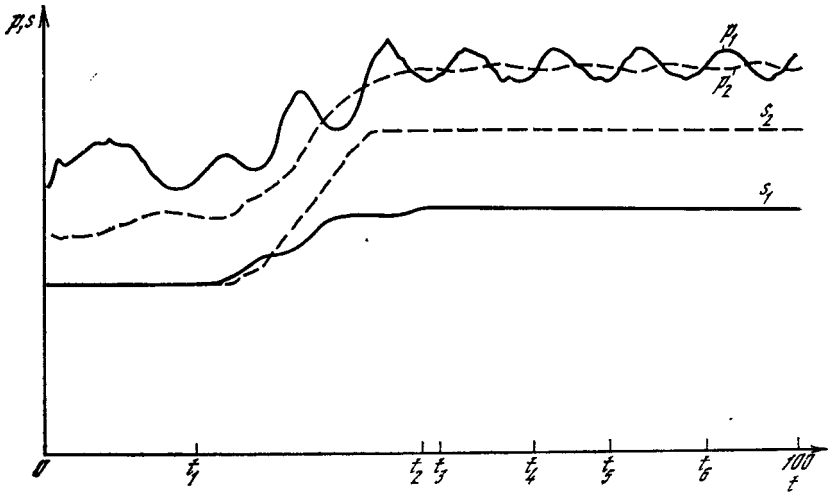


Рис. 5

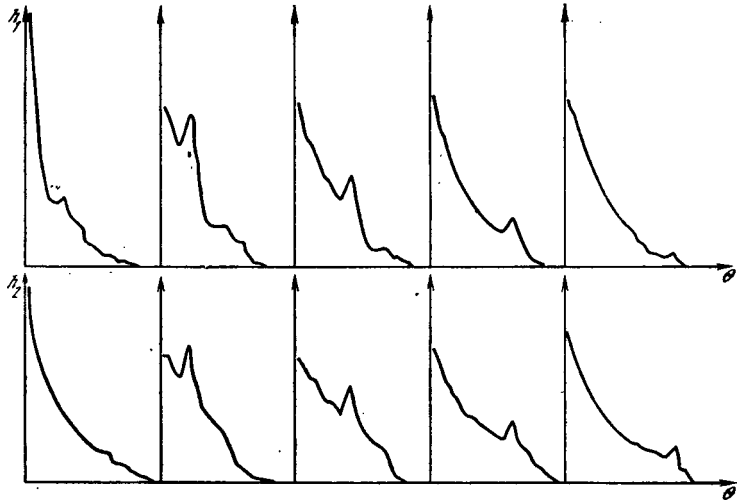


Рис. 6

$= (1/Y_i)\, dY_i/dt$ (рис. 3). Подобное явление отмечает в «Капитале» К. Маркс. «Так как масса применяемого живого труда постоянно уменьшается по сравнению с массой приводимого им в движение овеществленного труда, с массой производительно потребляемых средств производства, то отношение той части этого живого труда, которая не оплачена и овеществлена в прибавочной стоимости, к стоимостной величине всего вложенного капитала должно постоянно уменьшаться. Но это отношение массы прибавочной стоимости к стоимости всего вложенного капитала образует нор-

му прибыли, которая поэтому должна постоянно падать» (*Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 25. Ч. I. С. 233).

Поскольку мы не учитываем научно-технический прогресс, рост средней производительности труда не имеет в модели систематического характера и тенденция понижения норм прибыли наблюдается лишь в переходном процессе.

В численных экспериментах наблюдался и переходный процесс иного типа, когда темпы роста выпусков и средняя производительность труда снижаются. Такой процесс, как правило, сопровождается развалом системы и возникает при низких начальных значениях средней производительности труда. Различие двух типов переходных режимов более ярко выражено в односекторной модели. Для нее удается даже получить грубую аналитическую оценку порогового значения средней производительности труда, при которой система «выживает» (см. разд. 3).

Недостаток трудовых ресурсов в эксперименте, представленном на рис. 1—5 при $t \in [t_2, t_3]$, носит временный характер и играет роль своеобразного внешнего возмущения, «запускающего» автоколебания в системе. Как уже говорилось выше, в системе возможны режимы, когда недостаток трудовых ресурсов возникает периодически (инфляционные режимы). Они требуют самостоятельного изучения. Здесь мы ограничимся рассмотрением автоколебаний при избытке трудовых ресурсов, подобных тем, которые видны на рис. 1—5 при $t > t_3$.

На рис. 1—5 показано четыре полных цикла колебаний $[t_3, t_4]$, $[t_4, t_5]$, . . ., каждый из которых длится 10—13 лет. Внутренний механизм этих колебаний нагляднее всего проявляется в динамике распределения производственных мощностей по возрастам. На рис. 6 изображены величины $h_i(t, \tau) = m_i(t, \tau)/\int d\tau m_i(t, \tau)$ как функции $\theta = t - \tau$ при t, соответствующем последовательным фазам колебания.

Видно, что в начале периода распределение острое, затем появляется «горбик» в распределении мощностей (доля вновь созданных мощностей $\sigma_i = I_i/M_i$ (рис. 3) уменьшилась). Далее, этот «горбик» становится еще более выраженным, средние трудоемкости x_i растут, затем доля вновь созданных мощностей увеличивается, «горбики» в распределении оформляются и по мере старения мощностей смещаются к концу распределения. Сначала демонстрируются мощности, образующие «горбик» в первом секторе, затем во втором. Сроки службы мощностей снижаются, усиленный демонтаж увеличивает предложение фондообразующего продукта и, как следствие, долю вновь созданных мощностей. Возникают острые распределения мощностей, средняя трудоемкость в первой отрасли падает и создаются предпосылки для возникновения нового «горбика» в распределении мощностей. В следующем периоде процесс повторяется.

«... Старый капитал достигает с течением времени момента, когда он обновляется с ног до головы, когда он меняет свою кожу и так же возрождается в технически усовершенствованном виде,

при котором меньшей массы труда оказывается достаточно для того, чтобы привести в движение бо́льшую массу машин и сырья» (*Маркс К.*, *Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 23. С. 642).

Естественно попытаться сопоставить наблюдаемые в модели колебания с периодическими кризисами перепроизводства, которые раз в 7—13 лет поражали капиталистическую экономику XIX и начала XX веков. «Ясно во всяком случае следующее: этим охватывающим ряд лет циклом взаимно связанных между собой оборотов, в течение которых капитал закреплен своей основной составной частью, дана материальная основа периодических кризисов, причем в ходе цикла деловая жизнь последовательно переживает периоды ослабления, среднего оживления, стремительного подъема, кризиса. Хотя периоды, когда вкладывается капитал, весьма различны и далеко не совпадают друг с другом, тем не менее кризис всегда образует исходный пункт для крупных новых вложений капитала. Следовательно, если рассматривать общество в целом, то кризис в большей или меньшей степени создает новую материальную основу для следующего цикла оборотов» (*Маркс К.*, *Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 24. С. 208).

Посмотрим, как соотносится описанная выше динамика возрастного распределения мощностей (рис. 4) с динамикой макроэкономических показателей, изображенной на рис. 1—7. В начале периода при $t = t_3$ мощности $f_i^U = Y_i^U / \int m_i d\tau$ усиленно демонтируются (рис. 4), средняя трудоемкость x_i в первом секторе минимальна (рис. 3), нормы прибыли G_i и прибавочной стоимости Π_i (рис. 1), а также цена p_1 (рис. 5) тоже минимальны — *застой*. Затем демонтаж в первом секторе ослабевает, средняя производительность труда в первом секторе несколько снижается, нормы прибыли и прибавочной стоимости возрастают (рис. 1), цена фондообразующего продукта p_1 достигает максимума (рис. 5), а цена потребительского продукта p_2 начинает медленно подниматься (рис. 6) — *рост*. Затем демонтаж мощностей во втором секторе (f_2^U) снижается (рис. 4), а в первом (f_1^U) возрастает (рис. 4), нормы прибыли и прибавочной стоимости в обоих секторах достигают максимума (рис. 1), цена фондообразующего продукта p_1 снижается (рис. 4), а цена потребительского продукта p_2 достигает максимума (рис. 5) — *бурный рост*.

В конце периода демонтаж мощностей возрастает (рис. 4), нормы прибыли и прибавочной стоимости снижаются (рис. 1), цена потребительского продукта падает, а фондообразующего — начинает подниматься (рис. 5), средняя трудоемкость x_1 в первом секторе резко падает (рис. 3) — *кризис*.

Таким образом, модель качественно верно отражает смену фаз цикла деловой активности. Заметим, что на всем промежутке колебаний $t \in [t_3, 100]$ нормы прибыли секторов G_i (рис. 1) близки друг к другу, в то время как нормы прибавочной стоимости резко различаются. «...Конкуренция капиталов в различных отраслях производства создает цену производства, которая вырав-

нивает нормы прибыли разных отраслей» (*Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 25. Ч. I. С. 197).

Отметим еще, что, хотя эволюция распределений в секторах происходит синхронно (рис. 6), макроэкономические показатели секторов колеблются с отчетливым сдвигом по фазе (рис. 1—5).

При сопоставлении результатов моделирования с реальностью надо помнить, что в модели рынки продуктов постоянно находятся в равновесии, так что собственно перепроизводства (накопления запасов готовой продукции) модель не описывает — кризис выражается в относительном избытке мощности. Кроме того, мы пренебрегаем техническим прогрессом, поэтому средний темп роста производства в установившемся режиме оказывается ниже темпа роста предложения трудовых ресурсов и ставки заработной платы не растут в периоды бурного роста производства.

В односекторной модели динамика возрастного распределения мощностей качественно такая же, как на рис. 6, но горбики со временем заметно расплываются и сглаживаются. Однако, подбирая специальным образом параметры (см. разд. 3), время затухания можно увеличить. Это позволяет надеяться, что результаты, полученные при аналитическом исследовании односекторной модели, которые мы приводим в следующем разделе, дают правильное представление и о процессах, протекающих в двухсекторной модели.

3. Некоторые результаты аналитического исследования односекторной модели

Мы дадим здесь оценку порогового значения производительности труда, обеспечивающего «выживание» системы, и оценку периода колебаний. При аналитическом исследовании мы используем «идеализированную схему» описания поведения фирм (1.15), (1.16) [6]. Мы также будем предполагать, что банкротств фирм не происходит, процент за кредит всегда положителен $r(t) > 0$, норма выхода остаточного продукта не зависит от возраста $B(\theta) = B = \text{const}$ и имеется избыток трудовых ресурсов.

Если банкротства не происходит, то в жизненном цикле фирмы выделяются два события (моменты переключения управлений):

а) момент демонтажа и распродажи мощности:

$$\tau^u(t) = \inf_{\theta \geq 0} \{\theta \mid \psi(t, \theta) < 0\}, \tag{3.1}$$

где ψ определено в (1.15),

б) момент расплаты с задолженностью:

$$\begin{gathered} h(t, \tau) = 1(\tau - \tau^l(t))(z^L + z^U); \; d(t, \tau) = z^L + z^U - h, \\ \tau^l(t) = \min\{\tau^u(t), \sup_{\theta \geq 0} \{\theta \mid l(t, \theta) > 0\}\}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

[6] Для односекторной модели «сглаженное» и «идеализированное» описания процесса формирования спроса на кредит совпадают.

Величина τ^u задает срок существования фирмы при $r > 0$. Из (1.15) следует, что $y = m$ при $t - \tau < \tau^u$, т. е. в идеализированной схеме, в отличие от сглаженной, мощности всегда загружены полностью. В дальнейшем будем рассматривать только траектории, на которых фирмы расплачиваются с задолженностью за счет выручки от продажи произведенного живым трудом продукта. Численные эксперименты показывают, что выполнения условия $\tau^l < \tau^u$ можно добиться при всех режимах, описанных в разд. 2.

Интегрируя уравнение (1.4) с учетом (1.16) и подставляя в (1.22), получаем

$$Y^l(t) = \int\limits_{t-\tau^u(t)}^{t} d\tau I(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}, \tag{3.3}$$

$$Y^U(t) = BI(t - \tau^u(t)) e^{-\mu(t-\tau^u(t))}, \tag{3.4}$$

причем из (1.23)

$$R^L(t) = \nu \int\limits_{t-\tau^u(t)}^{t} d\tau I(\tau). \tag{3.5}$$

Совокупная прибыль фирм составляет

$$Z(t) = p(Y^L + Y^U) - sR^L,$$

а совокупные платежи погашения H в силу (1.17) и условия $\tau^l < \tau^u$

$$H(t) = p(t) \int\limits_{t-\tau^l(t)}^{t} d\tau (p(t) - \nu s e^{\mu(t-\tau)}) I(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}.$$

Из условия равновесия на рынке продукта

$$p[Y^L + Y^U] = sR^L + pbI \tag{3.6}$$

и (1.8) получаем, что

$$pbI = Z. \tag{3.7}$$

Интегрируя (1.7), получаем из (3.2) и условия $\tau^l < \tau^u$ уравнение для τ^l:

$$0 = bp(t) - \int\limits_{t-\tau^l}^{t} dt' (p(t') - s\nu e^{\mu(t'-\tau^l(t'))}), \tag{3.8}$$

у которого τ^l является минимальным положительным решением. Для $L = \int d\tau l(t, \tau)$ из (1.7) получаем уравнение $dL/dt = p(t)bI(t) + r(t)L(t) - H(t)$, но при $r > 0$ выполнено условие $L = [(1 - \xi)/\xi] R$ (см. [1]), и, учитывая, что

$$dR/dt = \pi Y, \tag{3.9}$$

получаем

$$pbI = \frac{1-\xi}{\xi}[\pi(Y^L + Y^U) - rR] + H. \tag{3.10}$$

Из (1.28) имеем $dD/dt = \rho D + Z - H + \pi(Y^L + Y^U)$. Но при $r > 0$ депозиты $D = (1/\xi)R$, поэтому из (3.10), (3.7)

$$\rho = r(1-\xi).$$

Из (3.1), (1.15) и выражений для m и l определяем

$$\tau^u = \frac{1}{\mu}\ln\frac{p - (\mu + r(1-\xi))B}{\nu s}. \tag{3.11}$$

Наконец, из (1.14) получаем выражение для r:

$$r = 1/b - \beta + \nu s/pb. \tag{3.12}$$

Соотношения (3.3)—(3.12) — это уравнения односекторной модели в интегральной форме. Некоторое аналитическое исследование этих нелинейных и сильно связанных между собой уравнений удается провести лишь в некоторых предельных случаях.

Рассмотрим режим, в котором $I(t)$ растет достаточно быстро, а τ^u, τ^l достаточно велики и меняются медленно:

$$I(t) \gg I(t-\tau^u), \quad I(t) \gg I(t-\tau^l), \quad \dot{\tau}^l, \dot{\tau}^u \sim 1. \tag{3.13}$$

Тогда, в силу (3.3)—(3.4), $Y^U \ll Y^L$ и $Y \approx Y^L$. Дифференцируя (3.3) и отбрасывая малые члены, получаем

$$dY/dt = I(t) - \mu Y. \tag{3.14}$$

Аналогично из (3.5)

$$dR^L/dt = \nu I, \tag{3.15}$$

а из (1.17), (3.7)

$$pbI = Z \approx H \approx pY - sR^L. \tag{3.16}$$

Чтобы найти цену p в рассматриваемом приближении, используем соотношения (3.12) для процента r и (3.9) для резерва R. Предположим, что рост I начался задолго до рассматриваемого момента времени t с малых значений I, Y, R, R^L. В силу (3.14), (3.9) это соответствует выбору начальных условий в (3.14), (3.9), таких что

$$Y(t) = e^{-\mu t}\int_{-\infty}^{t} e^{\mu\tau} I(\tau)\,d\tau, \quad R = \pi\int_{-\infty}^{t} d\eta\, Y(\eta).$$

Подставляя первое выражение во второе после интегрирования по частям, получаем $R = \frac{\pi}{\mu}Y - \frac{\pi}{\mu}\int_{-\infty}^{t} d\tau\, I(\tau)$. В силу (3.15), в принятом приближении последний член равен R^L/ν, так что

$$R \approx (\pi/\mu)[Y - R^L/\nu]. \tag{3.17}$$

Из (3.16) имеем, в силу (3.7) в принятом приближении $rR = \pi Y$ или в соответствии с (3.17),

$$r = \frac{\mu}{R^L/\nu Y - 1}. \tag{3.18}$$

Таким образом, в принятом приближении (3.13) система (3.3) — (3.12) заменяется следующими уравнениями:

$$dY/dt = -\mu Y + I, \tag{3.19}$$

$$dR^L/dt = \nu I, \tag{3.20}$$

$$pbI = Y - sR^L/p, \tag{3.21}$$

$$\frac{1}{b} - \beta - \frac{\nu s}{bp} = \frac{\mu}{R/\nu Y - 1}. \tag{3.22}$$

Исключая из (3.19), (3.22) p и I, получим

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{1}{b} - \mu - \left(\frac{1}{b} - \beta\right)x(t) + \frac{\mu x(t)}{x(t) - 1}, \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{R^L}\frac{dR^L}{dt} = \left[\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{b} - \beta\right)x(t) + \frac{\mu x(t)}{x(t) - 1}\right] \Big/ x(t), \tag{3.24}$$

где

$$x = R^L/\nu Y \tag{3.25}$$

— безразмерная величина средней трудоемкости производства.

Можно указать некоторые априорные границы изменения переменной x, вне которых решение системы (3.23), (3.24) заведомо непохоже на решение исходной системы. Условие $r > 0$ в силу (3.18) сводится к неравенству

$$x > 1, \tag{3.26}$$

которое просто означает, что средняя трудоемкость R^L/Y должна быть больше номинальной ν. Условие положительности цены в силу (3.22) выражается в виде

$$x > 1 + b\mu/(1 - b\beta), \tag{3.27}$$

причем $p \to +\infty$ при $x \to 1 + b\mu/(1 - b\beta)$. Таким образом, экономически осмысленное решение (p, $r > 0$), удовлетворяющее (3.23), возможно только, если

$$1 - \beta b > 0. \tag{3.28}$$

Естественное требование положительности инвестиций, в силу (3.21), (3.22), выражается в виде

$$(1 - b\beta)\, x^2 - [2 - b(\beta - \mu)]\, x + 1 < 0.$$

Из этого неравенства и (3.27) получаем, наконец, искомые границы [7].

$$1 + \frac{\mu b}{1 - b\beta} < x < \frac{2 - b(\beta - \mu) + \sqrt{b^2(\beta - \mu)^2 + 4\mu b}}{2(1 - b\beta)}. \tag{3.29}$$

[7] Численные эксперименты с моделью показывают, что фактические границы применимости данного приближения уже: x должно быть близким к $1/(1 - b\beta)$.

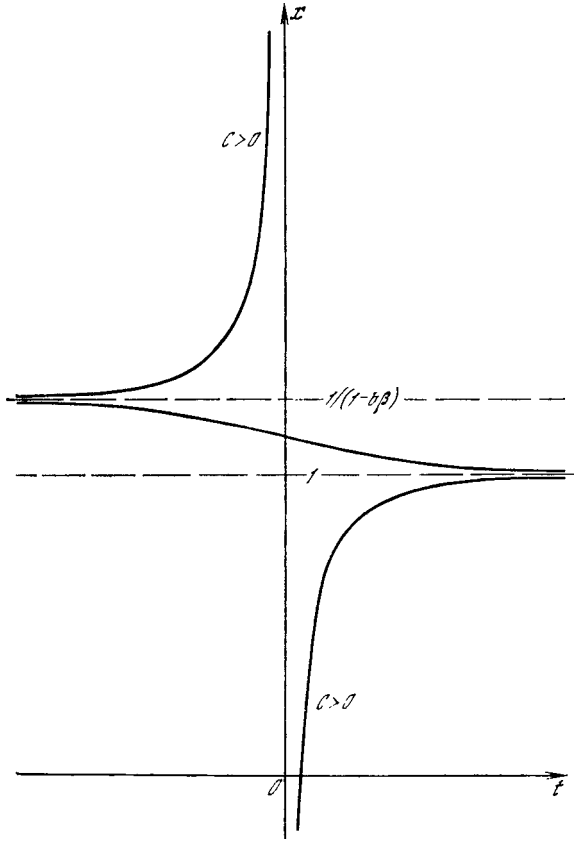


Рис. 7

Напомним, что к левой границе x стремится при $p \to +\infty$, а правая граница соответствует нулевым инвестициям.

Сбалансированный рост характеризуется одинаковыми темпами роста объемных величин. Приравнивая темпы роста Y и R^L из (3.23), (3.24), получим значение x на сбалансированном росте:

$$x = \hat{x} = 1/(1 - b\beta). \tag{3.30}$$

При естественном условии $\beta \geqslant \mu$ (см. [1]) значение $\hat{x}$ лежит в интервале (3.29).

Из (3.23)—(3.25) легко получить уравнение изменения x:

$$dx/dt = (1/b)\,(x - 1)\,[(1 - b\beta)\,x - 1]. \tag{3.31}$$

Точка равновесия $x = 1$ лежит левее допустимого интервала (3.29), она соответствует отрицательным ценам и инвестициям. Вторая точка равновесия — это $\hat{x}$. Общее решение (3.31) имеет

вид

$$x(t) = 1 + \frac{b\beta}{(1 - b\beta)[1 + Ce^{b\beta t}]}. \tag{3.32}$$

При $C > 0$ $x(t) \to \frac{1}{1 - b\beta} - 0$ при $t \to -\infty$, а при $C < 0$ $x(t) \to \to \frac{1}{1 - b\beta} + 0$ при $t \to -\infty$, откуда заключаем, что точка $\hat{x}$ — точка равновесия уравнения (3.31), она же — точка сбалансированного роста,— неустойчива.

На рис. 7 показан вид интегральных кривых при $C = 0$, $C = C_1 > 0$, $C = C_2 < 0$. Интегральная кривая, соответствующая $C < 0$, имеет две ветви. Нижняя ветвь при $x < 1$ не имеет экономического смысла: отрицательные цены, инвестиции, производительность труда выше наибольшей. На верхней ветви $x(t)$ за конечное время возрастает до $+\infty$. При этом в силу (3.21) инвестиции падают и при x, превышающем правую границу интервала (3.29), становятся отрицательными. Темпы роста объемных величин в силу (3.23), (3.24) снижаются, становясь отрицательными. Другими словами, экономическая система терпит крах. Численные эксперименты с моделью без упрощений показывают, что в этом случае система постепенно выходит за рамки применимости данного приближения (см. (3.13)), но, тем не менее, как правило, развал экономики все же наступает.

Интегральная кривая, соответствующая $C < 0$, имеет одну ветвь. На этой ветви $x(t)$ падает от равновесного значения $1/(1 - b\beta)$ до 1. Падение $x(t)$ соответствует повышению средней производительности труда. Темпы роста объемных величин Y и R^L увеличиваются, стремясь к $+\infty$ при $x \to 1$. При приближении x к $1 + b\mu/(1 - b\beta)$ в соответствии с (3.29) цена стремится к $+\infty$, и при дальнейшем движении по интегральной кривой мы попадаем в область отрицательных цен (выходим за границы интервала (3.29)). Численные эксперименты с моделью показывают, что по мере повышения цены фирмы расплачиваются с задолженностью все быстрее и при конечном значении цены нарушается условие (3.13) применимости рассматриваемого приближения.

Описанная выше динамика величины x соответствует двум упомянутым в разд. 2 типам переходных процессов в модели. Соотношение (3.32) позволяет найти условие, отделяющее начальные данные, при которых система разваливается, от начальных данных, при которых она выживает. Условие $C > 0$ при $x > 1$ в силу (3.32) означает, что $x(t) < 1/(1 - b\beta)$ или, в силу (3.25), что

$$Y/R^L > (1 - b\beta)/\nu. \tag{3.33}$$

На основании приведенного выше анализа и численных экспериментов с моделью можно утверждать, что если средняя производительность труда Y/R^L больше $(1 - b\beta)/\nu$, то система, как правило, выживает, а если меньше, то погибает. Таким образом, для «живучести» экономической системы капиталистического рыноч-

ного типа требуется достаточный уровень развития производительной силы общественного труда.

Из (3.21) можно получить выражение для доли вновь созданных мощностей

$$\sigma = \frac{I}{Y} \approx \frac{1}{b}\left[1 - (1 - b\beta)x - \frac{b\mu x}{x-1}\right]. \tag{3.34}$$

Из (3.34), (3.31) при $1 < x < 1/(1 - b\beta)$ вытекает, что

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{b}\left[-(1 - b\beta) - \frac{b\mu}{(x-1)^2}\right]\frac{dx}{dt} > 0 \text{ при } \frac{dx}{dt} < 0.$$

Это соотношение показывает, что для выживания системы нужен преимущественный рост производства средств производства. «Для этого требуется, чтобы общество могло ждать; чтобы значительную часть уже созданного богатства оно могло изымать как из непосредственного индивидуального потребления,— с тем чтобы эту часть богатства употреблять на труд, *не являющийся непосредственно производительным* (в пределах самого процесса материального производства). Это требует высокого уровня уже достигнутой производительности...» (*Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 46. Ч. II. С. 216).

Теперь рассмотрим упрощенное описание колебаний около сбалансированного роста. Для простоты полагаем, что $B = \text{const} = b$ и, как и выше, что $s = \text{const}$, $r > 0$, $\tau^u > \tau^l$. Как уже говорилось выше, численные эксперименты показывают, что колебания в односекторной модели постепенно затухают и сходятся к сбалансированному росту, приблизительно сохраняя свой период, причем специальным подбором параметров характерное время затухания этих колебаний можно сделать неопределенно большим. На основании этих наблюдений мы делаем предположение, что динамика интенсивных переменных (p, r, Y/R^L, I/Y, R/Y и т. п.) системы (3.3)—(3.12) сходна с динамикой обычного линейного маятника с трением. Типичными явлениями такого маятника являются затухающие колебания, но при специальном подборе параметров, когда трение обращается в нуль, возникают периодические движения с произвольной амплитудой и не зависящим от нее периодом. Поскольку такая аналогия верна, условия возникновения незатухающих колебаний в односекторной модели и их период можно найти, изучая систему, получающуюся из (3.3)—(3.12) линеаризацией около сбалансированного роста. Чтобы найти линеаризованную систему, положим

$$\begin{aligned}
&p(t) = p_0[1 + \varepsilon p_1(t) + O(\varepsilon)], \qquad \tau^u(t) = \tau_0^u[1 + \varepsilon\tau_1^u(t) + O(\varepsilon)],\\
&\tau^l(t) = \tau_0^l[1 + \varepsilon\tau_1(t) + O(\varepsilon)], \qquad I(t) = I_0 e^{\gamma t}[1 + \varepsilon I_1(t) + O(\varepsilon)],\\
&Y^U(t) = Y_0^U e^{\gamma t}[1 + \varepsilon Y_1^U(t) + O(\varepsilon)],\\
&Y^L(t) = Y_0^L e^{\gamma t}[1 + \varepsilon Y_1^L(t) + O(\varepsilon)],\\
&R^L(t) = R_0^L e^{\gamma t}[1 + \varepsilon R_1^L(t) + O(\varepsilon)],
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$Y^Z(t) = Y_0^Z e^{\gamma t}[1 + \varepsilon Y_1^Z(t) + O(\varepsilon)],$$
$$R^Z(t) = R_0^Z e^{\gamma t}[1 + \varepsilon R_1^Z(t) + O(\varepsilon)],$$
$$R(t) = R_0 e^{\gamma t}[1 + \varepsilon R_1(t) + O(\varepsilon)],$$

где γ — неизвестный заранее, определяемый параметрами модели темп сбалансированного роста, $Y^Z(t) = \int\limits_{t-\tau^u(t)}^{t} d\tau y(t,\tau)$ — выпуск фирм, расплатившихся с задолженностью, а R^Z — число занятых на этих фирмах. Величины с индексом 0 в правой части — положительные постоянные, характеризующие сбалансированный рост, а величины с индексом 1 — переменные относительные отклонения от него. Эти отклонения мы считаем малыми ($\varepsilon \to 0$). Подставляя (3.35) в (3.3)—(3.12) и приравнивая члены нулевого и первого порядка по ε, после довольно утомительных выкладок приходим к системе, определяющей параметры сбалансированного роста (нулевое приближение по ε):

$$Y_0^L = \frac{I_0}{\gamma+\mu}[1 - e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^u}], \quad R_0^L = \frac{\nu I_0}{\gamma}[1 - e^{-\gamma\tau_0^u}],$$
$$Y_0^Z = \frac{I_0}{\gamma+\mu}[e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^l} - e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^u}], \quad R_0^Z = \frac{\nu I_0}{\gamma} e^{-\gamma(\tau_0^l+\tau_0^u)},$$
$$R_0 = \frac{\pi I_0}{\gamma(\gamma+\mu)}[1 - (1 - (\gamma+\mu)b)e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^u}], \quad Y_0^U = bI_0 e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^u}. \tag{3.36}$$

$$\frac{p_0}{s\nu} = \frac{(\gamma+\mu)[1 - e^{-\gamma\tau_0^u}]}{\gamma[1 - (\gamma+\mu)b][1 - e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^u}]}, \quad \delta \triangleq \frac{1}{b} - \beta - \frac{\nu s}{p_0},$$
$$p_0(Y_0^U + Y_0^Z) - sR_0^Z = \frac{(1-\xi)\pi}{\xi}(Y_0^L + Y_0^U)\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right),$$
$$b = \frac{[1 - e^{-(\delta+\mu)\tau_0^l}]}{\delta+\mu} - \frac{s\nu}{p_0}\frac{[1 - e^{-\delta\tau_0^l}]}{\delta},$$
$$\tau_0^u = \frac{1}{\mu}\ln\left\{\frac{p_0}{s\nu}[1 - b\mu - (1-\xi)(1 - b\beta)] + (1-\xi)\right\},$$

и системе, описывающей малые отклонения от сбалансированного роста (первое приближение по ε), которая согласно нашей гипотезе должна иметь периодические решения:

$$Y_1^U = I_1 - \frac{a_0}{\mu}[(\gamma+\mu)p_1 + \dot{p}_1],$$
$$I_1 = \frac{1}{\gamma+\mu}\left\{-(\sigma_0 - \gamma - \mu)\left[(\gamma+\mu)\frac{a_0}{\mu}p_1 + \frac{a_0}{\mu}\dot{p}_1\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{b}Y_1^L + \left(\frac{1}{b} - \gamma - \mu\right)(p_1 - R_1^L)\right.,$$
$$\dot{Y}_1^L = \left(\frac{1}{b} - \gamma - \mu\right)(Y_1^L + p_1 - R_1^L), \quad \tau_0^u\tau_1^u = \frac{a_0}{\mu}p_1,$$

$$\dot{R}_1^L = -\frac{\gamma}{b(\gamma+\mu)}(R_1^L - Y_1^L) + \gamma\left[\frac{a_0}{\mu}\left(\frac{\sigma_0}{x_0} - \sigma_0 + \mu\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b(\gamma+\mu)} - 1\right] p_1 + \frac{a_0\sigma_0}{\mu}\left[\frac{1}{x_0} - \frac{\gamma}{\gamma+\mu}\right]\dot{p}_1,$$

$$\dot{Y}_1^Z = -(\gamma+\mu)Y_1^Z + \left[\frac{\sigma_0-\gamma-\mu}{z_0} + \gamma + \mu\right][I_1(t-\tau_0^l) -$$

$$-(\gamma+\mu)\tau_0^l\tau_1^l - \tau_0^l\dot{\tau}_1^l] - \frac{\sigma_0-\gamma-\mu}{z_0}Y_1^L,$$

$$\dot{R}_1^Z = -\gamma R_1^Z + \left[\frac{x_0}{y_0z_0}\left(\frac{\sigma_0}{x_0} - \gamma\right) + \gamma\right][I_1(t-\tau_0^l) - \gamma\tau_0^l\tau_1^l -$$

$$-\tau_0^l\dot{\tau}_1^l] - \frac{x_0}{y_0z_0}\left(\frac{\sigma_0}{x_0} - \gamma\right)(Y_1^L + a_0p_1),$$

$$\dot{p}_1 = -\gamma R + \frac{\sigma_0}{(1/b + \sigma_0 - \gamma - \mu)}\left[\frac{1}{b}Y_1^L + (\sigma_0 - \gamma - \mu)Y_1^L\right],$$

$$\left\{\frac{z_0}{b} + \sigma_0 - \gamma - \mu + \frac{(1-\xi)\pi}{\xi p_0}\left(\frac{1}{b} + \sigma_0 - \gamma - \mu\right)\left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\gamma}\right\}p_1 = -\left(\frac{1}{b} + \sigma_0 - \gamma - \mu\right)\left[1 - \frac{(1-\xi)\pi}{\xi p_0}\left[Y_1^{LI} -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{b}Y_1^L + \frac{r_0}{\gamma}R_1\left(\frac{1}{b} + \sigma_0 - \gamma - \mu\right)\right]\right\} -$$

$$-\frac{z_0}{b}Y_1^Z + \left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)y_0z_0R_1^Z, \tag{3.37}$$

$$c_0\tau_0^l\{\dddot{\tau}_1^l + (2r_0 + \mu)\ddot{\tau}_1^l + r_0(r_0+\mu)\dot{\tau}_1^l\} = b\ddot{p}_1(t-\tau_0^l) -$$

$$-\ddot{p}_1e^{-(r_0+\mu)\tau_0^l} - b(r_0 + \mu - \beta)\ddot{p}_1(t-\tau_0^l) + \left[r_0e^{-(r_0+\mu)\tau_0^l} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)c_0\right]\dot{p}_1 - \left[b\mu\left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(1-e^{-r_0\tau_0^l})}{r_0} + r_0b(\beta-\mu) + \left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)c_0\right]\dot{p}_1(t-\tau_0^l) +$$

$$+\left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)\left[\left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)b\mu e^{r_0\tau_0^l} -\right.$$

$$\left.-r_0c_0\right][p_1 - p_1(t-\tau_0^l)].$$

Здесь использованы обозначения

$$\sigma_0 = I_0/Y_0,\quad a_0 = 1 - (1-\xi)e^{-\mu\tau_0^l},\quad x_0 = R_0^L/\nu Y_0,$$

$$y_0 = R_0^Z/\nu Y_0^Z,$$

$$z_0 = Y_0^Z/Y_0^L,\quad r_0 = 1/b - \beta - s\nu/bp_0,\quad c_0 = [e^{-\mu\tau_0^l} - s\nu/p_0]e^{-r\tau_0^l}.$$

Система (3.37) — это система линейных уравнений девятого порядка с отклоняющимся аргументом. Ее общее решение зависит от девяти произвольных функций, так что набор ее частных решений необозримо обширен [8]. Поэтому, чтобы получить какие-то конструктивные выводы, надо ограничиться каким-то разумным классом частных решений. Вспомним (см. разд. 2), что колеба-

ния в модели связаны с периодическим возникновением «горбика» в распределении мощностей по возрастам $m(t, \tau) = I(\tau)e^{-\mu(t-\tau)}$ и что новый «горбик» возникает при демонтаже предыдущего. Это наблюдение подсказывает, что искомое периодическое решение (3.37) должно иметь период τ_0^u — срок жизни фирмы при сбалансированном росте. Узкий и высокий «горбик» в распределении идеализированно можно описать как сингулярную компоненту (δ-функцию), входящую в состав этого распределения. Иначе говоря, мы будем искать обобщенное решение (3.37), для которого

$$I_1 = \tilde{I}_1(t) + i_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\tau_0^u), \tag{3.38}$$

где $\tilde{I}_1$ — непрерывная функция, а $i_0 > 0$ — относительная интенсивность возникающего в моменты $k\tau_0^u$ горбика [8], которую можно выбрать произвольно, так как система (3.37) линейна.

Отыскивая решение вида (3.38), мы предполагаем, что макроэкономические переменные, такие, как p_1, r_1, Y_1, и не содержат сингулярности, и являются кусочно-непрерывными функциями, а τ_1^l даже кусочно гладкой. Кроме I_1, сингулярную составляющую имеет только поток остаточного продукта Y_1^U. Наглядно процесс воспроизводства при наличии сингулярности («горбика») можно описать следующим образом. На интервале $((k-1)\tau_0^u, k\tau_0^u)$ «горбик» стареет и уменьшается вследствие выбытия. Он вносит конечный и непрерывно изменяющийся вклад в интегральные величины типа R, Y, R^U, R и т. д. Воспроизводство происходит непрерывно за счет создания мощностей $I_0 e^{\gamma t}(1 + \varepsilon \tilde{I}_1(t))d\tau$ и ликвидации мощностей $I_0 e^{\gamma(t-\tau_0^u)}(1 + \varepsilon \tilde{I}_1(t - \tau_0^u))d\tau$. При ликвидации «горбика» поток остаточного продукта Y^U резко (формально до бесконечности) возрастает, цена и срок службы τ^u вследствие этого скачком падают, поэтому вместе с «горбиком» мгновенно демонтируется и конечная часть непрерывного распределения мощностей. Возникшего остаточного продукта как раз хватает на воспроизводство нового «горбика» интенсивностью $\varepsilon I_0 i_0 e^{\gamma k \tau_0^u}$, так что в условии равновесия (3.6) после линеаризации по ε сингулярности I и Y^U точно компенсируют друг друга и сингулярности цены не возникает. Если подставить (3.38) в (3.37) и применить преобразование Фурье периодических обобщенных функций $\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(\tau) e^{-i\nu 2\pi\tau/\tau_0^u}$, то из (3.37) получится алгебраическая система для фурье-образов неизвестных функций. Разлагая эти образы по обратным степеням целочисленного параметра преобразования ν, получаем ряд последовательно усложняющихся

[8] Абсолютная интенсивность, в силу (3.35), составляет $\varepsilon I_0 i_0 e^{\gamma k \tau_0^u}$.

линейных алгебраических систем для коэффициентов разложения[9]. Первая из этих систем разрешима всегда, а вторая только при условии

$$p_0 = (1 - \xi)\pi/\xi, \tag{3.39}$$

где p_0 находится из (3.36)

Это и есть искомое необходимое условие периодичности решений односекторной модели. Численные эксперименты подтверждают, что при выполнении (3.39) колебания затухают очень слабо. Из (3.39), (3.36) получается выражение для периода этих незатухающих колебаний через параметры модели

$$T = \tau_0^u = \frac{1}{\mu} \ln \left\{ \frac{(1-\xi)\pi}{\xi s \nu} [1 - b\mu - (1-\xi)(1 - b\beta) + (1-\xi)] \right\}.$$

Что же касается двухсекторной модели, то в ней, как показывают эксперименты, жесткого условия существования, видимо, нет. Возможность изменения межотраслевых пропорций дает дополнительную степень свободы, за счет которой незатухающие колебания с определенной амплитудой (автоколебания) возникают в широком диапазоне значений параметров модели.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность профессору А. А. Петрову за постоянное внимание к работе.

Abstract

The closed multisector model of the market economy is considered. It is based upon the description of the long-term planning procedure used by firms. Numerical experiments show that the model gives qualitative description of the business activity cycle phases. Results of the investigation of one-sector version of the model are also presented. They include conditions of appearence and explisit expression of the period of weakly damping oscillations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оленев Н. Н., Поспелов И. Г.* Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 163—173.
2. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост. М.: Статистика, 1974. 472 с.
3. *Аукуционек С. И.* Современные буржуазные теории и модели цикла: Критич. анализ. М.: Наука, 1984.
4. *Данишевский М. Г., Федоров С. А., Шапанин А. А.* Агрегирование и понятие производственной мощности. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 40 с.

---

[9] В силу крайней громоздкости мы эти системы не приводим. Как известно, асимптотика преобразования Фурье при $\nu \to +\infty$ определяется степенью гладкости прообразов, поэтому указанные системы фактически есть условия согласованности сингулярных компонент, скачков и скачков производных разных порядков у искомого решения системы (3.37)

5. *Оленев Н. П., Петров А. А., Поспелов И. Г.* Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 46—60.
6. *Крутов А. П., Романко А. В.* Влияние государственных расходов на характер развития рыночной экономики // Там же, С. 19—45.
7. *Краснощеков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983. 264 с.
8. *Кришталь В. В.* Производственная функция капиталоемкой отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 60—77.

УДК 519.86

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИКИ: МОДЕЛЬ ОБЩЕСТВЕННОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА В ПЛАНОВОЙ ЭКОНОМИКЕ

А. П. Крутов, А. А. Петров, И. Г. Поспелов

Название «системный анализ экономики» обозначает направление исследований, начатых в 1975 г. в Вычислительном центре АН СССР. Оно возникло как попытка подойти к решению некоторых проблем математической теории экономических систем.

Традиционно математическую экономику разделяют на микроэкономику и макроэкономику. В микроэкономике изучают поведение отдельных экономических агентов — производителей и потребителей — при заданных внешних условиях. В макроэкономике изучаются две классические задачи — экономического равновесия и экономического роста. Предметом теории экономического равновесия являются качественные свойства состояний экономики, в которой экономические агенты связаны товарно-денежными отношениями. Производственные возможности производителей и предпочтения потребителей считаются заданными. Из явного рассмотрения выпадает процесс изменения производственных мощностей и воздействие на него отношений экономических агентов. Теория экономического роста исследует процесс изменения производственных мощностей в постановке задачи об оптимальном росте. В модель включается явное описание технологических связей между экономическими агентами, но не описываются явным образом отношения агентов.

Задача об оптимальном росте формулируется как задача оптимального управления, множество допустимых значений функционала которой стеснено уравнениями, описывающими технологические связи. Неявно предполагается: отношения агентов таковы, что из всех возможных связей реализуются необходимые для оптимального роста. В неоклассической теории это оформлено в виде гипотезы: оптимальный рост проходит через последовательность

© А. П. Крутов, А. А. Петров, И. Г. Поспелов, 1989

локальных состояний равновесия. Гипотезу оправдывает экономическая интерпретация соотношений принципа максимума Понтрягина. Но опять-таки остаются явным образом не описанными отношения экономических агентов в процессе расширения производства.

К тому же заметим, что и в теории равновесия, и в теории роста результаты получают чаще всего при предположении, что товарно-денежные отношения суть чисто рыночные отношения. Неоклассическая интерпретация оптимального экономического роста справедлива только в случае совершенного рынка. Классические результаты микроэкономики относятся к экономическим системам в условиях совершенного рынка.

Оказывается, что ни теория экономического равновесия, ни теория экономического роста, ни обе они вместе не дают удовлетворительного описания процесса общественного воспроизводства. Системный анализ экономики возник как требование изучать процесс общественного воспроизводства в единстве, чтобы нащупать подходы к решению проблемы. Основан он на общих идеях политической экономии Маркса. Характер общественного воспроизводства определяется взаимодействием производительных сил и производственных отношений, свойственных изучаемой экономике. Следовательно, в математическом описании надо явным образом выделить основных экономических агентов и описать не только технологические связи, но и экономические механизмы регулирования процессов производства, обращения и потребления, так как в них воплощаются совокупные действия многочисленных экономических агентов. Таким образом можно получить замкнутое описание процесса воспроизводства. Надо стараться строить описания на возможно меньшем числе независимых гипотез. Для этого, во-первых, надо явно описывать особенности производственных процессов и технологических связей между ними, структуру собственности, кредитно-финансовой системы, системы обменов и распределения, регулирующих производство и обращение, а также процессы воспроизводства трудовых ресурсов. Во-вторых, надо стараться выводить макросоотношения из исходных микроописаний процессов и отношений в экономике. Результаты исследования моделей обязательно надо сравнивать с качественными особенностями наблюдавшейся эволюции моделируемой системы.

Таковы основные декларации системного анализа экономики. Не все пока удается воплотить в конкретных исследованиях. Представление о состоянии системного анализа экономики [1] можно получить из [1, с. 7—196]. Отметим только, что в основном до сих пор изучалась рыночная экономика при предположении, что рынки совершенно конкурентны. В этой статье мы представим первые результаты исследования противоположной системы — предельно централизованной плановой экономики.

---

[1] Кстати, надо отметить, что системный подход к описанию экономики содержится в работе [2].

1. Основные предположения

Будем рассматривать изолированную экономическую систему, основанную на общественной собственности на средства производства. Соответственно весь произведенный продукт принадлежит обществу в лице государства. Государство планирует производство, обмены и распределение общественного продукта. Государственный план есть план-директива, обязательная для исполнения. В системе существуют элементы товарно-денежных отношений, они ограничены кредитно-финансовой сферой и сферой розничной торговли.

Выделим основных экономических агентов. Директивный орган дает общие задания на выработку программ социального и экономического развития. Плановый орган формирует планы развития производства, планы государственных расходов и потребления трудящихся. Финансово-кредитные органы в соответствии с государственным планом сводят баланс доходов и расходов населения, формируют кредитный и кассовый планы и государственный бюджет. Хозяйственные органы управляют производством, интерес их в том, чтобы обязательно выполнить государственный план. Трудящиеся осуществляют процесс производства, получают доход в виде заработной платы и процента по вкладам и расходуют его на потребление. Часть доходов, которую они не могут реализовать, трудящиеся накапливают в виде вкладов в банке. Предложение труда и потребительский спрос трудящихся плохо поддаются планированию и вносят существенные возмущения в систему. Численностью и доходами других социальных групп пренебрегаем. Наконец, розничная торговля реализует потребительский продукт.

Производственные отношения в предельно централизованной экономике характеризуем двумя особенностями. Во-первых, считаем, что вся прибыль хозяйства, розничной торговли и банка централизуется в государственном бюджете и служит источником финансирования всех капиталовложений и государственных расходов. Во-вторых, хозяйственные органы обязаны выполнить государственный план любой ценой. Если им не хватает трудовых ресурсов для выполнения плана, то план выполняется ценой снижения качества продукта. Некачественный продукт, смешиваясь с качественным, поступает в обращение и тоже вносит возмущение в систему.

Сразу же отметим, что многие описания сильно схематизированы. Это первый вариант модели, и мы сознательно шли на схематизацию, чтобы в замкнутом системном описании отразить самые характерные черты централизованной экономики. Результаты исследования модели (они приведены в разд. 4 статьи) до некоторой степени оправдывают принятую схематизацию.

2. Описание модели

Для простоты будем считать, что все хозяйство сагрегировано в одну отрасль, выпускающую однородный продукт — валовый продукт народного хозяйства. Часть продукта используется в качестве сырья в процессе производства, оставшийся конечный продукт делится на фондообразующий и продукт конечного потребления. Продукт конечного потребления расходуется на потребление трудящихся и государственное потребление. Опять-таки для простоты будем считать хозяйство технологически однородным. Технологию будем описывать нормами затрат сырья a, однородного живого труда λ на выпуск единицы продукта, характерным временем τ, связанным с длительностью технологического цикла и нормативом фондоемкости единицы продукта b. Производственные возможности хозяйства зададим мощностью M — максимально возможным при соблюдении технологии выпуском продукта в единицу времени. С мощностью связаны основные фонды хозяйства, величина которых bM. Оборотные фонды хозяйства будем отождествлять с технологическим запасом сырья Q. Производственная функция

$$\bar{Y} = \min \{M, Q/a\tau, L/\lambda\} \tag{2.1}$$

связывает выпуск $\bar{Y}$ с мощностью M, оборотными фондами Q и количеством используемого в хозяйстве труда L при условии, что технология не нарушается и сырье качественное. Завершая описание технологической структуры производства, обратим внимание на то, что в модели пока не описан процесс технологических нововведений, и создание каждой дополнительной единицы мощности требует затрат b единиц фондообразующего продукта.

Теперь перейдем к описанию управления производством. Хозяйство обязано выполнить план $\hat{Y}$. В силу возмущений, основной источник которых в отклонении запланированного использования труда от его фактического предложения, план и технологические возможности хозяйства (2.1) могут оказаться несогласованными. Считаем, что независимо от имеющихся ресурсов хозяйство никогда план не перевыполняет, однако ради выполнения плана в хозяйстве может нарушаться технология. Если для выполнения плана не хватает только живого труда, то план выполняется за счет искусственного снижения трудоемкости до уровня

$$\Lambda = L/\hat{Y},$$

где фактический выпуск Y задается выражением

$$Y = \min \{M, Q/a\tau, \hat{Y}\}, \tag{2.2}$$

и в общем случае

$$\Lambda = \min \{\lambda, L/Y\}. \tag{2.3}$$

На единицу выпуска затрачивается a единиц сырья, поэтому оборотные фонды хозяйства изменяются в силу уравнения

$$dQ/dt = V - aY, \tag{2.4}$$

где V обозначает фактический поток поставок сырья.

Технологически необоснованное снижение трудоемкости приводит к выпуску некачественного продукта. Будем считать, что некачественный продукт проникает во все материальные потоки в хозяйстве, а его доля β в выпуске Y меняется достаточно медленно. Поэтому можно считать долю его в технологическом запасе Q той же, что и в выпуске Y. Естественно предполагать, что некачественное сырье требует дополнительных затрат труда для доработки. В результате живой труд L тратится на обработку качественного сырья в количестве $(1 - \beta)\lambda Y$ и на доработку некачественного сырья в количестве $\beta\lambda aY$, так что

$$(1 - \beta)\lambda Y + \lambda a\beta Y \leqslant L.$$

Если, кроме того, предполагать, что в хозяйстве технология нарушается только из-за перенапряженности плана, то из последнего условия находим долю некачественного продукта

$$\beta = \max\left\{0, \frac{1}{1-a}\left(1 - \frac{L}{\lambda Y}\right)\right\}. \tag{2.5}$$

Теперь опишем процесс наращивания мощности хозяйства. Изменение мощности подчиняется обычному уравнению

$$dM/dt = I - \mu M, \tag{2.6}$$

где I — величина вновь создаваемой в единицу времени мощности, а μ — темп деградации мощности вследствие износа. Создание единицы новой мощности требует затрат b единиц фондообразующего продукта, но каждая его единица содержит долю β некачественного продукта. Будем считать, что некачественный продукт не может использоваться для создания мощности. Тогда эффективная норма фондоемкости равна $b/(1 - \beta)$. Количество фондообразующего продукта, необходимое, чтобы обеспечить прирост I новой мощности:

$$X = \frac{b}{1-\beta} I. \tag{2.7}$$

В централизованной экономике расширение производства планируется сверху, в следующем разделе будет описано, как формируется плановый показатель $\hat{X}$.

Через систему материально-технического снабжения произведенный продукт Y распределяется на государственное потребление Z, на потребление трудящихся C, на создание новых мощностей X и на текущие затраты производства V. Деятельность системы материально-технического снабжения схематизируется материальным балансом

$$Y(t - 0) = V(t) + X(t) + C(t) + Z(t), \tag{2.8}$$

в котором θ — характерное время доставки продукта потребителям.

Для простоты предполагаем, что при несоответствии плана поставок $\hat{V} + \hat{X} + \hat{C} + \hat{Z}$ фактическому выпуску система материально-технического снабжения распределяет продукт пропорционально плану:

$$V/\hat{V} = X/\hat{X} = C/C = Z/\hat{Z}. \tag{2.9}$$

Потребительский продукт C доставляется трудящимся через розничную торговлю. Изменение запаса продукта в торговле $Q^{\text{т}}$ подчиняется уравнению

$$dQ^{\text{т}}/dt = C - W, \tag{2.10}$$

в котором W — поток продаж продукта трудящимся.

Величина W определяется потребительским спросом. Считаем, что трудящиеся планируют покупки $\check{W}$, сообразуясь с доходами и розничной ценой (об этом см. ниже) и рассчитывая купить качественный продукт. И так как заработную плату выплачивают всего лишь за выполнение плана, т. е. равно за выпуск и качественного, и некачественного продукта, то типичной может быть ситуация, когда качественный продукт дефицитен. Поэтому, если предложение качественного продукта $(1 - \beta)C$ больше $\check{W}$, то спрос увеличивается. В противном случае, когда $(1 - \beta)C < \check{W}$, спрос уменьшается. Если еще учесть, что покупки ограничены текущим предложением C, потому что не раскупается и оседает в торговом запасе некачественный продукт, то спрос трудящихся

$$W = \min\{\check{W} + (1 - \pi)[(1 - \beta)C - \check{W}],\ C\}. \tag{2.11}$$

Здесь π — постоянный коэффициент, выражающий степень предпочтения трудящимися качественного продукта.

Численность трудящихся для простоты будем считать заданной функцией времени. Предложение труда хозяйству пропорционально численности трудящихся, так что

$$L = L_0 e^{nt}, \tag{2.12}$$

где n — заданный темп роста численности населения.

Соотношения (2.1)—(2.12) описывают материальную сторону общественного воспроизводства. Теперь надо описать финансово-кредитную систему и денежное обращение.

В рассматриваемой экономике есть элементы товарно-денежных отношений. Материальным потокам в хозяйстве соответствуют денежные потоки. Они циркулируют между счетами экономических агентов в государственном банке, а также между кассой банка, розничной торговлей и трудящимися. Взаимодействие финансовых потоков формализуем уравнениями финансовых балансов. Уравнением финансового баланса будем называть уравнение, которое отражает потоки платежей и поступлений, учиты-

ваемые на всех счетах данного агента в банке, и одновременно показывает задолженность агента банку или остатки средств на его счетах.

Обозначим через $N(t)$ задолженность хозяйства банку, а через p — оптовую цену продукта. Задолженность уменьшается вследствие поступления на счет выручки от реализованного продукта $pY(t-\theta)$ и увеличивается из-за расходов хозяйства на восстановление оборотных фондов $pV(t)$, на оплату труда занятых в хозяйстве $\Phi(t)$, на отчисление прибыли в бюджет $G(t)$. Задолженность хозяйства банку возможна потому, что банк выдает краткосрочные ссуды; значит, задолженность растет и вследствие начисления процента r_1 на ссуды. Баланс поступлений и расходов выражается уравнением

$$dN/dt = -pY(t-\theta) + pV + \Phi + G + r_1 N. \tag{2.13}$$

Предполагаем, что банк выдает краткосрочные ссуды для покрытия определенной плановой доли $\hat{\xi}$ прироста оборотных фондов. Следовательно, обеспечением краткосрочной задолженности служит доля $\hat{\xi}$ оборотных фондов экономических агентов, и стоимость этих средств равна величине долга в каждый момент времени. Для хозяйства это предположение запишем в виде [2]

$$N(t) = \hat{\xi} pQ(t). \tag{2.14}$$

Величина $\hat{\xi}$ служит рычагом экономического управления банка.

Аналогично выписывается уравнение финансового баланса розничной торговли:

$$dN^{\text{т}}/dt = -p_1 W + pC + G^{\text{т}} + r_1 N^{\text{т}}. \tag{2.15}$$

Здесь $N^{\text{т}}$ — задолженность торговли, $p_1 W$ — выручка торговли от продаж W по розничной цене p_1, pC — оплата торговлей поставляемого хозяйством продукта, $G^{\text{т}}$ — отчисление прибыли в бюджет, $r_1 N^{\text{т}}$ — начисление процента на задолженность. Затратами труда в торговле пренебрегаем. В соответствии с условиями кредитования

$$N^{\text{т}}(t) = \hat{\xi} p_1 Q^{\text{т}}(t). \tag{2.16}$$

Будем пренебрегать затратами системы материально-технического снабжения и затратами хозяйства на реализацию продукта. Затраты на управленческий аппарат будем считать включенными в государственные расходы.

Обратимся к описанию доходов и сбережений трудящихся. Источники их доходов — заработная плата и процент r_2, начисляемый на их вклады в банке. Количество наличных денег у тру-

[2] На практике банк кредитует также готовый продукт, отгруженный потребителю, но еще не оплаченный им (т. е. товар в пути). В рамках модели стоимость товара в пути составляет величину, близкую к $p\theta Y$. Оказалось, что если товар в пути относить к кредитуемым оборотным средствам, то качественный характер поведения модели не меняется.

дящихся N^L растет за счет получения зарплаты Ф и убывает из-за расходов на потребление p_1W и вкладов в банк u:

$$dN^L/dt = \Phi - p_1W - u. \tag{2.17}$$

Предполагаем, что запас наличных денег у трудящихся пропорционален заработной плате Ф:

$$N^L(t) = \chi\Phi(t). \tag{2.18}$$

Постоянная χ характеризует поведение трудящихся.

Уравнение изменения сбережений трудящихся D записывается очевидным образом:

$$dD/dt = u + r_2D. \tag{2.19}$$

Заметим, что величина u может быть и отрицательной. Это означает изъятие вкладов.

Для простоты не будем учитывать планирование сбережений трудящимися для покупок предметов длительного пользования. Будем считать, что все сбережения делаются вынужденно из-за неудовлетворенного спроса. Значит, всю зарплату за вычетом необходимого прироста наличности трудящиеся планируют потратить на покупки. Если учесть (2.18), то можно выписать выражения для планируемых трудящимися покупок

$$\check{W} = \frac{1}{p_1}\left(\Phi - \chi\frac{d\Phi}{dt}\right) \tag{2.20}$$

и для потока сбережений

$$u = p_1(\check{W} - W). \tag{2.21}$$

Наконец, опишем кредитно-финансовую систему. Вся прибыль хозяйства, розничной торговли и государственного банка поступает в государственный бюджет, из бюджета финансируются все капитальные вложения и все государственные расходы. Государственный банк выполняет кредитные и эмиссионные функции и исполняет государственный бюджет. Деятельность банка и его баланс определяются системой счетов, которые экономические агенты имеют в банке. В систему банковских счетов входят также активные и пассивные счета самого банка, на которых учитываются его операции. Каждый счет в модели описан в виде финансового баланса.

Средства государственного бюджета находятся на счете в банке. Остаток средств бюджета N^G растет из-за поступления прибыли хозяйства G, розничной торговли G^T и банка G^B; уменьшается он по причине финансирования капитальных вложений pX и государственного потребления pZ. Выражается это уравнением

$$dN^G/dt = G + G^T + G^B - pX - pZ. \tag{2.22}$$

По мере необходимости банк осуществляет эмиссию денег E. Величина E может быть и отрицательна, это соответствует изъятию денег из обращения. Сумма денег, выпущенных в обращение

Ω, учитывается на пассивном счете банка. По определению E и Ω,

$$d\Omega/dt = E. \tag{2.23}$$

Часть выпущенной наличности Ω находится в обращении вне банка, а часть — в оборотной кассе банка и обеспечивает его текущие операции. Изменение остатка наличных денег в оборотной кассе K является результатом всех операций банка с наличностью: инкассации выручки розничной торговли p_1W, приема вкладов u, эмиссии денег E и выплат заработной платы Φ. Значит,

$$dK/dt = p_1W + u + E - \Phi. \tag{2.24}$$

Доходы банка состоят из процентов, получаемых от хозяйства и торговли за краткосрочные ссуды $r_1(N + N^{\text{т}})$, а расходы — из процентов, уплачиваемых по вкладам трудящихся r_2D. Прибыль банка G^B, которая представляет собой сальдо доходов и расходов, банк перечисляет в бюджет, а также пополняет ею свой резервный фонд

$$dR/dt = r_1(N + N^{\text{т}}) - r_2D - G^B. \tag{2.25}$$

Заметим, что вся прибыль банка централизуется, хотя она может быть распределена между счетом государственного бюджета и собственным счетом банка.

Сбережения трудящихся D, денежные средства, выпущенные в обращение Ω, и остаток средств бюджета N^G образуют основные кредитные ресурсы банка. Часть этих ресурсов банк предоставляет хозяйству и розничной торговле в виде краткосрочных ссуд для оплаты плановой доли $\hat{\xi}$ их оборотных средств. Обеспечением задолженности хозяйства и розничной торговли является та же доля $\hat{\xi}$ их оборотных фондов.

Сбережения трудящихся D, денежные средства, выпущенные в обращение Ω, остаток средств бюджета N^G и резерв банка R составляют пассивы банка. Активы банка состоят из суммы выданных банком ссуд $N + N^{\text{т}}$ и остатка наличных денег в кассе K. Кредитно-денежная система основана на балансе пассивов и активов банка:

$$D + \Omega + N^G + R = N + N^{\text{т}} + K. \tag{2.26}$$

Это завершает описание финансовой стороны общественного воспроизводства. Оно состоит из материальных балансов (2.4), (2.6), (2.8), (2.10), финансовых балансов (2.13), (2.15), (2.17), (2.19), (2.22)—(2.26) и описаний поведения экономических агентов (2.2), (2.3), (2.5), (2.7), (2.9), (2.11), (2.14), (2.16), (2.18), (2.20). Однако система уравнений (2.2)—(2.26) не замкнута. Чтобы замкнуть ее, надо описать процедуры планирования и процесс реализации плана.

3. Описание процедур планирования и процесса реализации плана

Процедуры планирования играют существенную роль в механизмах регулирования централизованной экономики. Планы стесняют действие экономических механизмов регулирования, поэтому очень важно явным образом описать влияние информированности плановых органов о состоянии хозяйства на характер развития экономики.

Будем условно считать, что модель (2.2)—(2.26) описывает реальный процесс экономического развития. Плановый орган не знает его точно. Чтобы описать информационные ограничения плановиков, построим еще одну модель — модель процедур планирования, имитирующую действия планового органа. Некоторые элементы описаний имеют предварительный, условный характер и основаны не столько на реальных процедурах планирования, сколько на стремлении построить простую, но непротиворечивую модель.

Итак, рассмотрим основные этапы планирования и их модельные представления.

1. Сбор и агрегирование информации. В централизованной экономике существует иерархия планов: долгосрочный, среднесрочный, краткосрочный. Предполагаем, что плановый орган формирует среднесрочные планы на постоянный период T. Период краткосрочного плана обозначим Δ.

В плановый орган поступает агрегированная информация о состоянии хозяйства. В односекторной модели не описать агрегирование по номенклатуре продуктов, поэтому ограничимся агрегированием по времени. Считаем, что плановый орган наблюдает в момент t не текущие значения Y, Φ, L, . . ., а их средние за предыдущий плановый период T величины $\langle Y\rangle_t$, $\langle\Phi\rangle_t$, $\langle L\rangle_t$, . . . Кроме того, мы предполагаем, что плановый орган не способен контролировать в целом качество продукта (это предположение вполне соответствует действительности) и, следовательно, не может оценить величину β. Не знает плановый орган истинных величин запасов Q и производственной мощности M. Мощность он оценивает величиной

$$\tilde{M}(t) = \langle Y\rangle_t. \tag{3.1}$$

Итак, плановый орган в нашей модели составляет план в момент t на период T, исходя из величин

$$\langle Y\rangle_t, \langle X\rangle_t, \langle C\rangle_t, \langle Z\rangle_t, \langle Q^{\text{т}}\rangle_t, \langle\Omega\rangle_t, \langle\Phi\rangle_t, \langle L\rangle_t. \tag{3.2}$$

В такой грубой модели все равно, как усреднять. Удобно взять экспоненциальное среднее величины F, подчиняющееся уравнению

$$\frac{d\langle F\rangle_t}{dt} = \frac{1}{T}(F(t) - \langle F\rangle_t). \tag{3.3}$$

2. Прогнозирование величин, не поддающихся прямому управлению из центра. В первую очередь такой величиной является предложение труда L. Предполагаем, что плановый орган прогнозирует постоянный темп роста трудовых ресурсов $\tilde{n}$ и дает прогноз на конец планового периода

$$\tilde{L}(t+T) = \langle L\rangle_t e^{\tilde{n}T}. \tag{3.4}$$

Плановый орган должен оценить фактические затраты фондообразующего продукта на единицу создаваемой мощности, поскольку согласно (2.7) они явно отличаются от технологического норматива b. Считаем, что используется оценка

$$\tilde{b}_t = \Delta\langle X\rangle_{t-\Delta}/(\langle Y\rangle_t - \langle Y\rangle_{t-\Delta}), \tag{3.5}$$

где Δ — период краткосрочного планирования.

3. Составление натуральных и финансовых планов. Оно основано на следующих принципах.

А. Плановый орган составляет план в агрегированных показателях. В терминах модели он планирует средние значения на конец планового периода. Эти плановые средние обозначаем через $\langle\hat{F}\rangle_{t+T}$, $(F = \{Y, X$ и т. п.$\})$.

Б. Основной плановый показатель — темп роста производства $\hat{\gamma}$, так что план

$$\langle\hat{Y}\rangle_{t+T} = \langle Y\rangle_t e^{\hat{\gamma}T}. \tag{3.6}$$

В. Плановые органы изменяют сложившиеся пропорции распределения продукта только тогда, когда иначе нельзя согласовать запланированный рост (3.6) с условиями (2.6)—(2.8). Это предположение согласуется с практикой планирования «от достигнутого».

Г. Плановый орган действует методом скользящего планирования. Это значит, что план, рассчитанный на интервал $[t, t+T]$, используется, чтобы дать плановые задания хозяйству на интервале $[t, t+\Delta]$. Известно, что такая процедура придает планируемой системе плавный характер, исключая «штурмовщину» в конце плановых периодов. Чтобы реализовать процедуру скользящего планирования, надо построить процедуру дезагрегирования плана. Мы будем использовать дезагрегирование, основанное на предположении об экспоненциальном росте всех показателей в плановом периоде с запланированным темпом $\hat{\gamma}$. Если запланированный темп не сильно отличается от реализовавшегося на предыдущем плановом периоде, то

$$Y(t) \simeq \langle Y\rangle_t(1+\hat{\gamma}T),$$

и дезагрегирование производится по правилу

$$\hat{Y}(t+\Delta) = \langle Y\rangle_t(1+\hat{\gamma}T)(1+\hat{\gamma}\Delta). \tag{3.7}$$

Теперь рассмотрим, как эти принципы реализуются в модели планирования.

Начнем с основополагающего планирования натуральных показателей. Считаем, что темп роста $\hat{\gamma}$ задается директивным органом и обсуждению не подлежит. Так как в модели не описаны технологические нововведения, то реальный длительный рост хозяйства возможен только с темпом, равным фактическому темпу роста предложения труда n. Однако за счет выпуска некачественного продукта (увеличения β) можно обеспечить больший, чем n, темп роста «отчетного» продукта. Плановый орган оценивает трудоемкость продукта как

$$\tilde{\lambda}_t = \langle L\rangle_t/\langle Y\rangle_t.$$

Эта оценка ближе к фиктивной величине Λ из (2.3), чем к технологически обоснованной норме λ. Поэтому выпуск некачественного продукта «сверху» выглядит как рост производительности труда. Чтобы изучить этот опасный «статистический обман», заранее не будем связывать темпы $\hat{\gamma}$ и n.

По оценкам (3.5), (3.6) планового органа, чтобы обеспечить заданный темп $\hat{\gamma}$, надо затратить количество фондообразующего продукта

$$\langle \hat{X}\rangle_{t+T} = \hat{\gamma}\tilde{b}\,\langle Y\rangle_t\, e^{\hat{\gamma}T} \tag{3.8}$$

и количество сырья

$$\langle \hat{V}\rangle_{t+T} = a\,(1 + \hat{\gamma}\tau)\langle Y\rangle_t\, e^{\hat{\gamma}T}. \tag{3.9}$$

Для простоты мы считаем, что плановый орган точно знает технологические параметры a и τ.

Считаем, что доля государственного потребления планируется от базы и постоянна:

$$\langle \hat{Z}\rangle_{t+T}/\langle \hat{Y}\rangle_{t+T} = g = \langle Z\rangle_t/\langle Y\rangle_t.$$

Так получают план государственного потребления

$$\langle \hat{Z}\rangle_{t+T} = g\,\langle Y\rangle_t e^{\hat{\gamma}T}. \tag{3.10}$$

Плановый орган использует материальный баланс в виде

$$\langle \hat{Y}\rangle_{t+T} = \langle \hat{V}\rangle_{t+T} + \langle \hat{X}\rangle_{t+T} + \langle \hat{Z}\rangle_{t+T} + \langle \hat{C}\rangle_{t+T},$$

чтобы, действуя по «остаточному принципу», составить план потребления трудящихся с учетом уже вычисленных $\langle \hat{V}\rangle_{t+T}$, $\langle \hat{X}\rangle_{t+T}$, $\langle \hat{Z}\rangle_{t+T}$, $\langle \hat{Y}\rangle_{t+T}$:

$$\langle \hat{C}\rangle_{t+T} = [1 - \hat{\gamma}\tilde{b} - a\,(1 + \hat{\gamma}\tau) - g]\,\langle Y\rangle_t\, e^{\hat{\gamma}T}. \tag{3.11}$$

Дезагрегирование натуральных плановых показателей (3.6), (3.8)—(3.11) производится по правилу (3.7). В результате получается государственный народнохозяйственный план в натуральных показателях. Он служит основой для финансового планирования. Финансовое планирование состоит из следующих процедур: балансирования денежных доходов и расходов трудящихся, со-

ставления кредитного и кассового планов банка, планирования государственного бюджета.

Для составления баланса денежных доходов и расходов населения надо знать плановую величину фонда заработной платы $\hat{\Phi}$. Считаем, что фонд заработной платы планируется по постоянному нормативу η — доле заработной платы в стоимости единицы валового продукта. Выбор значения норматива η осуществляет плановый орган. Тогда $\hat{\Phi} = \eta p \hat{Y}$, и

$$\langle \hat{\Phi} \rangle_{t+T} = \eta p \langle Y \rangle_t e^{\hat{\gamma} T}, \quad \hat{\Phi}(t + \Delta) = \eta p \langle Y \rangle_t (1 + \hat{\gamma} T)(1 + \hat{\gamma} \Delta). \tag{3.12}$$

Считаем, что финансовые органы сводят баланс денежных доходов и расходов населения в самой простой форме

$$\hat{p}_1 \langle \hat{C} \rangle_{t+T} = \langle \hat{\Phi} \rangle_{t+T}, \tag{3.13}$$

получая из него плановое значение розничной цены $\hat{p}_1$. Заметим в связи с этим, что фактически p_1 — индекс розничных цен, поэтому изменять его можно помимо реформ цен простым изменением ассортимента выпускаемой продукции.

Государственный банк имеет точную информацию о текущем состоянии финансово-кредитной системы. Поэтому предполагаем, что финансово-кредитные органы составляют кредитный план, кассовый план и государственный бюджет по данным о текущем состоянии финансово-кредитной системы и показателям народнохозяйственного плана на короткий период Δ.

Составление кредитного плана начинается с оценки ссудного фонда банка. Он складывается из остатков средств бюджета N^G, если $N^G > 0$, денежных средств Ω, выпущенных банком в обращение, и сбережений населения D. Считаем, что планируется сбалансированный бюджет. Это означает, что по плану

$$\hat{N}^G (t + \Delta) = N^G (t). \tag{3.14}$$

Денежные средства в обращении

$$\Omega = N^L + K.$$

Величину $\hat{N}^L (t + \Delta)$ финансово-кредитные органы оценивают по спланированному фонду заработной платы $\hat{\Phi}(t + \Delta)$ и приближенной оценке $\tilde{\chi}$ величины χ:

$$\tilde{\chi} = \langle \Omega \rangle_t / \langle \Phi \rangle_t. \tag{3.15}$$

(С точностью до величины $K \ll \Omega$ по $\langle \Omega \rangle_t$ оценивается количество наличных денег у трудящихся $\langle N^L \rangle_t$.) Тогда

$$\hat{N}^L (t + \Delta) = \tilde{\chi} \hat{\Phi} (t + \Delta). \tag{3.16}$$

Считаем, что кассовый остаток банк планирует на прежнем уровне:

$$\hat{K} (t + \Delta) = K (t), \tag{3.17}$$

поэтому

$$\hat{\Omega}(t+\Delta) = \tilde{\chi}\hat{\Phi}(t+\Delta) + K(t). \tag{3.18}$$

Сбережения трудящихся $\hat{D}(t+\Delta)$ оцениваем на основе уравнения (2.19):

$$\hat{D}(t+\Delta) = D(t) + u(t)\Delta + r_2 D(t)\Delta. \tag{3.19}$$

Итак, получена оценка $\hat{N}^G(t+\Delta) + \hat{\Omega}(t+\Delta) + \hat{D}(t+\Delta)$ ссудного фонда банка.

Объектом кредитования в плане является доля $\hat{\xi}$ стоимости плановых оборотных фондов розничной торговли и хозяйства. Сначала оценим плановый запас в торговле $\hat{Q}^{\text{т}}(t+\Delta)$ и попутно составим план товарооборота $\hat{W}(t+\Delta)$ и оценим вклады трудящихся $\hat{u}(t+\Delta)$. Стоимость планового запаса в торговле плановый орган оценивает как

$$\hat{p}\hat{Q}^{\text{т}}(t+\Delta) = \hat{p}\tilde{\tau}_{\text{т}}\hat{C}(t+\Delta), \tag{3.20}$$

где $\tilde{\tau}_{\text{т}}$ — плановый норматив запаса в торговле:

$$\tilde{\tau}_{\text{т}} = \langle Q\rangle_t / \langle C\rangle_t. \tag{3.21}$$

Если плановые органы будут иначе оценивать величину $\tilde{\tau}_{\text{т}}$, не допуская роста норматива плановых торговых запасов, то розничная торговля не будет выполнять план товарооборота, как только появится некачественный потребительский продукт. Используя (3.20) и (3.21) в уравнении (2.10), составляем план товарооборота торговли:

$$\hat{W}(t+\Delta) = (1 - \hat{\gamma}\tilde{\tau}_{\text{т}})\hat{C}(t+\Delta). \tag{3.22}$$

Теперь из уравнения (2.17) с помощью (2.18), (3.16), и (3.22) легко выражается плановая величина

$$\hat{u}(t+\Delta) = \hat{\Phi}(t+\Delta) - \hat{p}_1\hat{W}(t+\Delta) - \tilde{\chi}(\hat{\Phi}(t+\Delta) - \\ - \Phi(t))/\Delta. \tag{3.23}$$

Стоимость оборотных средств хозяйства, необходимых для выполнения плана $\hat{Y}(t+\Delta)$, вычисляется по нормативам a и τ:

$$p\hat{Q}(t+\Delta) = a\tau p\hat{Y}(t+\Delta). \tag{3.24}$$

Кредитный план составляется как баланс ссудного фонда и потребностей в кредите:

$$N^G(t) + \hat{\Omega}(t+\Delta) + \hat{D}(t+\Delta) = \\ = \hat{\xi}[\hat{p}_1\tilde{\tau}_{\text{т}}\hat{C}(t+\Delta) + p\tau a\hat{Y}(t+\Delta)] + K(t). \tag{3.25}$$

Кредитный план (3.25) дает возможность обоснованно назначить норму кредитования $\hat{\xi}$.

Используя показатели народнохозяйственного плана, баланса денежных доходов и расходов населения, кредитного плана банка и условие (3.17), получаем кассовый план банка $\hat{E}(t+\Delta)+$ $+\hat{p}_1\hat{W}(t+\Delta)+\hat{u}(t+\Delta)=\hat{\Phi}(t+\Delta)$, из которого находим плановую эмиссию денег

$$\hat{E}(t+\Delta)=\tilde{\chi}(\hat{\Phi}(t+\Delta)-\Phi(t))/\Delta. \tag{3.26}$$

Наконец, чтобы спланировать бюджет, из финансовых балансов (2.13), (2.15) с помощью полученных оценок $\hat{N}(t+\Delta)$, $\hat{N}^{\text{т}}(t+\Delta)$ (см. (2.14), (2.16)) определяем плановые отчисления в бюджет прибыли хозяйства $\hat{G}(t+\Delta)$ и розничной торговли $\hat{G}^{\text{т}}(t+\Delta)$. Плановые отчисления прибыли банком $\hat{G}^{B}(t+\Delta)$ определяем из уравнения (2.25) по полученным оценкам при условии

$$\hat{R}(t+\Delta)=R(t). \tag{3.27}$$

В плановом бюджете доходы сбалансированы с расходами:

$$\hat{G}(t+\Delta)+\hat{G}^{\text{т}}(t+\Delta)+\hat{G}^{B}(t+\Delta)=p[\hat{X}(t+\Delta)+\hat{Z}(t+\Delta)]. \tag{3.28}$$

В построенной модели кредитный план банка и государственный бюджет взаимно согласованы, так как и тот и другой основан на показателях народнохозяйственного плана.

Итак, в процедурах планирования материальный баланс используется, чтобы сбалансировать структуру конечного потребления с плановым темпом роста; баланс денежных доходов и расходов населения — чтобы сбалансировать фонд заработной платы с запланированным потреблением трудящихся; кредитный план — чтобы согласовать плановую норму кредитования с кредитными ресурсами банка.

Плановые задания и нормативы $\hat{Y}$, $\hat{X}$, $\hat{C}$, $\hat{V}$, $\check{Z}$, $\hat{\Phi}$, $\tilde{L}$, $\hat{p}_1$, $\hat{\xi}$, η доводятся до экономических агентов и влияют на реализацию плана.

Процесс реализации плана подчиняется уравнениям (2.2)—(2.26), записанным в конечно-разностной форме с шагом Δ.

Фактическое предложение труда L может отличаться от запланированного, и это вносит возмущение в систему. Считаем, что в процессе реализации плана, независимо от числа занятых, хозяйство использует весь фонд заработной платы, который исчисляется по нормативу η, но не имеет права его перерасходовать. В таком случае

$$\Phi(t+\Delta)=\eta pY(t+\Delta).$$

Предполагаем, что в процессе реализации η и p постоянны и заданы и $p_1=\hat{p}_1$.

Вследствие отклонения L от прогноза $\tilde{L}$ хозяйство может оказаться вынужденным выпускать и использовать в качестве фондообразующего некачественный продукт. Это увеличивает факти-

ческую фондоемкость, уменьшает темп роста мощности по сравнению с запланированным, а также вызывает отклонения потребительского спроса и вкладов трудящихся от планировавшихся. В результате отклоняются от плановых значений эмиссия денег, масса денег в обращении и сбережения трудящихся.

Поскольку при составлении народнохозяйственного плана не были точно известны мощности и оборотные фонды хозяйства, то план производства может быть и не выполнен. Тогда от плановых отклоняются величины X, V, C, Z, а также G, $G^{\text{т}}$ и G^{B}. Будем считать, что в процессе реализации плана фактические отчисления прибыли хозяйства и розничной торговли определяются из балансов (2.13), (2.15) при условии, что банк использует запланированную норму кредитования $\hat{\xi}$ (см. (2.14), (2.16)).

Изменения объемов кредитов и сбережений трудящихся по сравнению с плановыми приводят к отклонению от плана и величины банковской прибыли. Предполагаем, что в процессе реализации банк отчисляет в бюджет всю фактически полученную прибыль $G^{B}(t+\Delta)$. Если $G^{B}(t+\Delta)<0$, то либо банк покрывает убытки за счет собственного резерва:

$$G^{B}(t+\Delta)\,\Delta = R(t+\Delta) - R(t),$$

либо государство покрывает убытки банка за счет доходов бюджета. В первом случае, конечно, должно выполняться условие $R(t+\Delta)\geqslant 0$. Во втором случае остаток средств бюджета N^{G} может быть даже отрицательным, т. е. $N^{G}(t+\Delta)<0$. Вследствие отклонения величин $G(t-\Delta)$, $G^{\text{т}}(t+\Delta)$, $G^{B}(t+\Delta)$, $X(t+\Delta)$, $Z(t+\Delta)$ от запланированных может нарушиться баланс доходов и расходов бюджета. В процессе реализации величина $N^{G}(t+\Delta)$ подчиняется уравнению (2.22) и может стать отрицательной.

Наконец, может нарушиться кредитный план из-за возможных отклонений величин $D(t+\Delta)$, $\Omega(t+\Delta)$, $N^{G}(t+\Delta)$, $N^{\text{т}}(t+\Delta)$, $N(t+\Delta)$ от плановых значений. В благоприятной для банка ситуации не весь кредитный ресурс используется и остаток его F, по существу, добавляется к резерву:

$$R(t+\Delta) = R(t) + F.$$

В неблагоприятной ситуации кредитных ресурсов не хватает, величина $F<0$, и она компенсируется резервом при условии, что $R(t+\Delta)\geqslant 0$. Полученное замкнутое описание общественного воспроизводства дает возможность рассчитывать эволюцию показателей экономического развития со временем и исследовать влияние процедур планирования на характер развития экономики.

4. Результаты исследования модели

Система уравнений (2.2)—(2.26) допускает характерное частное решение, называемое экспоненциальным сбалансированным ростом. В таком режиме все объемные показатели: M, Y, X, V, D, N и др.— растут с постоянным темпом γ, который определяется

структурой модели. Все экономические показатели, такие, как розничная цена p_1, доля некачественного продукта β, доля накопления X/Y, доля потребления трудящихся C/Y, реальная заработная плата Φ/p_1L, норма кредитования ξ, остаются постоянными. Каждому сочетанию значений p_1 и L/M соответствует свой темп роста $\gamma(p_1, L/M)$ и свои пропорции. Пропорции сбалансированного роста характеризуют собственную, внутреннюю структуру системы.

Мы не станем описывать режим сбалансированного роста. В связи с другими моделями его исследовали неоднократно; как это делается, можно узнать, например, из работы [1, с. 19—45]. В этом разделе мы изложим некоторые вычислительные эксперименты с полной моделью (2.2)—(2.26), (3.1)—(3.28). Цель экспериментов — выявить влияние процедур планирования на характер экономического развития, именно качественно, через показатели экономического развития, оценить, какое значение имеет степень информированности планового органа относительно состояния системы и точности прогноза будущих значений неконтролируемых факторов.

Поскольку интересны качественные характеристики поведения построенной модели, мы не проводили идентификации ее параметров. Все эксперименты проводились на модели с параметрами $\lambda = 1$; $a = 0{,}48$; $b = 6$; $\tau = 1$; $\chi = 0$; $\eta = 0{,}4$; $\pi = 0{,}88$; $g = 0$; $\theta = 0$; $r_1 = 0{,}03$; $r_2 = 0{,}02$. В начальном состоянии структура системы во всех экспериментах задавалась пропорциями режима сбалансированного роста с темпом $\gamma = 0{,}04$: $L/M = 0{,}896$; $\beta = 0{,}2$; $\xi = 0{,}653$; $p_1/p = 2$; $D/\Phi = 1{,}2$; $X/Y = 0{,}3$; $C/Y = 0{,}2$. При расчетах величины K, R и Ω были положены равными нулю.

В первом эксперименте считали, что плановый орган имеет точный прогноз роста трудовых ресурсов: $\tilde{n} = n = \gamma = 0{,}04$ и планирует темп роста $\tilde{\gamma} = 0{,}04$, соответствующий сложившимся пропорциям хозяйства. Оказалось, что в таком случае система планирования не вносит существенных ошибок при оценке текущих значений нормативов и дезагрегировании плана, поэтому при реализации плана выдерживаются плановые пропорции.

Результаты первого эксперимента представлены на рис. 1—14, где соответствующие кривые помечены цифрой *1*. Обратите внимание на следующие обстоятельства. На рис. 1 видно, что темп роста выпуска GY равен плановому $\tilde{\gamma}$, а доля некачественного продукта β остается постоянной (рис. 2). На рис. 3 показано, что оценка фондоемкости $\tilde{b}_t$ больше, чем фактическая фондоемкость $b/(1-\beta)$, и растет с течением времени. Вследствие этого темп роста мощности GM больше (рис. 1), и мощность хозяйства оказывается недогруженной. Доходы бюджета соответствуют плановым, нормы прибыли хозяйства G/pY, торговли $G^{\text{т}}/pY$ и банка $G^{\text{в}}/pY$ показаны на рис. 4—6. Избыточные вследствие завышенной оценки $\tilde{b}_t$ капитальные вложения приводят к еле заметному дефициту бюджета. На рис. 7 показана кривая изменения величины $d_G = (G + G^{\text{т}} + G^{\text{в}} - pX)/pX$, заметим, что $|d_G| \sim 10^{-3}$.

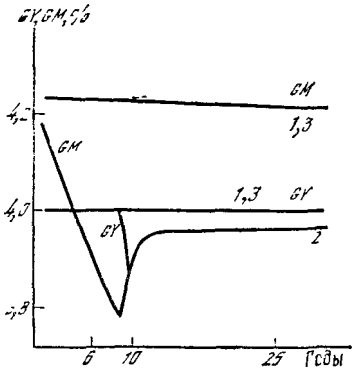


Рис. 1

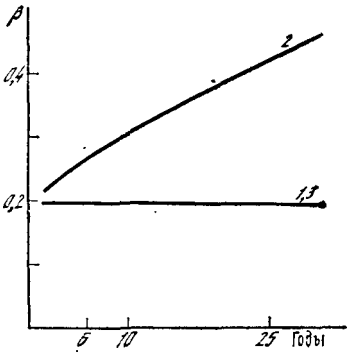


Рис. 2

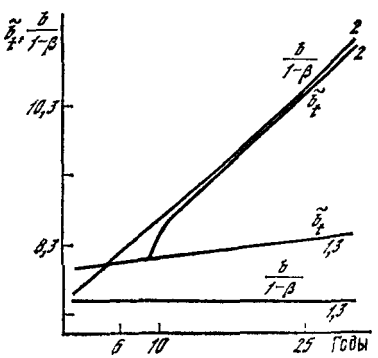


Рис. 3

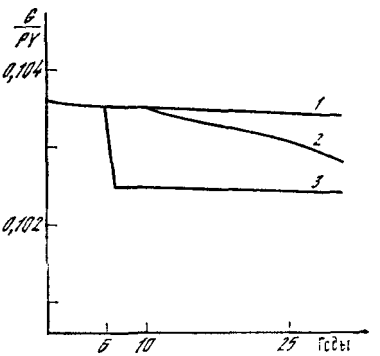


Рис. 4

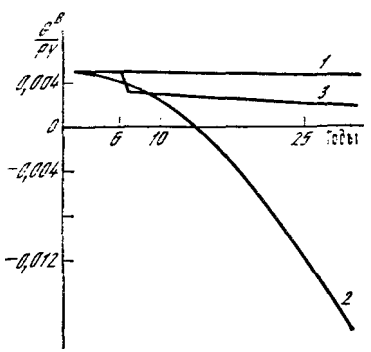


Рис. 5

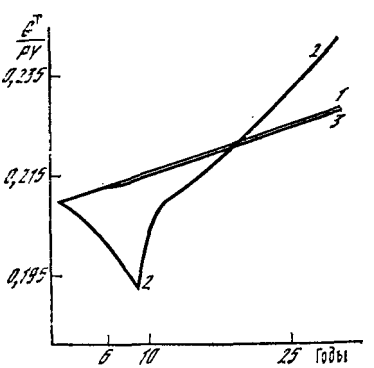


Рис. 6

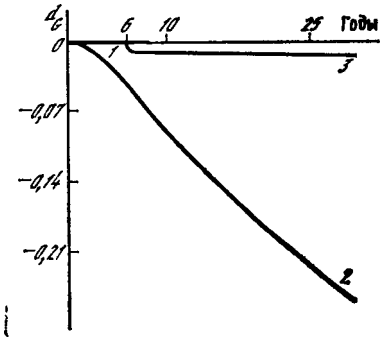


Рис. 7

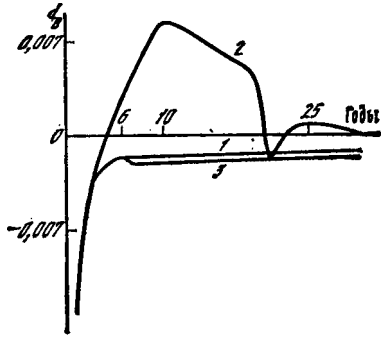


Рис. 8

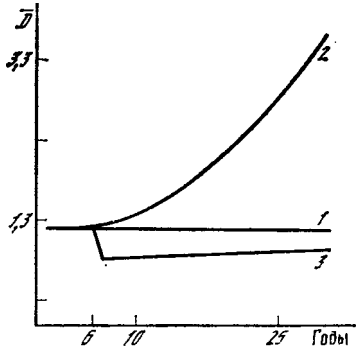


Рис. 9

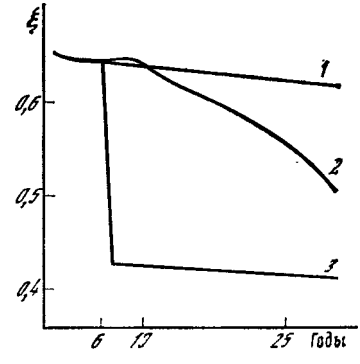


Рис. 10

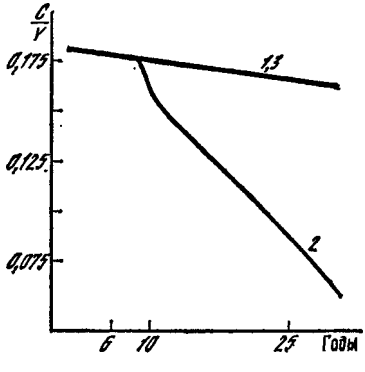


Рис. 11

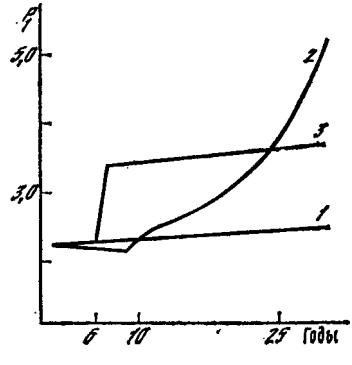


Рис. 12

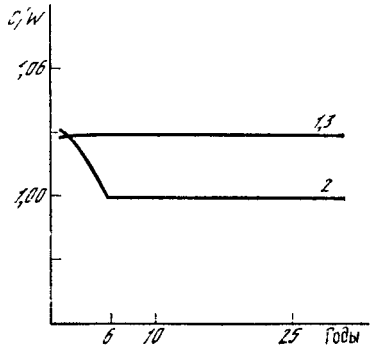


Рис. 13

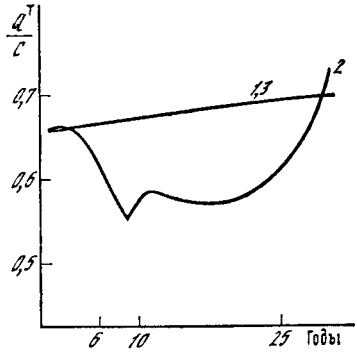


Рис. 14

Кредитный план тоже практически выполняется, на рис. 8 показана кривая изменения величины $d_B = (N^G + D - N - N^T)/D$, и можно видеть, что $d_B \sim -10^{-3}$. Относительная величина сбережений трудящихся $\bar{D} = D/\Phi$ несколько уменьшается, хотя на рис. 9 это трудно увидеть из-за масштаба. Вследствие этого и возникновения небольшого дефицита бюджета несколько уменьшается норма кредитования ξ, как показано па рис. 10.

Превышение плановой доли капитальных вложений уменьшает долю потребления трудящихся (см. рис. 11). Вследствие этого растет розничная цена и норма прибыли торговли (рис. 12 и 6). Эти изменения незначительны и проявляются только на больших интервалах времени.

Во втором эксперименте имитировали ошибку прогноза темпа роста трудовых ресурсов. Начальная структура хозяйства соответствует темпу роста $\gamma = n = 0{,}04$. В эксперименте принимали $n = 0{,}03$, а $\hat{\gamma} = 0{,}04$. Это можно интерпретировать как ошибку планового органа в прогнозировании темпа роста n или как волюнтаристское завышение им плана. Дело в том, что реальный длительный рост хозяйства ограничен темпом n, потому что технология производства не изменяется. Только за счет выпуска некачественного продукта можно добиться, чтобы темп роста «отчетного» продукта Y был больше n. В таком случае действие механизмов регулирования обеспечивает темп роста, близкий к запланированному, однако в системе возникают диспропорции, которые вызывают негативные последствия в сфере финансов и денежного обращения, а также снижение уровня жизни трудящихся.

Результаты эксперимента показаны па рис. 1—14, где соответствующие кривые отмечены номером *2*. После переходного режима, который заканчивается примерно в момент времени $t = 10$, темп роста мощности GM и темп роста выпуска GY сравниваются, и достигается полная загрузка мощности. После этого темпы GM и GY совпадают и все время почти равны запланированному темпу

$\hat{\gamma}$, это видно из рис. 1. (В скобках заметим: может быть, такое недовыполнение плана и подталкивает плановый орган давать хозяйству заведомо завышенный, «напряженный» план?) Достигается такое «выполнение» плана ценой возникновения диспропорций в хозяйстве. На рис. 2 видно, как сильно растет доля некачественного продукта β из-за нарастания дефицита трудовых ресурсов. Вслед за β растет не только фактическая фондоемкость $b/(1-\beta)$, но и плановая $\tilde{b}_t$ (рис. 3). Это приводит к росту доли капиталовложений в валовом продукте, необходимой для сохранения планового темпа роста мощности, и к соответствующему падению доли потребления трудящихся C/Y (рис. 11). Причем падает не только доля потребления, но и жизненный уровень трудящихся C/L. В самом деле, $\frac{C}{L} = \frac{C}{Y}\frac{Y}{L}$, $\frac{Y}{L} \sim [1+(\gamma-n)\Delta]^t$, $\gamma \simeq \hat{\gamma}$, поэтому медленный рост Y/L не компенсирует падения доли C/Y. Между тем фонд заработной платы $\Phi = \eta pY$, и, следовательно, он растет почти с плановым темпом. Чтобы свести баланс доходов и расходов, финансовый орган вынужден повышать розничную цену p_1 (рис. 12). На рис. 13 видно, что $C/W = 1$, значит, трудящиеся скупают весь продукт, поступающий в торговлю,— качественный и некачественный; при этом торговый запас $Q^{\text{т}}$ не меняется. А из рис. 9 видно, что растет $\bar{D} = D/\Phi$, следовательно, трудящиеся вынуждены сберегать часть зарплаты, и сбережения растут быстрее, чем фонд заработной платы. (Финансовый орган, повышая розничную цену, не может «угнаться» за снижением доли потребления трудящихся! Ведь $\hat{p}_1/p = \eta\hat{Y}/\hat{C}$, а фактическая же доля C/Y меньше плановой $\hat{C}/\hat{Y}$.) Несмотря на такой рост сбережений D, норма кредитования ξ падает (см. рис. 10). Дело в том, что из-за роста капитальных вложений быстро растет и достигает значительной доли дефицит бюджета d_G (рис. 7), и возникает государственный долг $N^G < 0$, который вынужден покрывать государственный банк. На покрытие государственного долга расходуется большая часть ссудного фонда банка (в модели — сбережений трудящихся). Вследствие уменьшения ξ уменьшаются нормы прибыли хозяйства G/pY и банка G^B/pY (рис. 4, 5). Прибыль банка становится даже отрицательной. В этих экспериментах с моделью убытки банка покрываются из бюджета, следовательно, сбережениями трудящихся. Только прибыль розничной торговли $G^{\text{т}}/pY$ растет (рис. 6), не сдерживает ее даже уменьшение ξ — перекрывает рост разницы между розничной и оптовой ценами. Увеличивается и плановый норматив запаса в торговле $\tau^{\text{т}} = Q^{\text{т}}/C$ (рис. 14), по причине уменьшения C. В заключение отметим, что баланс банка сохраняется: $D + N^G \geqslant N + N^{\text{т}}$ (см. рис. 8).

В третьем эксперименте мы имитировали реформу оптовой цены. Считали, что плановый орган точно прогнозирует рост трудовых ресурсов: $\tilde{n} = n = 0{,}04$ — и дает сбалансированный план $\hat{\gamma} = n = 0{,}04$. В момент времени $t = 6$ оптовая цена p увеличивается в 1,5 раза и потом остается постоянной. Модель

показывает, что в результате обесцениваются сбережения трудящихся.

Результаты эксперимента показаны на рис. 1—14, где соответствующие кривые отмечены цифрой *3*. Показатели GM, GY, $b/(1-\beta)$, u/Φ, C/Y, $G^{\text{т}}/pY$ совпали с показателями в первом эксперименте. С ростом оптовой цены, естественно, в 1,5 раза вырастает фонд заработной платы Ф, потому что норматив η постоянен. Так как доля C/Y почти не меняется, то, балансируя доходы и расходы, финансовый орган вынужден в 1,5 раза увеличить и розничную цену (рис. 12). Альтернативами были бы или снижение норматива η (пересмотр тарифов?), или увеличение плановой доли C/Y. Далее, из рис. 9 видно, что в 1,5 раза уменьшается величина $\bar{D} = D/\Phi$. Поскольку при этом Ф увеличивается в 1,5 раза, D остается неизменным. Рост розничной цены приводит к тому, что сбережения трудящихся обесцениваются в 1,5 раза. Так как $N \sim p$ и $N^{\text{т}} \sim p$, то норма кредитования ξ уменьшается в 1,5 раза (рис. 10). Вследствие этого, как видно из рис. 4, незначительно уменьшаются прибыль хозяйства G/pY и прибыль банка $G^{\text{в}}/pY$, а прибыль розничной торговли $G^{\text{т}}/pY$ растет (рис. 6). В результате уменьшается доходная часть бюджета и появляется небольшой дефицит (рис. 7).

Результаты вычислительных экспериментов дают основание для некоторых выводов.

Во-первых, централизованная плановая экономика весьма чувствительна к уровню информированности и компетентности планового и финансово-кредитных органов. Сбалансированность экономики напрямую зависит от точности информации о состоянии экономики и точности прогноза не поддающихся контролю социальных процессов, которые определяют предложение труда и потребительский спрос (может быть, поэтому пытались жестоко контролировать эти процессы?). Так что лозунг «Повышайте научный уровень планирования!» получает содержательное обоснование. В первую очередь, кажется, надо изучать социальные процессы, чтобы точнее их прогнозировать.

Во-вторых, если в плановой централизованной экономике не идут процессы технологического обновления, то завышенные планы вызывают диспропорции и расстройство финансово-кредитной системы и денежного обращения. Снижается качество продукта, сильно растет фондоемкость хозяйства, не пропорционально увеличиваются капитальные вложения, растет розничная цена и быстро растут сбережения населения вследствие ненасыщенности рынка потребительского продукта и роста фонда заработной платы.

В-третьих, «остаточный принцип» планирования потребления трудящихся перекладывает на них все негативные последствия несбалансированности экономики. Завышение планов производства при отсутствии научно-технического прогресса снижает уровень жизни трудящихся. Повышение оптовых цен, в конечном счете, вызывает рост розничных цен и обесценивает сбережения

трудящихся при росте фонда заработной платы и сохранении доли потребления C/L трудящихся.

В-четвертых, чем хуже информированность планового органа о состоянии хозяйства, чем больше ошибки в прогнозе предложения труда и потребительского спроса, чем жестче и напряженнее директивность планирования, тем в более экономически привилегированном положении по отношению к другим экономическим агентам оказывается розничная торговля.

В-пятых, модель в общем правильно отражает совокупность качественных особенностей развития нашей экономики в так называемый застойный период. Это дает основание предполагать, что системный анализ экономики дает неплохой подход к математическому описанию плановой экономики, и предложенную схему стоит развивать.

5. О постановке задачи разделения планирования и функционирования экономики

Анализ имитационных экспериментов (некоторые результаты их изложены в предыдущем разделе) убеждает нас, что построенная модель вполне содержательна и, следовательно, годится для изучения механизмов управления централизованной плановой экономики.

Вычислительные эксперименты с моделью показали, что если плановый орган достаточно хорошо осведомлен о состоянии экономической системы и имеет точный прогноз эволюции неконтролируемых процессов, то можно построить процедуру планирования так, чтобы обеспечить практически точное выполнение плана. Однако описанные процедуры планирования и регулирования (3.1)—(3.28) централизованной плановой экономики, представленной моделью (2.2)—(2.26), оказываются очень чувствительными к неточности информации о неконтролируемых процессах. На основании этого главного вывода можно высказать гипотезу: характер развития централизованной плановой экономики сильно зависит от информированности директивного и планирующего органов относительно состояния экономики и развития социальных процессов.

Возникает вопрос: как оценить качество процедур планирования и регулирования? Для математической экономики это новый вопрос. В теории экономического роста изучается задача об оптимальном плане: как построить план, обеспечивающий максимум оценки качества траектории развития экономической системы,— о процедурах планирования речи нет.

Поставленный вопрос давно известен в теории автоматического регулирования. В терминах ее задача об оптимальном плане — это задача о программном движении управляемого объекта, а задача об оценке качества процедур планирования — задача об оптимальном регулировании процесса выполнения программы. Однако постановка задачи управления и регулирования экономи-

ческой системы специфична. В экономике действуют внутренние механизмы саморегуляции, они отражают характер производственных отношений. Процедуры централизованного планирования и регулирования должны быть согласованы с ними. Кроме того, экономический переходный процесс по смыслу существенно отличается от технического, поэтому и постановки задачи об оценке качества их разные.

Тем не менее общие подходы к планированию и управлению в экономике дает современная теория управления. И сразу же встает новая для математической экономики проблема: выделить из математической модели экономической системы модель процедур планирования и регулирования. Чтобы решить ее, придется, вообще говоря, привлекать дополнительные соображения относительно структуры процедур, отражающие понимание целей развития, характера внешних воздействий на систему, практический опыт и т. п. После того, как получено описание планирования, надо из той же модели экономической системы выделить описание реакций системы на принятые процедуры планирования.

Мы предлагаем подход к решению проблемы. Он основан на выделении иерархии характерных временных масштабов процессов, протекающих в системе. Этот подход известен в физике и широко используется в методах асимптотического анализа динамических систем. В работе [3] он обсуждается в связи с общей проблемой агрегирования описаний экономической системы. Предлагаемый подход продемонстрируем на модели централизованной плановой экономики, изложенной в разд. 2. Некоторые дополнительные соображения возникают из данного в разд. 3 описания процедур планирования и регулирования — как бы эвристически.

Перепишем соотношения (2.2)—(2.26) в удобной форме. Надо полагать $L < \lambda Y$, потому что в противном случае процедуры планирования и регулирования работают почти идеально. Из (2.2), (2.3), (2.5) находим

$$Y = \min\{M,\ Q/a\tau,\ \hat{Y}\}, \tag{5.1}$$

$$\beta = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a}\,\frac{L}{\lambda Y}. \tag{5.2}$$

Соотношения (2.4), (2.6), (2.7) дают

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1-\beta}{b}X - \mu M, \tag{5.3}$$

$$dQ/dt = V - aY. \tag{5.4}$$

Мы рассматриваем случай $\beta > 0$, поэтому естественно считать, что $W \leqslant C$; кроме того, для простоты положим $\chi = 0$. Тогда в (2.11) $\check{W} = \Phi/p_1$. Воспользуемся соображением, сформулированным в разд. 3 (см. (3.12)): фонд заработной платы формируется по нормативу η от валового продукта хозяйства — и запишем

(2.10), (2.11):

$$dQ^{\text{т}}/dt = C - W, \tag{5.5}$$

$$W = \eta \frac{p}{p_1} Y + (1 - \pi) \left[(1 - \beta) C - \eta \frac{p}{p_1} Y \right]. \tag{5.6}$$

Правило (2.9) регулирования сохраняем и (2.8) записываем в виде

$$X = \frac{\hat{X}}{\hat{M}} Y (t - \theta), V = \frac{\hat{V}}{\hat{M}} Y (t - \theta), C = \frac{\hat{C}}{\hat{M}} Y (t - \theta), \tag{5.7}$$

полагая ради простоты $Z = 0$. Заметим, что (5.7) удовлетворяют (2.9) в силу (3.11). В соответствии со сделанными ранее предположениями баланс доходов и расходов населения записываем в виде

$$\hat{C} = \eta \frac{p}{p_1} \hat{M}. \tag{5.8}$$

Поскольку условились считать $\chi = 0$, надо полагать $N' = 0$. Кроме того, для простоты полагаем $\Omega = 0$, $E = 0$, $K = 0$. Тогда (2.23), (2.24) удовлетворяются тождественно, а (2.19)—(2.21) приводятся к виду

$$dD/dt = r_2 D + \eta p Y - p_1 W. \tag{5.9}$$

Если учесть правила кредитования (2.14), (2.16), то из (2.13), (2.15) можно найти выражения для G и $G^{\text{т}}$. Для простоты положим $R = 0$ и из (2.25) найдем выражение для G^B. Подставим эти выражения в (2.22), учтем (5.4), (5.5) и получим уравнение баланса бюджета

$$\frac{dN^G}{dt} = (p_1 - \xi p) W - (\eta + \xi a) pY + \xi p (V + C) - \\ - r_2 D + p (Q + Q^{\text{т}}) \frac{d\xi}{dt}. \tag{5.10}$$

Уравнение баланса (2.26) выполняется в силу уравнений для D, Ω, N^G, R, N, $N^{\text{т}}$, K, если оно было выполнено в начальный момент времени.

Будем исследовать модель (5.1)—(5.10). Напомним, что цена считается постоянной. Предложение труда L в (5.2) надо считать заданной так или иначе функцией: оно вносит возмущения в систему, если не было точно известно при составлении плана. Мы будем предполагать, что имеется достаточно точный прогноз $\tilde{L}(t)$ функции $L(t)$, так что можно считать

$$L(t) = \tilde{L}(t)(1 + \varepsilon l(t)), \tag{5.11}$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. В силу (5.2) величину β тоже можно представить в виде

$$\beta = \bar{\beta} (1 + \varepsilon \beta^0). \tag{5.12}$$

Ниже представления (5.11), (5.12) будут уточнены.

Система уравнений (5.1)—(5.10) содержит три параметра θ, τ, b, имеющих размерность времени. В соответствии с этим мы выделяем «быстрые», «средние» и «медленные» процессы с характерными временами θ, τ, b соответственно.

Величина θ характеризует время транспортировки продукта от производителя к потребителю. Это «быстрое» время, по-видимому, имеет порядок месяцев или меньше. Таков же и период краткосрочного планирования (чаще его называют оперативным управлением).

Постоянная времени τ входит в производственную функцию (5.1). По смыслу это время, в течение которого хозяйство может работать за счет имеющихся запасов сырья. В хозяйстве есть важный производственный цикл, длящийся год,— цикл сельского хозяйства. Он существенно определяет величину технологических запасов в хозяйстве. Однако постоянная времени τ определяется не только технологическими факторами. Она в значительной мере зависит от периодичности рассмотрения заявок на материально-техническое снабжение, а это тоже годовая периодичность. Поэтому в «среднем» времени протекают процессы среднесрочного планирования.

Постоянная времени b входит в уравнение изменения мощности (5.3). По определению, фондоемкость b связывает запас продукта — основные фонды хозяйства — с выпуском в единицу времени — мощностью, так что запас фондов $B = bM$. Значит, величина b показывает, сколько времени должна работать единица мощности, чтобы накопить запас фондов, составляющий новую единицу мощности. По смыслу это характерный временной масштаб строительного цикла в хозяйстве, он порядка пяти лет.

Модель содержит еще параметры μ, γ, r_1 и r_2, имеющие размерность (время)$^{-1}$. По определению, μ — темп деградации мощности вследствие износа: уменьшение вследствие износа единицы мощности в единицу времени. Величина μb характеризует износ единицы мощности за характерное время строительного цикла. Естественно считать, что за это время износ мал по сравнению с единицей. Относительно темпа роста мощности известно следующее. За характерное время строительного цикла мощность прирастает на единицу. Таким образом, $\gamma b \sim 1$, а $\mu b \ll 1$. Что касается нормы процента r_1, то естественно считать $r_1 b \sim 1$. По смыслу этого предположения за характерное время строительного цикла капитал удваивается. Того же порядка и величина r_2.

В системе (5.1)—(5.10) перейдем к безразмерным переменным. Выберем τ в качестве единицы измерения «среднего» времени и введем безразмерные параметры $\bar\theta$, $\bar b$, $\bar\mu$, $\bar\gamma$, $\bar r_1$, $\bar r_2$ порядка единицы. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\theta = \varepsilon\tau\bar\theta,\ b = \frac{1}{\varepsilon}\tau\bar b,\ \tau\mu = \varepsilon^2\bar\mu,\ \tau\gamma = \varepsilon\bar\gamma,\ \tau r_i = \varepsilon\bar r_i,\ i = 1, 2.$$

Считаем $\varepsilon \ll 1$ и по порядку совпадающим с характерным масштабом ошибки прогноза L в (5.11). Безразмерное время t_1 введем

по формуле

$$t = \tau t_1.$$

Натуральную единицу измерения «быстрого» времени дает величина $\theta \sim \varepsilon\tau$. Поэтому безразмерное «быстрое» время t_0 связано с t_1 соотношением $\varepsilon t_0 = t_1$.

Все переменные в уравнениях будем считать зависящими от «быстрого» времени t_0 и «среднего» времени t_1: $M = M(t_0, t_1)$, $Y = Y(t_0, t_1)$, . . . Тогда полная производная

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial t_1}\right).$$

Далее положим $\tau = 1$, тогда t можно считать безразмерным «средним» временем и только в соотношениях (5.1)—(5.10) надо будет положить $\theta = \varepsilon\bar{\theta}$, $b = (1/\varepsilon)\bar{b}$, $\mu = \varepsilon^2\bar{\mu}$, $\gamma = \varepsilon\bar{\gamma}$, $r_2 = \varepsilon\bar{r}_2$.

Прежде чем вводить безразмерные зависимые переменные, уточним представления (5.11), (5.12). Как и другие переменные, $L = L(t_0, t)$. Однако естественно считать, что прогноз L величины L не может ухватить ее квартальных колебаний, и полагать $\tilde{L} = \tilde{L}(t)$. Ошибку прогноза можно представить суммой систематической составляющей $\bar{l} = \bar{l}(t)$, зависящей только от «среднего» времени, и колебательной составляющей $l^0 = l^0(t_0, t)$, средняя величина по «быстрому» времени которой

$$\langle l^0 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} l^0(t_0, t)\, dt_0 = 0.$$

Соответственно будем полагать

$$L = \tilde{L}(1 + \varepsilon\bar{l} + \varepsilon l^0).$$

Тогда в (5.12)

$$\bar{\beta} = \langle \beta \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \beta(t_0, t)\, dt_0$$

и зависит только от «среднего» времени t, а β^0 зависит и от t_0, и от t, но $\langle \beta^0 \rangle = 0$.

Далее всегда через $\langle \omega \rangle$ будем обозначать результат усреднения ω по быстрому времени t_0, а через ω^0 величину, среднее значение которой равно нулю.

В соответствии со структурой возмущений переменные модели (5.1)—(5.10) будем представлять как колеблющиеся отклонения от характерных величин, зависящих только от «среднего» времени. Положим

$$\begin{aligned}
&M = \hat{M}(1 + m), \quad Y = \hat{Y}(1 + y), \quad X = \hat{X}(1 + x),\\
&V = \hat{V}(1 + v), \quad C = \hat{C}(1 + c), \qquad\qquad (5.13)\\
&W = \hat{C}(1 - (1 - \pi)\bar{\beta} + w), \quad Q = \hat{Q}(1 + q),\\
&Q^{\text{т}} = \hat{Q}^{\text{т}}(1 + q^{\text{т}}), \quad D = \hat{D}(1 + g), \quad N^G = \hat{N}^G n^G,
\end{aligned}$$

где характерные масштабы $\hat{M}, \hat{Y}, \ldots$ зависят только от t, а безразмерные отклонения $m, y, \ldots$ — от t_0 и t.

Требует пояснения представление переменной W. Она зависит от доли некачественного продукта β, которую наблюдать непосредственно плановый орган не в состоянии. Потребительский спрос W можно наблюдать, и информация о среднем спросе поступает в плановый орган. Мы считаем характерной величиной $\hat{W}$ ее наблюдаемое среднее:

$$\hat{W} = \langle W \rangle |_{\varepsilon=0} = \hat{C}(1 - (1 - \pi)\bar{\beta}). \tag{5.14}$$

Последнее выражение получается из (5.6) и (5.8).

Вообще, выбор характерных масштабов допускает по существу большой произвол и им следует разумно распоряжаться. Например, при исследовании процедуры планирования естественно взять в качестве характерных величин плановые задания. Тогда отклонения $m, y, \ldots$ будут характеризовать качество процедур планирования. Положим $d\hat{M}/dt = \varepsilon\hat{\gamma}\hat{M}$, где $\hat{\gamma}$ — плановый темп роста; $\hat{X} = \hat{\gamma}\tilde{b}\hat{M}$, где $\tilde{b} = \bar{b}/(1 - \bar{\beta})$ естественно интерпретировать как наблюдаемую норму фондоемкости;

$$\hat{Y} = \hat{M}, \quad \hat{V} = a\hat{M}, \quad \hat{C} = \eta\frac{p}{p_1}\hat{M}, \quad \hat{Q} = a\hat{M},$$

$$\hat{Q}^{\text{т}} = \tau_{\text{т}}\eta\frac{p}{p_1}\hat{M}, \quad \hat{W} = \eta\frac{p}{p_1}\hat{M}, \quad \hat{D} = \eta p\hat{M}, \quad \hat{N}^G = p\hat{M}.$$

Заметим, что выбор $\hat{X}$ определяется условием (5.3), выбор $\hat{Y}$ и $\hat{Q}$ согласован условием (5.1), выбор $\hat{C}$ подсказан условием (5.8).

Подставляем выражение для W, Y и C из (5.13) в (5.6) и находим связь w, c, y и β:

$$w = \pi y - (1 - \pi)c - (1 - \pi)\bar{\beta}(c + \varepsilon\beta^0 + \varepsilon\beta^0 c).$$

Подставляем (5.13) в (5.7) и находим, что

$$x = v = c = \frac{\hat{M}(t - \varepsilon\bar{\theta}) - \hat{M}(t)}{\hat{M}(t)} + \frac{\hat{M}(t - \varepsilon\bar{\theta})}{\hat{M}(t)} y(t_0 - \bar{\theta}, t - \varepsilon\bar{\theta}), \tag{5.15}$$

и это представление справедливо при выполнении условия

$$a + \eta\frac{p}{p_1} + \hat{\gamma}\tilde{b} = 1, \tag{5.16}$$

которое связывает отношение цен с темпом роста через известные нормативы a, η, $\tilde{b}$. В силу (5.16) темп роста розничной цены $\gamma_p = (1/p_1)\, dp_1/dt$ выражается как

$$\eta\frac{p}{p_1}\gamma_p = \frac{d}{dt}(\hat{\gamma}\tilde{b})$$

и определяется скоростью изменения темпа роста. Величина γ_p возникает в следующих уравнениях.

Подставляем выражения (5.13) в остальные уравнения (5.1)—(5.10) и получаем систему уравнений для отклонений:

$$y = \min\{m, q, 0\}, \tag{5.17}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial m}{\partial t_0} + \frac{\partial m}{\partial t} + \varepsilon(\hat{\gamma} + \varepsilon\bar{\mu})m = -\varepsilon^2\frac{\hat{\gamma}\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}}\beta^0 + \varepsilon^2\bar{\mu} +$$
$$+ \varepsilon\left(\hat{\gamma} - \varepsilon\frac{\hat{\gamma}\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}}\beta^0\right)x, \tag{5.18}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial q}{\partial t_0} + \frac{\partial q}{\partial t} + \varepsilon\hat{\gamma}q = -\varepsilon\hat{\gamma} + v - y. \tag{5.19}$$

$$\left[\frac{d\tau_{\text{т}}}{dt} - (\gamma_p - \varepsilon\hat{\gamma})\tau_{\text{т}} - (1-\pi)\bar{\beta}\right] + \tau_{\text{т}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial q^{\text{т}}}{\partial t_0} + \frac{\partial q^{\text{т}}}{\partial t}\right) +$$
$$+ \left[\frac{d\tau_{\text{т}}}{dt} - (\gamma_p - \varepsilon\hat{\gamma})\tau_{\text{т}}\right]q^{\text{т}} =$$
$$= \pi(c - y) + (1-\pi)\bar{\beta}(c + \varepsilon\beta^0 + \varepsilon c\beta^0), \tag{5.20}$$

$$-(1-\pi)\bar{\beta} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial g}{\partial t_0} + \frac{\partial g}{\partial t} + \varepsilon(\hat{\gamma} - \bar{r}_2)g =$$
$$= -\varepsilon(\hat{\gamma} - \bar{r}_2) + (1-\pi)[y - c + \bar{\beta}(c + \varepsilon\beta^0 + \varepsilon c\beta^0)], \tag{5.21}$$

$$\left[\eta(1-\pi)\bar{\beta}\left(1 - \xi\frac{p}{p_1}\right) - \left(1 + \eta\tau_{\text{т}}\frac{p}{p_1}\right)\frac{d\xi}{dt}\right] +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial n^G}{\partial t_0} + \frac{\partial n^G}{\partial t} + \varepsilon\hat{\gamma}n^G = -\varepsilon\bar{r}_2(1 + \bar{g}) -$$
$$-\left[(1-\pi)\eta + \left(a + \pi\eta\frac{p}{p_1}\right)\xi\right](y - c) -$$
$$-(1-\pi)\eta\left(1 - \xi\frac{p}{p_1}\right)\bar{\beta}(c + \varepsilon\beta^0 + \varepsilon c\beta^0) - \varepsilon\bar{r}_2 g +$$
$$+ \frac{d\xi}{dt}\left(\tau_{\text{т}}\eta\frac{p}{p_1}q^{\text{т}} + aq\right). \tag{5.22}$$

Положим $m = \varepsilon m_1$ и получим в старшем порядке ε^0 уравнения (5.18) $\partial m_1/\partial t_0 = O(\varepsilon)$.

Теперь распорядимся частью отпущенного нам произвола. Будем искать реальные планы, т. е. планы выполнимые, планы, от которых система отклоняется несильно. Точнее, будем требовать, чтобы на временах порядка единицы отклонения были порядка ε. Тогда

$$m_1 = \bar{m}_1 + \varepsilon m_1^0,$$

и подстановка этого выражения снова в (5.18) дает в старшем порядке ε

$$d\bar{m}_1/dt + \partial m_1^0/\partial t_0 = O(\varepsilon).$$

Те же рассуждения приводят к заключению, что

$$\bar{m}_1 = \varepsilon\bar{m}_2, \quad m_1^0 = \varepsilon m_2^0.$$

После переобозначений находим, что

$$m = \varepsilon^2\bar{m} + \varepsilon^3 m^0,$$

где черта над буквой впредь будет обозначать, что переменная зависит только от t.

Точно так же, анализируя члены старшего порядка уравнения (5.19), находим, что

$$q = \varepsilon\bar{q} + \ldots, \quad v = \varepsilon\bar{v} + \ldots, \quad y = \varepsilon\bar{y} + \ldots$$

Точками обозначены слагаемые, зависящие от высших степеней ε^n, причем в выражении для q степень $n \geqslant 3$.

Подставим найденные m и q в (5.17) и найдем, что

$$\langle y\rangle = \langle \min\{\varepsilon^2\bar{m} + \varepsilon^3 m^0, \varepsilon\bar{q} + \ldots, 0\}\rangle = \varepsilon\bar{y},$$

где величина $\bar{y}$ порядка единицы. Далее,

$$y - \langle y\rangle = \min\{\varepsilon^2\bar{m} + \varepsilon^3 m^0, \varepsilon\bar{q} + \ldots, 0\} -$$
$$- \langle \min\{\varepsilon^2\bar{m} + \varepsilon^3 m^0, \varepsilon\bar{q} + \ldots, 0\}\rangle = \varepsilon^3 y^0,$$

так как следующее слагаемое в q имеет порядок, не ниже, чем ε^3.

Итак, $y = \varepsilon\bar{y} + \varepsilon^3 y^0$, и в силу (5.15)

$$x = \varepsilon\bar{x} + \varepsilon^3 x^0, \quad v = \varepsilon\bar{v} + \varepsilon^3 v^0, \quad c = \varepsilon\bar{c} + \varepsilon^3 c^0.$$

Тогда из уравнения (5.19) получается, что $q = \varepsilon\bar{q} + \varepsilon^4 q^0$.

Из соотношения (5.15) находим связь между x, v, c и y ($t_0 - \bar{\theta}$, $t - \varepsilon\bar{\theta}$):

$$\varepsilon\bar{x} + \varepsilon^3 x^0 = \varepsilon\bar{v} + \varepsilon^3 v^0 = \varepsilon\bar{c} + \varepsilon^3 c^0 = \varepsilon\bar{y}_\theta + \varepsilon^3 y^0_\theta,$$

где

$$\bar{y}_\theta = \bar{y} - \varepsilon\bar{\theta}\left(\hat{\gamma} + \frac{d\bar{y}}{dt}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\theta}^2\frac{d}{dt}\left(\hat{\gamma} + \frac{d\bar{y}}{dt}\right) + O(\varepsilon^3),$$
$$y^0_\theta = y^0(t_0 - \bar{\theta}, t) + O(\varepsilon).$$

Значит, $\bar{x} = \bar{v} = \bar{c} = \bar{y}_\theta = \bar{y} + O(\varepsilon)$, а $x^0 = v^0 = c^0 = y^0_\theta$.

Теперь подставим представления m и x снова в уравнение (5.18)

$$\varepsilon^2\frac{d\bar{x}}{dt} + \varepsilon^2\frac{\partial m^0}{\partial t_0} + \varepsilon^3\frac{\partial m^0}{\partial t} + \varepsilon^3(\hat{\gamma} + \varepsilon\bar{\mu})\bar{m} + \varepsilon^4(\hat{\gamma} + \varepsilon\bar{\mu})m^0 =$$
$$= \varepsilon^2\bar{\mu} - \varepsilon^2\frac{\hat{\gamma}\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}}\beta^0 + \varepsilon^2\hat{\gamma}(\bar{x} + \varepsilon^2 x^0) - \varepsilon^3\frac{\hat{\gamma}\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}}\beta^0(\bar{x} + \varepsilon^2 x^0).$$

Усредняя левую и правую части уравнения по t_0, получаем уравнение для «средних» отклонений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} + \varepsilon(\hat{\gamma} + \varepsilon\bar{\mu})\bar{m} = \bar{\mu} + \hat{\gamma}\bar{x} - \varepsilon^3\frac{\hat{\gamma}\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}}\langle\beta^0 x^0\rangle.$$

Вычитаем уравнение (5.23) из предыдущего уравнения и получаем уравнение для «быстрых» отклонений

$$\frac{\partial m^0}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial m^0}{\partial \tau} + \varepsilon^2 (\hat{\gamma} + \varepsilon \bar{\mu}) m^0 =$$

$$= -\frac{\hat{\gamma}\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}} (1 + \varepsilon \bar{x}) \beta^0 + \varepsilon^2 \hat{\gamma} x^0 - \varepsilon^3 \frac{\hat{\gamma}\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}} \langle \beta^0 x^0 \rangle^0.$$

Точно так же обрабатываем остальные уравнения системы (5.17)—(5.22) и в результате расщепляем исходную модель (5.1)—(5.10) на соотношения

$$d\hat{M}/dt = \varepsilon \hat{\gamma} \hat{M}, \quad d\tau_{\text{т}}/dt - (\gamma_p - \varepsilon \hat{\gamma}) \tau_{\text{т}} = (1 - \pi) \bar{\beta},$$

$$\hat{Y} = \hat{M}, \ \hat{X} = \hat{\gamma} \hat{b} \hat{M}, \ \hat{V} = a\hat{M}, \ \hat{C} = \eta \frac{p}{p_1} \hat{M}, \ Q = a\hat{M},$$

$$\hat{Q}^{\text{т}} = \tau_{\text{т}} \eta \frac{p}{p_1} \hat{M}, \quad a + \eta \frac{p}{p_1} + \hat{\gamma} \hat{b} = 1,$$

$$\frac{d\bar{g}}{dt} + \varepsilon (\hat{\gamma} - \bar{r}_2) \bar{g} = (1 - \pi) \bar{\beta},$$

$$\left(1 + \tau_{\text{т}} \eta \frac{p}{p_1}\right) \frac{d\xi}{dt} - (1 - \pi) \eta \bar{\beta} \left(1 - \frac{p}{p_1} \xi\right) = 0, \tag{5.23}$$

$$\hat{D} = \eta p \hat{M}, \quad \hat{N} = \xi p a \hat{M}, \quad \hat{N}^{\text{т}} = \xi p \tau_{\text{т}} \eta \frac{p}{p_1} \hat{M},$$

$$\hat{G} = (1 - a - \eta - \varepsilon (\hat{\gamma} - \bar{r}_1) a \xi) p \hat{M}, \ \hat{G}^{\text{т}} = [(1 - (1 - \pi) \bar{\beta} - p/p_1) \eta +$$
$$+ \varepsilon (\hat{\gamma} - \bar{r}_1) \xi \tau_{\text{т}} \eta p/p_1] p \hat{M}, \quad \hat{G}^B = \varepsilon [\bar{r}_1 \xi (a + \tau_{\text{т}} \eta p/p_1) -$$
$$- \bar{r}_2 \eta (1 + \bar{g})] p \hat{M},$$

которые образуют модель планирования; соотношения

$$\frac{d\bar{m}}{dt} + \varepsilon (\hat{\gamma} + \varepsilon \bar{\mu}) \bar{m} = \bar{\mu} + \hat{\gamma} \bar{x} - \varepsilon^3 \frac{\hat{\gamma}\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}} \langle \beta^0 x^0 \rangle,$$

$$\frac{d\bar{q}}{dt} + \varepsilon \hat{\gamma} \bar{q} = -\hat{\gamma} + \bar{v} - \bar{y},$$

$$\tau_{\text{т}} \frac{d\bar{q}^{\text{т}}}{dt} + (1 - \pi) \bar{\beta} \bar{q}^{\text{т}} = \pi (\bar{c} - \bar{y}) + (1 - \pi) \bar{\beta} (\bar{c} + \varepsilon^3 \langle \beta^0 c^0 \rangle),$$

$$\frac{d\bar{g}}{dt} + \varepsilon (\hat{\gamma} - \bar{r}_2) \bar{g} = -\varepsilon (\hat{\gamma} - \bar{r}_2) +$$
$$+ (1 - \pi) [(\bar{y} - \bar{c}) + \bar{\beta} (\bar{c} + \varepsilon^3 \langle \beta^0 c^0 \rangle)], \tag{5.24}$$

$$\frac{d\bar{n}^G}{dt} + \varepsilon \hat{\gamma} \bar{n}^G = -\bar{r}_2 (1 + \bar{g}) - \left[(1 - \pi) \eta + \left(a + \pi \eta \frac{p}{p_1}\right) \xi\right] \times$$
$$\times (\bar{y} - \bar{c}) - (1 - \pi) \eta \left(1 - \xi \frac{p}{p_1}\right) \bar{\beta} (\bar{c} + \varepsilon^3 \langle \beta^0 c^0 \rangle) - \varepsilon \bar{r}_2 \bar{g} +$$
$$+ \frac{d\xi}{dt} \left(\tau_{\text{т}} \eta \frac{p}{p_1} \bar{q}^{\text{т}} + a \bar{q}\right),$$

$$\varepsilon \bar{y} = \langle \min \{\varepsilon^2 \bar{m} + \varepsilon^3 m^0, \varepsilon \bar{q} + \varepsilon^4 q^0, 0\} \rangle,$$

которые задают «средние» изменения со временем систематических отклонений реализовавшихся экономических показателей от плановых; и соотношения

$$\frac{\partial m^0}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial m^0}{\partial t} + \varepsilon^2 (\hat{\gamma} + \varepsilon \bar{\mu}) m^0 =$$

$$= - \frac{\hat{\gamma}\bar{\beta}}{1 - \bar{\beta}} [(1 + \varepsilon \bar{x}) \beta^0 + \varepsilon^3 \langle \beta^0 x^0 \rangle^0] + \varepsilon^2 \hat{\gamma} x^0,$$

$$\frac{\partial q^0}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial q^0}{\partial t} + \varepsilon^2 \hat{\gamma} q^0 = v^0 - y^0,$$

$$\tau_{\text{т}} \left(\frac{\partial (q^{\text{т}})^0}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial (q^{\text{т}})^0}{\partial t} \right) + \varepsilon (1 - \pi) \bar{\beta} (q^{\text{т}})^0 =$$

$$= \varepsilon (1 - \pi) \bar{\beta} [(1 + \bar{c}) \bar{\beta} \beta^0 + \varepsilon c^0 + \varepsilon^2 \langle \beta^0 c^0 \rangle^0] + \varepsilon^2 \pi (c^0 - y^0),$$

$$\frac{\partial g^0}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial g^0}{\partial t} + \varepsilon^2 (\hat{\gamma} - \bar{r}_2) g^0 = \varepsilon (1 - \pi) [(1 + \bar{c}) \bar{\beta} \beta^0 +$$

$$+ \varepsilon (y^0 - c^0) + \varepsilon^2 \langle \beta^0 c^0 \rangle^0], \qquad (5.25)$$

$$\frac{\partial (n^G)^0}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial (n^G)^0}{\partial t} + \varepsilon^2 \hat{\gamma} (n^G)^0 =$$

$$= - \varepsilon (1 - \pi) \eta \left(1 - \xi \frac{p}{p_1}\right) \bar{\beta} [(1 + \bar{c}) \beta^0 + \varepsilon c^0 + \varepsilon^2 \langle \beta^0 c^0 \rangle^0] -$$

$$- \varepsilon^2 \left[(1 - \pi) \eta + \left(a + \pi \eta \frac{p}{p_1} \right) \xi \right] (y^0 - c^0) - \varepsilon^2 \bar{r}_2 g^0 +$$

$$+ \varepsilon \left(\tau_{\text{т}} \eta \frac{p}{p_1} (q^{\text{т}})^0 + \varepsilon^2 a q^0 \right) \frac{d\xi}{dt},$$

$$\varepsilon^3 y^0 = \min \{\varepsilon^2 \bar{m} + \varepsilon^3 m^0, \varepsilon \bar{q} + \varepsilon^4 q^0, 0\} -$$

$$- \langle \min \{\varepsilon^2 \bar{m} + \varepsilon^3 m^0, \varepsilon \bar{q} + \varepsilon^4 q^0, 0\} \rangle,$$

которые задают «быстрые» изменения отклонений реализовавшихся экономических показателей от плановых.

Заметим, что в последней системе уравнений в частных производных времена t_0 и t последовательно разделяются, если искать решения в виде разложений по степеням ε.

Итак, выделение иерархии временных масштабов процессов общественного воспроизводства дает возможность последовательно проводить агрегирование по времени исходного описания и выделить модель планирования (5.23) из исходной модели (5.1)—(5.10). Система уравнений (5.24), (5.25) для отклонений описывает реакцию экономической системы на принятые процедуры планирования и, следовательно, дает возможность явным образом выразить качество процедур планирования через общие характеристики процесса расширенного воспроизводства.

Следует отметить два обстоятельства. Во-первых, система (5.24), (5.25) содержит не объемные, а структурные плановые показатели, а именно темп роста $\hat{\gamma}$ и экономические нормативы: норму кредитования ξ, норматив запасов в розничной торговле $\tau_{\text{т}}$,

отношение оптовой и розничной цен p/p_1, норму процента r_2. Во-вторых, система (5.24), (5.25) содержит ненаблюдаемые величины $\bar{\beta}$ и β^0. Значит, надо построить процедуры оценки этих величин через наблюдаемые величины, чтобы можно было использовать систему (5.24), (5.25) для оценки качества предлагаемых новых процедур планирования.

Abstract

Mathematical description of production, exchange, distribution and consumption processes in the centrally planned economy is suggested. Information disposed by the planning centre is described as well as planning procedures used by it. Their influence on the economic self-adjustment mechanisms is analysed. Some results of computer experiments are presented. Necessity to describe separately the planning process and the plan realization process is discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. 295 с.
2. *Дюкалов А. Н.* Некоторые задачи прикладной математической экономики. М.: Наука, 1983. 54 с.
3. *Петров А. А., Шананин А. А.* Системный анализ экономики: Пробл. агрегир. описания экон. отношений // Наст. сб. С. 121—157.

УДК 519.86

СТАБИЛЬНЫЕ НОРМАТИВЫ КАК ИНСТРУМЕНТ УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИКОЙ В НОВЫХ УСЛОВИЯХ ХОЗЯЙСТВОВАНИЯ

А. В. Тимохов

1. Введение

В настоящее время перед экономической наукой остро стоит проблема создания целостной концепции управления экономикой с учетом нового хозяйственного механизма. Важное место отводится здесь разработке принципов установления экономических нормативов, регулирующих взаимоотношения предприятий с государственным бюджетом. На июньском (1987 г.) Пленуме ЦК КПСС отмечалось, что нормативы платежей должны носить долговременный стабильный характер [1, с. 87]. В связи с этим возникает целый ряд вопросов, представляющих, как нам кажется, значительный интерес не только для экономистов, но и для математиков, занимающихся применением математических методов

© А.В. Тимохов, 1989

в экономике. Как должны вычисляться стабильные нормативы платежей в государственный бюджет? Как они связаны с ценами и темпами развития народного хозяйства? При каких условиях эти нормативы оказываются одинаковыми для всех отраслей? [1] Является ли политика стабильных нормативов эффективной? Конкретизируем последний вопрос следующим образом. Можно ли при данной системе цен установить такие постоянные значения нормативов платежей в бюджет, которые позволяют вывести экономическую систему из несбалансированного состояния на режим пропорционального развития с заданным темпом роста?

Настоящая работа посвящена математическому анализу этих и некоторых других вопросов управления экономикой в новых условиях хозяйствования. Анализ будет проводиться в рамках определенной модели. При ее построении мы используем метод моделирования целостной экономической системы, развитый в [2—5]. Суть его заключается в последовательном описании хода общественного воспроизводства как взаимодействия микродинамических процессов, отражающих текущую деятельность участников системы. Особое внимание уделяется товарно-денежным отношениям, процессам обмена товаров на деньги. При этом допускаются нарушения нормального хода обращения, т. е. в модели возможны как дефицит, так и избыток товаров на рынке. Речь как раз и пойдет о том, можно ли избавиться от подобных явлений путем политики стабильных нормативов. Другая важная черта модели — явное описание кругооборота производственных фондов. В ходе этого процесса составные части фондов проходят три стадии, принимают и сбрасывают три функциональные формы: денежную, производительную и товарную. Мы пытаемся найти здесь математическое выражение (применительно к социалистической экономике) Марксовой теории кругооборота капитала. «Капитал,— пишет К. Маркс,— есть движение, процесс кругооборота... Поэтому капитал можно понять лишь как движение, а не как вещь, пребывающую в покое» [6, с. 121]. В полной мере сказанное можно отнести и к производственным фондам социалистического предприятия.

Исторически получилось так, что среди всех возможных подходов к моделированию общественного воспроизводства наибольшее развитие получил макроэкономический подход (см., например, [7]). Его основы были заложены К. Марксом в знаменитых схемах простого и расширенного воспроизводства. Они же, как известно, послужили методологической базой при разработке моделей межотраслевого баланса, которые наряду с моделями оптимального планирования занимали господствующее положение на стыке математики и советской экономической науки в течение последних десятилетий. Популярность схем К. Маркса столь велика, что часто они чуть ли не отождествляются с его теорией

[1] «Следует вести линию на внедрение единой нормы платы за производственные фонды для всех предприятий отрасли, а в дальнейшем — для всех отраслей» [1, с. 88].

воспроизводства. Между тем эта теория значительно богаче. Достаточно сказать, что в «Капитале» К. Маркс подошел к схемам лишь в конце второго тома, а до этого провел тщательный анализ отдельных механизмов общественного воспроизводства, прежде всего тех, которые связаны с процессом производства и обращения индивидуального капитала. Что же касается схем, то они явились результатом неформального агрегирования индивидуальных капиталов в два подразделения общественного производства, с одной стороны, и агрегирования продуктов их движения в годовые показатели — с другой. Иными словами, К. Маркс излагал свою теорию воспроизводства в направлении от микро- к макроописанию экономической системы. Такого подхода, по мнению автора, следует придерживаться и при математическом моделировании общественного воспроизводства. Отметим, что сказанное согласуется с принципом первичности микроописания при построении моделей экономических систем, сформулированным в [8].

Предлагаемая модель состоит из двух уровней. На первом, основном, уровне описывается ход общественного воспроизводства в предположении, что в каждый момент времени управляющие параметры — цены, нормативы, эмиссия денег и некоторые другие — известны. На втором уровне, который может допускать разнообразные варианты, осуществляется формирование управляющих параметров на базе информации, поступающей с первого уровня. Конкретный способ их формирования выражает определенную политику недирективного управления экономикой. В данной работе в соответствии со сказанным выше мы сосредоточим внимание лишь на такой политике, при которой все управляющие параметры, за исключением эмиссии, остаются постоянными во времени. Вопрос управления состоит в том, как выбирать эти постоянные.

Важное место в анализе модели займет исследование стационарных режимов воспроизводства. Будет показано, что цены p и темп роста λ могут выбираться произвольно в достаточно широких рамках, диктуемых условием самофинансирования отраслей. Однако все остальные параметры стационарного режима уже однозначно выражаются через p и λ. В частности, норматив платы за фонды j-й отрасли η_j должен вычисляться как разность между ее нормой рентабельности $\rho_j = \rho_j(p, \lambda)$ и нормой роста $\lambda - 1$. Следовательно, эти нормативы оказываются одинаковыми для всех отраслей в том и только том случае, если одинаковы их нормы рентабельности. Последнее же обеспечивается установлением при данном темпе роста λ цен единого уровня $p = p(\lambda)$. Тот темп λ^*, при котором соответствующая единая норма рентабельности равна норме роста, является наибольшим возможным в условиях самофинансирования отраслей.

Далее в работе излагаются результаты численного исследования нестационарного процесса воспроизводства. Эти результаты подтверждают эффективность политики стабильных нормативов.

Говоря точнее, основной вывод состоит в следующем. Если выбрать цены p, целевой темп роста λ и нормативы платежей η_j по описанным выше правилам и далее не менять управляющие параметры p и η_j в ходе нестационарного функционирования моделируемой экономической системы, то даже в случаях достаточно сильных отклонений начального состояния от сбалансированного система выходит на режим пропорционального развития с заданным темпом роста λ. Если нормативы платежей рассчитаны с небольшими отклонениями от указанного правила, то система попрежнему выходит на стационарный режим, но уже с несколько иными характеристиками. В частности, если нормативы завышаются, то могут получаться режимы с устойчивым дефицитом. При больших ошибках в сторону завышения стабильных нормативов система деградирует. В то же время, если нормативы начинают изменяться, подчиняясь конъюнктуре текущего момента, то в системе возникают циклические колебания.

Подчеркнем, что рассматриваемая модель исходит из целого ряда упрощающих предположений. Более того, она является минимальной в классе микродинамических моделей воспроизводства. Поэтому было бы неправомерным придавать выводам работы чрезмерно широкое толкование. И тем не менее эти выводы, повидимому, можно принять в качестве одной из опорных точек для дальнейшего, более углубленного и полного, исследования такой сложной проблемы, как управление социалистической экономикой в новых условиях хозяйствования.

2. Исходные предположения

Будем рассматривать замкнутую социально-экономическую систему, функционирующую в дискретные периоды времени $t = 1, 2, \ldots$ Под периодами понимаются отрезки времени достаточно краткой продолжительности, например месяцы.

В системе производится n типов товара, которые используются как средства производства и(или) предметы потребления. Средства производства делятся на орудия труда и предметы труда. Определяющее различие между ними состоит в том, что в каждом отдельном периоде используемые орудия труда (машины, оборудование и т. п.) выбывают лишь частично, а предметы труда (сырье, топливо и т. п.) расходуются полностью.

В данной работе мы исходим из простейшего леонтьевского описания сферы производства, т. е. считаем, что товар с индексом $j = 1, \ldots, n$ выпускается одной и только одной j-й отраслью, причем каждая отрасль использует единственный технологический способ производства [2]. Будем считать, что в системе имеется лишь один тип труда постоянной интенсивности и, значит, затраты

[2] Ограниченный объем работы не позволяет рассмотреть здесь первоначально разработанный более общий вариант модели, где каждая отрасль имеет много технологических способов производства.

труда можно измерять просто количеством занятых в течение периода.

В соответствии со сказанным предположим, что заданы следующие параметры:

a_{ij} — количество i-го средства производства, используемого при выпуске единицы j-го товара в течение одного периода, $a_{ij} \geqslant 0$ [3];

γ_{ij} — коэффициент выбытия i-го средства производства при использовании его j-й отраслью, $0 < \gamma_{ij} \leqslant 1$;

a_j^0 — количество рабочих, занятых при выпуске единицы j-го товара в течение одного периода, $a_j^0 > 0$.

В расчете на единицу выпуска выбытие i-го средства производства за один период составляет величину $\gamma_{ij}a_{ij}$. Таким образом, это средство выступает как орудие труда, если $\gamma_{ij} < 1$, и как предмет труда, если $\gamma_{ij} = 1$. Разумеется, величина γ_{ij} несущественна, если $a_{ij} = 0$.

Введем обозначения: $A = (a_{ij})$ — матрица норм используемых средств производства, $A^0 = (\gamma_{ij}a_{ij})$ — матрица норм выбывающих средств производства, $a^0 = (a_j^0)$ — вектор норм используемой рабочей силы.

Отрасли обладают полной самостоятельностью в принятии плановых решений, т. е. государственные заказы в модели не рассматриваются. Балансовая прибыль отрасли образуется из выручки от продажи продукции за вычетом амортизации орудий труда (рассчитываемой на основе их выбытия), стоимости затраченных предметов труда и выплаченной заработной платы. Остаточная прибыль получается из балансовой за вычетом обязательств отрасли перед государством. В первом, основном, варианте модели в качестве этих обязательств рассматривается плата за производственные фонды, во втором, к которому мы обратимся несколько позже,— налог на прибыль. Банковское кредитование отраслей в модели отсутствует [4]. Поэтому о проценте речи не идет. Остаточная прибыль поступает в распоряжение отрасли и целиком используется ею для экстенсивного расширения производства, т. е. фонды науки и техники, материального поощрения и социального развития в модели не рассматриваются. Таким образом, мы сохраняем здесь лишь главный элемент механизма самофинансирования: отрасль развивает производство за счет собственной прибыли. Если от-

---

[3] Здесь и всюду далее имеется в виду, если не оговорено противное, что индексы i и j принимают все целые значения от 1 до n.

[4] Среди всех формулируемых здесь упрощающих предположений данное является наиболее существенным. Другие, хотя и выглядят довольно ограничительными, могут быть ослаблены или вовсе отброшены за счет небольших усложнений принципиальной схемы модели. Однако введение банковской системы потребовало бы коренной перестройки этой схемы. О характере возникающих здесь трудностей можно составить представление по работе [5], где описывается микроэкономическая модель капиталистического воспроизводства при наличии банковской системы и кредитно-денежных механизмов регулирования экономики.

расль попала в трудное финансовое положение, то государство оказывает ей помощь в виде денежной дотации. Однако размер дотации таков, что он позволяет лишь не сократить производство ниже заданного уровня. При более или менее нормальном функционировании системы механизм дотаций бездействует.

Все общество в модели состоит из трудящихся, единственным источником доходов которых служит труд в сфере производства. Предполагается, что все трудящиеся получают одинаковую заработную плату, которую они полностью направляют на приобретение предметов потребления. В данной модели мы не акцентируем внимание на общей численности трудящихся, считая ее всякий раз достаточной для потребностей производства.

Доходы государства складываются из платежей отраслей, к которым добавляются эмитируемые денежные средства. Полученная сумма за вычетом возможных дотаций отраслям полностью направляется на приобретение товаров, удовлетворяющих общегосударственные нужды.

Наряду с параметрами a_{ij}, γ_{ij}, a_j^0 в модели считаются заданными следующие элементы:

$c_1^0 = (c_{i1}^0)$ — n-мерный вектор, описывающий набор привычно необходимых жизненных средств одного работника, $c_1^0 \geq 0$;

$c_2^0 = (c_{i2}^0)$ — n-мерный вектор, описывающий постоянную структуру государственного потребления, $c_2^0 \geq 0$.

Назначение вектора c_1^0 двояко. С одной стороны, он используется как нормативная база при расчете заработной платы, а с другой, описывает постоянную структуру реального потребления трудящихся [5].

В дальнейшем будем предполагать, что матрица

$$A^1 = (a_{ij}^1), \qquad a_{ij}^1 = \gamma_{ij} a_{ij} + c_{i1}^0 a_j^0, \tag{2.1}$$

называемая матрицей *совокупных материальных затрат*, продуктивна, т. е. существует такой вектор выпусков $y = (y_1, \ldots, y_n) > 0$, что

$$A^1 y = A^0 y + c_1^0 \langle a^0, y \rangle < y.$$

Это означает, что производимая продукция покрывает все материальные затраты, включая нормативные затраты предметов потребления на воспроизводство занятой рабочей силы, причем сверх этого остаются излишки всех товаров (прибавочный продукт).

Цены $p = (p_1, \ldots, p_n) > 0$ назовем *рентабельными* (точнее, следовало бы говорить о системе рентабельных цен), если

$$p > pA^1 = pA^0 + \langle p, c_1^0 \rangle a_0,$$

[5] В более общем варианте модели, упомянутой в подстрочном примечании 2, вектор c_1^0 выполняет лишь роль норматива, а реальное потребление трудящихся и государства описывается функциями спроса. При этом структура их потребления уже может меняться под воздействием цен.

т. е. цена каждого товара превышает издержки его производства при условии, что заработная плата одного работника q установлена в соответствии с имеющимся нормативом: $q = \langle p, c_1^0 \rangle$. Согласно известным фактам теории неотрицательных матриц [9], такие цены существуют в том и только в том случае, если матрица A^1 продуктивна. Множество рентабельных цен обозначим через P. В дальнейшем всегда предполагаем, что $p \in P$, поскольку это есть необходимое условие для работы отраслей в условиях самоокупаемости и самофинансирования.

Все внутренние параметры модели делятся на фазовые и управляющие. Фазовые параметры характеризуют ход общественного воспроизводства. Они описаны в разд. 3. Перечислим управляющие параметры:

$p^t = (p_i^t)$ — цены на товары (здесь и далее — в периоде t), $p^t \in P$;

q^t — заработная плата одного работника, $q^t > 0$;

η_j^t — норматив платы j-й отрасли за производственные фонды, $\eta_j^t \geqslant 0$;

$\alpha_{ij}^{0,t}$ — норматив запаса i-го средства производства у j-й отрасли, $\alpha_{ij}^{0,t} \geqslant 1$;

ω_j^t — коэффициент максимально допустимого снижения текущих капиталовложений в j-ю отрасль, $0 \leqslant \omega_j^t < 1$;

E^t — эмиссия денег.

Коротко охарактеризуем еще не упоминавшиеся ранее элементы управления. Параметры $\alpha_{ij}^{0,t}$ суть нормативные отношения наличных объемов производства к их фактически используемому количеству. По своему смыслу эти параметры должны иметь бо́льшие значения для предметов труда и меньшие для орудий труда. Поскольку наличные орудия труда фактически выражают мощности отрасли, то соответствующие им обратные величины $1/\alpha_{ij}^{0,t}$ характеризуют нормативную загрузку мощностей. Параметры ω_j^t регулируют условия, при которых осуществляется финансовая помощь отраслям со стороны государства. Чем ближе ω_j^t к нулю, тем более жесткими являются эти условия.

3. Первый уровень модели

Приводимая ниже система рекуррентных формул описывает процесс общественного воспроизводства в предположении, что значения управляющих параметров заданы. Формулы расставлены в порядке их последовательного вычисления. Каждой формуле предшествует название вычисляемого фазового параметра.

Производственные фонды j-й отрасли на начало периода $t = 1, 2, \ldots$:

$$F_j^t = K_j^t + \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ij}^t u_{ij}^t + r_j^t s_j^t. \tag{3.1}$$

Коэффициент обеспеченности j-й отрасли средствами производства:

$$\alpha_j^t = \min_{i: a_{ij}>0} \alpha_{ij}^t, \quad \text{где} \quad \alpha_{ij}^t = u_{ij}^t/(a_{ij}\bar{y}_j^t). \tag{3.2}$$

Объем производства j-го товара в периоде t:

$$y_j^t = \min(1, \alpha_j^t)\,\bar{y}_j^t. \tag{3.3}$$

Стоимость (в текущих ценах) и себестоимость продукции, произведенной j-й отраслью в периоде t:

$$W_j^t = p_j^t y_j^t, \quad R_j^t = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ij}^t \gamma_{ij} a_{ij} + q^t a_j^0\right) y_j^t. \tag{3.4}$$

Наличное количество i-го средства производства у j-й отрасли на конец периода t:

$$v_{ij}^t = u_{ij}^t - \gamma_{ij} a_{ij} y_j^t. \tag{3.5}$$

Объем производства, планируемый j-й отраслью на период $t+1$: корень $\bar{y}_j^{t+1}$ уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^t \max(0, \alpha_{ij}^{0,\,t-1} a_{ij} \bar{y}_j^{t+1} - v_{ij}^t) = K_j^t. \tag{3.6}$$

Спрос на i-й товар со стороны j-й отрасли и k-го агрегированного потребителя (трудящихся — при $k = 1$, государства — при $k = 2$) в периоде t:

$$b_{ij}^t = \max(0, \alpha_{ij}^{0,\,t+1} a_{ij} \bar{y}_j^{t+1} - v_{ij}^t), \quad c_{ik}^t = \frac{c_{ik}^0}{\langle p^t, c_k^0 \rangle} D_k^t. \tag{3.7}$$

Совокупный спрос на i-й товар в периоде t:

$$d_i^t = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^t + \sum_{k=1}^{2} c_{ik}^t. \tag{3.8}$$

Коэффициент дефицитности i-го товара в периоде t:

$$\delta_i^t = \min(1, \beta_i^t), \quad \text{где} \quad \beta_i^t = s_i^t/d_i^t. \tag{3.9}$$

Объем продажи i-го товара в периоде t:

$$\bar{d}_i^t = \delta_i^t d_i^t. \tag{3.10}$$

Объемы покупки i-го товара j-й отраслью и k-м потребителем в периоде t:

$$\bar{b}_{ij}^t = \delta_i^t b_{ij}^t, \quad \bar{c}_{ik}^t = \delta_i^t c_{ik}^t. \tag{3.11}$$

Фактические денежные затраты покупателей в периоде t:

$$\bar{K}_j^t = \sum_{i=1}^{n} p_i^t \bar{b}_{ij}^t, \quad \bar{D}_k^t = \sum_{i=1}^{n} p_i^t \bar{c}_{ik}^t. \tag{3.12}$$

Наличное количество i-го средства производства у j-й отрасли на начало периода $t+1$:

$$u_{ij}^{t+1} = v_{ij}^{t} + \bar{b}_{ij}^{t}. \tag{3.13}$$

Средняя цена приобретения единицы запаса i-го средства производства у j-й отрасли на начало периода $t+1$:

$$\bar{p}_{ij}^{t+1} = \frac{\bar{p}_{ij}^{t} v_{ij}^{t} + p_{i}^{t} \bar{b}_{ij}^{t}}{u_{ij}^{t+1}}. \tag{3.14}$$

Наличное количество готового j-го товара на начало периода $t+1$:

$$s_{j}^{t+1} = s_{j}^{t} - c_{j}^{t} + y_{j}^{t}. \tag{3.15}$$

Средняя себестоимость единицы запаса готового j-го товара на начало периода $t+1$:

$$r_{j}^{t+1} = \frac{r_{j}^{t}(s_{j}^{t} - \bar{d}_{j}^{t}) + R_{j}^{t}}{s_{j}^{t+1}}. \tag{3.16}$$

Стоимость и себестоимость продукции, проданной j-й отраслью в периоде t:

$$\bar{W}_{j}^{t} = p_{j}^{t} c_{j}^{t}, \quad \bar{R}_{j}^{t} = r_{j}^{t} c_{j}^{t}. \tag{3.17}$$

Балансовая прибыль и норма рентабельности j-й отрасли в периоде t:

$$M_{j}^{t} = \bar{W}_{j}^{t} - \bar{R}_{j}^{t}, \quad \rho_{j}^{t} = \frac{M_{j}^{t}}{F_{j}^{t}}. \tag{3.18}$$

Денежная наличность j-й отрасли на конец периода t:

$$\bar{K}_{j}^{t} = \bar{W}_{j}^{t} - q^{t} a_{j}^{0} y_{j}^{t} - \eta_{j}^{t} F_{j}^{t} + (K_{j}^{t} - \bar{K}_{j}^{t}). \tag{3.19}$$

Государственные дотации j-й отрасли в периоде t:

$$N_{j}^{t} = \max(0, \omega_{j}^{t} K_{j}^{t} - \bar{K}_{j}^{t}). \tag{3.20}$$

Денежная наличность j-й отрасли на начало периода $t+1$:

$$K_{j}^{t+1} = \bar{K}_{j}^{t} + N_{j}^{t}. \tag{3.21}$$

Доходы трудящихся на начало периода $t+1$:

$$D_{1}^{t+1} = q^{t} \sum_{j=1}^{n} a_{j}^{0} y_{j}^{t} + (D_{1}^{t} - \bar{D}_{1}^{t}). \tag{3.22}$$

Доходы государства на начало периода $t+1$, идущие на потребление:

$$D_{2}^{t+1} = \sum_{j=1}^{n} (\eta_{j}^{t} F_{j}^{t} - N_{j}^{t}) + (D_{2}^{t} - \bar{D}_{2}^{t}) + E^{t}. \tag{3.23}$$

Остановимся на кратком разъяснении выписанных формул.

Согласно формуле (3.1) (см. также (3.13)—(3.16), (3.21)) производственные фонды отрасли на начало очередного периода складываются из денежной наличности, запаса средств производства, измеренных по ценам приобретения, и запаса готовой продукции, измеренной по себестоимости, т. е. фонды одновременно представлены во всех своих формах: денежной, производительной и товарной.

Смысл формул (3.2), (3.3), описывающих текущее производство, станет более понятным, если проанализировать сначала, как осуществляется планирование производства. В соответствии с формулой (3.6) отрасль предполагает осуществить в периоде $t+1$ максимальный объем производства в рамках финансового ограничения на приобретение дополнительных средств производства в периоде t и с учетом того, что на начало периода $t+1$ запас каждого i-го средства производства должен не менее, чем в $\alpha_{ij}^{0,t+1}$ раз, превышать то его количество, которое потребуется фактически. Иными словами, если план закупки в периоде t дополнительного количества i-го средства производства, выражаемый параметром b_{ij}^t из (3.7), будет беспрепятственно осуществлен, т. е. реализуется случай $\bar{b}_{ij}^t = b_{ij}^t$ (см. (3.11)), то на начало периода $t+1$ запас i-го средства производства составит величину [6]

$$u_{ij}^{t+1} = v_{ij}^t + b_{ij}^t \geqslant \alpha_{ij}^{0,t+1} a_{ij} \bar{y}_j^{t+1}.$$

Однако план закупки того или иного средства производства может быть нарушен вследствие его *рыночного дефицита* ($\delta_i^t = \beta_i^t < 1$). Тогда его запас у отрасли на начало периода $t+1$ окажется меньше нормативного значения $\alpha_{ij}^{0,t+1} a_{ij} \bar{y}_j^{t+1}$, а может оказаться даже меньше того его количества $a_{ij}\bar{y}_j^{t+1}$, которое предполагалось использовать фактически. В последнем случае отрасль уже не сможет осуществить запланированный объем производства $\bar{y}_j^{t+1}$, т. е. потребуется его корректировка в сторону уменьшения. Именно такую корректировку (применительно к периоду t) и предусматривают формулы (3.2), (3.3). Если $\alpha_j^t < 1$, то будем говорить, что j-я отрасль работает в условиях *производственного дефицита*. Теперь понятна роль нормативов $\alpha_{ij}^{0,t}$, регулирующих величину буфера между рынком и производством. Чем больше $\alpha_{ij}^{0,t}$, тем меньше возможность возникновения производственного дефицита при наличии рыночного. Однако, как это будет ясно из дальнейшего, увеличение параметров $\alpha_{ij}^{0,t}$ приводит к уменьшению от-

---

[6] Для простоты считается, что все средства производства, приобретенные в данном периоде, уже в следующем можно использовать в производстве. Фактически это означает, что мы исключаем из рассмотрения такие средства производства, как здания, сооружения, сложное оборудование, требующее длительного периода ввода. Учет лагов является важным направлением в усовершенствовании излагаемой модели.

раслевых норм рентабельности, а отсюда и к уменьшению максимально возможного темпа роста системы.

Согласно формуле (3.11) в случа рыночного дефицита i-го товара степень удовлетворения спроса на него считается одинаковой для всех покупателей. Неотрицательные разности $K_j^t - \bar{K}_j^t$, $D_k^t - \bar{D}_k^t$ (см. (3.12)) представляют собой кассовые остатки покупателей. Если дефицита товаров нет ($\delta_i^t = 1$), то, очевидно, эти остатки равны нулю. Если же есть децифит хотя бы одного товара, то по крайней мере у одного покупателя кассовый остаток положителен.

Отметим, что если бы в модели учитывалась ограниченность трудовых ресурсов, то наряду с прочими естественными дополнениями потребовалось бы, во-первых, описать механизм распределения рабочей силы по отраслям с учетом ее возможного дефицита, а во-вторых, заменить единицу в (3.3) па выражение $l_j^t/(a_j^0 y_j^t)$, где $l_j^t \leqslant a_j^0 y_j^t$ — количество работников, которым реально располагает j-я отрасль на начало периода t. Вообще схема (3.1)—(3.23) является открытой для учета разного рода дополнительных соображений.

Остановимся теперь на механизмах формирования денежных средств участников системы. Согласно (3.19) на конец периода t денежная наличность j-й отрасли $\hat{K}_j^t$ складывается из выручки от продажи продукции и кассового остатка за вычетом заработной платы и платы за фонды. Вообще говоря, может сложиться такая ситуация, что величина $\hat{K}_j^t$ близка к нулю или даже отрицательна. Если ее отношение к величине K_j^t, т. е. денежной наличности j-й отрасли на начало периода t, оказывается меньшим заданного коэффициента ω_j^t, то государство оказывает отрасли финансовую помощь в размере, позволяющем сохранить текущие капиталовложения на уровне $\omega_j^t K_j^t$ (формулы (3.20), (3.21)).

Текущие доходы трудящихся складываются из заработной платы за труд в прошлом периоде и кассового остатка; доходы государства — из платежей отраслей за фонды, кассового остатка и эмитируемых денежных средств за вычетом дотаций отраслям (формулы (3.22), (3.23)). Величина D_2^{t+1} должна быть во всяком случае неотрицательной, что обеспечивается выбором соответствующей величины эмиссии E^t (см. (4.2)).

Важным свойством модели является соблюдение динамических балансов фондов и денег. Из формул (3.1), (3.4), (3.5), (3.12) — (3.14), (3.16)—(3.19), (3.21) следует, что

$$F_j^{t+1} = F_j^t + (M_j^t - \eta_j^t F_j^t) + N_j^t, \tag{3.24}$$

т. е. производственные фонды изменяются от периода к периоду на сумму текущей остаточной прибыли (которая, вообще говоря, может оказаться и отрицательной) и текущих дотаций. Обозна-

чим через G^t общую массу денег в системе на начало периода t:

$$G^t = \sum_{j=1}^{n} K_j^t + D_1^t + D_2^t = \sum_{i=1}^{n} p_i^t d_i^t, \tag{3.25}$$

где второе равенство справедливо в силу (3.6)—(3.8). Из формул (3.8), (3.10)—(3.12), (3.17), (3.19), (3.21)—(3.23) получаем

$$G^{t+1} = G^t + E^t, \tag{3.26}$$

т. е. масса денег изменяется от периода к периоду на величину текущей эмиссии E^t.

Итак, мы представили процесс воспроизводства как упорядоченный циклический пересчет фазовых параметров по формулам (3.1)—(3.23). В чисто математическом плане все фазовые параметры можно разбить на основные и вспомогательные. К числу основных параметров относятся

$$\bar{y}_j^t, u_{ij}^t, \bar{p}_{ij}^t, s_j^t, r_j^t, K_j^t, D_k^t. \tag{3.27}$$

Если обозначить их совокупность через X^t, то процесс воспроизводства можно коротко записать в виде

$$X^{t+1} = \Phi(X^t, U^t),$$

где Φ — оператор воспроизводства, как раз и описываемый системой (3.1)—(3.23); а U^t — совокупность управляющих параметров в периоде t (отметим, что в U^t входит не $\alpha_{ij}^{0,t}$, а $\alpha_{ij}^{0,t+1}$). Значения основных параметров в начальный момент $t = 1$ должны быть заданы. Все остальные фазовые параметры являются вспомогательными в том смысле, что они используются при описании самого оператора Φ.

Назовем *состоянием системы* в периоде t совокупность значений всех фазовых параметров модели при данном t. Под *динамической траекторией* модели будем понимать последовательность состояний при $t = 1, 2, \ldots$

4. Вариант второго уровня модели: политика стабильных нормативов

В общем случае второй уровень модели имеет вид

$$U^t = \Psi(X^t, X^{t-1}, \ldots, U^{t-1}, U^{t-2}, \ldots),$$

где Ψ — оператор управления, конкретная форма которого отвечает определенной политике управления. В данной работе мы будем считать, что целью управления является вывод системы на режим стационарного сбалансированного роста с заданным темпом $\lambda \geqslant 1$, причем для достижения этой цели используется политика стабильных нормативов. Говоря точнее, предположим, что все управляющие параметры, за исключением эмиссии, остаются постоянными во времени:

$$p^t = p,\ q^t = q,\ \eta_j^t = \eta_j,\ \alpha_{ij}^{0,t} = \alpha_{ij}^0,\ \omega_j^t = \omega_j. \tag{4.1}$$

При этом всегда считается, что $q = \langle p, c_1^0 \rangle$, т. е. рабочая сила оплачивается в соответствии с нормативом c_1^0.

Понятно, что при указанных предположениях величина эмиссии E^t должна выбираться достаточно аккуратным образом. Механизм ее формирования должен учитывать, с одной стороны, реальное функционирование несбалансированной системы при постоянных ценах, а с другой, необходимость вывода ее на режим с данным темпом роста λ. Возможны различные варианты этого механизма. Мы примем следующий:

$$E^t = (\lambda - 1) \sum_{j=1}^{n} \overline{W}_j^t + \sum_{j=1}^{n} N_j^t. \tag{4.2}$$

Согласно данной формуле основной компонентой эмиссии является произведение целевой нормы роста $\lambda - 1$ на совокупный объем текущих продаж. Кроме того, за счет эмиссии осуществляется финансовая помощь отраслям, если в ней возникает необходимость. Пусть $N_j^t = 0$. Тогда из (3.9), (3.10), (3.17), (3.25), (3.26) и (4.2) следует, что $G^{t+1} = \lambda G^t$, если рыночный дефицит товаров отсутствует ($\delta_i^t = 1$), и $G^{t+1} < \lambda G^t$ в противном случае. Таким образом, в формулу (4.2) заложен определенный механизм регулирования общей массы денег в зависимости от состояния рынка.

Описание модели закончено. Управляющие параметры $\alpha_{ij}^0 \geqslant 1$ и $\omega_j \in [0, 1)$ в дальнейшем считаются заданными, т. е. их можно попросту присоединить к экзогенным параметрам a_{ij}, γ_{ij}, a_j^0 и c_k^0. В разд. 5, 6 будем предполагать, что зафиксированы также произвольные рентабельные цены $p \in P$. В этих условиях конкретная динамическая траектория модели однозначно определяется заданием значений основных фазовых параметров (3.27) при $t = 1$, целевого темпа роста $\lambda \geqslant 1$ и нормативов платежей $\eta_j \geqslant 0$. Траекторию при данных λ и $\eta = (\eta_j)$ с тем или иным началом будем называть для краткости *траекторией* (λ, η).

5. Стационарные режимы роста

Предположим, что траектория (λ, η) сходится к некоторому стационарному режиму с фактическим темпом роста $\mu \geqslant 1$. Это по определению означает, что сходятся, во-первых, последовательности параметров (3.2), (3.9), (3.14), (3.16) и ρ_j^t из (3.18) и, во-вторых, последовательности отношений остальных параметров к μ в степени t:

$$\alpha_j^t \to \alpha_j,\ \alpha_{ij}^t \to \alpha_{ij},\ \delta_i^t \to \delta_i,\ \beta_i^t \to \beta_i \quad \text{и т. д.},$$

$$\frac{F_j^t}{\mu^t} \to F_j,\ \frac{y_j^t}{\mu^t} \to y_j,\ \frac{W_j^t}{\mu^t} \to W_j,\ \frac{R_j^t}{\mu^t} \to R_j \quad \text{и т. д.}$$

при $t \to \infty$ [7]. Переходя к пределу в (3.1)—(3.23) (после деления соответствующих формул на μ^t), получаем с учетом (4.1), (4.2) следующую систему, характеризующую предельный стационарный режим:

$$F_j = K_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ij} u_{ij} + r_j s_j, \tag{5.1}$$

$$\alpha_j = \min_{i: a_{ij} > 0} \alpha_{ij}, \quad \alpha_{ij} = u_{ij}/(a_{ij}\bar{y}_j), \tag{5.2}$$

$$y_j = \min(1, \alpha_j)\bar{y}_j, \tag{5.3}$$

$$W_j = p_j y_j, \quad R_j = \Big(\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ij}\gamma_{ij} a_{ij} + q a_j^0\Big) y_j, \tag{5.4}$$

$$v_{ij} = u_{ij} - \gamma_{ij} a_{ij} y_j, \tag{5.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i b_{ij} = K_j, \tag{5.6}$$

$$b_{ij} = \max(0, \mu\alpha_{ij}^0 a_{ij}\bar{y}_j - v_{ij}), \quad c_{ik} = \frac{c_{ik}^0}{\langle p, c_k^0\rangle} D_k, \tag{5.7}$$

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + \sum_{k=1}^{2} c_{ik}, \tag{5.8}$$

$$\delta_i = \min(1, \beta_i), \quad \beta_i = s_i/d_i, \tag{5.9}$$

$$\bar{d}_i = \delta_i d_i, \quad \bar{b}_{ij} = \delta_i b_{ij}, \quad \bar{c}_{ik} = \delta_i c_{ik}, \tag{5.10}$$

$$\bar{K}_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{b}_{ij}, \quad \bar{D}_k = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{c}_{ik}, \tag{5.11}$$

$$\mu u_{ij} = v_{ij} + \bar{b}_{ij}, \tag{5.12}$$

$$\mu\bar{p}_{ij} u_{ij} = \bar{p}_{ij} v_{ij} + p_i \bar{b}_{ij}, \tag{5.13}$$

$$\mu s_j = s_j - \bar{d}_j + y_j, \tag{5.14}$$

$$\mu r_j s_j = r_j(s_j - \bar{d}_j) + R_j, \tag{5.15}$$

$$\bar{W}_j = p_j \bar{d}_j, \quad \bar{R}_j = r_j \bar{d}_j, \tag{5.16}$$

$$M_j = \bar{W}_j - \bar{R}_j, \quad \rho_j = M_j/F_j, \tag{5.17}$$

$$\bar{K}_j = \bar{W}_j - q a_j^0 y_j - \eta_j F_j + (K_j - \bar{K}_j), \tag{5.18}$$

$$N_j = \max(0, \omega_j K_j - \bar{K}_j), \quad \mu K_j = \bar{K}_j + N_j, \tag{5.19}$$

$$\mu D_1 = q \sum_{j=1}^{n} a_j^0 y_j + (D_1 - \bar{D}_1), \tag{5.20}$$

$$\mu D_2 = \sum_{j=1}^{n} (\eta_j F_j + (\lambda - 1)\bar{W}_j) + (D_2 - \bar{D}_2). \tag{5.21}$$

---

[7] Мы не затрагиваем здесь вопрос о минимальной совокупности фазовых параметров, сходимость которых (в указанном смысле) влечет сходимость всей траектории.

Приступим к анализу данной системы при естественных дополнительных предположениях: $y_j > 0$, $d_i > 0$ и $u_{ij} = 0$, если $u_{ij} = 0$. Подчеркнем, что параметры λ и η_j наравне с другими рассматриваются здесь как неизвестные.

Поскольку $\omega_j < 1$, а $\mu \geqslant 1$, то из (5.19) следует, что $N_j = 0$, т. е. при стационарном режиме финансовая помощь отраслям отсутствует. Переходя к пределу в (3.24), (3.26) и учитывая (3.25), (4.2), (5.16), получаем

$$\mu F_j = F_j + M_j - \eta_j F_j, \tag{5.22}$$

$$(\mu - 1) \sum_{i=1}^{n} p_i d_i = (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{c}_i. \tag{5.23}$$

Заметим, что эти две формулы можно вывести также суммированием выражений из (5.1), (5.4), (5.11), (5.13), (5.15)—(5.19) и из (5.18)—(5.21) соответственно с учетом некоторых других формул системы (5.1)—(5.21). Это позволяет присоединить формулы (5.22), (5.23) к данной системе, отбросив по одному выражению в указанных суммах. Мы отбросим (5.18) и (5.21). Таким образом, параметр D_2 фигурирует теперь только в (5.7). Ясно, что все объемные показатели стационарного режима, включая D_2, определены с точностью до константы. Поэтому можно ввести их нормировку путем фиксирования величины D_2. Нам будет удобно положить

$$D_2 = \langle p, c_2^0 \rangle. \tag{5.24}$$

Заметим, что формулу (5.22) с учетом (5.17) можно переписать в виде

$$\eta_j = \rho_j - (\mu - 1). \tag{5.25}$$

Таким образом, мы приходим к первому важному выводу: траектория (λ, η) может выйти только на такой стационарный режим, при котором нормативы платежей η_j оказываются равными отраслевым нормам рентабельности ρ_j за вычетом фактической нормы роста $\mu - 1$. Подчеркнем, что отсюда еще не следует конкретного правила расчета стабильных нормативов, поскольку параметры ρ_j и μ пока неизвестны.

Из (5.23) получаем другой важный вывод: если рыночный дефицит товаров отсутствует ($\bar{d}_i = d_i$), то система может выйти на стационарный режим только с целевым темпом роста ($\mu = \lambda$); в противном случае фактический темп роста может быть лишь меньше целевого ($\mu \leqslant \lambda$, причем, если $\lambda > 1$, то $1 < \mu < \lambda$).

Используя формулы (5.5), (5.7), (5.10), (5.12), нетрудно вывести, что

$$u_{ij} = \frac{(\mu \delta_i \alpha_{ij}^0 \bar{y}_j + (\delta_i - 1) \gamma_{ij} y_j) a_{ij}}{\mu - 1 + \delta_i}, \tag{5.26}$$

$$v_{ij} = \frac{\mu (\delta_i \alpha_{ij}^0 \bar{y}_i - \gamma_{ij} y_j) a_{ij}}{\mu - 1 + \delta_i}, \tag{5.27}$$

$$b_{ij} = \frac{\mu((\mu-1)\alpha_{ij}^0 \bar{y}_j + \gamma_{ij} y_j) a_{ij}}{\mu - 1 + \delta_i}. \tag{5.28}$$

Заметим, что эти формулы существенно упрощаются, если рыночный дефицит отсутствует ($\delta_i = 1$): например, формула (5.26) приводится к виду $a_{ij} = \alpha_{ij}^0 a_{ij} y_j$, т. е. запасы средств производства у отраслей равны нормативным.

Из (5.2), (5.3), (5.26) легко выводится, что

$$\bar{y}_j = \Delta_j y_j, \text{ где } \Delta_j = \max\left(1, \max_{i: a_{ij}>0} \frac{\mu + (\delta_i - 1)(1-\gamma_{ij})}{\mu \delta_i \alpha_{ij}^0}\right). \tag{5.29}$$

Таким образом, при стационарном режиме j-я отрасль работает в условиях производственного дефицита, если $\Delta_j > 1$, т. е. если хотя бы для одного i, такого, что $a_{ij} > 0$, выполнено условие

$$\frac{\mu + (\delta_i - 1)(1-\gamma_{ij})}{\mu \delta_i \alpha_{ij}^0} > 1 \quad \text{или} \quad \delta_i < \delta_{ij} = \frac{\mu - 1 + \gamma_{ij}}{\mu \alpha_{ij}^0 - 1 + \gamma_{ij}}. \tag{5.30}$$

Отсюда следует, что если $\alpha_{ij}^0 = 1$, то рыночный дефицит i-го средства производства немедленно переходит в производственный. Если же $\alpha_{ij}^0 > 1$, то возникает буферная зона ($\delta_{ij} \leqslant \delta_i < 1$), в пределах которой рыночный дефицит не сказывается на планах производства. Отметим, что величина δ_{ij} (при $\alpha_{ij}^0 > 1$) является возрастающей функцией от γ_{ij}. Следовательно, чем короче срок службы средства производства, тем скорее его рыночный дефицит воздействует на производство.

Согласно формулам (5.9), (5.26)—(5.29) параметры u_{ij}, v_{ij}, b_{ij} и $\bar{y}_j$ являются однозначными функциями от μ, $\beta = (\beta_i)$ и $y = (y_j)$. Покажем, что это же верно и для всех других неизвестных исследуемой системы. Из (5.9), (5.10), (5.14) имеем

$$d_j = \frac{y_j}{(\mu - 1)\beta_j + \delta_j}. \tag{5.31}$$

Из (5.4), (5.12)—(5.15) с учетом (2.1), (5.28) и условия $q = \langle p, c_1^0 \rangle$ заключаем, что

$$\bar{p}_{ij} = p_i, \text{ если } a_{ij} > 0, \text{ и } r_j = \frac{R_j}{y_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij}^1. \tag{5.32}$$

Используя (5.6), (5.9)—(5.11), (5.16), (5.26), (5.28), (5.29), (5.31), (5.32), мы можем теперь представить формулы (5.1), (5.17), (5.20) в следующем виде:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[(\mu \alpha_{ij}^0 \Delta_j + \gamma_{ij}) a_{ij} + \frac{\beta_j a_{ij}^1}{(\mu - 1)\beta_j + \delta_j}\right] y_j,$$

$$M_j = \frac{\left(p_j - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_{ij}^1\right) \delta_j y_j}{(\mu - 1)\beta_j + \delta_j}, \tag{5.33}$$

$$\rho_j = \frac{\left(p_j - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_{ij}^1\right) \delta_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \left[(\mu\alpha_{ij}^0 \Delta_j + \gamma_{ij})((\mu - 1)\beta_j + \delta_j) a_{ij} + \beta_j a_{ij}^1\right]},$$

$$D_1 = \frac{q \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^0 y_j}{\mu - 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i p_i c_{i1}^0 / q}. \tag{5.34}$$

Явные выражения всех остальных неизвестных как функций от μ, β и y очевидны. В частности, выражение для λ получается из (5.23).

Заметим, что норма рентабельности j-й отрасли (5.33) зависит (при данных экзогенных параметрах и ценах $p \in P$) только от μ и β: $\rho_j = \rho_j(\mu, \beta)$, причем всегда $\rho_j > 0$. Формулу (5.25) можно переписать теперь в виде

$$\eta_j = \rho_j(\mu, \beta) - (\mu - 1). \tag{5.35}$$

Напомним, что параметры η_j должны быть, по крайней мере, неотрицательны, так как иначе денежный поток будет направляться не от отраслей в бюджет, а в обратную сторону. Отсюда приходим к следующему неравенству

$$\min_{j=1,\ldots,n} \rho_j(\mu, \beta) \geqslant \mu - 1, \tag{5.36}$$

которое будем называть *условием самофинансирования отраслей*.

Пусть $\mu \geqslant 1$ и $\beta > 0$ удовлетворяют (5.36). Тогда вектор выпусков y однозначно определяется из условия (5.8). В самом деле, подставляя в (5.8) выражения из (5.7), (5.24), (5.28), (5.31) и (5.34), приходим к системе:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} y_j + \hat{c}_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.37}$$

где

$$\hat{a}_{ij} = ((\mu - 1)\beta_i + \delta_i)\left[\frac{\mu((\mu - 1)\alpha_{ij}^0 \Delta_j + \gamma_{ij}) a_{ij}}{\mu - 1 + \delta_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_{i1}^0 a_j^0}{\mu - 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i p_i c_{i1}^0 / q}\right],$$

$$\hat{c}_i = ((\mu - 1)\beta_i + \delta_i) c_{i2}^0.$$

Из условия (5.36) нетрудно вывести, что матрица $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$ продуктивна. Следовательно, вектор $y = (y_j)$, удовлетворяющий (5.37), существует, неотрицателен и единствен. При этом, очевидно, y положителен, если матрица $\bar{A}$ с элементами $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + c^0_{i1} + c^0_{i2}$ неразложима.

Подведем итоги проделанного анализа. Мы показали, что в системе (5.1)—(5.21) можно выбрать любые $\mu \geqslant 1$ и $\beta > 0$, удовлетворяющие условию самофинансирования (5.36). Все остальные неизвестные системы уже однозначно выражаются через μ и β при дополнительном условии (5.24), и, таким образом, если его опустить, то все объемные показатели стационарного режима оказываются единственными с точностью до константы. В дальнейшем будем называть стационарный режим, характеризуемый параметрами μ и β, просто *режимом* (μ, β). Все режимы можно разбить на три типа:

1) режим при полном удовлетворении спроса: $\mu = \lambda$, $\beta_i \geqslant 1$;

2) режим с рыночным дефицитом, не приводящим к производственному: $\mu \leqslant \lambda$, $\beta_i < 1$ хотя бы при одном i, но $\Delta_j = 1$;

3) режим с производственным дефицитом: $\mu \leqslant \lambda$, $\Delta_j > 1$ хотя бы при одном j.

6. Установление целевого темпа роста и нормативов платежей в бюджет

Проведенный анализ стационарных режимов позволяет предложить следующее правило выбора целевого темпа роста λ и нормативов платежей η_j.

Пусть (в дополнение к перечисленным ранее экзогенным параметрам модели) задан вектор $\beta^0 = (\beta^0_j)$, где $\beta^0_j \geqslant 1$ выражает нормативное отношение запаса j-го товара к спросу на него. Рассмотрим систему (5.1)—(5.21) при $\beta_j = \beta^0_j$. Тогда (в силу условия $\beta^0_j \geqslant 1$) возможен лишь случай $\mu = \lambda$, причем все формулы из разд. 5 существенно упрощаются. В частности, формула (5.33) для нормы рентабельности j-й отрасли приобретает вид

$$\rho_j = \rho_j(\lambda) = \Big(p_j - \sum_{i=1}^{n} p_i a^1_{ij}\Big) \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i a^2_{ij}, \tag{6.1}$$

где

$$a^2_{ij} = (\lambda \alpha^0_{ij} + \gamma_{ij})((\lambda - 1)\beta^0_j + 1)\, a_{ij} + \beta^0_j a^1_{ij}.$$

Соответственно условие самофинансирования (5.36) теперь может быть записано как условие только на целевой темп роста $\lambda \geqslant 1$ (при данных ценах $p \in P$):

$$\min_{j=1,\ldots,n} \rho_j(\lambda) \geqslant \lambda - 1. \tag{6.2}$$

Поскольку функции $\rho_j(\lambda)$ строго убывают и положительны, то существует единственное число $\bar{\lambda} > 1$, удовлетворяющее равенству

$$\min_{j=1,\ldots,n} \rho_j(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} - 1. \tag{6.3}$$

При этом отрезок $[1, \bar{\lambda}]$ описывает все $\lambda \geqslant 1$, для которых выполняется (6.2).

Пусть теперь из тех или иных дополнительных соображений выбран целевой темп роста $\lambda \in [1, \bar{\lambda}]$ [8]. Тогда в соответствии с (5.35) нормативы платы отраслей за фонды будем вычислять по формуле

$$\eta_j = \rho_j(\lambda) - (\lambda - 1). \tag{6.4}$$

Из такого способа выбора λ и η непосредственно следует, что динамическая траектория (λ, η) может выйти на стационарный режим (λ, β^0). Возникает вопрос: возможны ли для этой траектории другие предельные стационарные режимы? Рассмотрим при данных λ и η систему (5.23), (5.35) ($j = 1, \ldots, n$), где, напомним, d_j и $\bar{d}_j$ являются известными функциями от μ и β (см. (5.10), (5.31), (5.37)). Поставленный вопрос, очевидно, сводится к следующему: имеет ли эта система решение (μ, β), отличное от (λ, β^0)? Нетрудно показать, что при дополнительном условии $\Delta_j = 1$ ($j = 1, \ldots, n$), где $\Delta_j = \Delta_j(\mu, \beta)$ определено в (5.29), такого решения нет. Иными словами, в классе стационарных режимов без производственного дефицита режим (λ, β^0) является единственным, куда может выйти траектория (λ, η). Однако в области, где $\Delta_j > 1$ при том или ином j, решение (μ, β) системы (5.23), (5.35) уже может существовать (например, оно заведомо существует при $n = 1$). Поэтому, вообще говоря, имеется опасность выхода траектории (λ, η) на соответствующий режим (μ, β) с производственным дефицитом.

До этого момента рассматривался первый вариант модели, где отчисления отраслей в государственный бюджет осуществляются в форме платежей за производственные фонды. Обратимся теперь ко второму варианту модели, когда отчисления производятся в форме налога на прибыль. В систему (3.1)—(3.23) здесь вносится лишь следующее изменение: в формулах (3.19), (3.23) вместо выражения $\eta_j^t F_j^t$ ставится выражение $\theta_j^t M_j^t$, где θ_j^t — норма налога на прибыль j-й отрасли в периоде t, $0 \leqslant \theta_j^t \leqslant 1$. Повторяя цепочку соответствующих рассуждений, получаем аналог формулы (6.4):

$$\theta_j = 1 - (\lambda - 1)/\rho_j(\lambda). \tag{6.5}$$

При этом по-прежнему темп роста λ должен выбираться из условия (6.2). Формулу (6.5) можно переписать в виде $\lambda - 1 =$

[8] В качестве таких соображений, не позволяющих выбрать $\lambda = \bar{\lambda}$, могут выступать ограниченность прироста трудовых ресурсов, необходимость обеспечения известного уровня государственных расходов и т. п. Чем больше λ, тем меньше нормативы (6.4) и, значит, меньше поступления в бюджет.

$= (1 - \theta_j)\, \rho_j\, (\lambda)$. В западной литературе зависимость такого сорта (норма роста есть произведение нормы накопления на норму прибыли) обычно называется *кембриджийским уравнением* [10].

Заметим, не развивая далее эту тему, что если применяются оба вида отчислений, то возникает комбинация формул (6.4) и (6.5):

$$\lambda - 1 = (1 - \theta_j)(\rho_j\, (\lambda) - \eta_j). \tag{6.6}$$

Если выбрать некоторое η_j, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \eta_j \leqslant \leqslant \rho_j\, (\lambda) - (\lambda - 1)$, то из (6.6) однозначно находим θ_j. После этого понятно, каким образом в модель можно было бы включить фонды социального развития, материального поощрения и увязать нормативы их образования с нормативами платежей.

7. Цены единого уровня

Выше мы исходили из предположения, что в системе зафиксированы произвольные рентабельные цены p. Выделим теперь один тип цен, обладающих важными свойствами. Будем рассматривать параметры ρ_j и $\bar{\lambda}$ из (6.1), (6.3) как функции от (p, λ) и p соответственно: $\rho_j = \rho_j\, (p, \lambda)$, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}\, (p)$.

Назовем вектор $p \in P$ *ценами единого уровня*, число ρ — *единой нормой рентабельности*, соответствующими темпу роста $\lambda \geqslant 1$, если $\rho_j\, (p, \lambda) = \rho$ при всех $j = 1, \ldots, n$. С учетом (6.1) данное условие можно переписать в виде

$$p - pA^1 = \rho p A^2, \tag{7.1}$$

где от λ зависит матрица $A^2 = (a^2_{ij})$. Отметим, что аналогичные системы для определения цен единого уровня (называемых также ценами производства) рассматривались в [11—13]. Различия связаны с видом «фондовой» матрицы A^2. В излагаемой модели в состав фондов включаются не только средства производства, но также денежная наличность и запасы готовой продукции, т. е. фонды рассматриваются как единство трех функциональных форм, последовательно сменяющих друг друга. Этим и объясняется довольно сложный вид матрицы A^2 в нашем случае.

Легко показывается, что если продуктивная матрица A^1 неразложима, то нормированный вектор $p = p\, (\lambda)$ и число $\rho = \rho\, (\lambda)$, удовлетворяющие (7.1), существуют, положительны и единственны; при этом функция $\rho\, (\lambda)$ непрерывна и строго убывает, а для любого вектора $p \in P$, не пропорционального $p\, (\lambda)$, выполнены неравенства

$$\min_{j=1, \ldots, n} \rho_j\, (p, \lambda) < \rho\, (\lambda) < \max_{j=1, \ldots, n} \rho_j\, (p, \lambda).$$

Из свойств $\rho\, (\lambda)$ следует, что существует единственное число $\lambda^* > 1$, удовлетворяющее равенству

$$\rho\, (\lambda^*) = \lambda^* - 1. \tag{7.2}$$

Возьмем любые цены $p \in P$, не пропорциональные $p(\lambda^*)$. Если предположить, что $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(p) \geqslant \lambda^*$, то получаем

$$\lambda^* - 1 \leqslant \bar{\lambda} - 1 = \min_{j=1,\ldots,n} \rho_j(p, \bar{\lambda}) \leqslant \min_{j=1,\ldots,n} \rho_j(p, \lambda^*) < \rho(\lambda^*),$$

но это противоречит (7.2). Следовательно, $\bar{\lambda} < \lambda^*$. В то же время для любых цен p, пропорциональных $p(\lambda^*)$, очевидно, имеем $\lambda^* = \bar{\lambda}(p)$. Таким образом, мы показали, что число λ^* есть наибольший возможный темп роста в условиях самофинансирования отраслей: $\lambda^* = \max_{p \in P} \bar{\lambda}(p)$; причем этот темп достигается лишь при соответствующих ему ценах единого уровня. Вообще любой темп роста $\lambda \in [1, \lambda^*]$ может быть достигнут путем установления цен единого уровня $p(\lambda)$, поскольку тогда заведомо выполняется условие самофинансирования (6.2):

$$\rho_j(p(\lambda), \lambda) = \rho(\lambda) \geqslant \rho(\lambda^*) = \lambda^* - 1 \geqslant \lambda - 1.$$

В этом и только в этом случае нормативы платежей (6.4), (6.5) для всех отраслей оказываются одинаковыми: $\eta_j = \rho(\lambda) - (\lambda - 1)$, $\theta_j = 1 - (\lambda - 1)/\rho(\lambda)$. В частности, если $\lambda = \lambda^*$, то нормативы равны нулю.

Подчеркнем, что темп роста $\lambda \in [1, \lambda^*]$ может быть достигнут (в смысле выполнения (6.2)) и при других ценах p. Однако, чем ближе λ к λ^*, тем меньше должны различаться отраслевые нормы рентабельности и, значит, тем меньше должно быть отклонение устанавливаемых цен p от соответствующих цен единого уровня.

8. Асимптотика динамической траектории при правильно установленных нормативах

Из предыдущего отнюдь не следует, что динамическая траектория с данными ценами $p \in P$ и параметрами λ, η или θ, выбранными по правилам (6.2), (6.4), (6.5), будет сходиться к целевому стационарному режиму (λ, β^0), тем более, что существует возможность ее выхода на некоторый стационарный режим с производственным дефицитом. Вопрос об асимптотическом поведении траектории изучался с помощью ЭВМ, поскольку его аналитическое исследование затруднительно. Результаты многочисленных вычислительных экспериментов позволяют утверждать, что при возмущениях начального состояния в пределах некоторой достаточно широкой области траектория с правильно установленными нормативами действительно выходит на целевой режим. Если начальное состояние берется вне этой области, то система, как правило, деградирует, т. е. объемы производства всех отраслей устремляются к нулю. Однако в экспериментах со специально подобранным начальным состоянием траектория сходилась к стационарному режиму с производственным дефицитом. За недостатком места мы не будем останавливаться подробнее на экспериментах этого сорта.

Расчеты проводились для $n = 2$ и $n = 4$. При $n = 2$ предполагалось, что первая отрасль производит средства производства (орудия труда или предметы труда), вторая — предметы потребления. При $n = 4$ первая отрасль производила орудия труда, вторая — предметы труда, третья — предметы индивидуального потребления, четвертая — предметы государственного назначения. Случай $n = 4$ лучше отвечает структуре модели. Основным достоинством случая $n = 2$ является возможность более полного исследования и более наглядного представления результатов. Для удобства интерпретаций под дискретным периодом модели условно понимался месяц. Возмущение начального состояния осуществлялось следующим образом. При данных значениях экзогенных параметров, цен $p = P$ и целевого темпа роста λ, удовлетворяющих условию (6.2), отыскивалось решение y системы (5.37), где $\mu = \lambda$, $\beta = \beta^0$. Этот вектор, напомним, характеризует луч объемов производства при стационарном режиме (λ, β^0). Затем брался вектор y^0, более или менее отклоненный от данного луча. На основе тройки (λ, β^0, y^0) вычислялись начальные значения основных фазовых параметров (3.27) по соответствующим формулам из разд. 5.

Рассмотрим в качестве примера один из наборов значений исходных параметров при $n = 4$, бравшихся в ходе экспериментов [9]:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 & 10 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{8.1}$$

$a^0 = (1, 2, 1, 3)$, $\gamma_{ij} = 0{,}01$, $\gamma_{2j} = 1$, $\alpha_{1j}^0 = 1{,}2$, $\alpha_{2j}^0 = 2$, $\beta_j^0 = 2$, $\omega_j = 0{,}5$ ($j = 1, \ldots, 4$), $p = (1, 1, 1, 1)$, $\lambda = 1{,}01$. Здесь $\eta = (0{,}0088, 0{,}0174, 0{,}0247, 0{,}0180)$, $\theta = (0{,}4691, 0{,}6353, 0{,}7122, 0{,}6430)$, $y = (1{,}073, 0{,}939, 0{,}675, 1{,}020)$. Таким образом, в первом варианте модели, скажем, отрасль 1 должна ежемесячно перечислять в бюджет 0,88% от текущей стоимости ее производственных фондов. В годовом исчислении платежи составят 10,56% от стоимости фондов, усредненной по месяцам. Во втором варианте отрасль 1 ежемесячно перечисляет 46,9% от ее балансовой прибыли. Это же отношение платежей к прибыли сохранится и в годовом итоге, поскольку прибыль суммируется, а не осредняется как фонды. Вектор y^0 получался здесь путем покоординатного умножения вектора y на вектор ε. Приведем результаты расчетов для обоих вариантов модели при $\varepsilon = (1{,}05, 0{,}9, 1{,}1, 0{,}95)$. На рис. 1 и 2 (соответственно по вариантам) показана динамика отраслевых объемов производства y_j^t из (3.3). Рис. 3 и 4 описывают динамику показателей $\Delta_j^t = \bar{y}_j/\bar{y}_j$, где $\bar{y}_j^t = y_j^t / \sum_{i=1}^{n} y_i^t$, $\bar{y}_j = y_j / \sum_{i=1}^{n} y_i$,

[9] Значения коэффициентов γ_{ij} и α_{ij}^0 при $i = 3, 4$ не указаны, так как товары типа 3 и 4 не являются средствами производства.

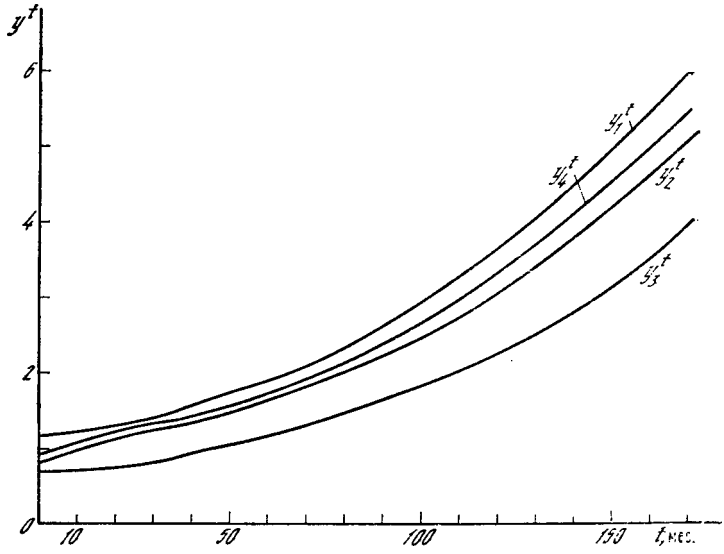

y^t
6
4
2
0
10
50
100
150
t, мес.
y_1^t
y_4^t
y_2^t
y_3^t

Рис. 1

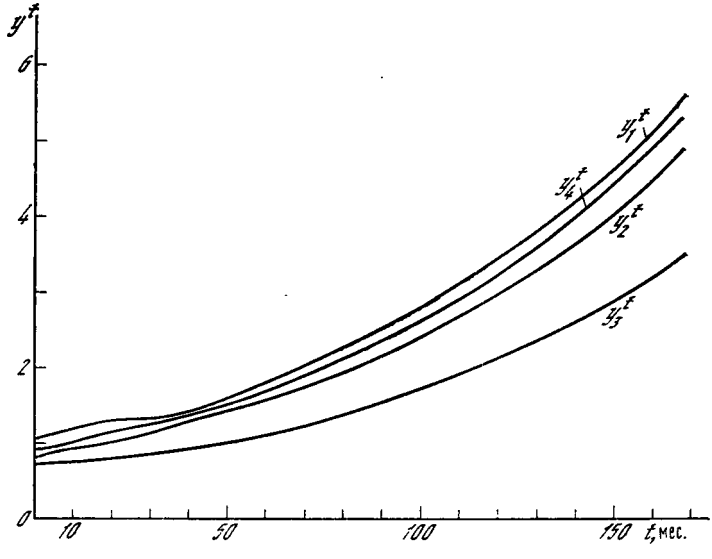

y^t
6
4
2
0
10
50
100
150
t, мес.
y_1^t
y_4^t
y_2^t
y_3^t

Рис. 2

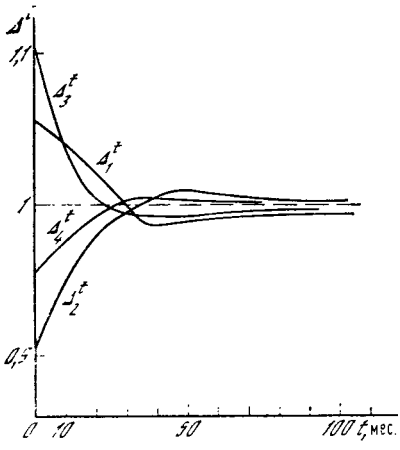


Рис. 3

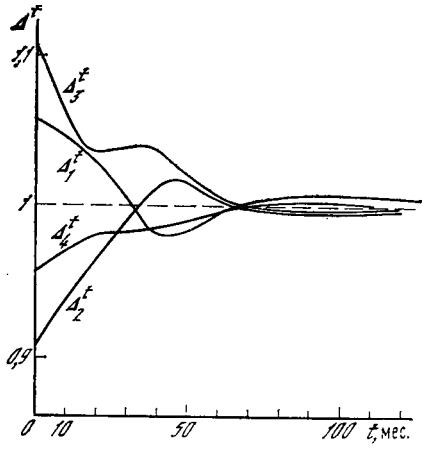


Рис. 4

т. е. отношений текущих пропорций отраслевых объемов производства к их пропорциям при целевом стационарном режиме. Рис. 5 и 6 раскрывают поведение показателей β_j^t из (3.9) — отношений текущих запасов товаров к спросу на них [10]. Кроме того, отметим, что текущие темпы роста всех объемных показателей сходятся здесь к $\lambda = 1{,}01$. Например, уже к 80-й итерации они не отличаются от этого числа более чем на 0,1%. Таким образом, в обоих вариантах модели динамическая траектория выходит на целевой стационарный режим (λ, β^0). Характерным является то, что в первые месяцы показатели β_j^t удаляются от нормативного значения β_j^0: для отраслей 1 и 3, начальные производственные возможности которых относительно превышают потребности общества, эти показатели растут, а для отраслей 2 и 4 падают. При этом наблюдается даже период рыночного дефицита предметов труда ($\beta_2^t < 1$). В данном случае рыночный дефицит не переходит в производственный, поскольку нормативы запасов α_{ij}^0 и β_j^0 достаточно велики, а компоненты возмущающего вектора ε достаточно близки к 1. Однако при иных исходных данных динамическая траектория, сходящаяся к целевому режиму, уже может попадать в область производственного дефицита. В качестве иллюстрации на рис. 7—9 приведены результаты расчетов для первого варианта модели в предположении, что запасы сверхтекущих потребностей не предусматриваются: $\alpha_{1j}^0 = \alpha_{2j}^0 = \beta_j^0 = 1$ (остальные данные те же, что и в (8.1)). Здесь, как мы видим, траектория также выходит на стационарный режим, хотя значительно медленней и труд-

[10] На рис. 6, 8, 9 резкие пики колебаний некоторых кривых «срезаны». На рис. 8 и 9, кроме того, не указано хаотическое поведение ряда параметров в первые месяцы.

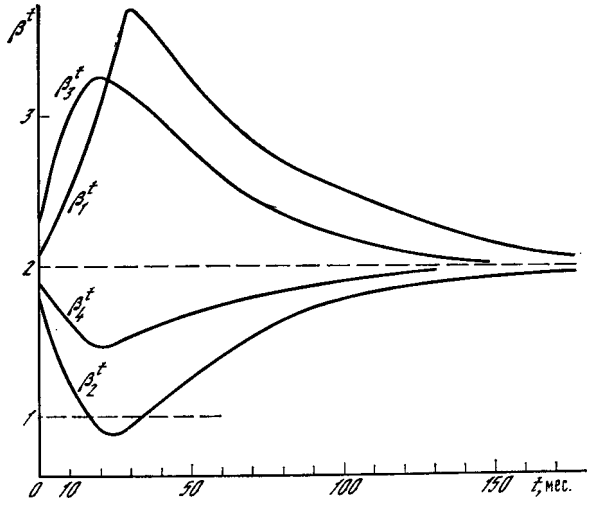


Рис. 5

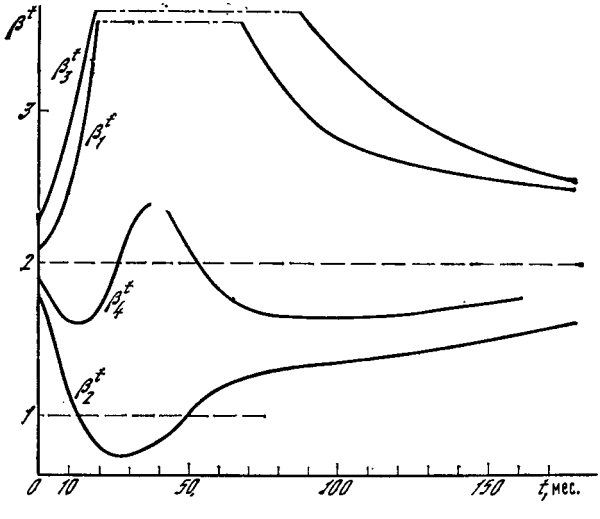


Рис. 6

нее. Несколько первых месяцев наблюдается даже период абсолютного сокращения производства (рис. 7). Причина состоит в том, что при нормативе $\alpha_{2j}^0 = 1$ наблюдаемый в те месяцы рыночный дефицит предметов труда немедленно переходит в производственный. Например, при $t = 8$ выполняются равенства $\alpha_{2j}^t = \beta_2^{t-1} = 0{,}731$, где, напомним, α_{ij}^t определено в (3.2). Рыночный дефицит орудий труда в период непосредственного выхода траектории на стационарный режим также вызывает производственный дефицит, однако меньшего размера. Например, при $t = 120$ имеем $\alpha_{1j}^t = 0{,}997$, тогда как $\beta_1^{t-1} = 0{,}886$. Это объясняется тем, что орудия

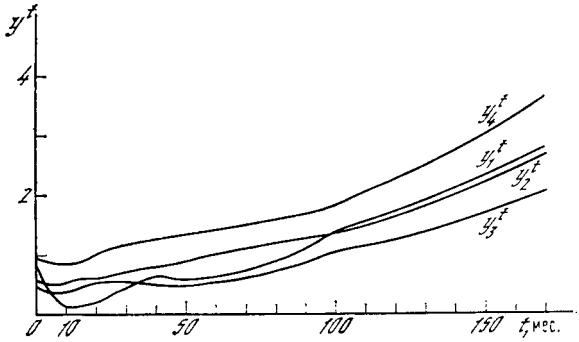


Рис. 7

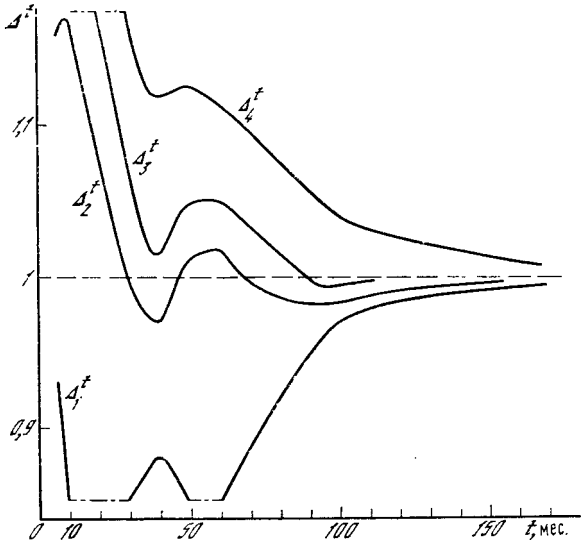


Рис. 8

труда выбывают медленней, чем совершается процесс производства и, значит, отрасли всегда имеют по крайней мере то их количество, которое перешло с предыдущего периода (ср. со сказанным после формулы (5.30)).

Конечно, нельзя ожидать, что при любом возмущающем векторе траектория будет сходиться к стационарному режиму. Так, если взять данные (8.1), то в первом варианте модели при замене $\varepsilon_2 = 0{,}9$ на $\varepsilon_2 = 0{,}8$ или 0,7 траектория еще сходится, однако уже при $\varepsilon_2 = 0{,}6$ наблюдается деградация. Возникающий здесь сильный производственный дефицит предметов труда разрушает систему до того, как успевают включиться механизмы регулирования, заложенные в правиле платежей по стабильным нормативам.

Таким образом, мы подходим к вопросу о полном описании области сходимости, т. е. множества всех тех векторов начальных объемов производства y^0, при которых траектория выходит на стационарный режим. Численное решение этого вопроса при $n = 4$

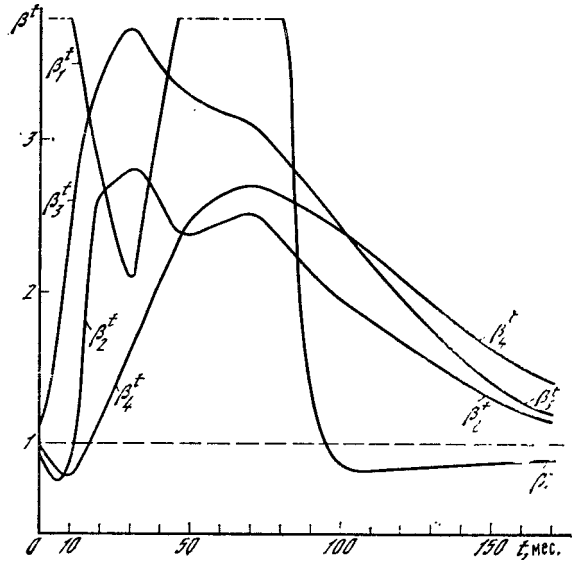


Рис. 9

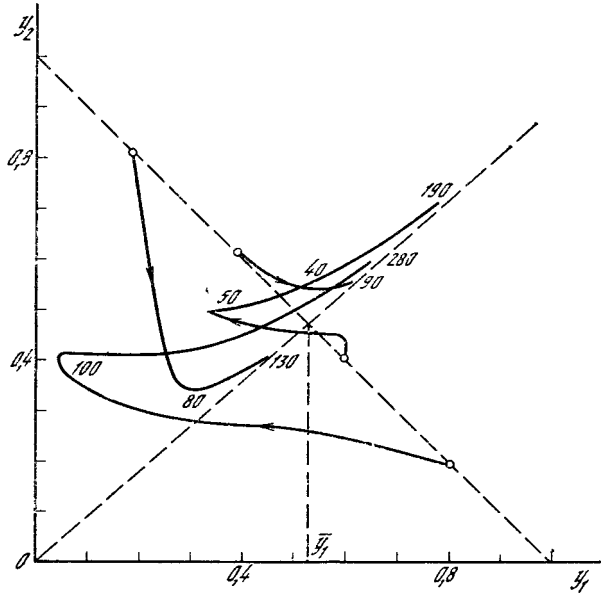


Рис. 10

наталкивается на технические трудности. Поэтому он изучался при $n = 2$. Рассмотрим следующий набор исходных данных:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad c_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{8.2}$$

$a^0 = (1,\ 1)$, $\gamma_{1j} = 0{,}05$, $\alpha_{1j}^0 = \beta_j^0 = 1{,}5$, $\omega_j = 0{,}9$ $(j = 1,\ 2)$, $p = (1,\ 1)$, $\lambda = 1{,}005$.

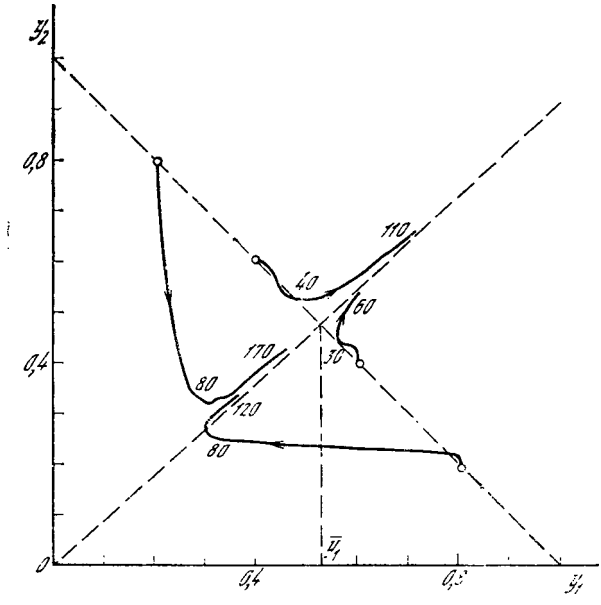


Рис. 11

Здесь $y = (1{,}885,\ 1{,}711)$ и $\bar{y} = y/(y_1 + y_2) = (0{,}524,\ 0{,}476)$. Понятно, что достаточно рассматривать лишь нормированные векторы $y^0 = (y_1^0,\ y_2^0)$, т. е. $y_1^0 + y_2^0 = 1$. При этом область сходимости можно описывать как подмножество соответствующих y_1^0 на отрезке $[0,\ 1]$. В результате 99 просчетов, где координата y_1^0 пробегала значения от 0,01 до 0,99 с шагом 0,01, установлено, что в первом варианте модели областью сходимости является отрезок $[0{,}05,\ 0{,}98]$, а во втором — отрезок $[0{,}03,\ 0{,}99]$. При остальных y_1^0 система деградирует. На рис. 10 и 11 (соответственно для первого и второго вариантов) показано движение в фазовой плоскости четырех траекторий текущих объемов производства $y^t = (y_1^t,\ y_2^t)$ с начальными условиями $y_1^0 = 0{,}2,\ 0{,}4,\ 0{,}6$ и $0{,}8$. Цифры указывают время (месяцы) прохождения поворотных точек и достижения малой окрестности стационарного луча. Обращает на себя внимание то, что в случае сильных отклонений начального состояния от сбалансированного периоду непосредственного выхода траектории на стационарный режим предшествует период резкого сокращения объема производства одной отрасли при медленном наращивании объема производства другой.

Большой размер области сходимости для данных (8.2) объясняется тем, что средства производства трактуются здесь как орудия труда ($\gamma_{1j} < 1$). При этом область практически не меняется при изменении параметров α_{1j}^0, β_j^0. Однако если в (8.2) перейти к предметам труда ($\gamma_{1j} = 1$) и соответственно заменить $a_{11} = 10$, $a_{12} = 8$ на $a_{11} = 0{,}5$, $a_{12} = 0{,}4$, то область сходимости становится более

Таблица 1

α_{1j}^0	β_j^0	$\bar{\nu}_1$	Область сходимости	
			I вариант	II вариант
1,5	1,5	0,452	[0,28,0,72]	[0,22,0,99]
1,3	1,3	0,451	[0,33,0,63]	[0,25,0,99]
1,1	1,1	0,450	[0,40,0,49]	[0,29,0,99]

узкой, причем она уменьшается по мере уменьшения α_{ij}^0, β_j^0. Соответствующие данные приведены в табл. 1.

Вычислительные эксперименты показали, что выбор тех или иных цен, в частности цен единого уровня, не оказывает заметного воздействия на поведение динамической траектории. Оно в большей мере определяется степенью несбалансированности начального состояния и величиной параметров γ_{ij}, α_{ij}^0, β_j^0. Вообще следует особо подчеркнуть, что в данной модели цены, будучи постоянными, не выполняют функцию регуляторов спроса и предложения. Ее осуществляют стабильные и правильно рассчитанные нормативы платежей, под действием которых постепенно устанавливается сбалансированное распределение капиталовложений между отраслями.

9. Асимптотика динамической траектории при стабильных нормативах, определенных с ошибкой, и изменяющихся нормативах

В практических ситуациях точный расчет нормативов платежей по формулам типа (6.4), (6.5) может быть невозможен, например, из-за трудностей в сборе необходимой экономической информации. Возникает вопрос: как будет вести себя динамическая траектория, если стабильные нормативы изначально установлены с отклонениями от указанных формул?

Рассмотрим для определенности первый вариант модели. Пусть η' — вектор нормативов платежей за фонды, отличных от (6.4). В соответствии с предыдущим динамическая траектория (λ, η') может выйти на стационарный режим лишь с такой характеризующей его парой (μ, β), которая является решением системы (5.23), (5.35), где числа η_j заменены на η_j'. Будем говорить об *ошибке* I *рода* в установлении нормативов, если $\eta_j' \leqslant \eta_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$, и *ошибке* II *рода* в противном случае. Ясно, что при ошибке I рода система (5.23), (5.35) всегда имеет решение (λ, β), где $\beta_j \geqslant \beta_j^0$. Иными словами, при установлении всех нормативов на заниженном уровне сохраняется возможность выхода траектории на стационарный режим с целевым темпом роста λ; но при этом возникнут сверхнормативные запасы товаров на рынке. При ошибке II рода все зависит от степени отклонения вектора η' от η. Если от-

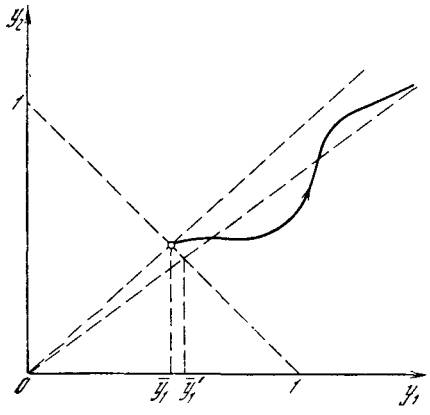


Рис. 12

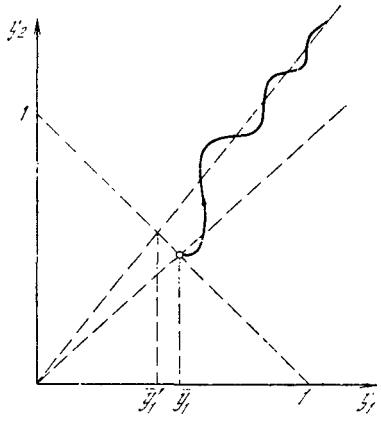


Рис. 13

клонение мало, то указанная система разрешима, причем по мере его увеличения решение (μ, β) переходит из области полного удовлетворения спроса ($\mu = \lambda$, $\beta_j \geqslant 1$) в область рыночного дефицита ($\mu \leqslant \lambda$, $\beta_j < 1$ хотя бы для одного j). При больших отклонениях решения нет.

Приведем результаты численного исследования асимптотики траектории (λ, η') для набора исходных данных (8.2), где $\eta = (0{,}0191,\ 0{,}0326)$. В качестве начального бралось состояние, определяемое стационарным режимом (λ, β^0). Координаты вектора η' вычислялись по формуле $\eta_j' = (1 + \varepsilon_j)\,\eta_j$ $(j = 1, 2)$. Сначала были просчитаны всевозможные варианты при $\varepsilon_j = 0, \pm 0{,}05, \pm 0{,}1$. Оказалось, что в каждом из них траектория выходит на соответствующий стационарный режим, причем во всех вариантах с ошибкой II рода возникал устойчивый рыночный дефицит. На рис. 12 и 13 показано характерное движение траектории текущих объемов производства $y^t = (y_1^t, y_2^t)$ в вариантах с ошибками I и II рода соответственно [11]. В табл. 2 указаны характеристики предельного стационарного режима для некоторых вариантов, а также координаты вектора y^t при $t = 180$. Отсюда видно, что ошибки II рода, в отличие от ошибок I рода, приводят к резкому снижению темпов роста, а отсюда и фактических объемов производства обеих отраслей. Дальнейшее варьирование параметров ε_i дало уже ожидаемые результаты: при малых $\varepsilon_i > 0$ (например, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}01$) траектория выходила на стационарный режим (λ, β), где $1 \leqslant \beta_i \leqslant \beta_i^0$, при больших ε_i $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}5)$ наблюдалась деградация системы.

---

[11] Для большей выразительности рисунков новый стационарный луч несколько отодвинут от старого в сравнении с числовыми данными из табл. 2.

Таблица 2

ε		μ	β		$\bar{y}'$		y^{180}	
0	0	1,005	1,5	1,5	0,524	0,476	3,43	3,12
—0,05	0	1,005	2,510	1,5	0,527	0,473	3,46	3,11
—0,1	0	1,005	3,607	1,5	0,530	0,470	3,50	3,09
—0,1	—0,05	1,005	3,607	2,572	0,530	0,470	3,52	3,11
0,05	0	1,0046	0,847	1,802	0,515	0,485	3,20	3,01
0,1	0	1,0037	0,584	2,481	0,500	0,500	2,73	2,73
0,1	0,05	1,0037	0,584	1,393	0,500	0,500	2,59	2,59
0,1	—0,05	1,0037	0,584	3,672	0,500	0,500	2,75	2,75
0	0,05	1,0042	2,358	0,998	0,514	0,486	2,96	2,77
0	0,1	1,0027	4,339	0,995	0,491	0,509	2,10	2,11
0,05	0,1	1,0027	3,142	0,995	0,489	0,511	2,12	2,07
—0,05	0,1	1,0027	5,642	0,995	0,493	0,507	2,16	2,10

Таким образом, завышение нормативов платежей относительно правильного их уровня оказывает более неблагоприятные воздействия на развитие экономической системы, чем их занижение.

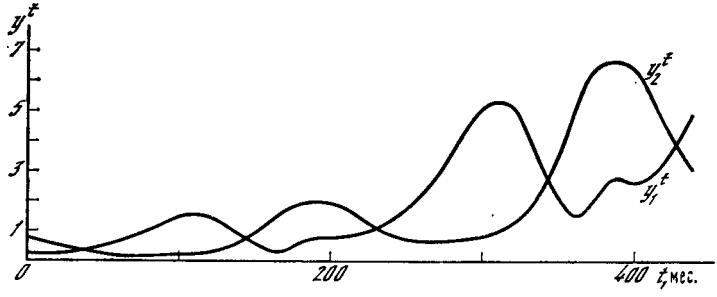


Рис. 14

На первый взгляд, процесс выхода динамической траектории на стационарный режим (λ, β^0) может только ускориться, если изменять нормативы платежей по правилу типа

$$\eta_j^{t+1} = \min(\bar{\eta}_j, \eta_j^t(1 + \varepsilon_j(\beta_j^t/\beta_j^0 - 1))), \text{ где } \bar{\eta}_j > \eta_j,\ 0 < \varepsilon_j < 1,$$

т. е. увеличивать норматив вплоть до заданного предела $\bar{\eta}_j$, если текущее отношение запаса товара к его спросу превосходит нормативное, и уменьшать в противном случае. Тогда у отрасли будет оставаться меньше или больше денежных средств, что по идее должно оказывать активное регулирующее воздействие на объем отраслевого производства. Однако вычислительные эксперименты показали, что в таком случае происходит разрушение механизма притягивания траектории к стационарному режиму; ее движение становится циклическим. На рис. 14 показана динамика отрасле-

вых объемов производства при исходных данных (8.2), $y_1^0 = 0{,}2$, $\overline{\eta}_j = 0{,}05$ и $\varepsilon_j = 0{,}1$. Отметим, что увеличение $\overline{\eta}_j$ лишь усиливало амплитуду колебаний.

10. Заключение

Выделим и дополним краткими замечаниями основные моменты работы.

Построена нестационарная микродинамическая модель общественного воспроизводства в условиях самофинансирования предприятий (отраслей). В отличие от широко распространенных макроэкономических моделей воспроизводства здесь описан на уровне товарно-денежных отношений сам механизм воспроизводственного процесса и, в частности, такой его важный элемент, как кругооборот производственных фондов. Этот кругооборот возникает как следствие одновременного выполнения предприятиями разнообразных действий: в каждом периоде времени они планируют производство на следующий период, на основе этих планов закупают дополнительные средства производства, осуществляют текущее производство, реализуют готовую продукцию, из выручки от продажи производят оплату рабочей силы и платежи в бюджет, а оставшуюся денежную наличность направляют на приобретение новых средств производства. В нормальной ситуации эта наличность складывается из двух частей: денежных средств, возвратившихся из кругооборота, и остаточной прибыли. Последняя служит единственным источником средств для расширения производства.

Использованное в модели описание производственных единиц тяготеет к первой из двух форм хозяйственного расчета, изложенных в Законе СССР «О государственном предприятии (объединении)», поскольку фонд заработной платы фактически образуется здесь по нормативу к объему производства. Макродинамические принципы построения модели позволяют без труда включить в нее более адекватное описание существующих форм хозрасчета. Но это, естественно, повлечет усложнение предложенной схемы воспроизводства.

В модели допускается несбалансированность рынка. При этом проведено различие между понятиями рыночного дефицита, когда фактический обмен совершается в условиях превышения спроса над предложением, и производственного дефицита, когда приобретенных средств производства не хватает для реализации запланированной производственной программы. Различие появляется вследствие того, что при нормальных рыночных условиях производители в модели постоянно поддерживают (воспроизводят) на соответствующем уровне страховой запас средств производства. Поэтому производственный дефицит может возникать лишь при наличии сильного рыночного дефицита. Таким образом, здесь предпринята попытка отразить реальные явления дефицитной экономики: постоянное стремление предприятий иметь повышенные

материальные запасы, выполнение планов при хроническом неудовлетворении спроса на средства производства и т. д.

В рамках модели разработана теория расчета стабильных платежных нормативов с целью вывода системы на режим сбалансированного стационарного развития с заданным темпом. Основная идея предложенного подхода проста: нормативы следует рассчитывать исходя из того, что система как бы уже находится на целевом режиме. Для реализации такой идеи потребовалось дать полное описание всех стационарных режимов модели. Они оказались разбиты на три типа: режимы с полным удовлетворением спроса, с рыночным дефицитом и производственным дефицитом. Подчеркнем, что стационарные режимы с дефицитом нетрадиционны в математической экономике. Показано, что при таких режимах темп роста натуральных показателей системы обязательно меньше целевого темпа роста, который в динамике модели регулирует объем текущей эмиссии. Это регулирование таково, что общая масса денег в системе растет с целевым темпом, если рыночный дефицит отсутствует, и с меньшим темпом в противном случае. Здесь легко прослеживается связь с монетаристскими концепциями, на которые опираются в настоящее время правительства США, Англии и других западных стран.

В результате анализа стационарных режимов получены однозначные выражения для платежных нормативов в зависимости от ведущих управляющих параметров: целевого темпа роста, цен и нормативного отношения запаса товаров на рынке к объему продаж. Условие неотрицательности этих выражений названо в работе условием самофинансирования. Оно определяет границы возможного выбора управляющих параметров. Показано, что наибольший возможный темп роста достигается при ценах единого уровня, обеспечивающих одинаковые нормы рентабельности, а значит, и одинаковые платежные нормативы для всех отраслей. Характерным для данной микродинамической модели является то, что и нормы рентабельности, и цены единого уровня зависят от темпа роста.

Благодаря проведенному исследованию выясняется следующее. Если выбрать некоторый из допустимых стационарных режимов с полным удовлетворением спроса в качестве целевого, вычислить соответствующие ему нормативы и использовать эти постоянные значения при нестационарном функционировании модели, то среди всех стационарных режимов без производственного дефицита предельным для динамической траектории модели может быть только целевой режим. Приведенные в работе результаты вычислительных экспериментов показывают, что выход на этот режим действительно наблюдается даже в случае весьма сильных отклонений от него начального состояния системы. Кроме того, проведено численное исследование динамики модели при отклонении нормативов от правильного уровня. В частности, обнаружено, что завышение нормативов с целью увеличения государственного потребления в конечном счете приводит к прямо противоположно-

му результату. Механизм здесь таков: изъятие у предприятий средств, необходимых для нормального развития производства, вызывает рыночный дефицит на их продукцию, что, как уже отмечалось, приводит к снижению темпов роста натуральных показателей системы; в результате по прошествии определенного периода времени физические объемы производства и потребления (в том числе государственного) оказываются значительно ниже тех, которые были бы достигнуты при правильно установленных нормативах.

Неблагоприятным является и подчинение платежных нормативов конъюнктурным рыночным соображениям, поскольку в этом случае в системе возникают циклические колебания. Для того чтобы система была управляемой, нормативы должны оставаться на определенном (точно рассчитанном) уровне.

Подчеркнем, что в работе исследован лишь один из вариантов модели, когда наряду с нормативами остаются постоянными цены несмотря на текущий дефицит или избыток товаров на рынке. Рассмотрение такого варианта диктовалось не только соображениями простоты. Здесь был получен принципиальный вывод: достижение долговременного рыночного равновесия возможно и при постоянных ценах, если только установлены правильные финансовые взаимоотношения между государством и предприятиями. Иными словами, долговременными регуляторами спроса и предложения являются не цены (что принято за аксиому в теории экономического равновесия), а объем и структура капиталовложений в сфере производства. Это положение (применительно к капиталистической экономике) лежало в основе работ [3, 4]. Отметим, что в Марксовых схемах простого и расширенного воспроизводства за распределением капиталов закреплена та же функция. В самом деле, К. Маркс исходит там из предположения, что товары продаются и покупаются по стоимости, т. е. обменные коэффициенты на начало анализа даны. При этом получаемые им условия реализации (баланса) — не что иное, как определенное соотношение величин капиталов, авансируемых в два подразделения общественного производства.

Тем не менее представляет интерес и такой вариант предложенной модели, в котором цены выполняют функцию кратковременных регуляторов спроса и предложения. Вообще эта минимальная модель может быть развита по целому ряду направлений. Перечислим лишь некоторые из них:

1) учет ограничений по рабочей силе;

2) более полное описание сферы производства (наличие многих технологий для производства одного и того же продукта; наличие производителей, способных выпускать разные типы продуктов; учет лагов во вводе основных фондов и т. д.);

3) наличие банковской системы;

4) учет ограниченности природных ресурсов;

5) учет научно-технического прогресса;

6) наличие внешнеэкономических связей.

Было бы интересно проследить, насколько сохраняется или трансформируется при этом изложенная теория стабильных нормативов как инструмента управления экономикой.

Автор благодарит доктора физико-математических наук С. А. Ашманова за ценные советы и поддержку в процессе написания работы.

Abstract

A microdynamic model of economy with consideration of elements of the new management mechanism is suggested. The model has a level of reproduction processes and a level of non-directive control. The paper is basically concerned with some variant of the second level, when government holds the stable prices and the stable rates of the budget payments. The full description of stationary pathes of the model is given. It allows to establish some rules of calculation of stable rates of payment. Under these rules the model converges from non-equilibrium states to the target stationary path.

ЛИТЕРАТУРА

1. Материалы Пленума Центрального Комитета КПСС, 25—26 июня 1987 г. М.: Политиздат, 1987. 112 с.
2. *Тимохов А. В.* Одна модель капиталистической экономики// Математические методы в исследовании операций. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 132—156.
3. *Тимохов А. В.* Математические модели экономического воспроизводства. М.: Изд-во МГУ, 1982. 127 с.
4. *Тимохов А. В., Ледак В. К.* Динамическая модель простого воспроизводства // Программное обеспечение вычислительных комплексов. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 119—148.
5. *Тимохов А. В., Ледак В. К.* Имитационная микроэкономическая модель воспроизводства // Программное оборудование и вопросы принятия решений. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 152—184.
6. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 24. 648 с.
7. *Дадаян В. С.* Макроэкономические модели. М.: Наука, 1983. 215 с.
8. *Краснощеков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983. 264 с.
9. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 293 с.
10. *Roemer J. E.* Analitical foundations of Marxian economic theory. Cambridge: Univ. press, 1981. 220 p.
11. *Белкин В. Д.* Цены единого уровня и экономические измерения на их основе. М.: Экономиздат, 1963. 346 с.
12. *Вальтух К. К.* Марксова теория цены производства как превращенной формы стоимости: опыт формализованного изложения // Теоретические народнохозяйственные модели. Новосибирск: Наука, 1980. С. 20—47.
13. *Дюкалов А. Н.* Некоторые задачи прикладной математической экономики. М.: Наука, 1983. 119 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

1. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Белолипецкий А. А., Стронгина Н. Р., Тер-Крикоров А. М.
Некоторые вопросы эволюции диссипативных структур с точки зрения теории бифуркаций 7

Белов Ю. А., Белова М. М., Иванов А. В., Проценко С. С.
Математическое моделирование процесса деформирования и механического разрушения материалов под действием импульсной радиации 37

2. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Стенчиков Г. Л., Степанов Д. С.
Моделирование климатических процессов 74

Воинов А. А.
Имитационное моделирование в экологии: озера, пруды, водохранилища 99

3. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Петров А. А., Шананин А. А.
Системный анализ экономики: проблема агрегированного описания экономических отношений 121

Поспелов И. Г.
Динамическое описание коллективного поведения на рынке 157

Оленев Н. Н., Поспелов И. Г.
Исследование инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа 175

Крутов А. П., Петров А. А., Поспелов И. Г.
Системный анализ экономики: модель общественного воспроизводства в плановой экономике 200

Тимохов А. В.
Стабильные нормативы как инструмент управления экономикой в новых условиях хозяйствования 232

CONTENTS

Preface 3

1. MODELS AND METHODS OF INVESTIGATION OF PHYSICAL SYSTEMS

Belolipetskij A. A., Strongina N. R., Ter-Krichorov A. M.
Some problems of evolution of the dissipative structures with point of view of bifurcation theory 7

Belov Yu. A., Belova M. M., Ivanov A. V., Protsenko S. S.
Mathematical modelling of material deformation and mechanical distruction under impulse radiation 37

2. MODELS AND METHODS OF INVESTIGATION OF ECOLOGICAL SYSTEMS

Stenchikov G. L., Stepanov D. S.
Modelling of the climate processes 74

Voinov A. A. Simulation modelling in ecology: lakes, ponds, reservoirs 99

3. MODELS AND METHODS OF INVESTIGATION OF ECONOMIC SYSTEMS

Petrov A. A., Shananin A. A.
System analysis of economics: the problem of aggregated description of economic relations 121

Pospelov I. G.
Dynamic description of collective behaviour on the market 157

Olenev N. N., Pospelov I. G.
Investigation of the investment policy of firms in the market economy 175

Krutov A. P., Petrov A. A., Pospelov I. G.
System analysis of economy: economic reproduction model of planned economy 200

Timokhov A. V.
Stable standards as an instrument of the government regulation under new conditions of management 232

УДК 519.956.4

Белолипецкий А. А., Строгина Н. Р., Тер-Крикоров А. М. **Некоторые вопросы эволюции диссипативных структур с точки зрения теории бифуркаций** // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989.

Исследуются системы уравнений реакции—диффузии вблизи критических значений параметров. Предложен единый подход, объясняющий появление диссипативных структур, в том числе и колебательных. Описан характер эволюции состояния системы к диссипативным структурам. Последнее связано с существованием группы решений, названных ранее авторами фундаментальными.
Ил. 6. Библиогр.: 14 назв.

УДК 539.2 : 539.1.043 : 539.43 : 539.3

Белов Ю. А., Белова М. М., Иванов А. В., Проценко С. С. **Математическое моделирование процесса деформирования и механического разрушения материалов под действием импульсной радиации** // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989.

Рассмотрены вопросы моделирования взаимодействия импульсных потоков радиации умеренной интенсивности 10^9 – 10^{15} Вт/м^2 с твердым телом. Предложены одномерные математические модели процесса механического разрушения материалов в результате воздействия импульсной радиации на основе теории термоудара и кинетической теории прочности, модифицированной с учетом характерных времен воздействия 10^{-4} – 10^{-9} с. Изложены результаты детального параметрического исследования задачи, полученные с помощью вычислительного эксперимента с привлечением данных натурных исследований.
Ил. 14. Табл. 2. Библиогр.: 48 назв.

УДК 519.6 : 551.5

Стенчиков Г. Л., Степанов Д. С. **Моделирование климатических процессов** // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989.

Разработана совместная модель общей циркуляции атмосферы и верхнего слоя океана на грубой пространственной сетке, изучены ее свойства применительно к расчету квазиравновесных режимов циркуляции невозмущенной атмосферы и чувствительности климата. Сформулированы основные проблемы описания долговременных климатических процессов, обусловленные тем, что современные климатические модели работают в характерном времени быстропеременного блока модели – атмосферы, и расчеты на большие времена выполняются с очень мелким шагом по времени. Исследована возможность построения климатических моделей, свободных от ограничений на шаг по времени, связанных с распространением быстрых гравитационных возмущений. Получены приближенные уравнения, описывающие динамические процессы в атмосфере. Приближение основано на предположении о быстром приспособлении потенциальной составляющей поля течения, определяющейся в основном гравитационными возмущениями, к более медленной соленоидальной составляющей. Это позволяет увеличить шаг по времени при расчете атмосферных процессов и повысить вычислительную эффективность климатической модели.
Ил. 8. Библиогр.: 44 назв.

УДК 574.5

Воинов А. А. **Имитационное моделирование в экологии: озера, пруды, водохранилища** // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989.

В статье предложено определение имитационной модели и вкратце описана методология имитационного моделирования в экологии. На материале ряда моделей водных экосистем показано, как можно выделить общие для них блоки, функции, взаимодействия, что позволяет структуризовать модели и автоматизировать процесс моделирования. Приводится обзор основных принципов Системы Имитационного Моделирования Водоемов (СИМВО), которая дает возможность в диалоговом режиме описывать процессы в экосистеме на основе специального метаязыка, автоматически транслировать это описание для получения его фортран-реализации, а затем проводить необходимые численные эксперименты для окончательного формирования имитационной модели.
Ил. 7. Табл. 2. Библиогр.: 27 назв.

УДК 519.86

Петров А. А., Шананин А. А. **Системный анализ экономики: проблема агрегированного описания экономических отношений** // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989.

Проблема агрегирования – одна из главных в системном анализе развивающейся экономики. Надежные и хорошо интегрируемые макромодели экономической системы получаются агрегированием исходных микроописаний, построенных на ясных исходных принципах. В естественных науках проблема агрегирования уже давно поставлена и успешно решена во многих областях. В статье обсуждается

специфика проблемы агрегирования описаний в экономике в отношении к аналогичной проблеме в естественных науках. Дан обзор состояния методов агрегирования описания экономических систем и обсуждаются нерешенные проблемы.
Библиогр.: 44 назв.

УДК 519.86

Поспелов И. Г. **Динамическое описание коллективного поведения на рынке** // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989.

Рассматривается коллективное поведение торговцев, стремящихся избежать разорения. Показано, что любое парето-оптимальное поведение такого коллектива может быть приближенно описано как деятельность одного торговца, стремящегося избежать разорения. Показано, что устойчивость парето-оптимального поведения зависит от вида графа возможных обменов между торговцами и тесно связана с возможностью для торговца строить свое оптимальное поведение на основе ограниченной информации о состоянии других торговцев.
Ил. 4. Библиогр.: 7 назв.

УДК 519.86

Оленев Н. Н., Поспелов И. Г. **Исследование инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа** // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989.

В статье рассматривается замкнутая многосекторная модель рыночной экономики. В основе модели лежит описание долгосрочного планирования промышленных фирм. Численные эксперименты показывают, что модель качественно верно описывает фазы цикла деловой активности. Приведены результаты аналитического исследования односекторного варианта модели. Получены условия возникновения и выражение для периода слабозатухающих колебаний.
Ил. 7. Библиогр.: 8 назв.

УДК 519.86

Крутов А. П., Петров А. А., Поспелов И. Г. **Системный анализ экономики: модель общественного воспроизводства в плановой экономике** // Математическое моделирование: Модели и методы исследования сложных систем. М.: Наука, 1989.

Предложено математическое описание процессов производства, обмена, распределения и потребления в централизованной плановой экономике. Описана информированность планового органа, процедуры планирования, их влияние на механизмы экономического регулирования воспроизводства. Приведены результаты вычислительных экспериментов с моделью. Обсуждается постановка задачи о разделении планирования и реализации плана.
Ил. 14. Библиогр.: 3 назв.

УДК 519.86

Тимохов А. В. **Стабильные нормативы как инструмент управления экономикой в новых условиях хозяйствования** // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989.

Предложена математическая модель функционирования экономики с учетом элементов нового хозяйственного механизма. В ее рамках разработана теория расчета стабильных нормативов платы за фонды и налогов на прибыль. Путем численных экспериментов показано, что политика стабильных и правильно рассчитанных нормативов позволяет даже в случае сильных отклонений начального состояния от сбалансированного вывести систему на заданный стационарный режим. Если нормативы платежей рассчитаны с небольшими отклонениями от полученных правил, то система также выходит на стационарный режим, но уже с несколько иными характеристиками. При больших отклонениях система деградирует. Если же нормативы начинают изменяться на основе конъюнктурных соображений, то в системе возникают циклические колебания.
Ил. 14. Табл. 2. Библиогр.: 13 назв.

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методы описания и исследования сложных систем

Утверждено к печати
Вычислительным центром АН СССР

Редактор издательства Е. К. Паламарчук
Художественный редактор М. Л. Храмцов
Технические редакторы М. Ю. Соловьева,
Л. Н. Золотухина

Корректоры В. А. Бобров, А. Б. Васильев

ИБ № 40220

Сдано в набор 08.06.89
Подписано к печати 11.09.89
Т-13851. Формат 60×90 1/16
Бумага типографская № 1
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 17,0. Усл. кр. отт. 17,0. Уч.-изд. л. 17,7
Тираж 1950 экз. Тип. зак. 3150
Цена 3 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864, ГСП-7, Москва, В-485,
Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6