АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СЕРИЯ «КИБЕРНЕТИКА —
НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ
И ВОЗМОЖНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ»

КОМПЬЮТЕРЫ, МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

●

ВВЕДЕНИЕ В ИНФОРМАТИКУ С ПОЗИЦИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МОСКВА
«НАУКА»
1988

ББК 32.81
К65
УДК 519.6

Редакционная коллегия:
академик И. М. МАКАРОВ (председатель),
академик В. Г. АФАНАСЬЕВ,
доктор философских наук Б. В. БИРЮКОВ,
академик С. В. ЕМЕЛЬЯНОВ,
академик Н. Н. МОИСЕЕВ,
академик В. Н. НАУМОВ,
В. Д. ПЕКЕЛИС,
доктор технических наук Д. А. ПОСПЕЛОВ,
доктор технических наук И. С. УКОЛОВ,
доктор физико-математических наук В. В. ЩЕННИКОВ

Ответственный секретарь редколлегии
кандидат философских наук С. Н. ГОНШОРЕК
Редактор-составитель и автор предисловия
академик А. А. САМАРСКИЙ

Рецензенты:
член-корреспондент АН СССР П. С. КРАСНОЩЕКОВ,
доктор физико-математических наук Ю. М. РОМАНОВСКИЙ

Серия «Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения» удостоена диплома I степени на Всесоюзном конкурсе общества «Знание» в 1985 г.

К63 **Компьютеры,** модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования/Авт. пред. А. А. Самарский.— М.: Наука, 1988.— 176 с. ил.— (Серия «Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения»).
ISBN 5—02—007143—9.

Сборник представляет собой популярное введение в новую научную дисциплину — информатику. Объясняется возникновение нового стиля мышления в связи с появлением и широким распространением компьютеров. Раскрывается ключевая роль математического моделирования и вычислительного эксперимента в информатике. Обсуждаются важнейшие перспективы применения вычислительного эксперимента в науке и технике.

Для широкого круга читателей.

К $\frac{1502000000-478}{054(02)-88}$ 41-88НП ББК 32.81

ISBN 5—02—007143—9 © Издательство «Наука», 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

В качестве первоочередной задачи, позволяющей вывести экономику нашей страны на новые рубежи сейчас рассматривается широкое использование средств информатики, вычислительной техники и автоматизации во всех сферах деятельности. Решение этой задачи должно ускорить темпы проведения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, сделать более эффективным внедрение достижений науки. Знакомство с информатикой, ее методами и перспективами развития для многих читателей становится необходимостью.

Область знаний, которую сейчас называют информатикой, является очень широкой. Существуют десятки определений самого термина «информатика», подчас противоречивых. Их дают философы, математики, программисты, специалисты, работающие во многих других областях. Не претендуя на полноту и строгость, можно определить информатику как комплекс наук, изучающих производство, обработку и хранение информации с помощью электронно-вычислительных машин.

Почему же решение важнейших задач экономики и науки оказалось тесно связанным с информатикой, с использованием ЭВМ? Где применение информатики может дать наибольший эффект? Чтобы разобраться в этом, полезно оглянуться назад, в начало эры компьютеров.

В послевоенные годы достижения физики и техники открыли перспективы реализации крупнейших проектов — освоение космоса, овладение тайнами атомной энергии, поиск новых фундаментальных законов природы. Если в начале века физические лаборатории были оснащены весьма скромно и недостаток средств часто компенсировался изобретательностью экспериментаторов, то теперь работа на переднем крае науки потребовала миллиардных затрат. Понятно, что, прежде чем решиться на постановку очень дорогого эксперимента, надо хорошо взвесить все «за» и «против», с максимальной до-

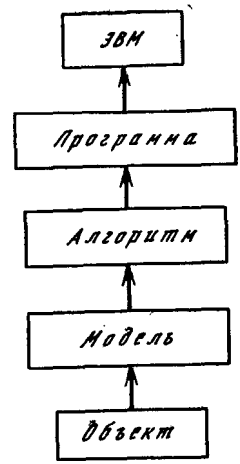
стоверностью «проиграть» все возможные ситуации, с которыми можно столкнуться.

Все это стимулировало применение и развитие первых электронно-вычислительных машин, другими словами, машин для записи чисел, производства действий над ними и выдачи результата. Для того чтобы машина «знала», какие действия она должна произвести с введенными числами, ей нужна программа. Принципы разработки программного обеспечения изучает программирование. Но прежде чем за дело возьмутся программисты, надо выяснить, как решать поставленную задачу. Надо знать способ или метод решения — как сейчас говорят, алгоритм. Разработкой эффективных алгоритмов, совершенствованием известных и поиском новых занимается вычислительная математика. Вычислителям требуется найти алгоритм, исходя из данной математической задачи. Ее, в свою очередь, должны поставить специалисты по математическому моделированию.

Изучая сложные объекты, будь то процессы в недрах звезд, траектория космического корабля или расчет технологического цикла, мы не можем учесть все факторы. Какие-то оказываются наиболее важными, а какими-то надо пренебречь. При этом появляется модель объекта. Это такая мысленно представимая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию о нем. Термин «модель» произошел от латинского modus, modulus (мера, образ, способ и т. д.).

Мы прошли весь путь от вычислительной машины к объекту, который с ее помощью изучают. Но на самом деле путь этот надо проходить в обратном направлении, так, как показано на рис. 1. Первична задача, которую надо решить. Все остальное — только средства ее анализа. Триада модель—алгоритм—программа при решении многих задач должна быть дополнена этапами анализа результатов, уточнением модели и т. д. ЭВМ все чаще применяется сейчас уже при первичной обработке результатов эксперимента.

Первые компьютеры, появившиеся вскоре после войны, были очень дороги, требовали огромных машинных залов. Возможности их по современным меркам были очень скромными. Именно на них были своевременно решены важные задачи, стоявшие в те годы, был накоплен большой опыт применения компьютеров.



Стало ясно, что при решении сложных проблем пройти весь путь от объекта до ЭВМ с учетом последних достижений научной мысли одному человеку не под силу. Нужна целеустремленная согласованная работа творческого коллектива специалистов разных профессий.

Если результаты моделирования объекта на ЭВМ верно отражают его поведение, то можно «проиграть» его поведение в самых разных, подчас экстремальных условиях, выбрать наиболее выгодные и удобные параметры. Стал возможен вычислительный эксперимент. Его значение трудно переоценить, особенно если натурный эксперимент опасен, дорог или просто невозможен. Очень важен он тогда, когда его результаты позволяют ученым открывать новые явления. О некоторых из них в этой книге пойдет речь.

При этом вычислительный эксперимент не только не отвергает традиционных математических методов, но и, напротив, предлагает их самое активное использование. Только разумное сочетание аналитических и численных методов является необходимым условием успеха[1].

Вычислительный эксперимент позволяет, зная законы природы, получать многочисленные следствия, которые без помощи ЭВМ невозможно рассчитать. Приведем простой пример. Из курса физики для 8-го класса школьники узнают о втором законе Ньютона и о законе всемирного тяготения. Но вычислить аналитически траектории уже трех взаимодействующих тел в общем случае не удается. Однако сравнительно простая программа, в которую надо заложить массы, начальные положения и скорости тел, позволяет узнать всю их дальнейшую судьбу. Вопрос только в том, насколько интересные выводы удастся сделать из полученных результатов.

Путь от первых принципов и законов природы до конкретных задач оказывается далеко не простым. Пройти его ученым все чаще помогают компьютеры.

Еще недавно вычислительные машины использова-

---

[1] *Самарский А. А.* // Коммунист. 1983. № 18. С. 31—42; *Самарский А. А.* // Вестн. АН СССР. 1985. № 3. С. 57—69.

лись лишь ведущими коллективами при решении немногих ключевых задач, где без них нельзя было обойтись. Здесь были созданы новые модели, эффективные алгоритмы, программное обеспечение. Сейчас ситуация резко меняется. ЭВМ становятся более дешевыми, надежными и производительными. Появились персональные компьютеры. Красноречиво о прогрессе в этой области говорят следующие цифры. Цены на устройство памяти снижаются ежегодно на 40%, на логические элементы — на 25%. Быстродействие за последние 25 лет выросло в 200 раз, а размеры и потребление энергии сократились в 10 000 раз.

Американские эксперты приводят такое сравнение: «Если бы за последние 25 лет авиационная промышленность развивалась столь же стремительно, как и вычислительная техника, то Боинг-767 можно было бы приобрести сегодня за 500 долларов и облететь на нем земной шар за 20 мин, израсходовав при этом 19 л горючего»[2].

В связи с этим все чаще обсуждаются заманчивые перспективы информатики — машины следующих поколений, системы искусственного интеллекта, понимающие речь и способные к обучению, машины для игры, превосходящие сильнейших шахматистов мира, огромные информационные системы на базе сетей ЭВМ, компьютерные журналы и многое другое. (Интересно сравнить то, что писалось в научно-популярных книгах по кибернетике лет 15—20 назад. Обычно про заманчивые перспективы писалось то же самое. Однако работа над этими проблемами продолжается, а значит, и здесь возможны неожиданности.) Но все это дело будущего.

Сейчас ученые видят другие конкретные пути ускорения научно-технического прогресса, перевооружения производства, связанные с информатикой и вычислительной техникой. Большой опыт, накопленный при решении задач физики плазмы, атомной энергетики, освоения космоса и др. сегодня надо использовать при решении других важных задач.

В самом деле, огромны возможности оптимизации процессов в химической технологии, масса интересных проблем возникает в машиноведении, в теории новых методов обработки и создания материалов. Важные задачи стоят в моделировании и совершенствовании биотехноло-

---

[2] *Ху Мин Д. Тунг, Амар Гунта.* Персональные компьютеры // В мире науки. 1983. № 8. С. 53—65.

гических процессов. Увеличение нефтеотдачи пластов, борьба с коррозией, разработка ресурсосберегающих технологий ставят ряд интересных задач перед специалистами по информатике. Есть другие первоочередные проблемы. Успешное их решение может дать большой эффект уже в ближайшие годы. Решения таких задач в первую очередь общество ждет сейчас от тех, кто связан с информатикой.

Мысль о том, что модели, алгоритмы, программы, вычислительные машины должны развиваться согласованно и гармонично исходя из стоящих задач, представляется простой и ясной. Отставание в каком-либо роде деятельности может сделать невозможным решение многих проблем. И напротив, прогресс в любом звене сразу сказывается на результатах вычислительного эксперимента. Известны примеры, когда применение хороших алгоритмов позволяло в десятки, а то и в сотни раз снизить требования к ЭВМ, нужным для решения различных задач физики плазмы и аэродинамики.

Обратим внимание на то, что сейчас во многих областях применение методов информатики сдерживается не отсутствием компьютеров, как это принято думать (уже имеющиеся компьютеры используются крайне неэффективно), а отсутствием содержательных математических моделей. Выработка их требует тесного творческого контакта математиков и заинтересованных специалистов. Другая причина — недостаток научных коллективов, работающих на высоком уровне и способных взяться за решение крупных задач.

Вместе с тем в научно-популярной литературе и на многих конференциях приходится сталкиваться с непониманием комплексного, системного характера информатики, с преувеличением роли одних дисциплин в ущерб другим. Характерны, например, такие высказывания: «Были бы компьютеры, а остальное приложится», «Элитарность программистов представляется мне очевидной... Программирование — это самая трудная из массовых профессий... она на порядок выше даже таких экзотических профессий, основанных на гипертрофии врожденных способностей, как цирковые артисты и верхолазы». Возможно, такие высказывания — болезнь роста. Важно только, чтобы она не мешала развитию всего комплекса наук, составляющих информатику. Важно, чтобы она не приводила к иллюзии, что не информатика призвана решать конкретные научные и технические задачи, а нао-

борот, задачи существуют только для того, чтобы иллюстрировать необходимость какого-либо научного направления.

Идти надо от задачи. Именно она предъявляет требования к модели, к алгоритму, к программе, к ЭВМ.

В связи с начавшимся обучением школьников и планируемым обучением студентов многих специальностей основам информатики часто приходится слышать два вопроса. Почему многих надо учить информатике? Чему, собственно, надо учить? Эти вопросы взаимосвязаны. Попробуем на них ответить.

Сейчас есть все основания полагать, что информатика изменит методологию большинства естественных и многих гуманитарных наук, где необходимы количественные предсказания, а также уровень промышленной технологии.

Приведем несколько примеров. Обратим внимание на развитие физики. Во многих ее разделах большинство докладов на всесоюзных и международных конференциях широко используют результаты вычислительного эксперимента. И это не дань моде — модели просто оказываются слишком сложны, чтобы разобраться в них без помощи компьютера. Многие ведущие физики полагают, что сейчас с полным правом наряду с теоретической и экспериментальной можно выделить и вычислительную физику.

Отметим, что в ряде исследований по физике, медицине, биологии, удостоенных в последние годы Нобелевской премии, принципиальную роль играет применение ЭВМ.

Вычислительные машины изменили и облик самой математики. Даже ее классические традиционные области.

Одним из важных разделов современной геометрии является топология. Представим, что мы взяли лист резины с нарисованными на нем двумерными фигурами и начали этот лист растягивать всеми возможными способами, не склеивая и не разрывая. Те свойства фигур, которые будут сохраняться при этом, получили название топологических. Особенно интересно изучать такие свойства в многомерном пространстве.

Классической топологической задачей является проблема четырех красок, сформулированная в 1852 г. лондонским студентом Гутри. Он обнаружил, что можно раскрасить четырьмя красками все графства на карте

Англии так, чтобы каждые два соседних графства были раскрашены в разные цвета. Он выдвинул гипотезу, что четырех красок достаточно для раскраски любой карты на плоскости.

Эта задача была решена только в 1976 г. американскими математиками К. Аппелем и В. Хакеном. С помощью вычислительной машины они разбили все возможные карты на две тысячи четко указанных типов и составили машинную программу их исследования. Применение ЭВМ позволило доказать гипотезу Гутри.

Новое решение было получено Д. Коэном в 1978 г. Число типов карт у него было намного меньше. И машина сама находила достаточно простой путь, допускающий ручную проверку. Сейчас это решение изложено в книге среднего объема и формата. По мнению автора, оно может быть проверено одним человеком в течение 2—3 лет [3].

Можно спорить, насколько далеко такое решение от идеала. Однако пример эффективного применения ЭВМ в топологии налицо.

Во всех приведенных примерах характерная ситуация такова. Ставится задача, формулируется одна или несколько гипотез, которые помогает проверить ЭВМ, либо выделяется часть работы, которую мы можем точно описать и препоручить машине. При этом надо достаточно четко представлять и возможности машин.

Накопленный опыт показывает, что умение обратиться за помощью к компьютеру оказывается очень полезным для инженера, физика, медика, психолога, для людей многих других профессий. Именно поэтому владеть основами информатики полезно очень многим. При этом необходимо сочетание представлений об информатике с глубокими знаниями в своей области.

Сравним обучение математике и информатике в средней школе. Главная цель обучения математике в школе — это привить культуру мышления, развить умение анализировать, логику, дисциплину ума. Научиться мыслить можно только решая задачи. Эти задачи собирались веками — ученики Евклида решали в основном те же геометрические задачи, что и нынешние школьники. Преподавание математики опирается на многовековую традицию.

---

[3] *В. Г. Болтянский, В. А. Ефремов.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982.

Преподавание информатики преследует близкие цели — научить решать различные проблемы, используя ЭВМ. Традиции тут практически нет. Отбор интересных содержательных задач только начат. Причем было бы полезно, если бы эти задачи касались не только математики, но и физики, химии, всех дисциплин, где применение информатики становится необходимостью. Да и компьютеры сейчас есть далеко не везде.

Можно пойти по самому простому пути. Обучить ребят программированию на одном или нескольких алгоритмических языках (что обычно и делают). Простые программы школьники могут научиться писать за несколько недель. А что же дальше?

Зачастую умение программировать сравнивают со второй грамотностью. Любое сравнение хромает. Давайте разберемся, чем вторая грамотность отличается от первой. После того как человек научился читать, перед ним открывается море книг, огромная сокровищница человеческой мысли. Перед тем, кто научился программировать, должна открыться масса интересных и полезных задач. А этого не происходит. Опыт обучения школьников показывает, что они с энтузиазмом программируют, «играют» с компьютерами, могут писать довольно сложные программы. Однако школьников надо учить играть не просто с компьютером, но и с математическими моделями явлений. (Программы для такого обучения, конечно, должны написать профессионалы.) Ведь именно умение работать с моделями, а не только писать простые программы необходимо сейчас большинству специалистов. Сейчас это не делается. Программирование — то, что для большинства будет в лучшем случае полезным инструментом, сейчас часто воспринимается как самоцель.

Разумеется, не надо впадать в другую крайность. Сейчас обучение программированию можно рассматривать как полезный и необходимый этап. Он позволяет заинтересовать учащихся вычислительной техникой, прививает внимательность и аккуратность. Однако нужно знакомить учащихся и с достижениями информатики, и с перспективами ее развития, и с возможностями использования ее методов в других областях, иллюстрировать это примерами уже решенных задач. И эта сторона по мере развития информатики, внедрения ее в науку и технику будет становиться все более важной.

Интересной представляется оценка перспектив и целей преподавания информатики в недалеком будущем,

которая содержится в одном из номеров журнала, посвященного компьютерам в образовании[4] (сейчас ее можно рассматривать как прогноз, опирающийся на опыт, накопленный в преподавании): «В большинстве стран компьютеры впервые использовались в школах для обучения программированию. Имеет смысл объяснить детям, как работает ЭВМ, но это не более и не менее важно, чем рассказать о телевизоре, телефоне, реактивном двигателе или атомном реакторе, которые являются частью нашего технического окружения. С другой стороны, если ребята интересуются программированием, то нет причины, чтобы не сделать такой курс факультативным.

В прошлом, действительно, каждый, используя ЭВМ, должен был писать свою собственную программу. Но сейчас ситуация меняется. Ни один шахматист теперь не купит компьютер, чтобы писать свою шахматную программу. Он просто купит шахматную машинку. То же справедливо для остальных областей деятельности, где профессионалы создают программы и аппаратуру для все большего числа пользователей, которые иногда и не подозревают, что используют ЭВМ. Поэтому если не считать, что образование должно давать технические навыки, то нет причин, по которым следовало бы обучать именно программированию, а не водопроводному делу, ремонту электроприборов, телевизоров и т. д.».

Нет оснований полагать, указывается в статье, что приемы профессионального мышления программистов обладают общечеловеческой значимостью, как, например, математическая культура.

«Нам лучше найти другие методы, чтобы развивать в детях интуицию, воображение, творческое мышление, способность к оценкам, синтезу и т. п., которые более, чем когда-либо, будут нужны для решения проблем завтрашнего общества».

Влияние ЭВМ на систему образования автор формулирует следующим образом: «Если мы попытаемся экстраполировать тенденции сегодняшнего использования ЭВМ в обществе в целом, то обнаружится новое явление. Те, кто используют в работе ЭВМ, а их в ближайшие годы будет большинство, работают не так, как прежде, по мере того, как появляются все более сложные пакеты

---

[4] *Hebenstreit J.* Computers in Education — the Next Step // Education and Computing. N 1 (1985). P. 37—43.

программ. В конце концов людям понадобятся совсем другие знания и навыки. Это означает, что в отдаленной перспективе нам придется в корне изменить обучение на всех уровнях.

Более того, по мере того как все больше рутинной работы передается ЭВМ, в учащихся надо будет развивать следующие две способности (которым сейчас учат недостаточно, если вообще учат):

уметь проанализировать задачу и определить, какая часть может быть поручена ЭВМ, а какая требует человеческой интуиции и способности к принятию решения;

уметь на каждом шаге решения критически осмыслить работу ЭВМ и определить правильность выбранных методов решения.

Это значит, что учащимся понадобится более глубокое понимание и гораздо более глубокое знание дисциплины, в которой они работают, что, в свою очередь, предполагает увеличение объема теоретического обучения и доступность необходимого оборудования для получения опыта работы с ЭВМ».

Существует несколько пособий по школьной информатике, в которых рассказывается о принципах работы ЭВМ, о программировании, о простейших алгоритмах. В них не отражено первое звено триады модель — алгоритм — программа, которая определяет эффективность применения компьютера.

В настоящей книге авторы считали своей целью рассказать о задачах, которые можно решать на ЭВМ. Сейчас это представляется очень важным. Ни знание устройства ЭВМ, ни умение программировать, ни миллионы компьютеров не приведут к повышению производительности труда в нашем обществе, если они не будут разумно использоваться, если не будет содержательных задач и современных математических моделей.

В статье Ю. П. Попова, А. А. Самарского рассказывается о ключевом понятии информатики — понятии модели. Подробно обсуждается концепция вычислительного эксперимента, его роль в различных областях, например при конструировании самолетов, при анализе сложных нелинейных процессов в физике плазмы, и перспективы его внедрения в науку и технику. Рассказывается об эффекте T-слоя в физике плазмы — явлении, предсказанном с помощью ЭВМ в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша и впоследствии обнаруженном экспериментально. Работа по теоретическому иссле-

дованию T-слоя, в которой принципиальную роль сыграл вычислительный эксперимент, была внесена в государственный реестр открытий СССР. В последние годы эффект T-слоя нашел ряд интересных практических приложений.

Для математических моделей, которые сейчас исследуют ученые, характерно свойство нелинейности. Оно означает возможность качественных изменений решений при непрерывном изменении параметров. Простейший пример нелинейного уравнения — обычные квадратные уравнения. Мы можем непрерывно увеличивать один из коэффициентов и обнаружить, что при сколь угодно малом приращении вблизи некоторого значения могут исчезнуть оба действительных корня.

Опыт, накопленный в последние десятилетия, позволил разработать ряд важных общих подходов, изучить многие парадоксальные свойства систем, описываемых нелинейными уравнениями. Одно из таких свойств — способность к самоорганизации. У сложных систем, состоящих из многих взаимодействующих подсистем, могут возникать качественные особенности, которыми ни одна из частей не обладает. Теорию самоорганизации сейчас называют синергетикой (дословно — теория совместного действия).

Один из создателей синергетики Г. Хакен определяет ее как подход, в котором «исследуется совместное действие многих подсистем (преимущественно одинаковых или же нескольких различных видов), в результате которого на макроскопическом уровне возникает структура и соответствующее функционирование. С другой стороны, для нахождения общих принципов, управляющих самоорганизующимися системами, необходимо кооперирование многих различных дисциплин»[5].

Интересно, что в литературе встречается и другая трактовка синергетического подхода: «Синергетический подход к нелинейным математическим и физическим задачам можно определить как совместное использование обычного анализа и численной машинной математики для получения решений разумно поставленных вопросов математического и физического содержания, систем уравнений»[6]. Это именно то, что можно назвать вычислительным экспериментом.

---

[5] *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.

[6] *Zabusky N. J.* Computational Synergetics and Mathematical Innovation // J. Comput. Phys. Vol. 43 (1981). N 2. P. 195—249.

Статья С. П. Курдюмова и Г. Г. Малинецкого показывает, что синергетика неотделима от синергетического подхода, что основные ее успехи связаны с постановкой и содержательным анализом вычислительного эксперимента. На это направление исследований в последние годы возлагаются большие надежды.

Для чтения этой статьи не требуется знаний, выходящих за пределы школьной программы. Однако круг обсуждаемых вопросов таков, что они могут заинтересовать студентов, инженеров, специалистов ряда областей, которые хотели бы познакомиться с возможностями математического моделирования нелинейных систем, с новыми взглядами и понятиями, обязанными своим появлением вычислительному эксперименту.

Статья была опубликована ранее обществом «Знание» и вызвала большой интерес. В 1985 г. она была удостоена второй премии на Всесоюзном конкурсе научно-популярной литературы. Здесь представлен ее переработанный вариант.

Статья Н. В. Змитренко и А. П. Михайлова посвящена задачам, связанным с анализом классической модели — уравнения, описывающего теплопроводность или диффузию. Задуманный как средство анализа крупных научно-технических проектов, вычислительный эксперимент позволил обнаружить ряд удивительных свойств в процессах, казавшихся знакомыми и детально изученными.

Одно из таких свойств — свойство локализации тепла. Нелинейные источники или стоки тепла, воздействие на среду в определенном режиме, оказывается, могут привести к тому, что тепло будет локализовано в определенной области пространства. Представляется парадоксальным, что простейшая форма движения — тепловая — способна приводить к созданию структур.

Задачи, о которых идет речь в этой статье, первоначально возникли в физике плазмы, теории горения, газовой динамике. Затем они были детально изучены средствами вычислительного эксперимента. Впоследствии была развита глубокая математическая теория таких явлений. Выработанные представления эффективно используются в различных областях. Однако интересно было бы и прямое экспериментальное подтверждение предсказанных эффектов.

Уровень статей различен. Они рассчитаны на различную подготовку читателей. Это требует активного твор-

ческого подхода от преподавателей, которые будут использовать эту книгу в своей работе. Представленные материалы помогут на примерах уже решенных задач показать, каковы возможности информатики, как ее методы можно использовать в различных областях.

Эта книга не может рассматриваться как учебник. Она отражает одну, хотя и очень важную сторону информатики. В ней не рассматриваются многие блестящие достижения в создании эффективных алгоритмов, идеи, связанные с искусственным интеллектом, системным подходом, тенденциями развития программного обеспечения и др. По-видимому, эти вопросы будут освещены в следующих книгах этой серии.

Информатика бурно развивается. Сегодня трудно представить, какие задачи станут доступны ученым через несколько лет. Во многом это будет определяться эффективным применением методов информатики к решению актуальных задач, которые стоят сегодня. Если статьи привлекут внимание читателей к некоторым из них, помогут задуматься над возможностями применения ЭВМ в своей области науки или техники, вызовут желание более глубоко ознакомиться с проблемами информатики, то задача этой книги будет выполнена.

Академик *А. А. Самарский*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Ю. П. ПОПОВ, А. А. САМАРСКИЙ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИКА

Слово «модель» невольно пробуждает в памяти воспоминания о творческих выставках авиа- и судомодельных кружков.

Но модели — не только игрушки, и моделирование — вещь вполне серьезная. И не только потому, что, скажем, многие авторитетные конструкторы начинали свой путь в авиацию именно с авиамоделизма.

Модели реальных объектов, моделирование явлений издавна используются в науке и технике для проверки идей, отработки гипотез, получения экспериментального материала. За примером можно обратиться к авиастроению. Важным элементом проектной и конструкторской работы над новой машиной является выбор ее форм, оптимизация аэродинамических характеристик. Законченная теория здесь пока еще отсутствует, и этот недостаток приходится восполнять экспериментальными исследованиями. Однако экспериментировать с настоящими самолетами, отправляя машину в полет, который почти наверняка закончится аварией,— путь слишком расточительный и для летчика-испытателя опасный. Вот тут и приходят на помощь модели. И реальный самолет, и его уменьшенная копия в воздушном потоке подчиняются одним и тем же законам аэродинамики. При определенных условиях, измерив аэродинамические нагрузки на модели, оказывается возможным пересчитать их на «настоящий» летательный аппарат. Модель и самолет оказываются похожими не только внешне, но и по «физическому содержанию» — их аэродинамические характеристики связаны определенными соотношениями подобия.

Остается еще один шаг — не запускать модель в необъятное небо, а закрепить ее на специальном лабораторном стенде и направить на нее поток воздуха с той скоростью, с которой должна летать модель. Почти как в арифметике — от перемены скоростей воздуха и модели результат не изменится.

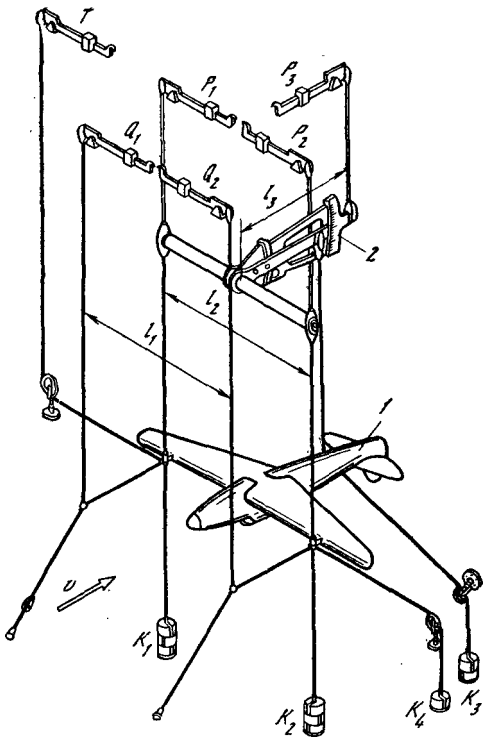


Рис. 1. Схема аэродинамических весов, предназначенных для измерения нагрузок, действующих на модель самолета в аэродинамической трубе

Так мы приходим к схеме аэродинамической трубы — установки, которая широко используется для экспериментального изучения воздействия потока газа на обтекаемый объект (рис. 1). Причем в качестве объекта может выступать не обязательно самолет, а и ракета, и мост, и высотное здание, и даже лыжник, прыгающий с трамплина. Конечно, приведенное описание аэродинамической трубы специалист сочтет чересчур кратким и, возможно, неточным, однако для нас главное состоит в том, чтобы подчеркнуть, что в основе такого рода исследований лежит метод моделирования, опирающийся в данном случае на строгую теоретическую базу, именуемую теорией подобия.

Итак, модель — это не только и не столько внешнее сходство. Главное лежит глубже — поведение модели и реального объекта должно подчиняться одинаковым закономерностям. Изучив их на доступной для исследования модели, оказывается возможным предсказать свойства проектируемой конструкции.

Аэродинамическое моделирование относится к тому типу физического моделирования, когда и натурный объект, и модель имеют одинаковую физическую природу, в данном случае взаимодействие тела с воздушным потоком. Это естественный способ, но не единственный.

Представим себе, что, занимаясь строительной механикой, мы столкнулись с задачей определения напряжений, возникающих в балке призматической формы под действием крутящей нагрузки. Здесь, каким малым или большим бруском ни моделируй нашу балку, как его ни закручивай, выкрутишь немного. Ведь разместить внутри бруска достаточное количество датчиков, не повредив его и не повлияв тем самым на результат измерений, дело мудреное. И все же простая и в то же время эффективная модель для решения данной задачи существует. Изготовим трубу, сечение которой повторяет сечение интересующей нас балки. Торец трубы затянем резиновой пленкой — мембраной. Подадим в трубу воздух под некоторым давлением — мембрана выпучится наружу, прогнется. Вот модель закрученной балки и готова. Останется лишь тщательно промерить прогиб мембраны и с помощью несложных формул подобия вычислить величину напряжений в деформированной строительной конструкции.

На чем основывается уверенность, что полученный таким образом результат будет верным? Дело здесь в следующем. Математическая задача, описывающая напряженное состояние балки, в точности совпадает с задачей о прогибе мембраны. Только в одном случае функция, входящая в уравнение, есть напряжение, а в другом — прогиб мембраны (рис. 2). А раз задачи совпадают, то и решения у них одинаковы. Поэтому одно из них — форма вспучившейся мембраны, которая может быть измерена с хорошей точностью,— дает детальное представление о другом, недоступном для прямого наблюдения — распределении напряжений по сечению балки.

Описанная «мембранная аналогия» дает пример физического моделирования одних явлений с помощью других, имеющих иную физическую природу.

Рассуждая о физических моделях, мы вскользь упомянули о моделях совсем другого типа — математических. Именно так может быть названа математическая задача, которая описывала и прогиб мембраны, и кручение балки. Математическая модель обоих явлений оказалась одинакова, именно поэтому справедлива мембранная аналогия.

Но тут возникает естественный вопрос: а может быть нужно непосредственно решить математическую задачу, которую мы нарекли математической моделью? Тогда отпадает необходимость измерять прогиб мембраны —

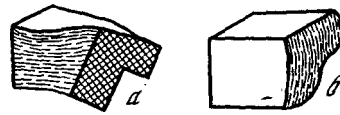


Рис. 2. Мембранная аналогия
Напряжения в балке, возникающие под действием крутящей нагрузки (*а*), можно рассчитать, зная прогиб мембраны, натянутой на трубу того же сечения (*б*)

ведь те же самые числа нам даст найденное решение математической задачи. Ненужной станет «резиновая» модель балки, а математическая модель из вспомогательного инструмента превратится в основу нового метода теоретического исследования — метода математического моделирования. Путь заманчивый, но чтобы оценить все его достоинства и недостатки, необходимо подробно разобраться в содержании понятия «математическая модель», которое играет столь важную роль в современной науке.

Собственно математическая модель и математическое моделирование не являются изобретением нашего века. Так, в физике метод математического моделирования, если пользоваться нынешней терминологией, используется издавна и весьма успешно. Со времен Галилея описание физического явления или процесса считается достоверным, если оно выражено с помощью числовых величин. Некоторые из этих величин измеряются непосредственно в опыте, для определения других формулируются математические задачи. Откуда берутся эти задачи, как получаются уравнения, их составляющие? Эти уравнения есть запись на языке математики законов природы, которые управляют интересующим нас физическим явлением. Как правило, это законы сохранения: закон сохранения вещества (вещество не может ни появляться из ничего, ни бесследно исчезать), закон сохранения энергии и т. д. Законы эти носят эмпирический характер, они не выводятся ни из каких других известных формул, а являются отражением нашего многовекового опыта наблю-

дения явлений природы. Несмотря на то что за прошедшее время человек чрезвычайно расширил сферу своих научных интересов — от микромира до бескрайних пространств Вселенной, с выполнением основных физических законов все обстоит благополучно. В этом гигантских масштабов пространстве ученые не наблюдали пока ни одного события, которое поколебало бы нашу уверенность в справедливости этих законов.

Но все же что такое математическая модель? Определение, как бы полно и тщательно оно ни было сформулировано, не может конкурировать в смысле наглядности с примером. Поэтому обратимся к наглядному и простому примеру — камню, падающему на землю. Причину его падения установил еще Ньютон, сформулировав знаменитый закон тяготения, в соответствии с которым любые два тела притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Если в качестве упомянутых двух тел фигурируют камень и Земля, выражение для силы притяжения приобретает вид

$$F = G\frac{mM_з}{R^2},$$

где m и $M_з$ — масса камня и масса Земли, R — расстояние между центрами притягивающихся тел, G — постоянная.

Если мы занимаемся своими опытами с бросанием камешков где-нибудь у поверхности земли, как это, например, делал Галилей на Пизанской башне, то расстояние между центром камня и центром Земли практически совпадает с радиусом Земли: $R = R_з$. Ну, а если на тело действует сила F, то его движение описывается вторым законом Ньютона:

$$ma = F.$$

Входящая сюда величина m есть вновь масса камня.

Названные два закона Ньютона полностью определяют простейшую математическую модель заинтересовавшего нас физического явления — падения камня на поверхность земли. Чтобы ее получить, нужно свести вместе обе выписанные выше формулы:

$$ma = G\frac{mM_з}{R_з^2},$$

т. е. все тела у поверхности земли падают с одинаковым ускорением

$$a = G\frac{M_з}{R_з^2}, \qquad (1)$$

которое называют ускорением силы тяжести и обозначают обычно буквой g. Его величина, определенная из эксперимента, составляет ~980 см/с. Уравнение (1) и является простейшей математической моделью рассматриваемого нами несложного физического явления — падения тела. Для определенности, правда, в математическую модель следует включить равенства, задающие исходное механическое состояние нашего конкретного камня — высоту H, с которой он падает, и скорость v_0, точнее, вертикальную ее составляющую, которая ему сообщена в начальный момент. Если, например, камень отпустили без толчка, то $v_0 = 0$.

Математическая модель построена, теперь, решая ее, можно получить исчерпывающее описание процесса падения тела. Это движение оказывается равноускоренным, и, например, на любой момент времени t можно указать высоту h, на которой находится тело, и скорость v:

$$h(t) = H - \frac{gt^2}{2}, \qquad v = gt. \qquad (2)$$

Скажем, за первую секунду падения будет пройдено 490 см, к концу второй секунды — 1960 см и т. д., скорость же будет нарастать пропорционально времени падения (рис. 3). Лабораторные опыты полностью подтверждают теоретические результаты, предсказанные с помощью математической модели.

Означает ли это, что рассмотренная нами математическая модель исчерпывающим образом описывает падение любого тела? Прежде чем ответить «да» или «нет», попытаемся перебрать в памяти некоторые примеры этого физического явления, которые нам приходилось наблюдать на практике.

«С берез неслышен, невесом слетает желтый лист...» Поэт очень точно подметил особенности падения листа. Оно не является равноускоренным, как (2), оно гораздо больше напоминает равномерное движение, т. е. движение с постоянной скоростью. Лист как бы не повинуется закону всемирного тяготения — отсюда и мысли о невесомости.

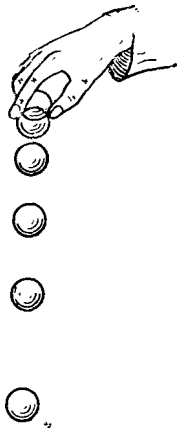


Рис. 3. Положения падающего шарика через равные промежутки времени

Парашютисты приземляются на аэродроме. Та же картина: независимо от того, на какой высоте спортсмены покинули самолет и сколько бы времени ни находились в воздухе, приземляются все они с одной и той же скоростью.

Оба примера противоречат построенной выше математической модели (1) и следующим из нее формулам (2). Однако большого секрета здесь нет. Ясно, что причина отмеченного несоответствия в сопротивлении воздуха, которое мы не учли.

Так, значит, наша модель несостоятельна и формулы (2) неверны? Почему же тогда лабораторные опыты их подтвердили?

Дело в том, что любое физическое явление, взятое во всей своей полноте, чрезвычайно сложно, ибо на него в принципе влияет неисчислимое количество факторов. Так, в примере с падающим камнем на его движение, помимо рассмотренной силы тяжести, воздействует и уже упомянутая сила сопротивления воздуха, и притяжение Луны, Солнца, планет, и убывание плотности атмосферы с высотой, и ветер, по-разному дующий на разных высотах, и то обстоятельство, что Земля не шар, а тело более сложной геометрической формы, и вращение Земли, и множество других факторов.

Если попытаться учесть все это в математической модели, то получится настолько громоздкая и сложная математическая задача, что решить ее даже на современных быстродействующих вычислительных машинах будет затруднительно. К счастью, создавать и изучать подобные математические «монстры» нет нужды. Ведь влияние перечисленных факторов неравноценно. В каждом конкретном случае, в каждом определенном варианте падения тела определяющую роль играет ограниченное, как правило, небольшое число таких факторов, а остальные являются второстепенными, несущественными — их влияние исчезающе мало.

Конструируя математическую модель, нужно заранее оценить, каким «действующим лицам» в рассматривае-

мом явлении отдать предпочтение, а какие отнести к разряду второстепенных и поэтому не обращать на них внимания. Проведя такое деление на главных и второстепенных персонажей, его необходимо далее записать в виде строгих физических и математических условий, которые должны четко зафиксировать, когда отброшенными факторами можно пренебречь. Например, если падение тела мы изучаем, так сказать, в «лабораторных условиях», то можно смело отбросить факторы, кроме силы земного притяжения. Даже сопротивление воздуха можно не учитывать — ведь высота, с которой падает шарик в нашей лаборатории, невелика, и он просто не успевает разогнаться до такой скорости, когда это сопротивление станет заметным. Итак, условием применимости нашей простейшей математической модели (2) является небольшая высота падения.

Конечно, строгости ради нужно оговориться, что опыты мы проводим на Земле в неподвижной комнате, а, скажем, не на орбитальной космической станции. Следует также предъявить определенные требования к испытываемому телу — оно должно быть столь же тяжелым и компактным, как лабораторный шарик, а не напоминать листок бумаги, который в полете планирует, а не падает, как камень. Все эти оговорки можно записать на языке математики. И если они выполнены, математическая модель справедлива, или, как говорят, адекватна изучаемому явлению — ее предсказания хорошо согласуются с результатами эксперимента.

Таким образом, мы пришли к важному выводу: математическая модель — это не только уравнения, но и дополнительные условия, устанавливающие границы их применимости. Все полученные с помощью этой модели теоретические результаты будут справедливы только в оговоренных рамках. И бездумное распространение результатов математического моделирования за эти рамки чревато самыми неожиданными последствиями.

Вспомним по этому поводу о гипотезе «тепловой смерти» Вселенной. В ней утверждалось, что со временем во Вселенной установится тепловое равновесие, подобно тому, как оно устанавливается в веществе, занимающем ограниченный изолированный объем. При этом все протекающие процессы, в том числе и жизнь, прекратятся. Ошибочность этой мрачной гипотезы в том, что вывод, полученный применительно к замкнутым объемам, был перенесен на неограниченные пространст-

ва космоса, и к тому же в ней не учитывались силы взаимного тяготения материи, весьма существенные для эволюции Вселенной.

Таким образом, конструирование математической модели какого-либо процесса или явления — до крайности деликатное дело. Здесь, с одной стороны, нельзя, как говорится, ни на грамм переложить сложности, иначе из-за обилия уравнений, их громоздкости и т. д. получить решение с помощью имеющихся средств окажется невозможным. С другой стороны, также недопустимо жертвовать ради стремления к простоте различными физическими эффектами, выбрасывая без особых на то оснований из уравнений соответствующие им члены. Тогда математическая модель начнет давать абсурдные результаты, вроде камнем падающего парашютиста в выше разобранном примере. Чтобы пролезть в такое узкое «игольное ушко», от исследователя требуется и знание содержания исследуемого объекта, и хорошее владение математическими методами. Удачная математическая модель — это половина успеха.

Математические методы издавна широко применяются в физике, начиная с древнейшего ее раздела — механики. В свою очередь, физика постоянно снабжала математику новыми постановками задач, которые часто давали импульс развитию целых направлений математической науки. Многие выдающиеся физики были и блестящими математиками, их имена с одинаковым уважением цитируются и в физической, и в математической литературе. Именно их усилиями метод математического моделирования зарождался, развивался и креп в применении к проблемам физики.

Классическим примером здесь может служить открытие французским астрономом У. Леверье в 1846 г. новой планеты солнечной системы Нептун. Открытие было сделано математически, «на кончике пера». Исходной информацией послужили «неправильности» в движении известной планеты Уран, траектория которой не совпадала с вычисленной для нее кеплеровой орбитой. Леверье предположил, что «возмутителем порядка» является неизвестная планета и вычислил на основании уравнений небесной механики ее траекторию. На основе его указаний в том же году новая планета была обнаружена немецким астрономом Галле.

Заметим, что независимо от У. Леверье расчет орбиты и координат планеты Нептун произвел и английский

астроном Д. Адамс (1845 г.). Эта работа потребовала большого объема трудоемких вычислений, которые пришлось выполнить вручную. Адамс даже сконструировал новый метод численного решения дифференциальных уравнений, за которым в вычислительной математике закрепилось его имя.

Пример с открытием планеты Нептун, часто упоминаемый в популярной литературе, действительно весьма эффектен. Но это далеко не единственный случай успешного применения в прошлом методов математики для прикладных задач.

Сошлемся на цикл работ академика Алексея Николаевича Крылова, посвященных вопросам теории кораблей. Разработанные в них математические модели конструкций кораблей стали теоретической основой отечественного кораблестроения. Так проектировались и строились, в частности, первые русские крейсеры. Математическое моделирование в этом случае имело ярко выраженную практическую направленность — строителям кораблей требовались конкретные рекомендации по оптимальному выбору конструкции. Это потребовало большой вычислительной работы и, следовательно, совершенствования методов расчетов. Не случайно именно А. Н. Крылову принадлежит первый в мировой научной литературе курс по численным методам — изданная в 1911 г. книга «Лекции о приближенных вычислениях».

Еще один пример из сравнительно недавнего прошлого. В предвоенные годы девизом авиации стало: «Скорость, скорость и еще раз скорость!» Однако новые рубежи давались непросто. Одним из препятствий на пути создания скоростных машин стало грозное явление, получившее название «флаттер». Во время экспериментальных полетов на некоторых критических режимах неожиданно возникали резкие вибрации конструкции, и машина буквально разваливалась в воздухе на части.

В чем причина аварий? В технике известны случаи разрушения различных конструкций под действием периодических нагрузок. Причина — резонансные явления, в результате которых колебания конструкции неудержимо нарастают и могут вызвать катастрофу. При флаттере периодические воздействия порождаются воздушными вихрями, которые срываются с крыльев и хвостового оперения самолета при обтекании их потоком воздуха. Частота толчков растет вместе со скоростью и, приблизившись к частоте собственных колебаний элементов

конструкции самолета, может вызвать резонанс. Флаттер широко изучался экспериментально, в частности в аэродинамических трубах. Однако лишь метод математического моделирования внес в этот вопрос полную ясность.

Исчерпывающую теорию флаттера создал совсем молодой в те предвоенные годы сотрудник Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ) М. В. Келдыш, впоследствии академик, трижды Герой Социалистического Труда, Президент Академии наук СССР, выдающийся советский ученый и организатор науки.

Элементы конструкции самолета, например крылья, представляют собой системы с бесконечным числом степеней свободы. Поэтому для вычисления частот их собственных колебаний необходима была правильная схематизация задачи, нужна была простая и в то же время эффективная математическая модель. Именно такую модель и удалось построить М. В. Келдышу. С ее помощью были созданы надежные практические методы борьбы с опасным явлением. Теперь ни один новый скоростной самолет не получает путевку в жизнь, не пройдя тщательного «расчета на флаттер». Эта работа М. В. Келдыша обогатила не только механику и самолетостроение, одновременно она дала начало и новому разделу в теоретической математике.

Сложность математической модели определяется, как правило, с одной стороны, сложностью исследуемого объекта, а с другой — точностью, предъявляемой к расчетам. В то же время сложность модели не должна превосходить некоторого предела, определяемого возможностями математического аппарата, которым располагают ученые. Эту мысль хорошо выражает фраза, которую обычно приписывают «отцу русской авиации» Н. Е. Жуковскому: «Не тот настоящий механик, кто умеет составлять уравнение движения, а кто их составляет так, что они интегрируются».

Именно это обстоятельство сдерживало использование математических моделей в науке и технике в те времена, когда математические задачи приходилось решать «вручную». Простые модели, которые «хорошо решались», не отвечали запросам практики, а сложные, которые устроили бы инженеров, конструкторов, требовали такого объема вычислений, что к ним не смели и подступиться.

Адамс и Леверье затратили на расчеты траектории новой планеты месяцы. Но даже они с их опытом не смогли бы решить задачу об облете Луны космическим аппаратом, запущенным с Земли. И хотя в обоих случаях рассматриваются одни и те же уравнения небесной механики, при расчете облета Луны требование высокой точности вынуждает учитывать тонкие детали реальных гравитационных полей Луны и Земли, выбирать из всех возможных траекторий корабля оптимальную в смысле затрат топлива и пр. Все это делает задачу «неподъемной» с позиций ручного счета.

Практика выдвигает множество подобных задач, где принципиально ясна математическая модель, понятно, какие вычислительные алгоритмы следует использовать, однако число арифметических действий, которое необходимо выполнить для получения окончательного результата, столь велико, что при счете вручную потребуется посадить за арифмометры на многие годы не один десяток людей.

До изобретения ЭВМ из множества задач, интересовавших практику, можно было решить до конца, довести до конкретного числа в ответе, лишь отдельные, удачно сформулированные, причем, как правило, ценой колоссального вычислительного труда.

Существенно отметить, что в то время в физике, и в частности механике, уровень теоретического описания реальности, т. е. уровень сложности математических моделей, заметно опережал возможности решения соответствующих математических задач. Например, сразу же после открытия Ньютоном закона всемирного тяготения можно было сформулировать так называемую задачу N тел, которая состоит в изучении эволюции во времени системы из N материальных точек, попарно притягивающихся друг к другу с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Взяв в качестве таких тел, скажем, Солнце и планеты, можно получить математическую модель Солнечной системы. Адамс и Леверье рассматривали фактически случай, когда в задаче N тел $N=3$ (Солнце, Уран, Нептун). Даже в этом случае решение, как говорилось выше, потребовало нескольких месяцев «ручного» счета. Браться всерьез за случай $N>3$ трудно было решиться. Хотя математическая модель ясна, задача сформулирована, однако технические трудности, связанные с колоссальным объемом вычислений, не позво-

ляли надеяться на успех. Сейчас благодаря использованию ЭВМ удается за несколько часов машинного времени решить эту задачу для десятков тысяч тел.

Именно таким способом в работах советских ученых моделировался процесс формирования Солнечной системы из вещества протопланетного облака. Расчеты показали, что «рой» материальных точек, вращающихся вокруг Солнца, с течением времени стал распадаться на неоднородности — предвестники образования планет.

В той же манере было смоделировано на ЭВМ образование структуры Галактики. На экране дисплея, куда ЭВМ «выдает» результаты расчетов, хорошо можно было видеть, как под действием притяжения массивного тела, пролетающего вблизи Галактики, имеющей вид диска, она начинает изменять свою форму, появляются «рукава», завихрения и прочие детали, столь знакомые по астрономическим наблюдениям.

Итак, вместо $N = 3$ у Адамса и Леверье $N = 10^5$ в сегодняшних расчетах. Однако увеличить эту цифру в 100, 1000 раз и тем самым с большей детальностью проанализировать интересующий нас процесс пока не удается. Принципиальных математических трудностей нет. Просто пока не хватает ресурсов имеющихся ЭВМ.

И задачи небесной механики не исключение. Взять хотя бы задачи, которые интересуют современное самолетостроение. Сформулировать на языке математики задачу об обтекании самолета потоком воздуха с учетом влияния пограничных слоев, нагрева поверхности, изменения формы крыльев, хвоста под действием нагрузок и т. д. сравнительно несложно. Но об ее решении в полном объеме говорить пока рано, слишком уж сложна получающаяся математическая модель для существующих ЭВМ.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Ни одно техническое достижение не повлияло так на интеллектуальную деятельность человека, как электронно-вычислительные машины. Увеличив в десятки и сотни миллионов раз скорость выполнения арифметических и логических операций, колоссально повысив тем самым производительность интеллектуального труда человека, ЭВМ вызвали коренные изменения в области переработки информации. По существу, мы являемся свидетелями своего рода «информационной революции», подобной той

промышленной революции, которую породило в XVIII в. изобретение паровой машины и связанное с ним резкое повышение производительности физического труда. В настоящее время вычислительные машины проникают во все сферы интеллектуальной деятельности человека, становятся одним из решающих факторов ускорения темпов научно-технического прогресса.

Первые крупные научные задачи, для решения которых успешно использовались ЭВМ, а точнее, для решения которых они и создавались, были связаны с овладением ядерной энергией и освоением космического пространства.

На долю прикладной математики и первых, еще несовершенных ЭВМ выпало решение сложных математических задач ядерной физики, баллистики, прикладной небесной механики. Именно при решении этих задач было осознано, что ЭВМ — это не гигантский сверхбыстрый арифмометр, что количество — резкое увеличение производительности вычислительного труда — сулит переход к новому качеству — новому способу проведения теоретических исследований.

В дальнейшем, развиваясь и совершенствуясь при решении разнообразных актуальных, прежде всего физических задач, этот стиль теоретического анализа трансформировался в новую современную технологию и методологию проведения теоретических исследований, которая получила название вычислительного эксперимента. Основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование, теоретической базой — прикладная математика, а технической — мощные электронные вычислительные машины.

Использование вычислительного эксперимента как средства решения сложных прикладных проблем имеет в случае каждой конкретной задачи и каждого конкретного научного коллектива свои специфические особенности. И тем не менее всегда четко просматриваются общие характерные основные черты, позволяющие говорить о единой структуре этого процесса. В настоящее время технологический цикл вычислительного эксперимента принято подразделять на ряд этапов. И хотя такое деление в значительной степени условно, тем не менее оно позволяет лучше понять существо этого метода проведения теоретических исследований.

Во-первых, для исследуемого объекта строится модель. Сначала физическая, фиксирующая разделение

всех действующих в рассматриваемом явлении факторов на главные, которые учитываются, и второстепенные, которые на данном этапе исследования отбрасываются. Одновременно формулируются допущения, или рамки применимости модели, в которых будут справедливы полученные на ее основе результаты. Эта модель записывается в математических терминах, как правило, в виде дифференциальных или интегродифференциальных уравнений.

Работа по конструированию математической модели чаще всего проводится объединенными усилиями физиков (химиков, биологов, медиков, экономистов), т. е. специалистов, хорошо знающих данную предметную область, и математиков, представляющих себе уровень развития соответствующего раздела прикладной математики и способных оценить возможность решения возникающей математической задачи. Важно подчеркнуть, что вычислительный эксперимент не только не отвергает традиционных классических методов анализа, но и, напротив, предполагает их самое активное использование. Кроме того, на долю математиков выпадает и предварительное исследование математической модели — корректно ли поставлена задача, имеет ли она решение, единственно ли оно и т. д. К сожалению, для актуальных сложных задач, которые в изобилии представляет современная наука и техника, подобное исследование удается выполнить лишь в исключительных случаях. Гораздо чаще приходится довольствоваться рассуждениями типа: «Раз в природе ситуация, которую мы хотим получить в качестве решения, наблюдается, то следует ожидать, что и математическая задача будет однозначно разрешима». При этом вынужденно закрывают глаза на такую «деталь»: ни одна математическая модель, сколь бы совершенной она нам ни казалась, не адекватна реальности. Природа гораздо богаче и разнообразнее в своих проявлениях, нежели любые модели, являющиеся лишь ее бледными копиями. Однако отношение к задачам в современной прикладной математике весьма отличается от положения в математике классической. К примеру, знаменитые проблемы Д. Гильберта могли ждать своего решения годами и десятилетиями. Задачи же ядерной физики, упоминавшиеся выше, необходимо было решить в короткие сроки, предусмотренные соответствующими планами.

Поэтому к решению задач, имеющих прикладной характер, зачастую приступают, не имея детального иссле-

дования ее математических свойств или изучив их лишь на частных упрощенных вариантах исходной постановки задачи.

Второй этап вычислительного эксперимента связан с разработкой метода расчета сформулированной математической задачи, или, как говорят, вычислительного алгоритма. Фактически он представляет собой совокупность цепочек алгебраических формул, по которым ведутся вычисления, и логических условий, позволяющих установить нужную последовательность применения этих формул.

Как правило, для одной и той же математической задачи можно предложить великое множество вычислительных алгоритмов. Даже человек, знакомый лишь поверхностно с численными методами, может без большого труда сочинить свой собственный вычислительный процесс. И это обстоятельство не может не настораживать, ибо довольно очевидно, что среди большого разнообразия алгоритмов не все одинаковы по своим качествам. Есть алгоритмы хорошие и плохие, и нужно уметь отличать одни от других, причем делать это, не тратя времени и труда на программирование и расчеты, а заранее, априори, по, так сказать, их внешнему виду.

А для этого прежде всего нужно сформулировать, «что такое хорошо и что такое плохо» в данном случае т. е. определить критерии для оценки качества вычислительных алгоритмов. Эти вопросы и составляют предмет теории численных методов — раздела вычислительной математики, который стал особенно интенсивно развиваться с появлением ЭВМ.

Общая цель этой теории — построение эффективных вычислительных методов, которые позволяют получить решение поставленной задачи с заданной точностью за минимальное количество действий (арифметических, логических), т. е. с минимальными затратами машинного времени. Это весьма существенно.

Вычислительный эксперимент имеет «многовариантный» характер. Действительно, решение любой прикладной задачи зависит от многочисленных входных параметров. Например, если рассчитывается какая-нибудь будущая промышленная установка, то имеется множество различных конструктивных, технологических и других параметров, среди которых нужно определить их оптимальный набор, обеспечивающий режим работы этой установки.

Получить решение соответствующей математической задачи в виде формулы, содержащей явную зависимость от параметров, для реальных задач, как уже говорилось выше, не удается. При использовании методов вычислительного эксперимента каждый конкретный расчет проводится при фиксированных значениях параметров. Проектируя оптимальную установку, т. е. определяя в «пространстве параметров» точку, соответствующую оптимальному режиму, приходится проводить большое число расчетов однотипных вариантов задачи, отличающихся значениями некоторых параметров. Поэтому необходимо, чтобы на один вариант задачи затрачивалось немного машинного времени. Вот почему, проводя вычислительный эксперимент, так важно опираться на эффективные численные методы.

Какими бы фантастическими ни казались неспециалисту возможности современных ЭВМ — миллионы и более операций в секунду! — тем не менее для проведения серьезных прикладных исследований этого уже не хватает. Спрос математиков-вычислителей пока превышает предложения, которые исходят от создателей ЭВМ. Чересчур стремительно развитие науки и техники, слишком быстро растет сложность задач, которые они ставят перед прикладной математикой.

Иногда, когда говорят о математике прикладной и математике «чистой», пытаются противопоставить эти направления. Вряд ли такое противопоставление уместно, и уж, во всяком случае, оно совершенно неплодотворно. Примером тому служит теория численных методов. По мере своего развития этот раздел математики (а он еще очень молод) все увереннее берет на вооружение и достижения классической математики, включая самые, казалось бы, абстрактные ее области.

В теории численных методов многое сделано, особенно в последние годы, но еще больше предстоит сделать. Пока здесь теория в долгу перед практикой, которая зачастую за неимением достаточно развитой теории вынуждена обращаться к эмпирике, к здравому смыслу, интуиции и т. д.

На каждом этапе вычислительного эксперимента ученым приходится широко использовать различные разделы современной математики. Однако есть и обратное влияние. Результаты многих исследований, в которых принципиальную роль сыграло широкое использование ЭВМ, привели к возникновению новых идей, понятий

методов, к появлению новых математических теорий. О некоторых из них речь пойдет в следующей статье этого сборника. Применение компьютеров привело не только к бурному развитию вычислительной и дискретной математики, теории автоматов и других разделов, непосредственно связанных с использованием ЭВМ, но и к новым важным результатам в традиционных, «классических» областях математики.

Третий этап вычислительного эксперимента — создание программы для реализации разработанного алгоритма на ЭВМ. Когда-то, на заре машинной эпохи это выглядело так. Формулы алгоритма разбивались на отдельные операции: сложить, разделить, сравнить два числа по величине и т. д., и каждая операция программировалась отдельно. Однообразная, утомительная работа, занимавшая у программистов много рабочего времени и требующая большой аккуратности и внимания. Каждую ошибку или описку приходилось потом подолгу «вылавливать» в тестовых расчетах.

Поэтому развитие программирования шло по линии упрощения процесса общения человека с машиной, приближения форм этого общения к естественным, привычным для человека. Так появились машинные языки, с помощью которых вести диалог с ЭВМ стало существенно легче. Именно языки, а не один язык, ибо каждый из них ориентирован на свой тип машин, на свой класс математических задач.

Программное обеспечение (или математическое обеспечение) современной электронной вычислительной машины представляет собой сложное хозяйство, включающее языки, трансляторы, операционные системы, библиотеки стандартных программ и пр. Это обеспечение составляет неотъемлемую часть ЭВМ, часто по стоимости превышающую стоимость собственно оборудования.

Современное программирование — это уже не ремесло, где все определяется искусством и опытом исполнителя, а самостоятельная наука со своими фундаментальными принципами, подходами, методами. Ниже мы коснемся одного из разделов этой науки, связанного с созданием пакетов прикладных программ.

Четвертый этап — собственно проведение расчетов на машине. Это тот самый этап вычислительного эксперимента, когда наиболее отчетливо проявляется его сходство с экспериментом натурным. Только если в лаборатории экспериментатор с помощью специально построен-

пой установки задает вопросы природе, то специалисты по вычислительному эксперименту с помощью ЭВМ ставят эти вопросы математической модели. Ответ в обоих случаях получается в виде некоторой цифровой информации, которую предстоит еще расшифровать. Причем в современных физических экспериментах со сложными объектами или процессами, протекающими в экспериментальных условиях, каждое измерение температуры, плотности, скорости и т. д. дается с большим трудом. Зачастую нужную информацию приходится извлекать из косвенных данных. Точность полученных результатов, как правило, невелика.

Иное дело вычислительный эксперимент. ЭВМ в процессе расчета может выдавать любую информацию, представляющую интерес для исследователя. Конечно, точность этой информации определяется достоверностью самой модели. Именно по этой причине в серьезных прикладных исследованиях никогда не начинают вести полномасштабные, или, как говорят, производственные, расчеты сразу же по только что написанной программе. Им всегда предшествует период проведения тестовых расчетов. Они необходимы не только для того, чтобы «отладить» программу, т. е. отыскать и исправить все ошибки и опечатки, допущенные как при создании алгоритма, так и при его программной реализации.

В этих предварительных расчетах тестируется также сама математическая модель, выясняется, насколько хорошо она описывает изучаемый класс явлений, в какой степени адекватна она реальности. Для этого проводится «обсчет» некоторых контрольных экспериментов, по которым имеются достаточно надежные измерения. Как правило, эти эксперименты бывают выполнены в области, так сказать, умеренных значений параметров, где отсутствуют те трудности, которые «в полный рост» встанут при полномасштабных исследованиях. Сопоставление этих данных с результатами расчетов позволяет уточнить математическую модель, обрести уверенность в правильности предсказаний, которые будут получены с ее помощью.

Только после проведения этой длительной кропотливой работы в вычислительном эксперименте наступает фаза прогноза — с помощью математического моделирования предсказывается поведение исследуемого объекта в условиях, где эксперименты пока не проводились или где они вообще невозможны.

Хотелось бы отметить, что проведение расчетов — это не тривиальный процесс типа «сдал программу на счет — получил результаты». Это исследовательская работа, поиск, имеющий свою стратегию. Фактически в процессе расчетов осуществляется диалог человек—машина.

К четвертому тесно примыкает пятый этап вычислительного эксперимента — обработка результатов расчетов, их всесторонний анализ и, наконец, выводы. Эти выводы бывают в основном двух типов: или становится ясна необходимость уточнения модели, или результаты, пройдя проверку на разумность и надежность, передаются заказчику, где «идут в дело». Однако чаще всего эти две стороны переплетаются — выясняются какие-либо необычные формы протекания изучаемого процесса, неожиданные режимы работы проектируемой установки, в результате чего появляется желание уточнить те или иные детали процесса. Математическая модель модифицируется, как правило, усложняется, и начинается новый цикл вычислительного эксперимента. Технологические циклы вычислительного эксперимента схематически представлены на рис. 4.

Иногда возникает и такая ситуация. После нескольких описанных циклов вычислительного эксперимента поведение исследуемого объекта становится достаточно ясным и понятным. На очереди оптимизация рассматриваемого режима или процесса по параметрам, количество которых, как уже упоминалось, может быть значительным. Проведение для этого больших расчетов может оказаться чересчур дорогим. И здесь идут на упрощение модели, на построение своего рода «инженерных формул», но опирающихся на сложные модели и расчеты и дающих возможность получить необходимую информацию значительно более дешевым способом.

Поэтому порой дело доходит до парадоксов типа «зачем вся эта сложная математика, если ответ можно получить таким простым путем»? Эти наивные вопросы не учитывают огромной предварительной работы по анализу сложных моделей, квинтэссенцией которой и являются простые на первый взгляд формулы.

Существенной чертой многих современных математических моделей в физике, химии, биологии и пр. является нелинейность, выражающаяся в нелинейности соответствующих уравнений. Пояснить содержание этого фундаментального математического понятия «на пальцах», не прибегая к специальной терминологии, трудно. Поэтому

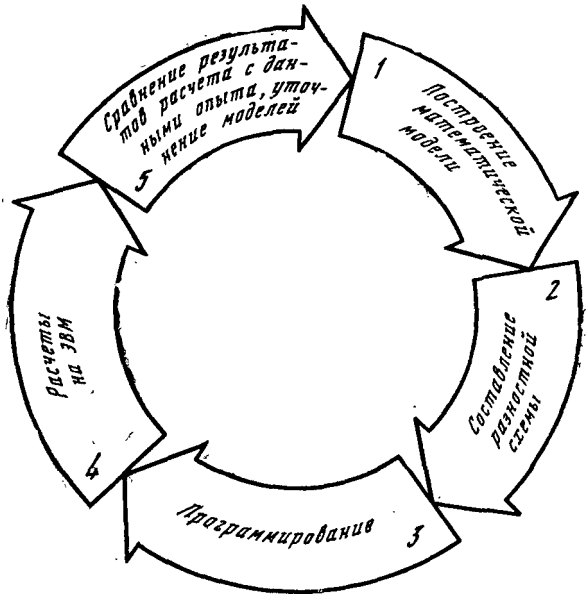


Рис. 4. Схема технологического цикла вычислительного эксперимента

мы позволим себе привести один пример. Речь пойдет о так называемом уравнении переноса, которое является простейшей моделью уравнений газовой динамики, магнитной гидродинамики и т. д. Это уравнение выглядит следующим образом:

$$\partial u/\partial t + a\, \partial u/\partial x = 0,$$

где функция $u(x, t)$ задает амплитуду возмущения, пришедшего в момент времени t в точку пространства x; a — положительная постоянная, имеющая смысл скорости распространения возмущения. Причиной возмущений, процесс распространения которых описывается приведенным уравнением, является возмущение, созданное в начальный момент $t = 0$: $u(x, 0) = u_0(x)$. Пусть оно имеет форму, изображенную на рис. 5, *а*. Будем рассматривать решение нашего уравнения в неограниченном пространстве $-\infty < x < \infty$ при $t > 0$, чтобы избежать различных отражений от границ области, если она будет конечной (так называемая задача Коши).

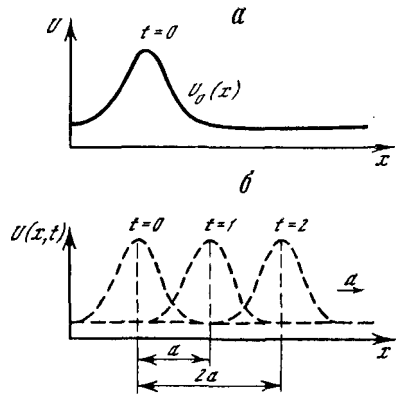


Рис. 5. Решение линейного уравнения переноса

а — начальные данные ($t = 0$), *б* — решения в последовательные моменты времени $t = 1$, $t = 2$. График решения, не изменяя взаимного положения своих частей, смещается вдоль оси x со скоростью a

Решение сформулированной нами задачи строится без труда:

$$u(x, t) = u_0(x - at).$$

Как видно, оно определяется начальными данными и состоит в том, что возмущение, не изменяя своей формы, распространяется (переносится) в пространстве со скоростью a (рис. 5, *б*). Отсюда и название самого уравнения. Столь простая конструкция решения есть следствие линейности уравнения. Действительно, неизвестная функция u, а точнее, производные от нее, входят в уравнение в первой степени или, как говорят, линейно. Кстати, точно так же распространяются возмущения по натянутой струне, потому что уравнение колебаний струны хотя и записывается несколько более сложным образом, однако тоже является линейным.

Несколько изменим вид уравнения:

$$\partial u/\partial t + u\, \partial u/\partial x = 0.$$

Теперь оно стало нелинейным — второе слагаемое есть произведение искомой функции на ее производную по пространству. Решение его имеет ту же форму:

$$u(x, t) = u_0(x - ut).$$

Но теперь роль a — скорости распространения профиля $u(x, t)$ играет множитель, стоящий в правой части перед t, т. е. само значение u. Таким образом, точки профиля $u(x, t)$, отвечающие большим значениям u, движутся быстрее, а меньшим — отстают. На рис. 6 показано, что «макушка» профиля $u(x, t)$ распространяется быстрее основания, профиль «перекашивается», и в некоторый момент времени решение формально становится трехзначным. В задачах физики, механики, радиотехники такая многозначность абсурдна, ибо не может, скажем, плотность газа иметь в какой-то момент времени в одной и

той же точке физического пространства несколько значений. С точки зрения физики это означает, что в решении возник разрыв. Это типичное и важное свойство нелинейных задач — возможность возникновения со временем из гладких начальных данных разрывных решений. Примером могут служить ударные волны в газовой динамике, имеющие столь большое значение в прикладных задачах.

«Картина», изображенная на рис. 6, напоминает волну, набегающую на морской берег. По мере того как глубина дна у берега уменьшается, падает и скорость движения основания волны. В конце концов гребешок волны, обогнав основание, «заворачивается барашком». Эта аналогия порождена не только внешним сходством. В ее основе глубокое единство математического описания.

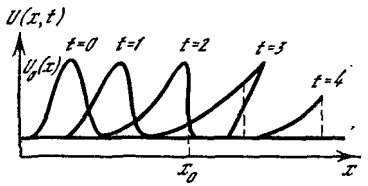


Рис. 6. Решение нелинейного уравнения переноса

Участки графика с большими значениями u смещаются быстрее — «макушка» волны обгоняет основание. В момент $t = 2$ график решения в точке x_0 становится вертикальным («градиентная катастрофа»). В дальнейшем ($t = 3$) формальное решение становится многозначным. Чтобы сохранить физический смысл, в решение необходимо вводить разрыв ($t = 3$, $t = 4$)

Важное свойство линейных задач, облегчающее их исследование и решение, состоит в том, что для них выполнен принцип суперпозиции. Это означает, что сумма двух решений линейного уравнения вновь является решением, и, кроме того, решение, умноженное на любое число, также удовлетворяет уравнению. Как следствие сумма любого числа решений линейной задачи есть решение. Это дает возможность строить решение общей линейной задачи в виде суммы частных, простых, хорошо изученных решений.

Для нелинейных уравнений принцип суперпозиции несправедлив, и вся техника построения решений в виде сумм, столь хорошо развитая для линейного случая, уже не работает.

Пользуясь геометрическими образами, можно сказать, что решение линейной задачи в некотором смысле подобно прямой линии — по любому ее отрезку без труда восстанавливается вся линия. Если кривая имеет достаточно замысловатый вид, то представить ее ход нельзя иначе, как решая соответствующее ей уравнение.

Итак, нелинейные задачи представляют большую трудность для изучения и решения. Аналитические методы здесь уже, как правило, не работают. Решенные аналитически до конца серьезные нелинейные проблемы насчитываются единицами. В этой ситуации приходится полагаться лишь на вычислительные методы. Между тем математические модели, порождаемые современными задачами науки и техники, как правило, нелинейны. Это обстоятельство является еще одной причиной того, что вычислительный эксперимент сейчас становится практически единственным средством проведения теоретических исследований в прикладных задачах.

И еще один момент хотелось бы затронуть в связи с разговором о нелинейности. В технике в свое время был широко распространен метод проектирования исходя из достигнутого. Это означает, что конструктор, создавая, например, новую турбину или котел тепловой электростанции, исходил из опыта своих предшественников. Немного увеличив мощность или другие параметры, он мог достаточно надежно предсказать, как будет работать проектируемое им устройство.

С математической точки зрения можно сказать, что при небольших изменениях параметров нелинейность задачи чувствуется слабо, имеется определенное подобие установок новой и старой, что и использует конструктор. Однако когда создаются установки, параметры которых заметно (в несколько раз) отличаются от имеющихся прототипов, никакого подобия уже нет, и без предварительного математического моделирования создать экономичную и эффективную установку уже трудно. Тем более так обстоит дело, когда приходится сталкиваться с устройствами, в основу работы которых положены совершенно новые принципы и идеи.

ЭВМ — СОАВТОР ОТКРЫТИЯ

Лет двадцать назад на страницах научно-популярных и специальных изданий довольно интенсивно обсуждался вопрос о магнитогидродинамических (МГД) генераторах, о непосредственном преобразовании с их помощью тепловой энергии в электрическую.

Принцип работы МГД-генератора весьма прост и основан на известном еще со школы законе физике, который гласит, что, если проводник при своем движении пересекает силовые линии магнитного поля, между его кон-

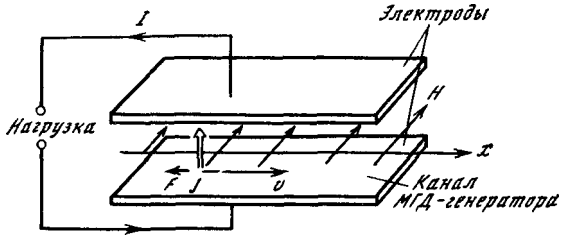


Рис. 7. Принципиальная схема МГД-генератора

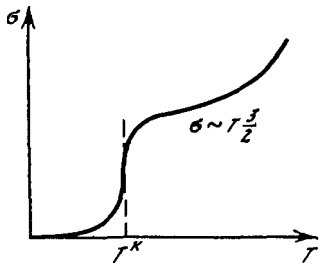


Рис. 8. График зависимости электропроводности газа σ от температуры T

цами возникает электродвижущая сила. Так работает динамомашина. Так работает и МГД-генератор. Только роль проводника здесь играет горячий электропроводный газ, который движется в канале, где внешними магнитами создано магнитное поле H (рис. 7). Возникающие электрические токи, плотность которых $j \sim vH$, собираются на электродах и направляются во внешнюю цепь. При этом на газ действует электромагнитная сила $F \sim jH$, которая его тормозит.

Никаких движущихся механических частей, никаких потерь на трение в подшипниках, что сулит заметный выигрыш в коэффициенте полезного действия.

Такова была идея. Однако эффективность преобразования тепловой и кинетической энергии газа в электрическую в МГД-генераторе определяется уровнем электропроводности газа, а она, в свою очередь, температурой. Типичная зависимость электропроводности газа σ от температуры T схематически дана на рис. 8. Она резко возрастает в районе температуры ионизации T^* и при больших T выходит на классический закон Спитцера $\sigma \sim T^{3/2}$. Такая зависимость — одна из причин нелинейности уравнений магнитной гидродинамики, которые описывают процессы, происходящие в канале МГД-генератора.

Если температура газа, текущего в канале, будет ниже критической температуры T^*, то проводимость его будет ничтожной и магнитное поле не будет «замечать» теку-

щий газ, так что электрический ток во внешней цепи не возникнет. Казалось бы, выход ясен, нужно подавать на вход газ погорячее — настоящую плазму. Но в этом случае, как это часто бывает в технике, неприятности начинаются с другой стороны. При высокой температуре газа стенки канала не выдерживают длительного контакта с ним — они быстро прогорают, требуется остановка генератора, замена канала.

Для того чтобы обойти эти трудности, предлагались различные пути, в частности добавлять в поток легкоионизирующиеся добавки, делающие газ проводящим при более низких температурах. Однако ни один такой прием не стал тогда серьезным выходом из сложившейся ситуации. Первоначальный оптимизм сменился критическим отношением, скептицизмом.

В то время, в середине 60-х годов, в Институте прикладной математики АН СССР проводилось изучение с помощью методов математического моделирования возможностей одной конкретной схемы МГД-генератора, которая в упрощенном виде изображена на рис. 9. Поток горячего газа, подаваемый под давлением через трубу, «выплескивается» в пространство между двумя параллельными пластинами. Растекаясь далее в радиальном направлении, он взаимодействует с магнитным полем, силовые линии которого параллельны оси трубы. Возникает импульс тока.

При построении математической модели и планировании первых расчетов предполагалось прежде всего дать ответ на следующий вопрос: насколько эффективно в рассматриваемой конструкции МГД-генератора преобразование тепловой энергии газа в электрическую? На первых порах модель предельно упрощалась — делались «максимально благоприятные» допущения, обеспечивающие наибольший полезный эффект, в данном случае максимальную степень перехода тепла в электричество.

На начальной стадии вычислительного эксперимента это обычная практика. Ведь если окажется, что даже в такой «улучшенной» модели не удается достичь нужного результата, то дальнейшие исследования на этом пути особого смысла не имеют.

При изучении процессов, происходящих в МГД-генераторе, схема которого дана на рис. 9, в качестве исходной была принята следующая модель. Считалось, что плазма, вошедшая в пространство между пластинами, сохраняет форму цилиндра, имеет некоторую температуру

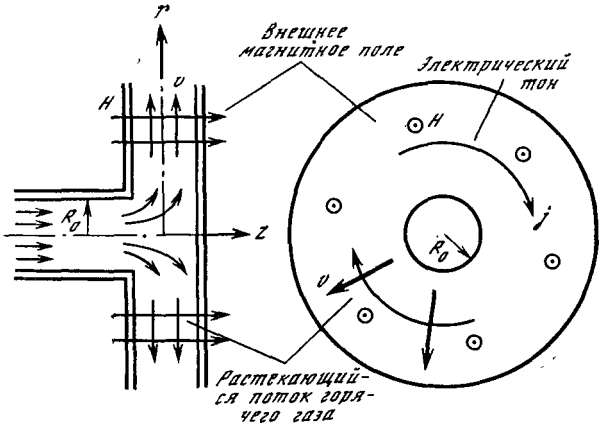


Рис. 9. Схема МГД-течения, которая исследовалась в вычислительном эксперименте

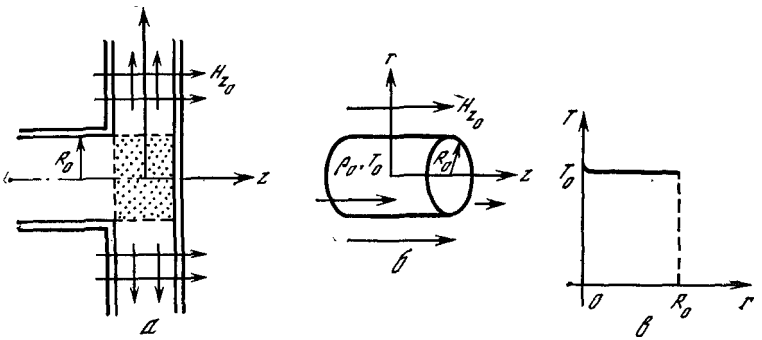


Рис. 10. Идеализированная модель МГД-течения (*а*, *б*) и график начального распределения температуры (*в*)

T_0 и давление p_0 и неподвижна. Давлением остаточного газа между пластинами можно пренебречь по сравнению с p_0, так что фактически предполагалось, что плазменный цилиндр помещен в вакуум, где создано однородное осевое магнитное поле H_{z_0} (рис. 10). Таково идеализированное начальное состояние газа.

В дальнейшем для простоты считалось, что газ, расширяясь в вакуум против магнитного поля, по-прежнему сохраняет форму цилиндра, радиус которого, естественно, изменяется со временем. В любом сечении по z процессы протекают одинаково, так как функции, описывающие

процесс, не зависят от координаты z. Итак, наша математическая модель течения газа в МГД-генераторе свелась к системе одномерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. Одномерность означает, что единственной распространенной переменной, от которой будет зависеть решение, является радиус (по координате и углу все однородно); нестационарность означает, что процесс зависит от времени.

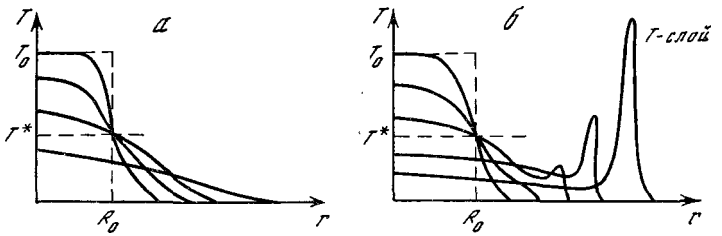


Рис. 11. Динамика изменения температуры растекающейся плазмы *а* — теория, *б* — расчет (распределение температуры по радиусу дано в последовательные моменты времени)

Приступая к расчетам какого-либо процесса или явления, обычно заранее представляют себе некоторую возможную картину его протекания. Так было и в случае с МГД-генератором. Примерный вид того, что происходит с плазмой при растекании между пластинами, казался достаточно ясным. На рис. 11, *а* схематически показаны ожидавшиеся распределения температуры вдоль радиуса в последовательные моменты времени. Плазма, расширяясь в вакуум и «работая» против сил магнитного поля, теряет энергию, ее температура падает. По мере падения температуры в соответствии с зависимостью $\sigma(T)$, представленной на рис. 8, уменьшается и электропроводность, и таким образом снижается эффективность взаимодействия нагретого газа с магнитным полем. После того как температура упадет ниже критического значения T^*, это взаимодействие прекратится, и, хотя газ еще обладает некоторой тепловой энергией, преобразовать ее в нашем МДГ-генераторе в электричество уже не удается.

Теперь остается, как полагали, подсчитать коэффициент полезного действия нашего идеального модельного генератора, выяснить его зависимость от параметров, отброшенных ухудшающихся факторов и пр.

Однако расчеты не подтвердили ожиданий — получавшаяся в них картина течения была совсем иной

(рис. 11, *б*). Вначале температура действительно падала из-за резкого расширения газа. Но затем вблизи границы с вакуумом начинался интенсивный разогрев газа. По мере того как основная часть газа охлаждалась, электрические токи сосредоточивались в этой зоне, еще больше разогревая ее. На развитой стадии процесса, когда почти всюду температура стала ниже критической, газ все еще продолжал перерабатывать свою тепловую энергию в электрическую, «проталкивая» через силовые линии магнитного поля образовавшийся горячий высокоэлектропроводный слой.

Результат был настолько необычным, настолько противоречащим тому, что ожидалось исходя из соображений элементарного здравого смысла, что поначалу заподозрили наличие в алгоритме дефекта. Искали ошибки, изменяли расчетную сетку, вязкость, конфигурацию магнитного поля и пр., и все с одной целью — уничтожить непонятный, как полагали, «счетный» эффект. Однако все было напрасно — высокотемпературный слой, а он уже к тому моменту получил у исследователей название *T*-слоя (токового, теплового слоя), упорно возникал в расчетах. Постепенно пришло понимание, что это не ошибка в программе, не дефект постановки задачи или алгоритма, а свойство изучаемой магнитогидродинамической модели течения плазмы. И причина его появления — сложное нелинейное взаимодействие гидродинамических и электромагнитных процессов. *T*-слой — порождение нелинейности.

Теперь уже исследования приняли другой поворот. Появилась новая идея — положить обнаруженный эффект в основу работы всей установки. Ведь, с одной стороны, присутствие *T*-слоя резко повышает эффективность взаимодействия плазмы с полем и тем самым увеличивает КПД генератора. А с другой, *T*-слой, хотя и имеет высокую температуру, невелик по ширине. Поэтому узкая горячая зона, быстро движущаяся в канале МГД-генератора, не успевает повредить его стенки. Итак, обнаруженный в расчетах эффект открывал возможность преодолеть те трудности, которые стояли на пути создания МГД-генераторов.

Но предстояло еще ответить на важнейший вопрос: *T*-слой — это свойство данной упрощенной, идеализированной модели или это физический эффект? В последнем случае в натуре будет происходить все так же, как представляется в теории.

Начались длительные кропотливые исследования на различных моделях. Каково влияние на T-слой таких факторов, как теплопроводность, излучение, особенности уравнений состояния, геометрия установки и пр.? Иными словами, в полном масштабе пошел вычислительный эксперимент, отдельные стадии которого мы описывали выше. В результате было установлено, что детальный учет физических особенностей течения плазмы в магнитном поле снижает рост температуры в T-слое, ограничивает условия его существования, но не уничтожает его. Выяснилось также, что возникновение T-слоя можно искусственно инициировать, вводя возмущения температуры или проводимости в потоке. Наконец, было показано, что образование T-слоя — это не особенность частной задачи о расширении плазменного цилиндра в магнитном поле, а общее свойство магнитогидродинамических течений. Образование T-слоев было отмечено в нескольких задачах, и с помощью этого эффекта удалось пролить свет на ряд явлений, до той поры не находивших достаточно убедительного объяснения.

В результате вычислительных экспериментов стало понятным, почему этот эффект не был до сих пор обнаружен в лабораторных экспериментах. Оказалось, что для его образования нужны были значительные магнитные поля, большие скорости течения и т. д., что не так просто получить в эксперименте.

Материалы многолетних вычислительных экспериментов были направлены в Государственный комитет по делам открытий и изобретений при Совете Министров СССР в качестве заявки на открытие нового физического эффекта. Начались положенные в этом случае обсуждения работы. Ситуация для многих казалась парадоксальной — физический эффект открыт математиками. Поэтому на первых порах отношение экспертов к работе было недоверчивым: никакого T-слоя нет. Однако результаты расчетов говорили сами за себя, и тогда у оппонентов позиция стала изменяться: эффект действительно существует, но ничего нового в нем нет. Действительно, T-слой на определенных этапах своего развития имеет некоторые общие черты и с перегревной неустойчивостью в плазме, и со скин-эффектом, однако ни к одному из них он не сводится.

Положение обострялось еще тем, что до тех пор в практике комитета в качестве открытий фигурировали лишь явления, зафиксированные экспериментально.

В этих условиях Комитет по делам открытий и изобретений проявил определенную смелость, создав прецедент и признав открытием чисто теоретическую работу. Так, в 1968 г. в Государственном реестре под номером 55 появилось описание нового физического эффекта — эффекта *T*-слоя. Свидетельства на открытия были выданы академику А. Н. Тихонову, докторам физико-математических наук Л. М. Дегтяреву, Л. А. Заклязьминскому, С. П. Курдюмову, В. С. Соколову, А. П. Фаворскому, П. П. Волосевичу, а также авторам данной статьи.

Прошло несколько лет, и целенаправленные поиски позволили обнаружить эффект *T*-слоя в эксперименте. Три различных научных коллектива независимо друг от друга на различных установках зарегистрировали это явление, существование которого было «предсказано» компьютером. Нелишне отметить, что все эти экспериментальные работы велись в тесном контакте с авторами открытия. Их расчеты помогли установить диапазоны изменения параметров установок, где следовало искать *T*-слой, позволили разобраться в тонкостях механизма наблюдаемого эффекта.

Отметим, что сейчас интенсивно ведутся работы по созданию МГД-генератора на *T*-слое. Идея, рожденная в вычислительном эксперименте, обретает жизнь. И вновь процесс воплощения идеи в конкретную конструкцию сопровождается вычислительным экспериментом. Усложняется математическая модель, уравнения становятся многомерными, возрастает число учитываемых физических факторов, но методология исследования остается неизменной.

Пример с обнаружением и изучением эффекта *T*-слоя достаточно наглядно демонстрирует содержание понятия «вычислительный эксперимент», технологию его проведения. Однако есть еще одно обстоятельство, которое хотелось бы проиллюстрировать, пользуясь этим же примером.

В серьезных прикладных исследованиях вычислительный эксперимент, вычислительная математика играют роль средства, с помощью которого добываются рекомендации, необходимые для практики. Однако и математика не остается в накладе от этого союза. Так было и в давние времена, когда целые новые разделы математики рождались при решении еще неизведанных задач механики, гидродинамики. Так появились на свет дифференциальное и интегральное исчисление, теория функций комплексного переменного и т. д.

Также обстоит дело и сейчас. Современная прикладная математика потому так быстро и прогрессирует, что вынуждена постоянно искать ответы на трудные задачи, которые в изобилии поставляют современная наука и техника.

Не стали исключением и исследования течения газа в канале МГД-генератора. В уравнения магнитной гидродинамики, описывающие этот процесс, составным элементом входят уравнения для электромагнитного поля, которые можно представить в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}, \qquad E = \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial H}{\partial x},$$

где через E и H — напряженности электрического и магнитного полей соответственно, t — время, x — пространственная координата, σ — электропроводность среды.

Обычным способом решения этих уравнений считалось сведение их к одному:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial H}{\partial x}\right),$$

которое решалось далее стандартными методами. Заметим, кстати, что полученное уравнение широко используется и для описания процессов распространения тепла в пространстве. Там оно имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

где T — температура, k — коэффициент температуропроводности, и называется уравнением теплопроводности. Как видно, аналогия полная, если под величиной напряженности поля H понимать температуру T, а величину $1/4\pi\sigma$ трактовать как коэффициент температуропроводности. При этом на долю электрического поля достается аналогия с потоком тепла $W \sim k\,\partial T/\partial x$.

Упомянутые стандартные методы численного решения были разработаны для уравнения теплопроводности. Ими пользовались и при расчете уравнений электромагнитного поля. Однако задача, которую пришлось решать применительно к МГД-генератору, содержала небольшую, но очень важную деталь. Среда, в которой создавались электромагнитные поля, в этом случае была низкотемпературной плазмой. Это означает, что в соответствии с рис. 8 электропроводность по ходу процесса может стать весьма малой, а на отдельных участках вообще обратиться в нуль. При взгляде на уравнение для магнитного поля становит-

ся ясным даже неспециалисту, чем это чревато. Знаменатель правой части уравнения обращается в нуль, и при расчетах это оборачивается полной потерей точности.

Как преодолеть возникшую сложность? Проблема была не из легких. Ее решение можно найти в специальной литературе по вычислительной математике. На страницах же этого популярного издания скажем, что созданный для решения данной задачи алгоритм положил начало целому классу численных методов.

Вернемся на некоторое время к преобразованию уравнений электромагнитного поля, проделанному несколькими строчками выше. Система из двух уравнений превратилась в одно-единственное. Одна математическая модель физического явления была заменена другой, ей эквивалентной.

В практике вычислительного эксперимента нередко бывает так, что для одного и того же явления предлагается несколько математических моделей, равноценных с физической точки зрения. Однако для применения существующих методов решения математическая формулировка одной из них может оказаться намного удобнее других. Нетрудно привести примеры, когда удачная переформулировка модели позволяла резко убыстрить расчеты.

В нелинейной оптике и физике плазмы есть интересные задачи о динамике волновых полей, о локализации и накоплении колебательной энергии электромагнитного поля в малых областях пространства. К таким задачам относится, например, задача о самофокусировке света в преломляющей среде.

Численное решение уравнения, которым описывается напряженность электрического поля, представляет значительные трудности. Между тем это уравнение удается свести к системе уравнений газовой динамики, для решения которых имеются апробированные численные методы. Роль плотности газа здесь играет квадрат напряженности электрического поля, роль скорости — групповая скорость распространения колебаний поля. «Уравнение состояния» (выражение для «давления») в такой модели имеет, правда, несколько экзотический вид:

$$p = -\frac{1}{4}\rho^2\left[\frac{1}{\rho r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) + 1\right].$$

Однако ценой некоторого преобразования координат можно достичь того, что получившиеся уравнения успешно решаются при помощи стандартных алгоритмов,

Такой подход оказался весьма эффективным и позволил исследовать процесс самофокусировки света в нелинейной среде и решить ряд других задач.

Следующий пример относится к поиску равновесных конфигураций плазмы в магнитном поле.

Это весьма актуальная задача, возникающая при расчете токамаков и стеллараторов — установок, широко используемых в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу. Достаточно сказать, что, правильно определив распределение магнитного поля и давления плазмы в подобных устройствах, удается с достаточной точностью вычислить параметр $\beta = \frac{8\pi \langle p \rangle}{\langle H^2 \rangle}$, где $\langle p \rangle$ и $\frac{\langle H^2 \rangle}{8\pi}$ суть средние значения давления плазмы и давления магнитного поля. От величины β принципиально зависит, будут ли токамак или стелларатор эффективно работать как установки для управляемого термоядерного синтеза. Если $\beta \geqslant 0{,}06$, то установка экономически выгодна, но уже при $\beta \leqslant 0{,}04$ она дает меньше энергии, чем потребляет. Поскольку стоимость подобных устройств весьма велика, то очевидно, что проверка различных конструкторских идей в натурном (а не вычислительном) эксперименте — занятие чрезвычайно расточительное и бессмысленное.

Задача нахождения равновесной конфигурации тороидального плазменного шнура сводится к построению так называемых магнитных поверхностей, на которых давление плазмы от точки к точке остается постоянным. Каждая из них имеет тороидальную конфигурацию и образуется обвивающимися вокруг центральной оси тороида магнитными силовыми линиями. В плоском сечении тора система вложенных друг в друга магнитных поверхностей напоминает карту местности, где замкнутые линии указывают точки одинаковой высоты над уровнем моря. Линии пересечения магнитных поверхностей с плоскостью сечения в самом деле являются линиями уровня некоторой функции (магнитного потока), т. е. линиями, в точках которых значение этой функции постоянно. Процедура построения магнитных поверхностей с математической точки зрения сводится к решению уравнения для магнитного потока, связывающего частные производные этой величины по различным координатам. Если решение требуется получить с высокой точностью, то это приводит к значительным затратам машинного времени. Например, для типичной эволюционной задачи, когда давление плазмы и наводимые в ней токи меняются, эволюциони-

руют со временем (а их изменения отыскиваются независимо друг от друга по ходу решения), и систему магнитных поверхностей приходится строить в последовательные моменты времени, время счета на ЭВМ с быстродействием порядка 10—20 млн операций в секунду составляет примерно 1 час.

Такая задача была решена на ЭВМ с быстродействием порядка миллиона операций в секунду за время около 15 мин.

За счет чего же был достигнут столь разительный выигрыш во времени? За счет удачной математической переформулировки задачи. Способ заключался в том, что магнитный поток и еще одна величина, характеризующая поле, стали независимыми переменными, а пространственные координаты — зависящими от них функциями. Для этих функций в итоге переформулировки получаются квазилинейные эллиптические уравнения, решение которых представляет гораздо меньше трудностей, чем исследование исходной задачи.

Переход к новой формулировке математической модели позволил развить эффективный подход для численного решения задач равновесия плазмы — более точный и к тому же исключающий трудоемкую процедуру построения магнитных поверхностей.

Исходная математическая задача, решение которой приводится в вычислительном эксперименте, описывается, как правило, дифференциальными или интегральными уравнениями. Однако язык дифференциальных уравнений непосредственно электронной вычислительной машине недоступен, ЭВМ имеет дело лишь с числами, складывая, вычитая, сравнивая их по величине. Поэтому построение решения с помощью ЭВМ фактически означает его прямое вычисление при заданных значениях определяющих параметров задачи. Правила, по которым ведутся эти вычисления, и составляют содержание вычислительного алгоритма.

Решение исходной дифференциальной задачи, описывающей, скажем, некоторый физический процесс, ищется в пространно-временной области в каждой ее точке. При построении решения численными методами вычислить его значения во всех точках области невозможно, ведь число этих точек неограничено, как говорят, их множество составляет континуум. В такой ситуации приходится ограничиваться вычислением решения в конечном числе точек области. Их множество называется сеткой, а сами точки — узлами сетки.

Как строится сетка при расчете реальных сложных задач, какими соображениями руководствуются при замене непрерывной области дискретным набором точек? Уже в этих вопросах, как в капле воды, отражается основная проблема численных методов. С одной стороны, казалось бы, узлы сетки следует располагать в исходной непрерывной области погуще, для чего их число должно быть достаточно большим. В этом случае численно найденное решение будет достаточно представительным, т. е. будет хорошо воспроизводить интересующее нас решение дифференциальной задачи. С другой стороны, работа, которую необходимо затратить для вычисления решения, пропорциональна количеству узлов сетки, ведь для каждого из них придется повторить весь комплекс арифметических и логических операций. Поэтому с точки зрения экономичности вычислительного процесса число узлов желательно брать поменьше. Нахождение компромисса между столь противоречивыми требованиями в общем случае — достаточно серьезная проблема.

Подобная ситуация типична для вычислительной математики. Основная задача теории численных методов и состоит в конструировании алгоритмов, которые при минимальных затратах машинного времени позволяли бы получать решение с достаточной точностью.

Не следует думать, что по мере совершенствования ЭВМ, и в частности по мере повышения их производительности, отмеченная проблема утратит актуальность. Все развитие прикладной математики показывает, что сложность задач, выдвигаемых научно-техническим прогрессом, растет быстрее, чем возможности вычислительной техники. Наиболее актуальные задачи постоянно находятся на пределе возможностей ЭВМ. Отсюда ясна настоятельная необходимость развития теории численных методов. Только опираясь на глубокий теоретический фундамент, можно строить оптимальные алгоритмы, обладающие заранее заданными свойствами.

Тот стиль, та методика проведения теоретических исследований, которую мы сейчас называем термином «вычислительный эксперимент», складывались постепенно в разных научных учреждениях. Поначалу об этом даже было не принято писать в научных статьях, говорить в докладах — считалось, что все это составляет «кухню» исследователя-вычислителя со всеми ее частными рецептами и приемами. Однако по мере того как росла сложность задач, повышались возможности ЭВМ, по мере того как

в вычислительный эксперимент вовлекалось все большее число самых различных специалистов — от «чистых» физиков и математиков до инженеров-электронщиков, положение изменялось. Все четче осознавалось, что решение прикладных задач на ЭВМ — сложный научно-производственный процесс и, чтобы им овладеть и уметь управлять, необходимо его изучать.

Первые же публикации на эту тему показали, что основные принципы работы с математическими моделями, воплощенные в этапах «технологического цикла» вычислительного эксперимента, были определены крупными научными коллективами, специализирующимися в этой области, практически одинаково. Это можно рассматривать как свидетельство объективного развития данного раздела математической науки, как отражение объективности методологии нового современного подхода к теоретическому анализу прикладных проблем.

История науки знает немало случаев, когда одни и те же идеи высказывались независимо и почти одновременно разными людьми в разных местах. И это обстоятельство в конечном счете подтверждало правильность сформулированных концепций.

Примером тому может служить история исследований по управляемому термоядерному синтезу. В середине 50-х годов наши ученые, проводившие такие работы, знали, что в обстановке строжайшей секретности подобные работы проводятся и за рубежом, в первую очередь в США. Речь шла о мирных применениях термоядерной энергии, и руководитель этих работ в Советском Союзе академик И. В. Курчатов выступил перед иностранными учеными с рассказом о проводимых в этой области исследованиях. Выступление состоялось в атомном центре Великобритании Харуэлле во время визита туда советской научной делегации. Вызванный этим выступлением обмен информацией оказался чрезвычайно полезным для обеих сторон, положил начало международному сотрудничеству в области термоядерной энергетики.

Существенно, что этот обмен информацией в середине 50-х годов показал, что группы ученых разных стран двигались к цели примерно одними и теми же путями, решали похожие уравнения, создавая сходные установки. Приведенный пример может служить подтверждением слов о том, что к формированию вычислительного эксперимента как научного направления привел объективный и закономерный ход развития науки.

ЛАЗЕРНЫЙ ТЕРМОЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ И ЭВМ

Описанная выше работа по T-слою была выполнена в то время, когда вычислительный эксперимент в его современном понимании только обретал права гражданства. Сейчас это привычный инструмент научного исследования, который с успехом используется в самых разнообразных разделах наук.

Одной из типичных для него задач является проблема управляемого термоядерного синтеза, и прежде всего лазерного термоядерного синтеза.

По имеющимся на сегодня прогнозам, еще до конца нынешнего столетия перед человечеством вплотную встанет одна из самых серьезных проблем, с которыми оно когда-либо сталкивалось — энергетическая проблема. Органические полезные ископаемые (нефть, уголь, газ и т. д.), являющиеся сейчас основным источником энергии, будут в значительной степени исчерпаны. Строительство новых крупных гидроэлектростанций сдерживается ограниченностью водных ресурсов. Также ограниченны и ресурсы ядерного горючего (урана, плутония). Поэтому не случайно ученые всего мира настойчиво ищут новые мощные источники энергии. Прогресс нашей цивилизации определяется прежде всего ее энергетическим потенциалом. И нынешнее поколение должно позаботиться о том, чтобы наши потомки не испытывали энергетического голода.

Способ получения энергии, обеспеченный практически неисчерпаемыми ресурсами, известен — это термоядерный синтез. При образовании (синтезе) атома какого-либо элемента из более легких атомов высвобождается энергия. Классический пример такой реакции — слияние изотопов водорода (дейтерия и трития) с образованием гелия. Гигантские масштабы выделяющейся при этом энергии продемонстрировали взрывы водородных бомб. Они являют собой пример неуправляемого термоядерного синтеза.

Взять под контроль процесс термоядерного синтеза, научиться им управлять — значит решить энергетическую проблему, получить поистине неиссякаемый источник энергии. Над решением этой важнейшей научно-технической проблемы нашего времени интенсивно работают ученые многих стран мира.

Как известно, началу термоядерной реакции, т. е. слиянию ядер дейтерия или трития, препятствуют электрические силы (заряженные положительно ядра отталки-

ваются). Вероятность начала реакции резко повышается с увеличением температуры смеси изотопов водорода. За счет высокой кинетической энергии хаотического теплового движения ядер оказывается возможным преодолеть барьер сил отталкивания и сблизить ядра настолько, что становится возможным их синтез. Необходимые для этого температуры составляют десятки и сотни миллионов градусов. Инициирование термоядерной реакции облегчается, если повышать плотность «термоядерного горючего».

Однако попытки осуществить такие условия в лаборатории порождают огромные технические трудности. Для их преодоления предлагались различные пути, и сейчас параллельно развивается несколько термоядерных программ. Среди них метод, основанный на магнитном удержании плазмы, берущий свое начало от первых попыток разогреть и удержать плазменный шнур сильным электрическим разрядом. Сейчас в этом направлении ведущее место занимают работы по знаменитым токамакам.

Еще одно направление связано с использованием мощных пучков быстрых заряженных частиц, которые можно получать в ускорителях. Например, существует программа, предполагающая нагревать плазму пучком электронов.

Создание оптических квантовых генераторов (лазеров) породило новое направление в термоядерных исследованиях. Идея использования лазеров для этой цели была впервые высказана в 1962 г. академиком Н. Г. Басовым и доктором физико-математических наук О. Н. Крохиным. Она сводится к тому, чтобы, сфокусировав лазерный луч на небольшой шарик из замороженной смеси дейтерия и трития (ДТ-льда) радиусом порядка долей миллиметра, «вложить» в него за короткое время (10^{-9} с) значительную энергию. Превратившись в тепло, энергия лазерного импульса создаст в шарике («термоядерной мишени») высокую температуру, а инерция не позволит веществу за столь малое время заметно разлететься под действием возникшего в мишени огромного давления. Энергия, выделившаяся в результате такого микротермоядерного взрыва, может стать искрой, зажигающей термоядерное «пламя» в реакторе электростанции будущего.

Такова принципиальная схема того направления в современных термоядерных исследованиях, которое получило название лазерного термоядерного синтеза (ЛТС).

Для того чтобы проверить описанную выше принципиальную схему ЛТС, оценить ее возможности, необхо-

димы лазеры достаточно большой мощности. Однако в пору зарождения идеи ЛТС таких лазеров еще не было, да и сейчас пока нет.

Приходилось ограничиваться грубыми оценками. Они, конечно, полезны, но именно как оценки и прикидки. Достаточно детальной информации, точных цифр (а они и нужны конструкторам будущих установок!) такие оценки дать не могли. Поэтому вполне естественно, что за помощью обратились к вычислительному эксперименту.

Его цель — выяснить, какие процессы происходят в термоядерной мишени, достигаются ли условия для «зажигания» термоядерной реакции, как они зависят от параметров мишени, мощности лазерного излучения, длительности импульса и т. д.

Первый этап вычислительного эксперимента — это, как говорилось выше, конструирование математической модели, причем на первых порах как можно более простой, построенной по принципу «максимального благоприятствования», т. е. путем отбрасывания всех мешающих факторов. Если в этом случае в расчетах будет зафиксирован положительный эффект, то можно переходить к модификации модели, к учету влияния отброшенных «вредных» факторов, т. е. к новым циклам вычислительного эксперимента.

Как уже отмечалось, в простейшем случае термоядерная мишень представляет собой однородный шарик из твердой смеси дейтерия и трития. Конечно, реальные мишени — это не идеальные сферы, точность их изготовления имеет вполне определенные пределы. Чем эта точность выше, тем при прочих равных условиях больше надежд получить желаемый результат — «зажигание» термоядерной реакции.

Поверхность мишени облучается лазером. Из самых общих соображений ясно, что для увеличения положительного эффекта необходимо стремиться к возможно более высокой степени симметрии облучения, т. е. к равномерности освещения поверхности мишени лазерным светом. В реальных условиях для этого предполагается использовать большое число лазерных лучей (например, 64 и даже более), симметрично «нацеленных» на мишень. Итак, в качестве отправной точки исследования следует рассмотреть строго сферическую мишень с некоторым радиусом R_0 (параметр мишени), равномерно облучаемую лазерным излучением мощностью q и продолжительностью импульса t_0 (рис. 12).

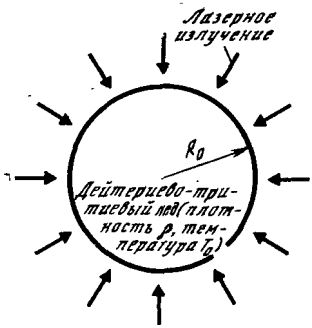


Рис. 12. Схема лазерного термоядерного синтеза (ЛТС)

Эти физические предположения заметно упрощают математическую модель — она становится одномерной. Это значит, что все функции, входящие в уравнение модели, будут зависеть, помимо времени t, от единственной пространственной переменной — радиуса (расстояния от центра мишени). Очевидно, в более общем случае необходимо учитывать зависимость от углов наблюдения, и это сильно усложняет задачу.

В качестве упомянутых уравнений здесь выступают классические уравнения газовой динамики, представляющие собой математическую запись трех основных законов сохранения, действующих в сплошной среде: закона сохранения массы вещества, закона сохранения количества движения и закона сохранения энергии. Единственные дополнительные процессы, которые необходимо учесть в виде несложных добавок в уравнение энергии,— это поглощение лазерного излучения (источник тепла) и электронная теплопроводность, осуществляющая перенос тепла. К трем указанным уравнениям необходимо также добавить так называемые уравнения состояния, т. е. связи между термодинамическими параметрами среды: температурой, плотностью, давлением, внутренней энергией.

Мы не приводим здесь систему уравнений газовой динамики — она не добавит к сказанному ничего существенно нового, а желающие смогут найти ее в любом курсе механики сплошной среды.

Как известно из математики, чтобы выделить из всего множества возможных решений некоторой общей системы уравнений решение конкретной задачи, необходимо задать дополнительные условия, в данном случае начальные данные, описывающие исходное состояние мишени, и краевые условия, задающие режим в центре мишени и на ее поверхности.

В нашем простом случае формулировка дополнительных условий трудности не вызывает. Начальное состояние мишени — сфера радиуса R_0, выполненная из ДТ-льда плотности ρ_0. (Мы всюду воздерживаемся от указания конкретных числовых значений величин. С точки зрения

методологии вычислительного эксперимента это не очень существенно и лишь отвлекает внимание читателя. При желании с этими цифрами и более детальным физическим анализом возникающих явлений и процессов можно ознакомиться по публикациям, перечисленным в списке литературы в конце статьи.) Начальной температурой холодной, замороженной, мишени, разумеется, можно пренебречь по сравнению с теми огромными термоядерными температурами, которые мы ожидаем, т. е. положить $T_0 = 0$. Ну и, конечно, в начальном состоянии скорость всех частиц, из которых состоит мишень, равна нулю.

Теперь о краевых условиях. В центре при $r = 0$, очевидно, должны выполняться условия симметрии, т. е. должны равняться нулю радиальная компонента скорости и теплового потока. Заметим, кстати, что в задаче присутствуют только эти компоненты указанных векторных величин (скорости и потока тепла) — тоже в силу соображений симметрии. За внешней поверхностью мишени, радиус которой будет возрастать по заранее неизвестному закону $R = R(t)$, имеется газ с некоторым давлением p_0, но каково бы оно ни было, оно ничтожно по сравнению с давлениями, которые разовьются в результате нагрева мишени лазерным излучением. Поэтому можно положить $p = 0$ при $r = R(t)$. Так формулируется условие для уравнений газовой динамики — вещество мишени фактически (в аспекте соотношения давлений) разлетается в вакуум. Кроме того, отсутствует поток тепла из мишени — это условие определит поведение тепловых функций.

Остался последний штрих — нужно определить закон поглощения лазерного излучения. Для описания этого физического процесса можно, в свою очередь, предположить различные модели. Примем для начала простейшую. Будем считать, что вся энергия падающего на мишень лазерного излучения поглощается в точке, а точнее, в силу сферической симметрии задачи — на сфере, где плотность вещества мишени равна некоторому критическому значению ρ^*, зависящему от длины волны лазерного света. Заметим, что сделанное предположение, несмотря на кажущуюся грубость, весьма близко к реальности. И во-вторых, расчеты показали, что решение весьма слабо зависит от величины ρ^*, т. е. устойчиво по отношению к вариации этого параметра.

Мы полностью и достаточно аккуратно — правда, в простейшем варианте — описали математическую модель ЛТС, т. е. модель взаимодействия лазерного излуче-

ния с веществом мишени. Конечно, с помощью уравнений и формул все это описание, занявшее три страницы, сократится до нескольких строк. Мы пошли на такое пространное словесное изложение не только потому, что ориентировались на читателя, не являющегося специалистом в математической физике. Мы хотели еще раз подчеркнуть важную мысль: уравнения и формулы — это еще не математика, это ее язык, позволяющий складно и компактно выражать идеи. А вот идеи, которые выражаются формулами или словами, и есть существо математики, в данном случае математической модели.

Расхожее мнение утверждает, что простота — одно из проявлений совершенства. В случае с нашей математической моделью положение скорее обратное: простота модели — следствие ее несовершенства. Но несовершенства сознательного, целенаправленного, приемлемого на данном этапе проведения вычислительного эксперимента. В модели не учтено многое: например, за ее рамками осталась сама термоядерная реакция, энерговыделение за ее счет и т. п. Выброшен, казалось бы, абсолютно необходимый элемент, то, из-за чего весь, как говорится, сыр-бор разгорелся.

И тем не менее оправдано и это упрощение. Повторим еще раз: цель первых расчетов — выяснить в максимально благоприятных условиях, пойдет или нет термоядерная реакция. Для ответа на этот вопрос учет самой реакции не обязателен. Достаточно лишь посмотреть, как протекают процессы в мишени и выяснить, достигаются ли условия для начала этой реакции, благо они известны. Учет ее самой и других факторов, уточняющих физическую картину явления,— дело следующих технологических циклов вычислительного эксперимента.

Первые расчеты, проведенные в рамках математических моделей, подобных описанной выше, дали неутешительные результаты. Они показали, что для осуществления управляемой термоядерной реакции по схеме ЛТС требуются лазеры с такой фантастической мощностью и энергией импульса, что они вряд ли будут созданы в обозримом будущем. Заметим, что в этих расчетах мощность лазерного излучения предполагалась постоянной в течение всего импульса (рис. 13, *а*).

Однако вычислительный эксперимент — это не просто расчет. Его существо — экспериментирование с математической моделью, варьирование параметров, «проигрывание» с помощью модели самых разных ситуаций, может

быть, пока и «безумных» с позиций сегодняшних представлений о явлении. И в каждом случае — соблюдение правила «от простого к сложному», от выяснения принципиальной возможности к конкретным цифрам и конструктивным рекомендациям.

Именно на этом пути добилась успеха группа американских ученых. Они обнаружили, что можно получить существенное снижение необходимой энергии лазера, если мощность импульса $q(t)$ увеличивать во времени по специальному закону (рис. 13, *б*). Этот закон должен обладать характерной особенностью: за сравнительно небольшое время τ (раз в десять меньшее общего времени импульса) в мишень должна вкладываться примерно половина всей энергии лазера. Такой лазерный импульс с «профилированной» во времени мощностью (как говорят, «режим с обострением») формировал в мишени газодинамические и тепловые процессы специальным образом. В результате, как показали расчеты, удается не только сильно нагреть термоядерное горючее, но и сжать его в несколько тысяч раз по сравнению с плотностью твердого водорода, что способствует скорейшему началу реакции. В начале процесса поверхностные слои мишени под

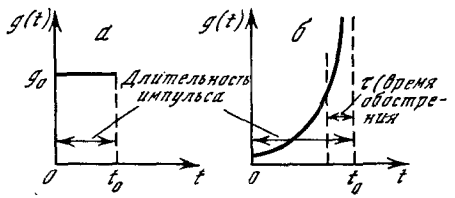
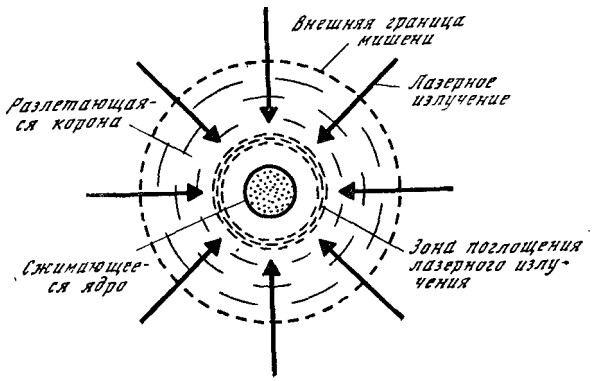


Рис. 13. Зависимость мощности лазерного излучения q от времени t

а — импульс с постоянной мощностью, *б* — импульс с «обострением»

Рис. 14. Термоядерная мишень на развитой стадии процесса



действием лазерного излучения испаряются; испаренное вещество («корона») под действием возникшего из-за нагрева огромного давления разметается в окружающее пространство с колоссальной скоростью, достигающей сотен километров в секунду. При этом возникает импульс отдачи (как при стрельбе из орудия), направленный к центру мишени и приводящий к сильному сжатию вещества (рис. 14). В результате в ядре мишени удается достичь таких условий по температуре и плотности, которые существуют лишь в недрах звезд некоторых типов. Это и обеспечивает возникновение термоядерной реакции.

Со времени этой работы прошли годы. Вычислительные эксперименты с математическими моделями продолжались. В работах советских ученых — сотрудников Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР и Физического института им. П. В. Лебедева АН СССР — было показано, что профилирование во времени — не единственная возможность снизить требования к параметрам лазеров, приблизить практическое осуществление идеи ЛТС.

Расчеты показали, что к цели ведет и «профилирование» по пространству. На практике это означает, что термоядерная мишень делается не сплошной, однородной, а выполняется в виде вложенных друг в друга тонких сферических оболочек, параметры которых (толщина и материал), а также порядок расположения подбираются так, чтобы обеспечить зажигание термоядерной реакции при минимальной энергии лазера и выделение максимума энергии за счет термоядерного горения.

Идея «пространственного профилирования», или использование многобластных мишеней, имеет определенные преимущества по сравнению с принципом профилирования мощности лазера во времени. Дело в том, что технически выполнить такую сложную мишень все же проще, чем регулировать мощность лазера с необходимой точностью на весьма кратком промежутке времени.

А на подходе новые идеи. Предлагается осуществить профилирование частоты лазерного излучения. Это сулит свои преимущества, открывает новые возможности.

Так, сегодня, еще не имея желаемой лазерной техники, ученые с помощью методов вычислительного эксперимента сумели выяснить столь тонкие детали «лазерного термояда», которые вряд ли удастся установить и измерить даже тогда, когда появятся лазеры с нужными характеристиками.

ВОКРУГ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В современной науке и технике появляется все больше областей, задачи в которых можно и нужно решать методом вычислительного эксперимента, с помощью математического моделирования. Обратим внимание на некоторые из них.

Энергетическая проблема. Прогнозирование атомных и термоядерных реакторов на основе детального математического моделирования происходящих в них физических процессов. В этой области работа ведется очень успешно. Вычислительный эксперимент тесно сопрягается с натурным экспериментом и помогает, заменяет и удешевляет весь исследовательский цикл, существенно его ускоряя.

Космическая техника. Расчет траекторий летательных аппаратов, задачи обтекания, системы автоматического проектирования.

Обработка данных натурного эксперимента, например радиолокационных данных, изображений со спутников, диагностика плазмы.

Здесь очень важной оказывается проблема повышения качества приборов, и в частности измерительной аппаратуры. Между тем в настоящее время показано, что, используя измерительный прибор среднего качества и присоединив к нему ЭВМ, можно на основе специального алгоритма получить результаты, которые дал бы измерительный прибор очень высокого качества. Таким образом, сочетание измерительного прибора с компьютером открывает новые возможности.

Технологические процессы. Получение кристаллов и пленок, которые, кстати, нужны для создания вычислительной техники, для решения проблем в области элементной базы (что невозможно без математического моделирования); моделирование теплового режима конструктивных узлов перспективных ЭВМ, процессов лазерной плазмы, технологии создания материалов с заданными свойствами (это одна из основных задач любой технологии).

Экологические проблемы. Вопросы прогнозирования и управления экологическими системами могут решаться лишь на основе математического моделирования, поскольку эти системы существуют в «единственном экземпляре».

Гео- и астрофизические явления. Моделирование климата, долгосрочный прогноз погоды, землетрясений и цунами, моделирование развития звезд и солнечной активности, фундаментальные проблемы происхождения и развития Вселенной.

Химия. Расчет химических реакций, определение их констант, исследование химических процессов на макро- и микроуровне для интенсификации химической технологии (очень многое, по-видимому, можно сделать уже на основе полученных моделей).

Биология. Особо следует отметить интерес к математическому моделированию в связи с изучением фундаментальных проблем этой науки (генетики, морфогенеза) и разработкой новых методов биотехнологии.

Существуют три проблемы биотехнологии, решение которых имеет огромное научное и прикладное значение:

1) оптимизация установок по производству кормового белка;

2) производство этанола, метанола — проблема горючего;

3) производство лекарств.

Нужно подчеркнуть, что современная биотехника — это новая крупномасштабная отрасль промышленности с новым рабочим телом — средой из клеток. Существует альтернатива — развитие технологии в этой области методом проб и ошибок, многолетнее, без большой гарантии на успех или моделирование и оптимизация процессов. В качестве примера можно привести процесс производства биомассы с использованием подсветки реактора для стимулирования биоконвекции.

Для оптимизации этого процесса уже начинает использоваться математическое моделирование. Это огромная область деятельности, актуальность которой не вызывает сомнений.

Классической областью математического моделирования является физика. До недавнего времени в физике микромира (в квантовой теории поля) «вычислительный эксперимент» не применялся, так как было принято использовать метод малого параметра, каким является постоянная тонкой структуры. Однако сейчас физики-теоретики пришли к выводу, что процессы в микромире сильно нелинейны, поэтому необходимо переходить к численным методам, и для этой цели даже разрабатываются специальные компьютеры.

Анализ математических моделей с помощью вычислительного эксперимента с каждым годом завоевывает новые позиции. В 1982 г. Нобелевская премия по физике была присуждена К. Вильсону, предложившему ряд фундаментальных моделей в теории элементарных частиц и критических явлений, которые необходимо исследовать численно. В 1979 г. Нобелевской премии по медицине была удостоена работа в области вычислительной томографии (восстановление объемного предмета по набору его сечений).

В 1982 г. Нобелевской премией по химии отмечена работа, в которой методами вычислительной томографии восстанавливалась структура вируса по данным электронной микроскопии.

Каждая из этих работ приводит к постановке глубоких математических задач, для решения которых необходим вычислительный эксперимент. При постановке вычислительного эксперимента в различных областях сегодня все чаще используются пакеты прикладных программ.

Остановимся несколько подробнее на этом важном направлении современного программирования. Чтобы лучше ощутить существующие здесь проблемы и понять пути их решения, обратимся к истории вопроса, благо история эта еще весьма коротка и развивалась на памяти нынешнего поколения математиков-прикладников.

Как уже говорилось, первые программы писались «вручную», в командах. Однако уже тогда зарождавшийся вычислительный эксперимент характеризовался многомодельностью. Это означало, что в процессе расчетов математическая модель, или вычислительный алгоритм, постоянно модифицировалась, видоизменялась. Все это в первую очередь сказывалось на программе, в которую необходимо было вносить соответствующие изменения. Программист — автор программы, конечно же, не переписывал ее каждый раз заново: в соответствующее место делалась нужная вставка, в программе появлялась очередная «заплата». Помимо основного задания на программирование, заводилась специальная «тетрадь изменений», куда, чтобы не запутаться, заносились все исправления и переделки.

Если математическая модель и претерпевала заметные изменения (например, в уравнениях магнитной гидродинамики требовалось учесть не одну, а две компоненты вектора напряженности магнитного поля или дополни-

тельно учесть излучение), то также естественно было не создавать новую программу, а «надстраивать» старую, уже хорошо зарекомендовавшую себя в расчетах.

Программа разрасталась, разветвлялась, ее возможности повышались. С помощью такого комбайна можно было решать и прежние простые задачи. Чем сложнее становился программный комбайн, чем большими возможностями он обладал, тем обширнее становилась таблица ключевых параметров.

Постепенно программа превращалась в эдакого монстра, нашпигованного ключевыми параметрами. Новые «заплаты» ставились на старые, и в этих дебрях начинал путаться сам автор программы. В конце концов принималось решение переписать программу заново, а это означало, что придется повторно тратить немалое время и силы на большую трудоемкую работу.

Одним из средств борьбы с такими непроизводительными потерями являются пакеты прикладных программ.

Пакет прикладных программ (ППП) состоит из функционального наполнения и системной части.

Функциональное наполнение представляет собой, грубо говоря, набор отдельных программ, решающих конкретные задачи. Эти задачи объединены общей направленностью, или, как говорят, предметной областью. Дело в том, что ППП не является универсальным, он проблемно ориентирован, т. е. предназначен для решения определенного класса задач.

Если это задачи механики сплошной среды, то в функциональное наполнение могут, например, входить программы для расчета уравнений газовой динамики, уравнения теплопроводности, уравнений для электромагнитного поля, уравнений для излучения, фазовых переходов и т. д.

Содержание каждой такой индивидуальной программы, или «модуля», специфично, однако требования к оформлению входной и выходной информации унифицированы. Эти модули представляют собой своеобразные «черные ящики», которые можно соединять в цепочки, ветви так, чтобы в конце концов получить заданную программу.

Системная часть выполняет функции сервисного характера. Основные задачи здесь состоят в следующем. Прежде всего необходимо организовать хранение функционального наполнения. Но хранить в данном случае не значит ограничиться записью информации на каких-либо носителях — магнитных дисках, лентах, барабанах. В этом

архиве должен быть порядок: по первому требованию указанный модуль должен быть направлен «в работу».

Главное назначение системной части ППП — обеспечить возможность сборки из отдельных модулей полной программы, способной решать заданную задачу. Для этого вычислитель, создающий программу, должен общаться с пакетом — давать заказы, воспринимать ответную информацию. Этой цели служит язык заданий, т. е. средство диалога пользователя с пакетом.

Конечно, в идеале пакет должен быть оснащен таким инструментарием, который на основании общих требований к будущей программе сам автоматически создает, собирает ее из модулей и при этом проводит оптимизацию либо по числу модулей, либо по времени работы программы, либо по каким-то другим критериям. Однако это перспективная цель, а пока пользователь сам занимается сборкой. Для этого он сначала разбивает решаемую задачу на части, подбирает для решения каждого куска свой модуль и затем начинает процесс соединения модулей в единый комплекс. Конечно, это очень упрощенная схема работы с пакетом, но она отражает характерные этапы такой деятельности.

Пакет программ — это живой организм, он постоянно развивается: в функциональное наполнение добавляются новые модули, старые модифицируются. Разумеется, каждое вносимое в тот или иной модуль изменение должно автоматически отразиться во всех существующих в данный момент копиях этого модуля — и тех, которые хранятся на внешних носителях, и тех, которые участвуют «в сборке» отдельных программ.

Бессмысленно выводить некое всеобщее уравнение Вселенной, из которого как частный случай будут следовать и теория относительности и таблица умножения. Столь же бессмысленно пытаться создать всеобщий ППП, способный решать любые задачи. Пакеты должны быть, как говорилось, проблемно-ориентированными, сочетая достаточно широкую предметную область с относительной простотой, компактностью, удобством для использования.

В чем достоинства пакетов программ? Их создают (или должны создавать) высококвалифицированные специалисты, знающие и использующие самые последние, самые эффективные достижения вычислительной математики и программирования. Широкое внедрение пакетов должно служить цели оперативного распространения пе-

редового опыта в области вычислительного эксперимента, пресечению кустарщины в этом важном деле.

Кроме того, для того чтобы пользоваться пакетом и, значит, грамотно вести расчеты, совсем не обязательно самому обладать высокой квалификацией программиста или математика-вычислителя. Поэтому пакеты программ должны быть такими, чтобы к их помощи могли прибегнуть не только математики, но и специалисты из других сфер научной деятельности, прошедшие сравнительно небольшой курс математического обучения: физики и экономисты, лингвисты и биологи и т. д.

Как известно, в природе не редкость, когда одно и то же уравнение описывает разные явления. Выше уже приводился пример уравнения теплопроводности, которое наряду с переносом тепла описывает также распространение магнитного поля в проводящей среде, диффузию частиц. Поэтому ясно, что ППП, созданный для определенной предметной области, может оказаться применимым и для других классов задач.

ППП — это активное концентрированное выражение опыта, приобретенного в вычислительном эксперименте.

Чтобы лучше представить место вычислительного эксперимента в кругу задач, решаемых сегодня с помощью ЭВМ, стоило хотя бы вкратце рассказать о некоторых из этих задач.

Со времени появления ЭВМ прошло уже почти сорок лет. Сейчас в вычислительных центрах работают ЭВМ третьего, четвертого поколений. Они значительно превосходят своих «предков» по производительности, объему памяти, возможностям диалога человек — машина. Соответственно сложнее и проблемы, которые решаются с их помощью. Это технология производства материалов с заданными свойствами и оптимизация химических процессов, автоматизированное проектирование и управление производством, поиск полезных ископаемых и прогноз погоды и др.

Возьмем для примера задачи управления технологическим процессом, химическим реактором, полетом космического аппарата. На вопросы, заданные машине, она должна отвечать тотчас же по ходу процесса, должна работать, как говорят, «в режиме реального времени». В таких случаях требования к ее быстродействию предельно высоки: если ответ хотя бы немного запоздает, может случиться непоправимое.

Какие же требования надо предъявлять к компьютерам для решения актуальных задач науки и техники? Возьмем в качестве примера задачу о трехмерном расчете обтекания самолета. Когда рассчитывается много вариантов для разных моделей, требуется, чтобы расчет одного варианта можно было выполнить за несколько минут (еще лучше — секунд). При этом должна быть обеспечена нужная точность расчета. Если взять сетку из $10^3 \times 10^3 \times 10^3 = 10^9$ узлов (10^3 точек по каждому измерению), то для расчета одного варианта нужно не менее 10^{15} арифметических действий, что потребует не менее 12 суток ($1{,}7 \cdot 10^4$ мин) непрерывной работы компьютера с быстродействием 10^9 операций в секунду и оперативной памятью 10^9—10^{10} байт. В этом случае вычислительный эксперимент невозможен. На сетке $10^2 \times 10^2 \times 10^2 = 10^6$ вычислительный эксперимент возможен, так как один вариант считается 20 мин. Отсюда видно, что расчет обтекания самолета на сетке с 10^9 узлами возможен даже для ЭВМ будущих поколений только при высоком уровне вычислительного искусства и при выборе удачной модели.

Вывод очевиден: нельзя уповать только на рост быстродействия супер-ЭВМ, надо совершенствовать триаду модель — алгоритм — программа, т. е. интеллектуальное ядро вычислительного эксперимента. Опыт показывает, что здесь существуют большие резервы, которые можно использовать лишь при наличии очень высокого уровня работ и практического опыта у разработчиков триады. Сейчас ясно, что вычислительную математику и математическое моделирование следует развивать темпами, опережающими развитие вычислительной техники.

К этой проблеме нужно привлечь внимание математиков. Вообще нужно сказать, что лишь малая часть «корпуса» математиков (докторов и кандидатов наук) участвует в прикладных работах, связанных с применением вычислительной техники. Между тем при решении практических задач методом вычислительного эксперимента возникают новые трудные математические задачи, связанные с изучением моделей, с разработкой эффективных вычислительных алгоритмов нового типа, учитывающих распараллеливание, векторную и конвейерную обработку и т. д. Необходимо создавать библиотеки стандартных алгоритмов на новой методической основе, пакеты прикладных программ для различных классов задач.

Огромная деятельность по развитию средств вычислительной техники и их применению развернута за рубежом: в США, Европе, Японии. В США, например, создана ЭВМ «Крэй-1» для расчета задач динамики вязкой жидкости с быстродействием 20—140 млн операций в секунду.

Основной принцип создания в Японии ЭВМ пятого поколения состоит в сосредоточении усилий на разработке математического обеспечения специального содержания для решения научно-технических задач. Второй принцип: не задачи «тащить» к машине, а машину — к задачам, т. е. адаптировать ЭВМ вместе с математическим обеспечением к определенным классам задач. Супер-ЭВМ планируется использовать не только для вычислительных работ, но и в других задачах, где требуется «большой интеллект» (обработка текстов, ассоциативный информационный поиск для принятия решений в сложных многофакторных ситуациях и при неполной информации и т. д.). Широким фронтом идет поиск новых архитектурных решений и разработка новых алгоритмов.

Наряду с супер-ЭВМ и ЭВМ общего назначения развивается производство мини- и микрокомпьютеров. Очень быстро растет производство персональных компьютеров — портативных машин с большой периферией и быстродействием от сотни тысяч до нескольких миллионов операций в секунду; сейчас в США выпущено около 10 млн таких компьютеров. Персональные компьютеры, среди которых различают домашние, учебные и профессиональные, используются для автоматизации научных и технических расчетов, проектных работ, для оборудования автоматизированного рабочего места учащегося, программиста, экономиста, плановика, бухгалтера, инспектора, руководителя и др.

Трудно переоценить роль ЭВМ и в решении все усложняющихся задач информационного характера. Говорят, что современному ученому порой проще самому повторить уже выполненное кем-то научное исследование, чем искать сообщение о нем в научных публикациях и отчетах. Поэтому сейчас идет работа над созданием на основе ЭВМ так называемых банков данных — своеобразных хранилищ информации, обеспечивающих автоматизированный поиск нужных сведений и необходимую их обработку.

Разумеется, возникающие при этом задачи по своей постановке и по методам решения совершенно отличны

от тех, которые характерны для расчетов течений плазмы и облучения термоядерных мишеней, хотя могут решаться на тех же вычислительных машинах. В этом нет ничего удивительного, и чтобы разъяснить кажущийся парадокс, стоило бы вновь напомнить уже отмечавшееся выше обстоятельство, которое нередко ускользает от внимания неспециалистов. Сама по себе ЭВМ — все эти шкафы с электроникой, магнитные диски и ленты для записи информации, печатающие, рисующие устройства и пр.— является, если можно так выразиться, предметом неодушевленным. «Душа» же, точнее, «мозг» ЭВМ — это программное обеспечение, т. е. набор «понятных» машине инструкций и правил. Выполняя их, она по заданным входным данным даст ответ на поставленную задачу.

Программное обеспечение задач разного характера базируется на соответствующих математических моделях и, в свою очередь, стимулирует развитие этих методов.

Вычислительный эксперимент в настоящее время все шире используется при решении технологических задач. Приведем несколько примеров.

Первый пример связан с лазерно-плазменной обработкой металлов. Существуют ставшие уже традиционными лазерная и плазменная обработка материалов. В последние годы появилось новое техническое направление: лазерно-плазменная обработка. При такой обработке достигаются высокие (порядка нескольких десятков тысяч градусов) температуры плазмы и на обрабатываемые материалы воздействуют как лазерное излучение, так и ионные потоки, идущие из плазмы. Если металл обрабатывается в атмосфере азота, то высокоэнергетические ионы азота внедряются в металл. При этом создается нитридный слой толщиной порядка 100 мкм. В результате микротвердость и износоустойчивость стали повышается в несколько раз.

Картина процесса оказывается следующей. На металл падает лазерное излучение. При этом в газе происходит оптический пробой и образуется плазма, которая впоследствии расширяется, поглощая лазерное излучение. Именно эта плазма воздействует на металлическую поверхность. При давлении азота, не превышающем 50 атм поверхности мишеней разрушаются лазерным излучением, так как образующаяся в этих случаях плазма недостаточно плотна, чтобы экранировать их от излучения. С целью изучения этих процессов в Институте прикладной математики был выполнен вычислительный экспе-

римент, использовавший данные натурного эксперимента, проведенного в Институте металлургии АН СССР.

Решение этой задачи потребовало построения сложной математической модели и применения эффективных вычислительных алгоритмов. Оказалось, что при повышении давления до 100 атм вблизи поверхности образуется относительно холодная зона. В отдаленных от поверхности слоях плотная плазма не пропускает лазерное излучение, и тепловое воздействие на металл осуществляется только за счет собственного излучения плазмы, интенсивность которого в несколько раз ниже исходной. Именно в этом случае образуется обладающий повышенной твердостью нитридный слой.

Однако повышение давления до 100 атм вызывает значительные технологические трудности. Поэтому в процессе математического моделирования была поставлена задача найти режимы, при которых мягкое воздействие на металл происходило бы при пониженном давлении. Расчеты показали, что этот режим связан с формой импульса лазерного излучения. Оказывается, если мощность импульса выбрать не постоянной, а снижать по некоторому закону, то упрочнение металла можно осуществлять и при давлении азота 30 атм. Использование этого результата математического моделирования открывает возможность вести лазерно-плазменную обработку при достаточно удобных с технической точки зрения начальных давлениях.

Вычислительный эксперимент сегодня все шире применяется при решении задач, связанных с созданием компьютеров.

Основу элементной базы современных ЭВМ составляют монокристаллы, к параметрам которых предъявляются очень высокие требования. Самый распространенный способ выращивания монокристаллов — метод Чохральского. В тигель закладывается исходный материал в твердом состоянии и нагревается до расплава. В расплав опускают затравку, при этом тигель и затравку вращают в одну или в разные стороны, и растущий монокристалл медленно вытягивается из расплава. Проблема состоит в том, чтобы получить однородный по распределению примесей и по механическим свойствам монокристалл. В результате вычислительного эксперимента было достигнуто более полное понимание физики процесса, что, в свою очередь, привело к техническим решениям, позволяющим усовершенствовать этот процесс.

Еще один пример. В настоящее время оперативно ведутся работы по созданию вычислительных машин большой мощности. При этом возникает целый ряд технологических трудностей, едва ли не главная из которых — перегрев микроэлементов, До сих пор расчеты проводились лишь для отдельных частей больших интегральных схем. В настоящее время появилась возможность провести расчеты пространственно-временного распределения температуры в плате ЭВМ. Провести эти сложные тепловые расчеты позволяют современные ППП. Очень полезны оказываются они и при исследовании различных видов сварки, лазерной обработки металлов и других процессов.

На первый взгляд в создании и развитии методов для решения задач, связанных с поиском информации в электронной памяти ЭВМ, были бы полезны аналогии с работой человеческого мозга, с устройством механизмов человеческой памяти. К сожалению, эти механизмы изучены не столь подробно, чтобы служить безотказными поставщиками аналогий. При решении задач информационного характера исследователям зачастую приходится продвигаться вперед на ощупь. И каждый успех на этом пути позволяет со все большим основанием надеяться на то, что когда-нибудь, возможно, психологи станут искать в выводах математиков пищу для аналогий с принципами работы механизмов человеческой памяти, а алгоритмы поиска информации послужат математической моделью этих механизмов. И если модель будет признана удачной, она станет совершенствоваться в дальнейших вычислительных экспериментах, приближая науку к разгадке тайн живого.

Это, конечно, не прогноз, а всего лишь предположение, но сквозящая в сказанном мысль не подлежит сомнению: методологии вычислительного эксперимента суждено завоевывать все новые области научного исследования.

ЭВМ перестали быть атрибутом лишь научно-исследовательских учреждений. Последние достижения в области вычислительной техники, прикладной математики, программного обеспечения стали активно внедряться на промышленных предприятиях.

Конвейеры, автоматические линии на производстве известны сравнительно давно, но они рассчитаны на массовый выпуск продукции огромными партиями. В то же время при том многообразии запросов, которые предъ-

являются к промышленности современной жизнью, необходимы и производства с мелкосерийной и индивидуальной продукцией. Здесь трудно рассчитывать на автоматические линии — слишком много времени и средств будет тратиться на переналадку станков. Ориентироваться на ручное производство при остром дефиците квалифицированных рабочих-станочников также не приходится. Здесь нужны принципиально новые подходы.

Так возникло понятие «гибкого автоматизированного нроизводства». Оно подразумевает прежде всего технологическую гибкость, т. е. способность оперативно перестраивать производство и на тех же станках обеспечивать выпуск нового ассортимента. Оснащается оно станками с индивидуальными ЭВМ, в его состав входят также автоматические транспортно-складские системы, системы диагностики оборудования и т. д. Эффективная работа всего этого комплекса возможна, только если будут автоматизированы все звенья цепи от конструктора до оператора, управляющего оборудованием. А для этого необходимо создание обширного математического обеспечения, которое свяжет весь комплекс воедино, позволит согласованно работать всем его частям.

Именно такая задача — создание системы комплексной автоматизации проектно-конструкторских работ и изготовления изделий в условиях опытного производства на основе использования отечественного оборудования была поставлена перед коллективом Института атомной энергии им. И. В. Курчатова. Разработка автоматических принципов работы этой системы и воплощение этих принципов в математическом обеспечении было поручено Институту прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. Творческий коллектив двух институтов, взявшийся за эту работу, стремился к выработке решений, которые могут найти широкое применение и в других институтах и конструкторских бюро.

Как обстоят дела сегодня? Создан и хорошо показал себя в деле демонстрационный комплекс, позволивший проверить основные идеи и решения, понять трудности и выбрать пути их преодоления. Эта система дает возможность представить себе производство будущего.

Конструкторское бюро. Здесь нет привычных кульманов, рулонов ватмана, кальки. Конструктор удобно расположился в кресле перед экраном, напоминающим телевизионный. Поступил заказ на срочное изготовление новой детали. По команде, заданной с пульта, на экране

возникает вызванное системой из архива изображение геометрического тела, похожего на требующуюся деталь. Световым пером конструктор подгоняет размеры, подправляет конфигурацию — чертеж готов. Нет нужды тратить время на стирание ошибочных линий, вычерчивание стандартных узлов — это автоматически делают специальные устройства и программы. Нажата кнопка — и чертеж оказался на экране у технолога. Снова краткий диалог с ЭВМ, которая предлагает свои советы, но безоговорочно соглашается с решениями специалиста. Так производится выбор станка, инструмента, расчет режима обработки и т. д. Снова указание ЭВМ — и чертеж с экрана технолога направляется в микропроцессор станка с числовым программным управлением, где он «преобразуется» в программу изготовления детали, созданной человеком в соавторстве с машиной.

Масштабы внедрения ЭВМ в научные исследования, в народное хозяйство страны все возрастают. Однако на этом пути еще имеются трудности.

Обычно в качестве основного препятствия называют отсутствие достаточно быстродействующих вычислительных машин. Это, конечно, существенный фактор, однако он не является единственным и даже определяющим. Сейчас у нас в стране, в частности в Академии наук СССР, намечен и проводится в жизнь ряд мероприятий по созданию высокопроизводительных ЭВМ.

Однако, помимо технической стороны дела, большое значение имеет вопрос о том, как наиболее эффективно использовать эту вычислительную технику. Можно с уверенностью сказать, что даже тот парк ЭВМ, которым мы сейчас располагаем, способен обеспечить существенно более высокий уровень научных исследований. Причин здесь несколько.

Применение ЭВМ в любой области науки тем эффективнее, чем совершеннее ее математические модели. Наибольший прогресс по части внедрения методов вычислительного эксперимента достигнут в физических исследованиях. Это не случайно, так как здесь применение математических моделей имеет давние традиции. Другие отрасли наук в меньшей степени подготовлены к тому, чтобы взять на вооружение это новое мощное средство теоретического анализа. Нужно вести большую работу по совершенствованию имеющихся и созданию новых математических моделей в химии, биологии и других науках и особенно в экономике.

Еще одно обстоятельство. Широкая математизация знаний не у всех вызывает энтузиазм. Привыкнув работать по старинке, некоторые научные работники неодобрительно встречают новую технику, несущую дополнительные хлопоты и заботы. Порой наблюдается и противоположная тенденция. Иметь ЭВМ — престижно, и иной руководитель спешит обзавестись машиной, не подготовив почву для ее использования. Вот и простаивает или работает в полсилы дорогая техника, которой, быть может, так не хватает в другом месте.

Встречается порой и неправильное понимание роли ЭВМ. Никакая вычислительная техника не способна, как наивно полагают некоторые, подменить собою творческую мысль ученого, конструктора, организатора производства. ЭВМ — всего лишь орудие, пусть очень мощное, но орудие. Она позволяет лучше, быстрее, качественнее решить поставленную перед ней задачу. Но сама постановка задачи — прерогатива человека, владеющего вычислительной техникой. Прежде всего он должен быть хорошим специалистом своего дела. Обращаясь за помощью к ЭВМ, он должен ясно понимать, что же он от нее ожидает, знать особенности математической постановки решаемых им задач, представлять возможности машины.

Вообще проблема кадров, способных квалифицированно применять современную вычислительную технику в науке, народном хозяйстве, стоит очень остро, и решать ее нужно без промедления.

Для этого прежде всего необходима определенная перестройка высшего образования. Причем изменение учебных программ должно затронуть не только подготовку будущих математиков, а в еще большей степени обучение представителей нематематических специальностей (химиков, биологов, медиков, экономистов и т. д.). Будущие специалисты в этих областях науки и практики должны осваивать язык математики, становящийся сейчас междисциплинарным, чтобы уметь потом формулировать на нем свои задачи.

Язык математики... Это словосочетание с некоторых пор стало расхожим, общепонятным. Между тем при всей своей общепонятности оно способно ввести в заблуждение. Это предупреждение стоит разъяснить подробнее.

Тот, кто пытался разбираться в структуре математики, знает, что в основе каждой математической теории

лежит свод аксиом — истин, принимаемых без доказательства. Из аксиом логическим путем выводятся теоремы — утверждения, подлежащие доказательству. Доказать теорему — значит построить этот путь, ведущий к ней. Каждая математическая теория фактически представляет собой совокупность теорем.

Применение математических выводов на практике обусловлено интерпретацией теорем и аксиом. Есть, например, в геометрии аксиома: через любые две точки можно провести прямую и притом только одну. Точки можно интерпретировать как крохотные пятнышки на листе бумаги, прямую — как след, оставленный на бумаге карандашом, скользнувшим вдоль линейки. Линейка при этом действительно может быть расположена лишь единственным образом.

Физик же, привыкший объединять пространство и время в единую четырехмерную сущность, истолковывает точку как событие — нечто характеризующее некоторую точку пространства в некоторый момент времени, а прямую — как некоторое равномерное прямолинейное движение. Вышеупомянутую геометрическую аксиому физик толкует так: выйдя из некоторой точки пространства в определенный момент времени, мы сможем попасть в другую точку пространства в назначенный последующий момент времени в результате одного-единственного равномерного прямолинейного движения.

У химика геометрические аксиомы могут найти свое толкование, у биолога и экономиста — свое. Но всякий раз, строго оговорив интерпретацию аксиом, специалист может уверенно распространять ее на теоремы, выведенные из аксиом. Переформулируя их в рамках принятой интерпретации, указывая, что подразумевается, скажем, под точками и прямыми, специалист получает утверждения о предмете своих занятий, зачастую далеко не очевидные прежде.

Понятно, что исследователи, берущие на вооружение математику, заинтересованы в том, чтобы арсенал математических теорем был как можно обширнее. И огромной ценностью обладает труд математиков, которые выводят все новые теоремы из аксиом, обогащая сокровищницу точного знания, где языком математики описан господствующий в природе порядок вещей.

Но математика — это не только язык для описания, но и мощный инструмент для совершенствования окружающего мира. Каждый школьник вместе с первым сво-

им учебником математики получает еще и задачник. Из пункта А в пункт В отправляется путешественник... В бассейн по трубам втекает вода... От учителя школьник узнает алгоритмы для решения этих задач. И уже на этих транспортно-водопроводных примерах ему становится ясно, что математика — это средство решения разнообразных практически важных проблем.

Эта истина особенно справедлива для вычислительной математики, в которой преобладают не теоремы, а именно алгоритмы. Разумеется, здесь весьма существенно знание языка математики, таких ее разделов, как линейная алгебра, теория дифференциальных уравнений и т. д. Не будет преувеличением сказать, что в современной вычислительной математике так или иначе находит применение многое из аппарата математики классической. Но все созданные в классической математике теоремы нужны в вычислительной для того, чтобы обслуживать алгоритмы. И если математик-классик, рассматривая задачу, доказывает, что ее решение существует и единственно, математик-вычислитель должен это решение найти, должен разработать оптимальный алгоритм, позволяющий это решение получить.

Практика — исследовательская и народнохозяйственная — ставит проблемы перед математиком-вычислителем, практика предъявляет и свои критерии качества к решениям полученных проблем. Наряду с этими двумя факторами, определяющими для вычислительного эксперимента, необходимо упомянуть и третий — фактор времени. Проблемы, для решения которых проводятся вычислительные эксперименты, как правило, не могут ждать последующих поколений, как это бывало в других областях математики. Предельно сжатые сроки диктуются здесь порой соображениями высшей, государственной важности.

Вспомним в этой связи о И. В. Курчатове, М. В. Келдыше, С. П. Королеве и их соратниках, которые в условиях критической ситуации, когда отступать было некуда, когда история отпустила им очень мало времени, создавали атомное и ракетное оружие, чтобы отвести от нашей Родины угрозу со стороны империализма.

Специфика вычислительного эксперимента обусловливает особые требования психологического характера к тем, кто посвящает себя этой бурно развивающейся области современной математики. Какие же качества личности здесь особенно ценны? Увлеченность. Способность

сосредоточиться на проблеме. Работоспособность. Очень важно, чтобы человек не боялся черновой работы. Тот, кто привык к любой работе, обладает большей устойчивостью и оказывается незаменимым при решении сложных задач. Отсюда и доверие к такому человеку, и хорошие перспективы его научного роста. Притом тот, кто начинает с малого, но работает настойчиво и целеустремленно, со временем превосходит тех, кто гнался за немедленным успехом — опыт не раз доказывал эту истину.

Очень важна способность довести до конца любое начатое дело и взять на себя ответственность за его результаты. На всю идеологию вычислительного эксперимента накладывает отпечаток понимание того, что каждая задача должна быть доведена до численного ответа и этот ответ должен быть проверен на практике. Нередко на пути к решению встают трудные, на первый взгляд неприступные барьеры. Их преодоление требует огромного напряжения, однако успех в таких ситуациях также немал — он резко, скачком, повышает квалификацию исследователя.

Математик, решающий ту или иную задачу средствами вычислительного эксперимента, работает в тесном взаимодействии со специалистами из других областей науки и техники, поставившими эту задачу. Он должен понимать их запросы и, значит, свой результат представить в виде, удобном для заказчиков. Успеху дела при этом очень способствует такое качество, как коммуникабельность, умение находить общий язык с представителями самых разных специальностей, людей самых разных темпераментов, короче говоря, способность к коллективной работе. Такая работа имеет свои трудности, но, с другой стороны, у нее есть и свои достоинства. Перекрестный контроль, здоровая конкуренция приводят к взаимообогащению членов научного коллектива и к значительному ускорению темпов исследования. Совместная работа двух ученых нередко позволяет получать результаты не в два, а в три-четыре раза быстрее, чем если бы они работали поодиночке. Происходит своеобразное нелинейное взаимное усиление интеллектов.

Требования к специалисту по вычислительному эксперименту, как видим, высоки. Но и сама специальность заманчива. Тот, кто владеет ею, никогда не останется без интересной работы и всегда найдет дело по

душе: ведь к вычислительному эксперименту, к этому современному средству научного исследования сегодня обращаются все более разнообразные отрасли науки и техники, выдвигая сложные актуальные задачи.

Решение таких задач — работа важная и почетная.

РЕКОМЕНДУЕМ ПРОЧИТАТЬ

О других задачах, в решении которых важную роль играет вычислительный эксперимент:

Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестн. АН СССР. 1979. № 5.

Самарский А. А. Что такое вычислительный эксперимент? // Что такое прикладная математика. М.: Знание, 1980.

Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике. М.: Знание, 1980.

Подробнее о важных задачах, связанных с созданием пакетов прикладных программ:

Карпов В. Я., Корягин Д. А. Пакеты прикладных программ. М.: Знание, 1983.

Для более подготовленных читателей, интересующихся вычислительным экспериментом в технологии, микроэлектронике, физике плазмы, экономике и других областях будут интересны сборники:

Математическое моделирование. 1. Процессы в нелинейных средах. 2. Математические модели роста кристаллов. 3. Модели в экологии и экономике. М.: Наука, 1986.

СИНЕРГЕТИКА — ТЕОРИЯ САМООРГАНИЗАЦИИ

(идеи, методы, перспективы)

С. П. КУРДЮМОВ, Г. Г. МАЛИНЕЦКИЙ

Почему целое может обладать свойствами, которыми не обладает ни одна из его частей? В чем человек видит сложность окружающего его мира? Почему, зная фундаментальные физические законы, мы не можем предсказывать поведение простейших биологических объектов? Как согласовать следующую из классической термодинамики тенденцию к установлению равновесия с переходом от простого к сложному, от низшего к высшему, который мы видим в ходе биологической эволюции?

Еще полтора десятилетия назад эти вопросы относили к компетенции философии. Сейчас они встают в конкретном контексте физических, химических, биологических задач. В их решении все больше помогает теория самоорганизации, или синергетика.

Когда мы говорим о молодой науке, естественно спросить: почему ее не было раньше, что привело к ее возникновению, чем отличается взгляд на мир этой науки от представлений, выработанных раньше? Попробуем ответить на эти вопросы.

Наверное, вы не раз задумывались над поразительным отличием систем, существующих в природе, от тех, что созданы человеком. Для первых характерны устойчивость относительно внешних воздействий, самообновляемость, возможность к самоусложнению, росту, развитию, согласованность всех составных частей. Для вторых — резкое ухудшение функционирования даже при сравнительно небольшом изменении внешних воздействий или ошибках в управлении. Сам собой напрашивается вывод: нужно позаимствовать опыт построения организации, накопленный природой, и использовать его в нашей деятельности. Отсюда вытекает одна из задач синергетики — выяснение законов построения организа-

ции, возникновения упорядоченности. В отличие от кибернетики здесь акцент делается не на процессах управления и обмена информацией, а на принципах построения организации, ее возникновении, развитии и самоусложнении.

При решении задач в самых разных областях от физики и химии до экономики и экологии, создание и сохранение организации, формирование упорядоченности является либо целью деятельности, либо ее важным этапом. Приведем два примера. Первый — задачи, связанные с управляемым термоядерным синтезом. В большинстве проектов самый важный момент — создание необходимой пространственной или пространственно-временной упорядоченности.

Другой пример — формирование научных коллективов, где активная творческая работа большинства сотрудников должна сочетаться с возможностью совместно решать крупные задачи. Такой коллектив должен быть устойчив и быстро реагировать на все новое. Какова оптимальная организация, позволяющая добиваться этого?

Вопрос об оптимальной упорядоченности и организации особенно остро стоит при исследованиях глобальных проблем — энергетических, экологических, многих других, требующих привлечения огромных ресурсов. Здесь нет возможности искать ответ методом проб и ошибок, а «навязать» системе необходимое поведение очень трудно. Гораздо разумнее действовать, опираясь на знание внутренних свойств системы, законов ее развития. В такой ситуации значение законов самоорганизации, формирования упорядоченности в физических, биологических и других системах трудно переоценить.

Другая причина, обусловившая создание синергетики,— необходимость при решении ряда задач науки и техники анализировать сложные процессы различной природы, используя при этом новые математические методы.

Классическая математическая физика (т. е. наука об исследовании математических моделей физики) имела дело с линейными уравнениями. Формально это уравнения, в которые неизвестные входят только в первой степени. Реально они описывают процессы, идущие одинаково при разных внешних воздействиях. С увеличением интенсивности воздействий изменения остаются количественными, новых качеств не возникает. Область применения линейных уравнений необычайно широка. Она

охватывает классическую и квантовую механику, электродинамику и теорию волн. Методы их решения, разрабатывавшиеся в течение столетий, обладают большой общностью и эффективностью.

Однако ученым все чаще приходится иметь дело с явлениями, где более интенсивные внешние воздействия приводят к качественно новому поведению системы. Здесь нужны нелинейные математические модели. Их анализ — дело гораздо более сложное, но при решении многих задач он необходим. Это приводит к формированию широкого фронта исследований нелинейных явлений, к попыткам создать общие подходы, применимые ко многим системам (к таким подходам относится и синергетика).

Современная наука все чаще формулирует свои закономерности, обращаясь к более богатому и сложному миру нелинейных математических моделей.

Новым инструментом изучения нелинейных моделей стал вычислительный эксперимент. Ученые получили возможность «проиграть» модель изучаемого процесса во многих вариантах, используя мощные ЭВМ. И что особенно важно — вычислительный эксперимент может привести к открытию новых явлений.

Широкое использование ЭВМ показало, что ни быстродействие вычислительных машин, ни рост объема расчетов не являются панацеей от всех бед, сами по себе они не дают понимания изучаемых нелинейных задач.

Нужны понятия, подходы, обобщения, которые отражают важнейшие общие черты исследуемых явлений и помогают построить их адекватные математические модели. Все это также стало мощным стимулом развития синергетики.

Взгляды, вырабатываемые современной наукой при решении многих задач, иногда оказываются созвучными размышлениям ученых и философов, живших много веков назад, в частности близкими к мыслям и воззрениям, характерным для философских течений Древнего Востока. Зачастую совпадает не только общий подход, но и конкретные детали. Возникает вопрос: почему синергетика, опирающаяся на достижения современной науки, на диалектико-материалистическое мировоззрение, приходит к выводам, сделанным тысячелетия назад?

Первая причина — общность предмета анализа. Изучаются сложные самоорганизующиеся системы, причем

акцент делается на внутренние свойства как на источник саморазвития.

Вторая причина — новое отношение к проблеме целого и части. Для философских школ Древней Греции характерно предположение, что часть всегда проще целого, что, изучив каждую из частей, можно понять свойства целого. И естествознание — вплоть до последних десятилетий — этот подход вполне устраивал. Однако сначала общественные науки, а потом и точные пришли к выводу о необходимости целостного, системного анализа многих объектов.

Синергетика, как правило, имеет дело с процессами, где целое обладает свойствами, которых нет ни у одной из частей. Целое в таких системах отражает свойства частей, но и части отражают свойства целого. Здесь нельзя утверждать, что целое сложнее части, оно совсем другое.

Третье. Имея дело со сложными, жизненно важными для нас объектами (например, экологическими системами), приходится действовать предельно осторожно. Успех здесь возможен только в том случае, если мы знаем внутренние свойства системы. Отсюда стратегия — действие, сообразуемое с законами природы, разумная соразмерность с естественным ритмом, с постоянно меняющимися условиями.

Наверное, нетерпеливый читатель несколько разочарован: авторы никак не хотят просто и конкретно сказать, чем же занимается синергетика.

Нам кажется, здесь уместно вспомнить рассуждение Гегеля о том, что ни одно определение не кажется содержательным, пока не ясен смысл входящих в него понятий (для нас таким понятием станет понятие структуры). Когда же смысл понят, определение становится просто ненужным.

Ответ на вопрос, чем занимается синергетика, каков ее предмет и перспективы, неоднозначен. И нам ничего не остается, как высказать свою точку зрения.

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И МЕТОДЫ ЕГО РЕШЕНИЯ

Наверное, читателя удивило название этой главы. И действительно, речь здесь пойдет о линейных уравнениях в частных производных и методах их анализа — вещах, на первый взгляд никак не связанных с интере-

сующими нас нелинейными процессами в сложных системах. Нам кажется, что смысл этой главы очень точно отражает фраза в одном из известных курсов математической физики: «Использование математики в науке — это использование языка, при помощи которого мы можем устанавливать соотношения слишком сложные, чтобы их можно было кратко описать обычным языком». Роль этого языка трудно переоценить. Именно из-за того, что он есть, мы можем за несколько лет изучить в школе законы механики, оптики, электромагнетизма — разделов, на создание которых потребовались столетия интенсивной работы исследователей. Цель этой главы — познакомиться с языком, который используют в синергетике, и прежде всего с уравнениями в частных производных.

Эти уравнения — инструмент исследования процессов, в которых изучаемые величины изменяются не только во времени, но и в пространстве. Разрабатываться он начал два века назад в связи с задачами гидродинамики и механики сплошных сред. Наиболее простыми и детально изученными являются линейные уравнения в частных производных. С них мы и начнем.

Одним из самых важных в математической физике является уравнение теплопроводности; оно описывает распространение тепла, проникновение магнитного поля в плазму, диффузию одного вещества в другое, поведение нейтронов в ядерном реакторе и еще целый круг различных процессов.

Представим себе длинный тонкий стержень постоянной плотности, длиной l, площадь сечения которого S, теплоизолированный с обоих концов. Нас интересует, как меняется температура в каждой точке стержня со временем, если сначала он нагрет неравномерно. Каждой из этих точек удобно поставить в соответствие ее координату x $(0 \leqslant x \leqslant l)$, т. е. расстояние от нее до левого конца стержня (рис. 1). Тогда наша задача сводится к тому, чтобы узнать, каково будет пространственное распределение (профиль) температуры на каждый момент времени. Его можно описать функцией двух переменных $T(x, t)$. Здесь x — координата точки отрезка, t — время, а $T(x, t)$ — температура в точке x в момент t. Выделим маленький участок стержня длиной Δx и посмотрим, как изменится его энергия за небольшой временной интервал Δt. Пусть теплоемкость стержня на единицу длины равна c, тогда энергия этого участка

$E \approx cT(x, t)\Delta x$. Равенство приближенное, потому что мы считали, что температура всего участка постоянна и равна $T(x, t)$. Строго говоря, это не так. Однако чем меньше будет Δx, тем точнее это равенство выполняется. Следовательно, за время Δt изменение энергии будет равно

$$\Delta E = [cT(x, t+\Delta t) - cT(x, t)]\Delta x. \qquad (1)$$

Энергия меняется за счет разности тепловых потоков через концы участков $W(x-\Delta x/2, t)$ и $W(x+\Delta x/2, t)$. Тепловой поток $W(x, t)$ — это количество тепла, проходящее через сечение стержня в точке x за единицу времени в момент t. Следовательно,

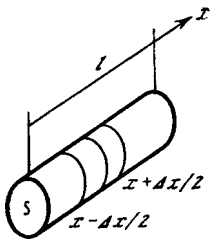


Рис. 1. Нагреваемый стержень

$$\Delta E = [W(x-\Delta x/2, t) - W(x+\Delta x/2t)]\,\Delta t. \qquad (2)$$

Однако сам поток зависит от температуры по закону Фурье

$$W(x, t) = -kS[T(x+\Delta x/2, t) - T(x-\Delta x/2, t)]/\Delta x,$$

который говорит, что тепло тем быстрее переходит от горячего тела к холодному, чем больше разница их температур; k в этом выражении — коэффициент теплопроводности. Устремим Δt и Δx к нулю и обозначим:

$$T_t(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(x, t+\Delta t) - T(x, t)}{\Delta t}$$

— частная производная температуры по времени;

$$T_x(x, t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x+\Delta x, t) - T(x, t)}{\Delta x},$$

$$T_{xx}(x, t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T_x(x+\Delta x, t) - T_x(x, t)}{\Delta x}$$

— соответственно первая и вторая частные производные температуры по пространству.

Учитывая, что все рассуждения, отнесенные к точке (x, t), можно отнести и к любой другой точке стержня, придем к уравнению теплопроводности

$$T_t = aT_{xx}, \quad a = kS/c. \qquad (3)$$

Но чтобы выяснить, каково распределение температуры в момент t, надо знать, каким оно было сначала, или, как говорят, задать начальные условия: $T(x, 0) = T^0(x)$;

нужно также использовать информацию о том, что концы стержня теплоизолированы (это граничные условия). Добавив все это к (3), дадим постановку задачи математической физики в законченном виде:

$$
\begin{aligned}
&T_t = aT_{xx}, \\
&T(x, 0) = T^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\
&T_x(0, t) = T_x(l, t) = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Если бы мы с вами были студентами и на экзамене по математической физике вывели уравнение теплопроводности так, как это сделано выше, то рассчитывать больше чем на тройку нам бы не пришлось: мы не обосновали переход к пределу, перейдя от приближенных равенств (1) и (2) к (3) — по совершенно иным меркам нашим рассуждениям не хватает строгости. Однако для наших целей этого достаточно: мы знаем законы, используемые при выводе уравнения теплопроводности, сделанные при этом допущения и схему рассуждений.

Простейшие решения можно без труда получить, зная, что речь идет о передаче тепла. В самом деле, если поток тепла через торцы стержня понятно, что в конце концов температура перестанет меняться ($T_t = 0$) и станет однородной по всей длине стержня ($T_{xx} = 0$). Установившаяся температура T зависит от количества тепла, сообщенного стержню вначале.

Интуитивно ясно, что в конце концов независимо от начальных данных произойдет именно на такое решение. Однако во многих задачах важно выяснить не только, что получится, но и проследить всю динамику процесса теплопередачи.

Представим, что мы воспользовались ЭВМ, с помощью которой можно решать такие уравнения, задали начальное распределение и получили температуры на разные моменты времени (рис. 2)[1]. Видим, что максимальная температура уменьшается, а ширина профиля растет[2], температура выравнивается.

Но это только начало. Ведь мы рассмотрели только один начальный профиль температуры $T^0(x)$. Что же происходит при других начальных данных? Для ответа

---

[1] На этом и последующих рисунках не указаны единицы измерения величин, поскольку нас в первую очередь интересует качественная картина процесса, а не его количественные параметры.

[2] Полуширина профиля температуры — ширина на уровне 0,5 T_{max}.

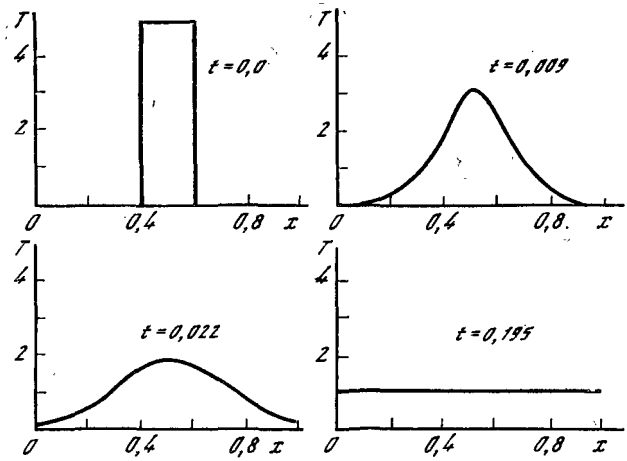


Рис. 2. Решение линейного уравнения теплопроводности с начальным распределением $T^0(x)$

на этот вопрос заметим, что если $T_1(x, t)$ — решение задачи (4) с начальными данными $T_1^0(x)$, а $T_2(x, t)$ — решение, соответствующее начальным данным $T_2^0(x)$, то $T_3(x, t) = T_1(x, t) + T_2(x, t)$ также будет решением (4) с начальным условием $T_3^0(x) = T_1^0(x) + T_2^0(x)$, что легко проверить.

С этим замечательным фактом, названным принципом суперпозиции (наложения), связано большинство достижений в изучении явлений, которые можно описать линейными уравнениями. Крупнейший американский физик-теоретик Р. Фейнман восторженно писал о его значении в атомной физике и теории элементарных частиц: «Я готов биться об заклад, что принцип суперпозиции будет стоять в веках».

Воспользуемся этим принципом. Пусть у нас есть набор решений $T_0(x, t)$, $T_1(x, t)$, ..., $T_n(x, t)$, соответствующих начальным данным $T_0^0(x)$, $T_1^0(x)$, ..., $T_n^0(x)$. Если начальные данные в интересующем нас случае можно представить в виде суммы

$$T^0(x) = c_0 T_0^0(x) + c_1 T_1^0(x) + \ldots + c_n T_n^0(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m T_m^0(x),$$

то можно найти и решение этой задачи:

$$T(x, t) = \sum_{m=0}^{n} c_m T_m(x, t). \qquad (5)$$

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы получить достаточно большой набор функций $T_0^0(x), \ldots, T_n^0(x)$, из которых можно было бы «сшить» любое начальное распределение и научиться по $T^0(x)$ находить числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

Чтобы построить набор решений $T_0(x, t), T_1(x, t), \ldots, T_n(x, t)$, применим другой классический метод — метод разделения переменных. Нас будут интересовать решения (3), удовлетворяющие граничным условиям $T_x(0, t) = T_x(l, t) = 0$ (ограничений на начальные данные мы пока не накладываем). Будем искать их в виде $T(x, t) = g(t) f(x)$.

Подставляя это соотношение в уравнение (3), имеем

$$g_t(t) f(x) = a f_{xx}(x) g(t).$$

Разделив на $ag(t) f(x)$, получим

$$\frac{g_t(t)}{ag(t)} = \frac{f_{xx}(x)}{f(x)} = -\lambda. \tag{6}$$

Поскольку $g(t)$ не зависит от x, $f(x)$ — от t, то λ — постоянная, не зависящая ни от x, ни от t. Равенство (6) может быть записано как два дифференциальных уравнения:

$$f_{xx} + \lambda f = 0, \qquad g_t + a\lambda g = 0. \tag{7}$$

Первое уравнение — это уравнение малых колебаний маятника, его решение $f(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x + \varphi)$; решение второго — функция $g(t) = B\exp(-a\lambda t)$. Однако не все эти решения согласуются с краевыми условиями $f_x g|_{x=0} = 0$, $f_x g|_{x=l} = 0$, а лишь такие, у которых $\varphi = 0$, $\sqrt{\lambda} = \pi n/l$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, мы получили бесконечное множество решений

$$T_n(x, t) = g_n(t) f_n(x) = \exp(-a\pi^2 n^2 t/l^2)\cos(\pi n x/l), \tag{8}$$

соответствующих начальным условиям $T^0(x) = f_n(x)$. Функции f_n называются собственными.

Набор собственных функций f_n является полным: любое непрерывное начальное распределение можно представить в виде ряда Фурье

$$T^0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x), \tag{9}$$

а соответствующее решение уравнения теплопроводности — как сумму:

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(t) f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) f_n(x). \qquad (10)$$

Несколько функций f_n показаны на рис. 3. С ростом n увеличивается число максимумов f_n. Метод, использующий разложение по собственным функциям, с которыми мы только что познакомились, называют методом Фурье. Чем более гладкая функция, чем меньше у нее максимумов, тем быстрее коэффициенты Фурье c_n[3] убывают с ростом n. Вновь обратимся к ЭВМ, которая может дать не только решение нашей задачи для конкретных начальных данных (см. рис. 3), но и значения $C_n(t)$ на разные моменты времени (рис. 4). (Физики иногда называют функции $C_n(t)$ модами или гармониками. Важно отметить, что чем выше номер гармоники, тем быстрее убывает функция $C_n(t)$, и в конце концов, как и должно быть, остается только $C_0(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \bar{T}$, где $\bar{T}$ и есть установившаяся после переходного процесса температура стержня. Обратим внимание еще на одну важную деталь: решение задачи (4) обладает свойством устойчивости: небольшое изменение начальных данных $T^0(x)$ приводит к небольшому изменению решения $T(x, t)$. Мы обсудили случай теплоизолированного стержня. Но иногда бывает нужно изучать и другие задачи, например такие, где на торцах задается определенная температура. Краевые условия, соответствующие этой задаче, $T(0, t)=T_1$, $T(l, t)=T_2$. Математики говорят, что при этом рассматривается первая краевая эадача. Параметры стержня одни и те же в каждом сечении, выделенных элементов в нем нет. Воспользовавшись этим соображением, читатели, наверное, смогут указать, какие распределения температуры устанавливаются в конце концов. В самом деле, можно ожидать, что $T_t=0$, но тогда $T_{xx}=0$. Это означает, что установившийся предел температуры $\bar{T}(x)$ — линейная функция x, а поскольку она должна удовлетворять краевым условиям, то $T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x$. Как происходит выход па это решение, можно выяснить, пользуясь обсуждавшимися выше методами.

[3] Здесь и далее в этой статье c_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, будут обозначать набор чисел коэффициентов Фурье, найденных по начальным данным; $C_n(t)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, — набор функций, зависящих от времени, которые характеризуют динамику процесса.

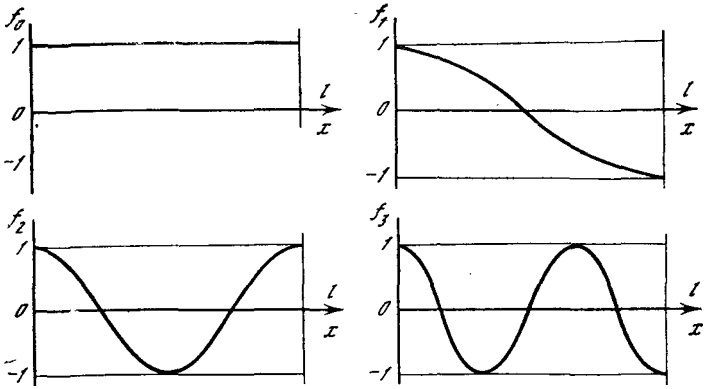


Рис. 3. Первые четыре собственные функции линейной задачи

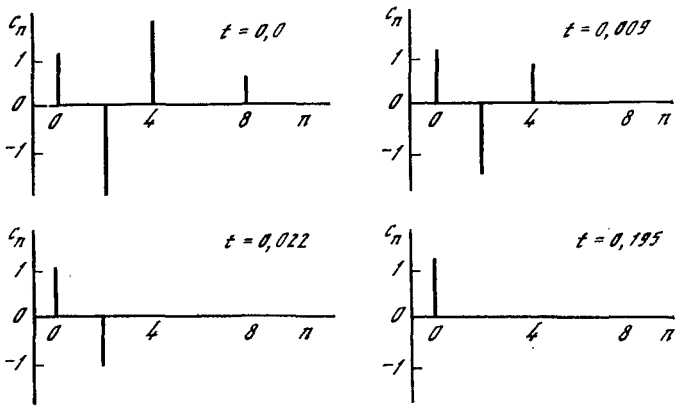


Рис. 4. Коэффициенты ряда Фурье решения уравнения теплопроводности на различные моменты времени

В некоторых случаях стержень может быть очень длинным (или основной интерес вызывают процессы, происходящие на таких характерных временах, на которых влияние торцов несущественно). При этом уравнение теплопроводности изучается в бесконечной области $-\infty < x < \infty$. Эту задачу иногда называют задачей Коши. Иногда важно выяснить ход процессов в окрестности одного из торцов длинного стержня. При этом рассматривается задача в полупространстве.

Ну вот, пожалуй, и все, что нам понадобится из классики.

Обратимся к нелинейным математическим моделям. Начнем с обобщения уравнения теплопроводности. Некоторые процессы в плазме, ряд эффектов в биологических системах и химические реакции на определенной стадии можно описывать уравнением

$$T_t = (k(T)T_x)_x + Q(T). \qquad (11)$$

Это уравнение похоже на уравнение (3). Близок и их смысл. Уравнение (11) можно рассматривать как описание процессов теплопроводности и горения. При этом $T(x, t)$ — температура среды. Член $(\kappa(T)T_x)_x$ описывает теплопроводность, но и сам коэффициент теплопроводности здесь зависит от температуры. Нелинейный источник $Q(T)$ моделирует процесс горения среды. Рассмотрим важный для физики плазмы случай, когда $k(T)$ и $Q(T)$ — степенные функции температуры:

$$k(T) = k_0 T^\sigma, \quad Q(T) = q_0 T^\beta, \; k_0, \; q_0, \; \sigma > 0, \; \beta > 1. \qquad (12)$$

Здесь k_0 и q_0 — постоянные коэффициенты, показатели σ и β определяют скорость роста этих функций с увеличением температуры.

Вновь обратимся к помощи компьютера. На первый взгляд кажется, что картина процесса должна быть такой же, как на рис. 2, с той лишь разницей, что максимальная температура нагретой области из-за наличия источника должна возрастать. Но уже первый расчет дает удивительный результат (рис. 5, *а*).

Сначала максимальная температура падает (момент времени t_2). Но затем она начинает расти (t_3, t_4, t_5). В отличие от «линейного» случая здесь на каждый момент времени можно указать четкую границу между областью, где температура равна нулю, и областью, где она отлична от нуля; эту границу называют конечным тепловым фронтом. Такое поведение обусловлено нелинейностью коэффициента теплопроводности.

Далее фронт доходит до некоторых точек A и B и... останавливается (t_4, t_5 на рис. 5, *а*). Тепло оказывается локализованным в ограниченной области, ее размер обозначен L_f. После этого полуширина нагретой области остается постоянной, а амплитуда (максимальная температура нагретой области) увеличивается. Но этот рост амплитуды тоже необычный: температура возрастает до

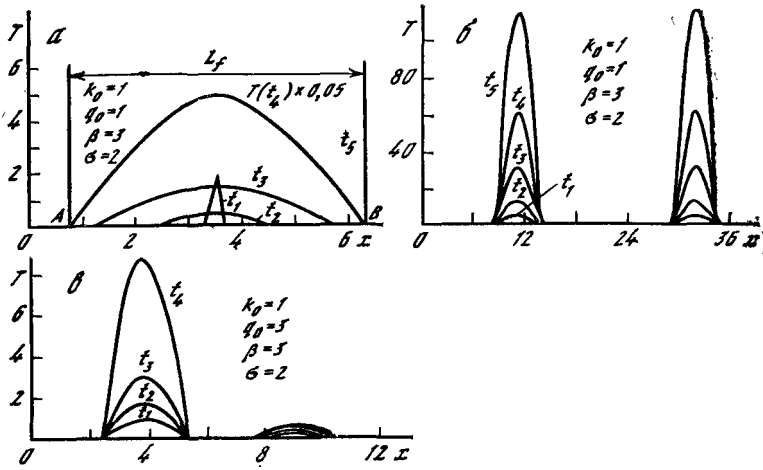


Рис. 5. Тепловые диссипативные структуры

а — формирование диссипативной тепловой структуры (*S*-режим); $t_1 = 0{,}0$; $t_2 = 19{,}59$; $t_3 = 73{,}03$; $t_4 = 74{,}95$; $t_5 = 74{,}96$; *б* — эффект локализации тепла. Две тепловые структуры в нелинейной среде развиваются независимо: $t_1 = 0{,}0$; $t_2 = 3{,}56 \cdot 10^{-2}$; $t_3 = 3{,}93 \cdot 10^{-2}$; $t_4 = 3{,}99 \cdot 10^{-2}$; $t_5 = 4{,}00 \cdot 10^{-2}$; *в* — развивается структура с минимальным временем обострения. Остальная часть профиля «замирает» при $t \to t_f$; $t_1 = 0{,}0$; $t_2 = 0{,}147$; $t_3 = 0{,}220$; $t_4 = 0{,}245$

бесконечности за ограниченное время t_f. Каков же смысл таких режимов? Ведь нигде в природе не наблюдается неограниченный рост величин. Здесь мы имеем дело с идеализацией, типичной для математической физики.

Пусть некоторая сложная система или ее математическая модель (например, система уравнений, описывающая поведение плазмы в определенных условиях) такова, что один из процессов развивается гораздо быстрее всех остальных, которые по сравнению с ним как бы замирают.

За время, характерное для развития этого процесса, остальные величины не успевают существенно измениться. Идеализацией таких процессов и являются режимы с обострением. Конечно, в природе нет ни материальных точек, ни абсолютно твердых тел, ни режимов с обострением. Но только опираясь на эти понятия, мы можем средствами математики изучать природу.

Представление об одном основном, быстро развивающемся процессе широко используется при изучении многих проблем. Приведем выдержку из работы, посвящен-

ной теории эволюции. Естественный отбор признаков, дающих преимущества в ходе развития, приводит к тому, что «сам этот процесс идет со все большей до некоторого предела скоростью — система не просто удаляется от термодинамического равновесия, но удаляется все дальше и с возрастающей скоростью, так как в естественном отборе побеждают более совершенные формы, возникающие быстрее, раньше других»[4]. Возможно, при описании определенных стадий эволюции могут оказаться полезными модели, где есть режимы с обострением.

Эффект локализации тепла — явление, не имеющее аналога в линейных системах. Но это только начало. Мы начали рассматривать нелинейные явления, и здесь нас ждет много неожиданностей[5].

Первый проведенный расчет уже позволяет кое-что предсказать. Если на расстоянии, большем L_f, задать два одинаковых начальных профиля, например таких, как показано на рис. 5, *б* ($t=0$), то они никак не будут влиять друг на друга. Если один из профилей по амплитуде несколько меньше другого, то он просто «замирает» при $t \to t_f$, а второй неограниченно растет (см. рис. 5, *в*). Это типичная картина для режимов с обострением. Поэтому в нелинейной среде, которая описывается уравнением (11), надо рассматривать только самые быстрые процессы с минимальными временами обострения.

Будем теперь менять амплитуду и полуширину начального распределения. К чему это приведет? Расчеты показывают, что изменится время обострения, а величина области локализации и форма той части профиля, где горение идет интенсивно, сохранится! Нелинейная среда «забывает» детали начального распределения, от которого зависит только значение времени обострения t_f. «Забывание» деталей начальных данных характерно для большинства систем, изучаемых синергетикой. В нашей задаче то распределение, которое формируется на стадии

---

[4] *Шноль С. Э.* Факторы, определяющие направление и скорость биологической эволюции // Математическое моделирование биологических процессов. М.: Наука, 1979.

[5] Строго говоря, эффективная локализация возможна и в линейной задаче в полубесконечной области ($0 \leqslant x < \infty$), в которой на нелинейную среду воздействуют извне. Например, на границе ($x=0$) может быть задан подобранный определенным образом температурный режим $T(0, t) = T_1(t)$. Однако в этом случае локализация не является внутренним свойством нелинейной среды.

интенсивного горения, не зависит ни от краевых условий, ни от начальных данных.

Из расчетов следует также, что в пределах области локализации температура растет по одному закону, или, как говорят, горение идет согласованно. Это позволяет ввести здесь понятие диссипативной структуры. Разберемся с этим подробнее.

Начнем с определения структуры, которое дают философы: структура есть упорядоченность (композиция) элементов, сохраняющаяся (инвариантная) относительно определенных изменений (преобразований). Все это есть и у нас: с течением времени и при изменении начальных данных форма профиля температуры на стадии интенсивного горения не меняется.

Но почему «диссипативная структура»? Под диссипацией понимают рассеяние энергии, переход ее из одной формы в другую. Примером могут служить процессы теплопроводности и диффузии. Форма структуры сохраняется из-за совместного действия горения и нелинейной теплопроводности. Если нет диффузии, то нет ни согласованных процессов, ни забывания начальных данных. Рост температуры в каждой точке пространства идет независимо. Мы видели, насколько отличается уравнение нелинейной теплопроводности с источником от линейного уравнения теплопроводности. Там теплопроводность приводила к выравниванию температур, здесь — к формированию структуры.

Выясним, каковы форма диссипативной структуры, длина области локализации L_f и по какому закону растет температура среды. Применим к (11) уже знакомый нам метод разделения переменных, а точнее, одно из его обобщений.

Будем искать решение уравнения (11) в виде

$$T(x, t) = g(t) f(\xi), \quad \xi = x/\varphi(t). \tag{13}$$

Подставив (13) в наше уравнение, получим

$$g(t) = \bar{A}_1 (1 - t/t_f)^{-1/(\beta-1)},$$
$$\varphi(t) = \bar{A}_2 (1 - t/t_f)^{0,5(\beta-\sigma-1)/(\beta-1)} \tag{14}$$

и нелинейное уравнение для определения функции $f(\xi)$:

$$\frac{1}{(\beta-1)\, t_f} f + \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)\, t_f} f_\xi \xi = (f^\sigma f_\xi)_\xi + f^\beta, \tag{15}$$

где $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ — постоянные величины, которые определяются параметрами β, σ, k_0, q_0.

Функция $g(t)$ задает закон роста амплитуды, $\varphi(t)$ — изменения полуширины. Из формул (14) следует, что при $\beta = \sigma + 1$ полуширина профиля температуры $T(x, t)$ остается постоянной. Рис. 5, *а* как раз и иллюстрирует этот вывод.

Функция $f(\xi)$ определяет форму структуры. При $\beta = \sigma + 1$ уравнение (15) можно решить аналитически, т. е. не прибегая к помощи ЭВМ. Решение, описывающее локализованную структуру, таково:

$$f(\xi) = \left[\cos^2(\pi\xi/L_f)\, 2(\sigma + 1)\sigma^{-1}(\sigma + 2)^{-1}\right]^{1/(\sigma+1)}, \qquad (16)$$

где $L_f = \frac{2\pi}{\sigma}\sqrt{\sigma + 1}\sqrt{\frac{k_0}{q_0}}$ и есть та величина области локализации, которую мы хотели предсказать при любых k_0, q_0, σ. Форма структуры и величина L_f совпадают с тем, что дают расчеты (см. рис. 5, *а*).

Из формулы (13) следует, что распределение температуры с течением времени остается подобным себе: оно просто растягивается в определенное число раз вдоль осей x и T. Такие решения получили название автомодельных. Если перевести дословно английский эквивалент этого термина, то получится «самоподобные решения». При исследовании различных уравнений часто используются решения вида $f(x - ct)$, относящиеся к этому же классу, которые описывают бегущие волны. Изучение автомодельных решений, начатое еще в прошлом веке, интенсивно ведется и сейчас. Современные математические методы теории инвариантно-групповых решений позволяют указать все виды автомодельных решений, которые возможны в данной задаче. При различных нелинейных коэффициентах теплопроводности и источниках можно построить 64 типа автомодельных решений.

Принцип суперпозиции не справедлив для нашей нелинейной задачи (11), (12). Действительно, если изменить начальные данные в несколько раз, то это приведет не к умножению решения на постоянную величину, а к процессу, идущему в совершенно другом темпе, с другим временем обострения. Здесь нельзя «сшить» общее решение из известного нам набора частных, как это было в случае линейного уравнения теплопроводности. Так какова же ценность найденного автомодельного решения (14), (16)?

Ответ на этот вопрос следует из проведенных расчетов: любое распределение при $t \to t_f$ выходит на это ре-

шение. И хотя здесь нет принципа суперпозиции, мы знаем, какие структуры возникнут на стадии интенсивного горения. Это глубокий и интересный факт.

До сих пор мы считали параметры задачи постоянными и варьировали лишь начальные данные. Теперь же, наоборот, зафиксируем начальное распределение и будем менять параметры нелинейной среды β и σ. Посмотрим еще раз на автомодельное решение (13), (14). Из него следует, что для $\beta > \sigma + 1$ $\varphi(t) \to 0$ при $t \to t_f$ и что $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to t_f$, если $\beta < \sigma + 1$. В первом случае полуширина распределения температуры должна сокращаться; при этом говорят, что реализуется *LS*-режим с обострением, во втором случае она неограниченно возрастает и мы имеем *HS*-режим. Когда $\beta = \sigma + 1$, полуширина постоянна, наблюдается *S*-режим; так было во всех расчетах, рассмотренных выше. Но нам еще не ясно, описывают ли эти решения стадию интенсивного горения в *LS*- и *HS*-режимах. Ответ вновь дают расчеты, проведенные на ЭВМ (рис. 6). Действительно, если $\beta > \sigma + 1$, то полуширина профиля сокращается, процесс локализован, формируется диссипативная структура. Когда $\beta < \sigma + 1$, наблюдаются тепловые волны, растущие в режиме с обострением. В обоих случаях есть «забывание» деталей начальных данных.

Вот мы и подошли к другой важной идее теории тепловых структур, к идее собственных функций нелинейной среды. Зададим себе вопрос: могут ли в той среде, в которой процессы описываются уравнением (11), существовать более сложные структуры? Например такие, в которых распределение температуры имеет несколько максимумов и остается подобным себе с течением времени.

Поскольку речь идет о подобных себе профилях, ответ на вопрос дает анализ решений уравнения (15). Оказывается, при $\beta > \sigma + 1$ может быть несколько решений, описывающих локализованные структуры. На рис. 7 показаны все возможные решения: f_1, f_2, f_3, f_4. Эти решения симметричны, поэтому здесь приведены только их правые половинки. Функция f_1 определяет форму структуры с одним максимумом. При эволюции большинства начальных профилей $T^0(x)$ образуется одна или несколько простых структур. Форму простой структуры определяет функция f_1.

В среде возможны также тепловые волны растущей амплитуды, сходящиеся к оси симметрии и сохраняющие свою форму (рис. 8). Их называют сложными структура-

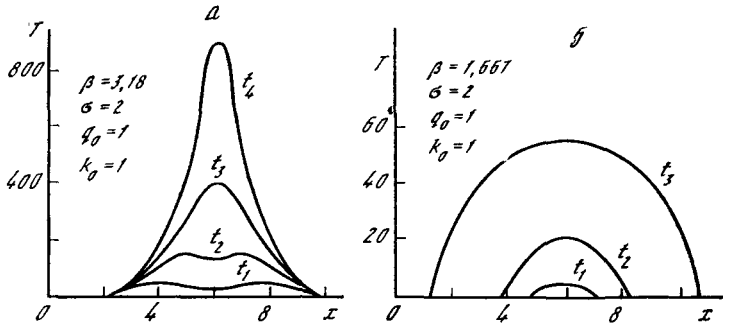


Рис. 6. Тепловые структуры

а — *LS*-режим с обострением. Процесс локализован, полуширина распределения температуры сокращается со временем; $t_1 = 0{,}0$; $t_2 = 2{,}15 \cdot 10^{-4}$; $t_3 = 2{,}38 \cdot 10^{-4}$; $t_4 = 2{,}44 \cdot 10^{-4}$; *б* — тепловые волны растущей амплитуды, *HS*-режим с обострением; $t_1 = 0{,}0$; $t_2 = 0{,}69$; $t_3 = 0{,}875$

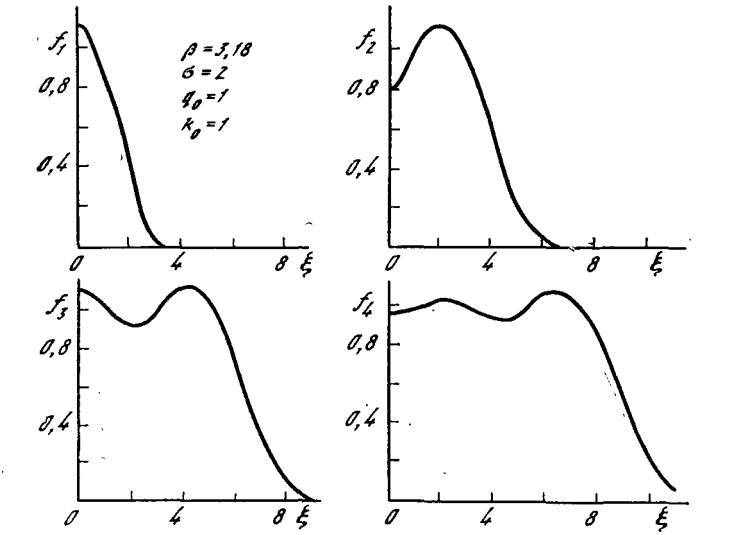


Рис. 7. Собственные функции нелинейной среды

ми. Чтобы возникли сложные структуры, начальные данные должны соответствовать решениям f_2, f_3, f_4 уравнения (15). Отметим, что других типов сложных структур в этой нелинейной среде быть не может. Сложные структуры можно интерпретировать как комбинацию из нескольких наложенных друг на друга простых с различными по величине максимумами.

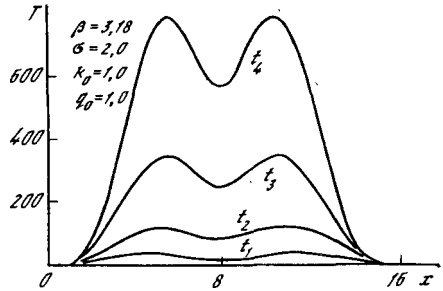


Рис. 8. Горение нелинейной среды в виде сложной структуры
$t_1=0{,}0$; $t_2=2{,}07\cdot10^{-4}$; $t_3=2{,}32\cdot10^{-4}$; $t_4=2{,}4\cdot10^{-4}$

Решения f_1—f_4, описывающие локализованные структуры, называют собственными функциями нелинейной среды. В отличие от собственных функций, с которыми мы имели дело при изучении линейного уравнения теплопроводности, f_1—f_4 описывают локализованные процессы. Но и те и другие являются частными автомодельными решениями изучаемых задач.

Удивительно, что в простейшей нелинейной среде, в которой возможны только процессы горения и теплопроводности, могут существовать различные типы сложных структур. Организация в среде обусловлена локализованными процессами, которые по определенным законам могут быть объединены в еще более сложные организации процессов. Мир структур представляет собой множество локализованных процессов различной сложности.

Такой взгляд напоминает стремление древних мыслителей найти единую основу организации мира как для простейших, так и для самых сложных его структур. «Вселенную не создал никто ни из богов, ни из людей, но она была, есть и будет вечно живым огнем, согласно своему закону вспыхивающим и угасающим»,— писал Гераклит. Поиск общих закономерностей возникновения организации — одна из основных задач синергетики.

Вернемся к собственным функциям нелинейной среды. Посмотрим на них с другой точки зрения. Начальные данные можно рассматривать как воздействия на нашу систему. Их могли сформировать другие, более медленные процессы еще до того, как основными стали быстрые процессы, идущие в режиме с обострением. Пусть задача состоит в том, чтобы создать в среде сложную организацию и согласовать между собой процессы на длине, большей L_f. Как мы уже видели, чтобы решить эту задачу, достаточно задать начальный профиль температуры малой амплитуды, согласованный с собственными функция-

ми нелинейной среды. По-видимому, это типично для сложных нелинейных систем — эффективное воздействие должно быть согласовано с их внутренними свойствами и в этом случае может быть сравнительно слабым.

«Ну и что?» — может спросить читатель.— Пусть мы знаем, как необычно происходит горение в некоторых средах. Но что это дает нам при решении других задач?» Попробуем показать, как «работают» появившиеся у нас представления на примере из совсем другой области.

Поговорим о простейшей математической модели возникновения научного направления.

Пусть некоторая научная работа открывает новые перспективы, и высказанные в ней идеи допускают интересные обобщения и развитие. Посмотрим на дальнейшую судьбу этого направления и попытаемся выяснить, сколько исследователей будут участвовать в его формировании. Пусть нам удалось охарактеризовать уровень понимания проблемы данным ученым некоторым параметром I. Например, это может быть число опубликованных им существенно новых работ в этой области и тех работ, которые уже продуманы и могут быть написаны.

Практика показывает, что общее число опубликованных работ не всегда связано с уровнем понимания.

Поскольку область новая и первые работы ставят больше вопросов, чем дают ответов, то уровень понимания одного активно работающего исследователя будет быстро расти, например по закону

$$I_t = Q(I), \tag{17}$$

где $Q(I)$ — растущая нелинейная функция. Будем полагать для простоты, что $Q(I) = q_0 I^\beta$, где q_0 и β показывают, насколько быстро можно продвинуться в этой области. Однако закон (17) обычно не реализуется на практике. Для продолжения работы требуется оборудование, привлечение сотрудников и многое другое. Именно поэтому современная наука, как правило, связана с работой научного коллектива. Ученым приходится уделять много внимания обсуждению результатов с коллегами, популяризации своих достижений. В процессе такого обсуждения уровень понимания одного ученого может падать — становится некогда оформлять многие результаты. Из всего многообразия возможностей ему приходится выбирать одну или несколько, как правило, самых простых и логичных. Зато понимание у других ученых растет. Будем описывать этот процесс слагаемым $D(I)$. Чем значитель-

нее исследование, тем до большего числа людей хочется довести его выводы. Поэтому $D(I)$ — тоже растущая функция. Пусть $D(I) = -K_0 I^\sigma$. Если исследователей несколько, то сопоставим каждому из них номер $n = 1, 2, 3, \ldots$ в том порядке, в каком они узнали о новой идее. Тогда мы придем к системе уравнений

$$dI_n/dt = Q_n(I_n) + D_n(I_1, \ldots, I_n, \ldots, I_N). \tag{18}$$

Рассмотрим идеальный случай равных творческих возможностей всех ученых при условии их активного общения с коллегами. Предположим также, что проблемой занимается большое научное сообщество. Это приводит к тому, что $Q_1(I) = Q_2(I) = \ldots = Q(I)$, $D_1 = D_2 = D$. В слагаемых $D(I_1, \ldots, I_{n-1}, I_n, I_{n+1}, \ldots, I_n)$ при этом надо учитывать не все аргументы, а только несколько $D(I_{n-1}, I_n, I_{n+1})$. Но тогда после некоторых упрощающих предположений окажется, что решения системы уравнений (18) близки к решениям одного уравнения для $I(n, t)$:

$$I_t = (K_0 I^\sigma I_n)_n + q_0 I^\beta. \tag{19}$$

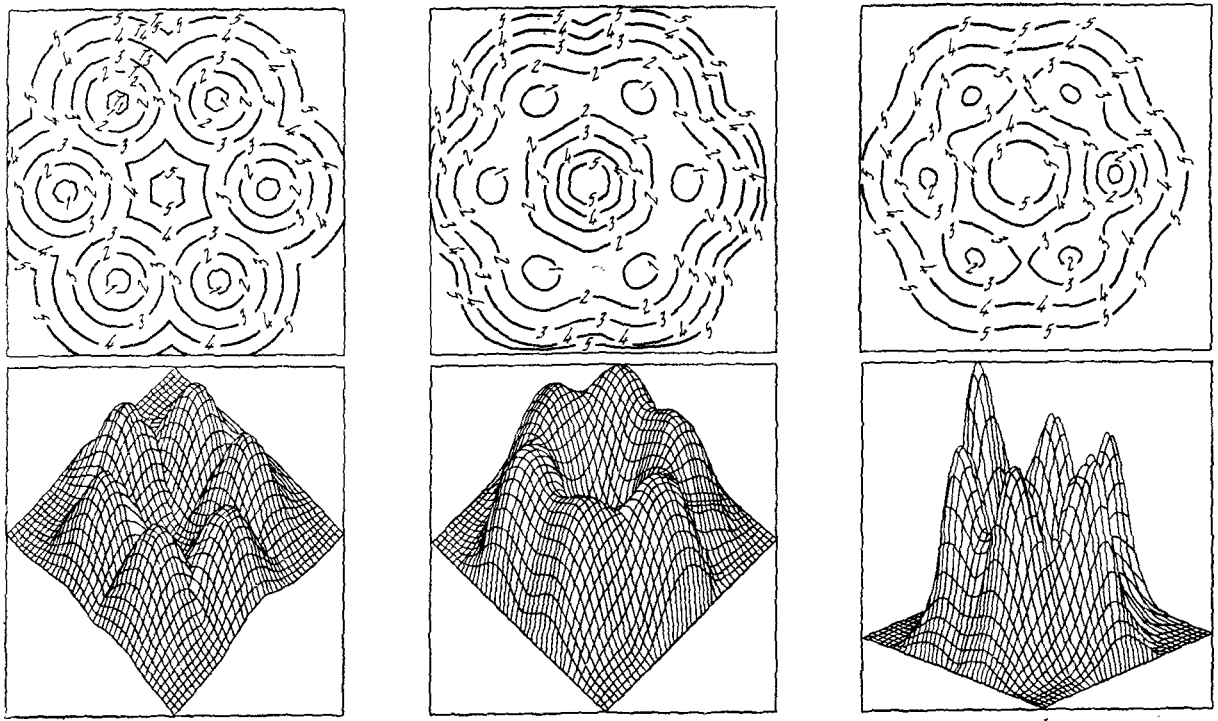
От дискретной переменной I_n мы перешли к ее непрерывному аналогу, хотя нас по-прежнему интересуют только те значения $I(n)$, где n — целое.

С уравнением (19) мы уже знакомы, оно описывает формирование тепловых структур, многие свойства которых мы знаем. Посмотрим, какие выводы из этого следуют.

Если идея очень перспективна ($\beta > \sigma + 1$), задача решается быстро и число активно участвующих в ее развитии исследователей ограничено — имеет место эффект локализации. С ростом научных достижений это число уменьшается. Хотя вывод кажется парадоксальным, часто дело обстоит именно так. Хорошо известно, что возникновение целых областей науки часто оказывается связанным с вкладом нескольких ученых, которые раньше других осознали значение изучаемой ими проблемы.

Пусть задача не допускает быстрого продвижения вперед. Тогда постепенно в ее решение оказывается вовлеченным большое научное сообщество, локализация отсутствует. Примеров таких задач сейчас становится все больше.

Часто приходится слышать, что та или иная идея «витала в воздухе». Есть ли у нас математический эквивалент такой ситуации? Конечно, есть. Если $\beta > \sigma + 3$,



t_1 t_2 t_3

т. е. направление очень перспективно, то уравнение (19) имеет нелокализованное решение падающей амплитуды. Такое решение оказывается неустойчивым к малым возмущениям. Небольшая группа или даже один исследователь могут радикально изменить ситуацию: уровень понимания начинает расти, формируется новое научное направление.

Посмотрим, есть ли в нашей модели аналог научной школы. Этими словами обычно обозначают коллектив ученых, объединенных общей целью и работающих согласованно. В таком коллективе могут использоваться различные подходы и методы. Несмотря на это, он существует долгое время и сохраняет свою организацию. Отсюда ясно, что научной школе можно сопоставить сложную структуру, которая возникает в нелинейной среде при задании начальных данных специального вида. Существование научной школы позволяет эффективно использовать возможности большого числа ученых и координировать их усилия.

Наша модель очень проста. Многих усложняющих факторов мы не учли. Но в ее рамки укладываются наши интуитивные представления о возникновении нового научного направления. Разве не удивительно, что у процессов горения и процессов развития научных идей есть что-то общее? Наверное, поиск и анализ таких аналогов — важный шаг к более глубокому пониманию законов самоорганизации.

Число работ, посвященных модели тепловых структур и ее обобщениям, приближается к сотне. Нам не удалось преодолеть искушения: мы решили привести картинку, помещенную в одной из них (рис. 9). Здесь показано взаимодействие шести тепловых структур в двумерном случае, когда функция $T(x, y, t)$ зависит от переменных x, y и t. Снизу приведены объемные изображения этой функции на различные моменты времени. Вверху — ее линии уровня $T_1(x, y) = 0{,}95A$, $T_2(x, y) = 0{,}75A$, $T_3(x, y) = 0{,}5A$, $T_4(x, y) = 0{,}25A$, $T_5(x, y) = 0{,}1A$, где A — абсолютный максимум температуры на момент t. Процесс неустойчив, и на развитой стадии формируется одна быстро развивающаяся структура. Не правда ли, красиво?

←

Рис. 9. Взаимодействие шести тепловых структур
$t_1 = 0{,}0$; $t_2 = 8{,}0 \cdot 10^{-2}$; $t_3 = 9{,}2 \cdot 10^{-2}$

Почему тепловым структурам придается такое большое значение? Потому что при изучении этого сравнительно простого объекта удается ответить на много глубоких и важных вопросов. Анализ этой модели дает возможность разработать новые методы исследования процессов в нелинейных средах и сформулировать новые понятия и представления, опираясь на которые, можно пойти дальше.

САМООРГАНИЗАЦИЯ И ХИМИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА. МОДЕЛЬ БРЮССЕЛЯТОРА

Немного истории. Классическая термодинамика рассматривала равновесные процессы в системах, где, как правило, нет обмена массой, энергией и т. д. с окружающей средой (системы, в которых этот обмен возможен, называют открытыми). В таких системах, как известно из статистической физики, свойства большой совокупности (ансамбля) частиц могут быть предсказаны, если известны свойства отдельной частицы. Это и позволяет рассматривать не микроскопические величины (координаты и скорости отдельных частиц), а макроскопические (концентрации, плотности, температуры).

Большие успехи термодинамики, ее глубокая связь со статистической физикой, исследованная в конце XIX в., привели к мысли, что эти методы можно применить и для изучения более широкого класса систем.

В тридцатые годы были заложены основы линейной неравновесной термодинамики, которая «охватывает все случаи, когда потоки (или скорости необратимых процессов) являются линейными функциями „термодинамических сил“ (градиентов температуры или концентраций)»[6]. Такой подход оказался очень плодотворным.

Однако позже выяснилось, что некоторые процессы в эту схему не укладываются. Ученые брюссельской научной школы под руководством бельгийского ученого И. Пригожина для их объяснения предложили содержательные нелинейные модели, в которых используются величины, характерные для термодинамики (концентрации, температуры и т. д.). Работы И. Пригожина по теории необратимых процессов в открытых неравновесных системах были удостоены Нобелевской премии по химии 1977 г.

---

[6] *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. С. 11.

Модель брюсселятора является одной из самых известных математических моделей синергетики. (Название связано с тем, что она была предложена в брюссельской научной школе.) Эта модель описывает распределение по пространству и изменение со временем реагентов сравнительно узкого класса химических реакций, однако при ее исследовании были выяснены свойства диссипативных структур во многих нелинейных системах.

Из школьного курса химии известен закон действующих масс. В реакции, где два вещества, X и Y, реагируя, дают вещество Z ($X+Y\to Z$), скорость изменения вещества Z пропорциональна произведению концентраций веществ X и Y. Коэффициент пропорциональности — постоянная реакции k. Обозначая через $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ концентрации соответствующих веществ, можно записать

$$d\tilde{Z}/dt = k\tilde{X}\tilde{Y}. \tag{20}$$

В самом деле, для того чтобы реакция шла, молекулы вещества X должны сталкиваться с молекулами Y. Очевидно, вероятность этого пропорциональна числу молекул $\tilde{X}$ в единице объема (т. е. концентрации $\tilde{X}$). Точно так же она должна быть пропорциональна концентрации $\tilde{Y}$. Коэффициент пропорциональности k зависит от размеров молекул, их скоростей и т. д. Все это и отражает формула (20). Если в реакции n молекул X взаимодействуют с одной молекулой Y, то изменение концентрации вещества Z пропорционально $\tilde{X}^n\tilde{Y}$.

Обратимся теперь к самой модели. Пусть в некотором химическом реакторе превращения идут по следующей схеме:

$$A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} X, \quad B + X \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} Y + D, \quad 2X + Y \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftarrows}} 3X,$$
$$X \underset{k_{-4}}{\overset{k_4}{\rightleftarrows}} E. \tag{21}$$

Концентрации веществ A и B в реакторе поддерживаются постоянными, и некоторым образом удаляются вещества D и E, т. е. система является открытой. Будем считать, что скорости обратных реакций (k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, k_{-4}) гораздо меньше скоростей прямых. В этих предположениях, обозначая через $\tilde{X}$ концентрацию вещества X, $\tilde{A}$ — вещества A и т. д., получим из закона действующих

масс следующую систему уравнений:

$$\widetilde{X}_t = k_1\widetilde{A} - (k_2\widetilde{B} + k_4)\widetilde{X} + k_3\widetilde{X}^2\widetilde{Y} + \widetilde{D}_1\widetilde{X}_{xx},$$
$$\widetilde{Y}_t = k_2\widetilde{B}\widetilde{X} - k_3\widetilde{X}^2\widetilde{Y} + \widetilde{D}_2\widetilde{Y}_{xx}.$$

Концентрации реагентов $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ могут быть различными в разных точках, поэтому в уравнение входят члены $D_1\widetilde{X}_{xx}$, $D_2\widetilde{Y}_{xx}$, учитывающие их диффузию. После несложных замен переменных, эквивалентных переходу к другой системе единиц ($t_{\text{нов}} = k_4 t$, $X = (k_3/k_4)^{1/2}\widetilde{X}$, $Y = (k_3/k_4)^{1/2}\widetilde{Y}$, $A = (k_1^2 k_3/k_4^3)^{1/2}\widetilde{A}$, $B = \widetilde{B}k_2/k_4$, $D_1 = \widetilde{D}_1/k_4$, $D_2 = \widetilde{D}_2/k_4$), мы придем к системе уравнений в частных производных, называемых моделью брюсселятора:

$$\begin{aligned} X_t &= A - (B+1)X + X^2Y + D_1X_{xx}, \\ Y_t &= BX - X^2Y + D_2Y_{xx}. \end{aligned} \tag{22}$$

Вещества X и Y остаются в реакторе, поэтому потребуем выполнения следующих краевых условий:

$$X_x(0, t) = X_x(l, t) = 0, \qquad Y_x(0, t) = Y_x(l, t) = 0. \tag{23}$$

Поведение решений. Посмотрим, есть ли у уравнения (22) какие-нибудь простые решения, например не меняющиеся со временем (их называют стационарными) и однородные по пространству. При этом все производные в (22) становятся нулевыми и мы имеем систему обычных алгебраических уравнений:

$$A - (B+1)X + X^2Y = 0, \quad BX - X^2Y = 0. \tag{24}$$

Ее единственное решение — это $X = A$, $Y = B/A$. В наших рассуждениях оно будет играть особую роль. Будем по аналогии со случаем тепловых структур менять концентрацию вещества B и начальные распределения концентраций $X(x, 0)$, $Y(x, 0)$ и смотреть, как меняется поведение решения. В этом нам опять поможет ЭВМ.

Если концентрация вещества B невелика, то независимо от начальных данных через определенное время установятся концентрации $X(x, t) = A$, $Y(x, t) = B/A$. Оказывается, такое замечательное решение (устойчивое стационарное, на которое независимо от начальных данных выходят изучаемые распределения параметров при небольших внешних воздействиях) есть у многих нелинейных систем. Оно получило название термодинамической ветви (в случае брюсселятора это решение $X = A$, $Y = B/A$).

На первый взгляд кажется, что такая картина будет иметь место при любых B. Однако это не так. Если зафиксировать начальные концентрации $X(x, 0)$, $Y(x, 0)$ и увеличивать значение B, то мы увидим, что начиная с некоторого критического значения B происходит выход на немонотонные стационарные распределения концентраций, например такие, как показаны на рис. 10 и 11.

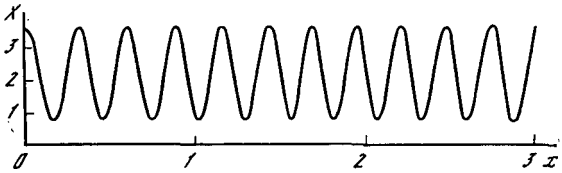


Рис. 10. Стационарные диссипативные структуры, возникающие в модели брюсселятора

Параметры нелинейной среды: $A = 2$, $B = 4{,}6$, $D_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$; $D_2 = 8{,}0 \cdot 10^{-3}$

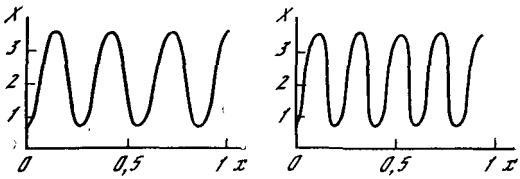


Рис. 11. Распределение концентрации X

Два различных типа структур, возможных в одной и той же нелинейной среде ($A = 2$, $B = 4{,}6$, $D_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$; $D_2 = 8{,}0 \cdot 10^{-3}$) при задании различных начальных данных

Именно для таких стационарных неоднородных по пространству устойчивых решений, возникающих вне термодинамической ветви, И. Пригожиным и было впервые введено понятие диссипативной структуры.

Прежде чем разбираться подробнее в свойствах таких решений, подчеркнем неожиданность полученного результата. Кажется очевидным, что в реакторе распределение реагирующих веществ по горизонтали (если сила тяжести направлена по вертикали) будет однородным по пространству. Модель брюсселятора показывает, что это не так: в среде могут возникать структуры, одни реагенты могут оказаться сосредоточены в одних частях реактора, другие — в других. Здесь встает целый круг вопросов: как меняют структуры характерные времена реакций? какая концентрация вещества является оптимальной?

И много других. Такие вопросы возникают при решении ряда задач химической технологии.

Вернемся к модели брюсселятора. Стационарное решение $X=A$, $Y=B/A$ удовлетворяет краевой задаче при любых B. Следовательно, при $B>B_c$ появляется несколько стационарных решений. Как говорят математики, происходит ветвление решений, или бифуркация. Аппарат теории бифуркаций, интенсивно развиваемый в настоящее время, широко используется в синергетике.

Мы зафиксировали начальные концентрации и меняли B. Поступим по-другому: зафиксируем какое-нибудь значение $B>B_c$ и будем менять профили начальных концентраций $X(x, 0)$, $Y(x, 0)$. При некоторых значениях B можно наблюдать интересный эффект: при одних начальных данных имеет место выход на один стационар (стационарное решение), при других — на другой. Два стационара, возможные при одних и тех же параметрах, показаны на рис. 11. Причем выход на один и тот же стационар происходит с целого класса начальных концентраций, т. е. так же, как в модели тепловых структур здесь имеет место «забывание» деталей начальных данных. А что будет, если поставить систему в положение буриданова осла — задать при тех же значениях начальные условия, приводящие к однородному решению $X(x, 0)=A$, $Y(x, 0)=B/A$, соответствующему термодинамической ветви?

Роль флюктуаций. Если решение $X=A$, $Y=B/A$ «поставлено» идеально точно, то оно меняться не будет. Однако реально расчеты на ЭВМ дают другую картину. Даже очень малые отклонения, которые, как правило, всегда имеют место, быстро нарастают, и далее происходит выход на один из неоднородных устойчивых стационаров. Такие отклонения, называемые флюктуациями, всегда есть в физических, химических и биологических системах. Расчеты на ЭВМ показывают, что вносимые флюктуации в отличие от равновесных процессов, изучаемых классической термодинамикой, определяют всю дальнейшую судьбу нелинейной системы. Термодинамическая ветвь здесь неустойчива.

Этот процесс можно пояснить следующим примером. Представим себе маленький шарик в желобе, форма которого показана на рис. 12. Если поставить его на вершину горба, в точку O, то в соответствии с законами механики он может оставаться на вершине (это тоже стационарное решение уравнений, описывающих движение

шарика), но флюктуации выведут его из равновесия и он начнет двигаться. Постепенно из-за трения энергия шарика будет уменьшаться, и в конце концов он остановится на дне желоба в точке M или N. В какой именно точке он окажется, зависит от знака флюктуации, которая вывела шарик из равновесия. Роль точки O у нас играла термодинамическая ветвь, роль равновесных положений M и N — стационарные устойчивые решения, такие, как

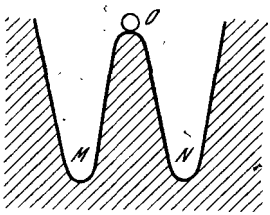
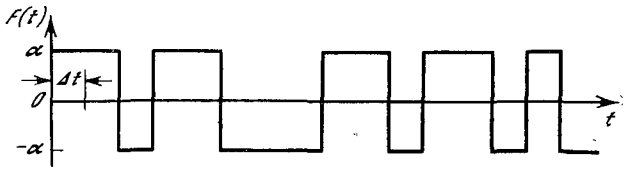


Рис. 12. Неустойчивое состояние равновесия (точка O)

Флюктуации выводят шарик из равновесия; в точках M и N — устойчивые состояния равновесия

Рис. 13. Возможный вид случайной функции $F(t)$



показаны на рис. 11. Можно сказать, что причиной возникновения структур являются внутренние свойства системы, а поводом — вносимые флюктуации. Такое поведение характерно для многих нелинейных неравновесных систем[7].

Флюктуации можно учесть, добавив в правую часть уравнения (22) случайные функции. Они могут отражать процессы, в детали которых на нашем уровне описания мы не вникаем. Отвлекаясь от их конкретного вида, приведем простейший пример случайной функции. Бросаем монету с интервалом времени Δt и считаем, что если в момент времени t выпадает орел, то $F(t)=\alpha$, $\alpha \ll 1$ до момента $t+\Delta t$, если решка — $F(t)=-\alpha$; в момент времени $t+\Delta t$ мы опять бросаем монету. Возможный вид функции, полученной таким образом, показан на рис. 13. «Возможный» потому, что точно неизвестно, когда выпа-

[7] Чтобы подчеркнуть важную роль флюктуаций в формировании структур, И. Пригожин сформулировал принцип «порядка через флюктуации»: «В этой области, где термодинамическая ветвь теряет устойчивость, флюктуации усиливаются и приводят к макроскопическому порядку, который стабилизируется за счет обмена энергией с внешней средой».

дает орел, а когда решка. Функция действительно случайная. И, бросая монету, читатели могут получить функцию нисколько не хуже нарисованной здесь.

Тот факт, что нам, имея дело с термодинамическими величинами, приходится учитывать флюктуации и случайные процессы малой амплитуды, очень важен. Возможно, в необходимости учитывать флюктуации, которые, нарастая, могут изменить основные характеристики процессов, и кроется одно из важных отличий сложных систем от простых.

И еще одна параллель: даже слабое воздействие на нелинейную систему в окрестности B_c может определить ее дальнейшую судьбу, в то время как вдали от B_c влияние этого воздействия не ощущается. Здесь, как и в модели тепловых структур, мы сталкиваемся с резонансным возбуждением — воздействием, согласованным с внутренними свойствами нелинейной системы и сильно влияющим на нее.

Отметим важное отличие стационарных структур в модели брюсселятора от нестационарных тепловых структур: тепловые структуры локализованы и изменение краевых условий не меняет их. В случае стационарных структур изменение граничных условий и увеличение длины области обычно ведут к перестройке всего решения. В большей области могут возникать структуры с большим числом экстремумов. Как же исследовать такие решения? Как предсказать величину B_c, начиная с которой возникают структуры?

Как найти B_c. Нам надо узнать, где решение $X = A$, $Y = B/A$ теряет устойчивость. Оказывается, можно построить линейную задачу, в которой содержится вся информация об устойчивости термодинамической ветви. Не вдаваясь в подробности, укажем простой рецепт, как это сделать. Представим решение системы уравнений (22) в виде $X = A + \overline{X}$, $Y = B/A + \overline{Y}$. Предположим, что $|\overline{X}| \ll A$, $|\overline{Y}| \ll B/A$. Подставим эти выражения в исследуемое уравнение и будем пренебрегать всеми членами, куда входит $\overline{X}^2$, $\overline{Y}^2$, $\overline{X}\overline{Y}$ или их более высокие степени, считая, что эти члены гораздо меньше всех остальных. В результате получим линейную задачу

$$\begin{aligned}
&\overline{X}_t = (B-1)\overline{X} + A^2\overline{Y} + D_1\overline{X}_{xx}, \qquad (25)\\
&\overline{Y}_t = -B\overline{X} - A^2\overline{Y} + D_2\overline{Y}_{xx},\\
&\overline{X}(x, 0) = X(x, 0) - A, \quad \overline{Y}(x, 0) = Y(x, 0) - B/A,\\
&\overline{X}_x(0, t) = \overline{X}_x(l, t) = 0, \quad \overline{Y}_x(0, t) = \overline{Y}_x(l, t) = 0.
\end{aligned}$$

Поступим так же, как мы действовали в случае линейного уравнения теплопроводности,— найдем все частные решения вида $g(t)f(x)$. В качестве $f(x)$ здесь будут фигурировать функции $\cos(\pi mx/l)$, $m=0, 1, 2, \ldots$, сами решения будут иметь вид

$$\overline{X}_m = p_m \exp(\lambda_m t)\cos(\pi mx/l),$$

$$\overline{Y}_m = q_m \exp(\lambda_m t)\cos(\pi mx/l),\ m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (26)$$

Подставив выражение (26) в уравнения (25), можно убедиться, что эти функции будут решениями, если λ_m удовлетворяют квадратным уравнениям

$$\lambda^2 + \lambda[A^2 - B + 1 + (D_1 + D_2)(m^2\pi^2/l^2)] + [A^2B -$$

$$-(A^2 + D_2m^2\pi^2/l^2)(B - 1 - D_1m^2\pi^2/l^2)] = 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

При каждом конкретном m уравнение имеет два корня, λ_{m1} и λ_{m2}, которые, вообще говоря, являются комплексными числами. Если $\operatorname{Re}\lambda_m < 0$, то решение вида (26) убывает со временем.

А теперь сам рецепт: если $\operatorname{Re}\lambda_{m1} < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{m2} < 0$ для всех m, то термодинамическая ветвь устойчива. При малых B все $\operatorname{Re}\lambda_{m1} < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{m2} < 0$. Если при некотором $B = B_c$, $\lambda_{m1} = 0$, $\lambda_{m2} < 0$, то при $B > B_c$ возникают структуры.

Таким образом, решая обычные квадратные уравнения, мы можем узнать, когда в нелинейной среде возникнут диссипативные структуры. Но почему же все-таки при $B < B_c$ структур нет? Это можно пояснить так. Пусть отклонения от термодинамической ветви настолько малы, что нелинейные члены исходного уравнения (22) гораздо меньше линейных. Тогда это уравнение будет близко к линейному. Но для последнего, как мы знаем, справедлив принцип суперпозиции, и общее решение можно «сшить» из частных. Если для всех m $\operatorname{Re}\lambda_m < 0$, то каждое из частных решений убывает, а если система решений полная, то убывает и общее, и, значит, отклонения от термодинамической ветви уменьшаются.

Идея использования линеаризованных уравнений для анализа устойчивости систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, принадлежит выдающемуся русскому математику А. М. Ляпунову.

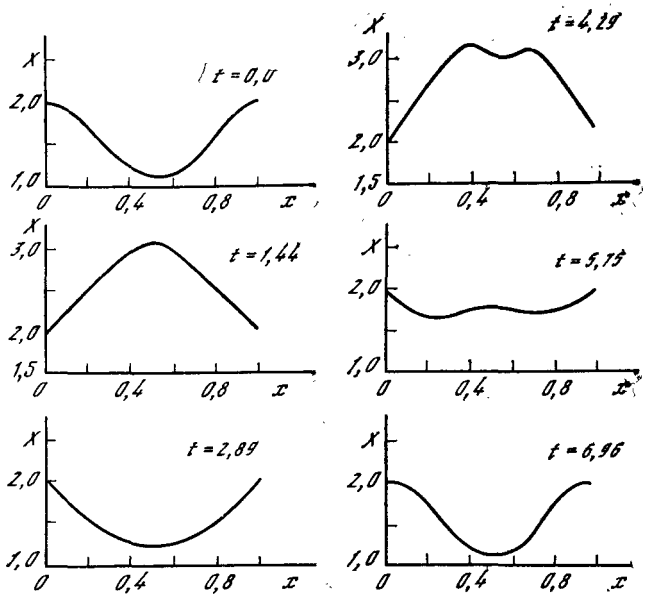


Рис. 14. Колебательный режим в модели брюсселятора. Распределение концентрации на различные моменты времени
$l = 1$, $A = 2$; $B = 5{,}45$; $D_1 = 8 \cdot 10^{-3}$; $D_2 = 4 \cdot 10^{-3}$

В дальнейшем эти методы обобщены на системы уравнений в частных производных.

Анализ уравнения (25) позволяет предсказать и колебательные режимы в модели брюсселятора. Если при $B = B_c$ для некоторого m $\operatorname{Re}\lambda_{m1} = \operatorname{Re}\lambda_{m2} = 0$, $\operatorname{Im}\lambda_{m1} = -\operatorname{Im}\lambda_{m2}$, то функции $\bar{X}_m$ и $\bar{Y}_m$ периодические. В системе возникают колебания. Обычно это происходит, если $D_1 \approx D_2$. Распределения концентрации X на различные моменты времени, когда в системе есть колебательный режим, показаны на рис. 14.

Наверное, читателя удивляет, как много дает анализ линейных задач. В линейной задаче «заложено» значение параметра B_c, начиная с которого будут возникать структуры и их характерные размеры. Какова же роль нелинейности? И вообще, почему нужно строить нелинейные модели, если линейные работают так хорошо?

Попробуем ответить на эти вопросы. Дело в том, что нелинейность стабилизирует процессы, о росте которых говорит линейная задача. Кроме того, при $B > B_c$ возможно существование нескольких типов структур. Пред-

сказание спектра решений, их амплитуд, а также их зависимости от B возможно лишь с помощью нелинейного анализа.

По-видимому, в общем случае дело обстоит так: большинство реальных систем описывается нелинейными уравнениями. К счастью, у многих из них есть решения типа термодинамической ветви. Если линеаризовать уравнения в их окрестности, получаются линейные соотношения, с которыми обычно и работают ученые. Но этот прием не годится в том случае, когда воздействия на систему очень интенсивны, а также если система открыта и далека от равновесия, т. е. как раз в тех случаях, которые в современной науке и технике представляют наибольший интерес. Их понимание безусловно требует нелинейного анализа, более сложного, трудоемкого, но дающего более полную и глубокую картину изучаемых явлений.

Еще о колебательных процессах. Изучению колебательных и волновых процессов в нелинейных системах сейчас уделяется большое внимание. Широкое признание получили работы советских ученых по исследованию эффектов самоорганизации в химических реакциях. Цикл работ Б. П. Белоусова, А. М. Жаботинского, Г. Р. Иваницкого, В. И. Кринского, Е. Е. Селькова, посвященный этим вопросам, был удостоен Ленинской премии.

Реакция Белоусова — Жаботинского позволила изучать такие закономерности экспериментально. «Когда реакция протекает в хорошо перемешиваемой среде, в некоторой области начальных концентраций наблюдаются незатухающие колебания концентраций... Колебания имеют период порядка минуты и продолжаются около часа... Если проводить реакцию в длинной, вертикально расположенной трубке, то можно наблюдать возникновение горизонтальных зон, соответствующих чередующимся областям высоких концентраций»[8]. Поскольку эти зоны имеют другую окраску, то процесс выглядит очень красиво. Так как система не является открытой, с течением времени она приходит к термодинамическому равновесию — колебания прекращаются.

Почему этим работам уделяется большое внимание? Оглядимся вокруг. Можно сказать, что современная техника невозможна без колебательных, периодических и

---

[8] *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

близких к ним нестационарных процессов. Ими удобно управлять, они позволяют в огромное число раз усиливать слабые сигналы, у них масса других достоинств. Может быть, по тому же пути шла природа, создавая сложные самоорганизующиеся системы. Не похож ли механизм «биологических часов» на колебательные процессы в модели брюсселятора? Эти вопросы пока ждут ответов.

Другая причина интереса к модели брюсселятора состоит в том, что она отражает общие черты многих систем, где возникают структуры и возможны явления самоорганизации. Необходимые условия такого поведения обычно формулируют следующим образом.

1. Система является термодинамически открытой, т. е. возможен обмен энергией, веществом и т. д. с окружающей средой.

2. Макроскопические процессы происходят согласованно (кооперативно, когерентно). В рассмотренных нами примерах такое согласование обеспечивали диффузионные процессы.

3. Отклонения от равновесия превышают критическое значение, т. е. рассматриваются состояния, лежащие вне термодинамической ветви.

4. Процессы рассматриваются в таком диапазоне параметров, когда для их описания необходимы нелинейные математические модели.

Далее мы посмотрим, как можно применить рассмотренные нами идеи к анализу биологических объектов.

МОРФОГЕНЕЗ И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Одной из наиболее интересных задач, стоящих перед современной биологией, является исследование процессов, которые управляют развитием органов, т. е. включают в определенной последовательности и определенном соотношении механизмы их развития. Иногда эту задачу называют проблемой морфогенеза.

Трудно найти более загадочное явление, чем формирование организма. Вдумайтесь: весь организм возникает из одной клетки, которая делится вначале на две аналогичные, потом на четыре... А дальше? Ведь все появившиеся вначале клетки одинаковы, почему же отдаленные потомки одних после многих делений могут стать клетками мозга, а других — желудка?

Современная биология дает достаточно полную и точную картину того, как происходит передача генетической информации от одного поколения клеток к другому и как информация перекодируется в каждой клетке, обеспечивая синтез ферментов[9]. Однако использование только этих представлений не дает ответа на другой вопрос: фологически, так и физиологически, и как происходит фологически, так и физиологически, и как происходит возникновение этих различий (как идет процесс клеточной дифференцировки)? Говоря точнее, нам нужно ответить на вопросы: «1) как регулируется количество того или иного фермента, синтезируемого в данной клетке; 2) почему тот или иной фермент появляется на определенной стадии развития организма и 3) почему в клетках каждого типа образуются свои специфические комплексы белков, хотя все клетки многоклеточного организма содержат одну и ту же генетическую информацию?»[10].

Изучение сложных процессов удобно начинать с анализа наиболее простых явлений, где имеют место эти процессы. По-видимому, в проблеме морфогенеза такое явление — регенерация. Ряд животных обладают способностью не только к заживлению ран, но и к восстановлению утраченных органов. Такое восстановление (регенерация) обусловлено возобновлением морфогенетических процессов, которые прекращаются после завершения развития организма. Высокая способность к регенерации характерна для дождевых червей, простейших многоклеточных животных — гидр, а также, например, для тритонов, саламандр, ящериц и др. Эта способность нашла отражение в одной из первых моделей морфогенеза, предложенной А. Тьюрингом (1952 г.). В ней также есть аналог размножения клеток, процессов воспроизведения простейшей упорядоченности на соседних пространственных масштабах. Для моделирования этих процессов А. Тьюринг использовал систему двух дифференциальных уравнений в частных производных. Остановимся на более популярной сейчас среди биологов модели, предложенной А. Гирером и М. Мейнхардтом, где также используется система двух уравнений.

---

[9] Ферментами называют органические катализаторы белковой природы, синтезируемые живыми клетками, которые регулируют скорости практически всех химических реакций, протекающих в живых организмах.

[10] *Вилли К., Детье В.* Биология. М.: Мир, 1975. С. 709.

Вначале расскажем о некоторых нужных нам экспериментальных фактах. Нас будут интересовать морфогенетические процессы у гидры. Ее организм состоит примерно из 10^5 клеток 15 различных типов и имеет размеры в несколько миллиметров. На одном конце гидры расположена «голова». При удалении части головы и пересадке ее на другое место наблюдается следующая картина. Если расстояние между пересаженной частью и старой головой невелико, то новая голова не образуется или, как говорят, рост головы подавляется. Когда это расстояние велико, то морфогенетические процессы активируются и формируется новая голова. По-видимому, процессы регенерации и морфогенеза связаны с выработкой определенных химических веществ. Для того чтобы описать наблюдаемую картину, надо рассматривать по крайней мере два типа таких веществ — ингибиторы (они не позволяют возникнуть новой голове вблизи старой) и активаторы. Некоторые экспериментальные данные подтверждают существование веществ, обладающих такими свойствами.

Будем полагать, что оба вещества производятся в головной области гидры. Поскольку подавление роста происходит на некотором расстоянии, то можно считать, что ингибитор обладает способностью к диффузии. Той же способностью должен обладать и активатор, чтобы он мог влиять на клетки, окружающие пересаженную часть.

Обозначим концентрацию активатора через a и концентрацию ингибитора через h. Пусть a и h зависят от пространственной координаты x и времени t.

Посмотрим, как происходит изменение величины a в данной точке. Это изменение зависит от следующих факторов: генерации активатора (в области, где формируется голова гидры) с производительностью ρ, его распада, который можно описать слагаемым $-\mu a$, и диффузии $D_a a_{xx}$.

Эксперимент показывает, что воздействие ингибитора на активатор можно описывать членом ka^2/h (чем больше значение h, тем этот член меньше). Учитывая все это, получим уравнение для скорости изменения величины a:

$$a_t = \rho - \mu a + ka^2/h + D_a a_{xx}. \qquad (27)$$

Концентрация ингибитора меняется из-за распада, описываемого членом $-\nu h$, и диффузии $D_h h_{xx}$. Будем считать, следуя идее Гирера и Мейнхардта, что образование

ингибитора происходит из-за наличия активатора и описывается членом ca^2. В результате получим второе уравнение:

$$h_t = ca^2 - \nu h + D_h h_{xx}. \qquad (28)$$

Система уравнений (27), (28) может быть исследована при помощи ЭВМ. Отметим, что эта система отличается от модели брюсселятора только видом источников, поэтому многие представления и методы, развитые при изучении модели брюсселятора, эффективно работают и здесь.

Исследование системы (27), (28) показывает, что ингибитор подавляет все максимумы (новые головы) в некоторой окрестности первоначального максимума (старой головы). В результате взаимодействия активатора и ингибитора возникает периодическое по пространству или близкое к нему распределение. Это согласуется с результатами некоторых экспериментов. Картина последовательного рождения структур на соседних пространственных масштабах представлена на рис. 15. Похожие процессы наблюдаются во многих двухкомпонентных системах.

Более сложные математические модели морфогенеза, где также выделяются активатор и ингибитор, приводят к еще более наглядным результатам. Например, решение четырех уравнений в частных производных позволяет моделировать рост листьев. Изменение параметров модели приводит к изменению расположения листьев на стебле. Эти результаты представляются удивительными. Делая сравнительно простые допущения, мы можем моделировать многие важные черты сложных процессов, механизм которых пока до конца не понят.

И вновь возникает вопрос: почему достаточно простая математическая модель может хоть что-то описывать и с чем-то согласовываться? Ведь структура организма сложна, информация, заключенная в каждой его клетке, огромна, число различных видов очень велико. Однако среди этого многообразия сейчас уже просматривается определенное единство. Обобщая результаты работ по морфогенезу, биологи смогли сформулировать несколько утверждений, которые отвечают на наш вопрос. Расскажем о них, не претендуя на полноту и строгость.

Первое. Инструкция о клеточной дифференцировке для каждой клетки вырабатывается в ходе коллективного самоорганизующегося процесса. А значит, при моделиро-

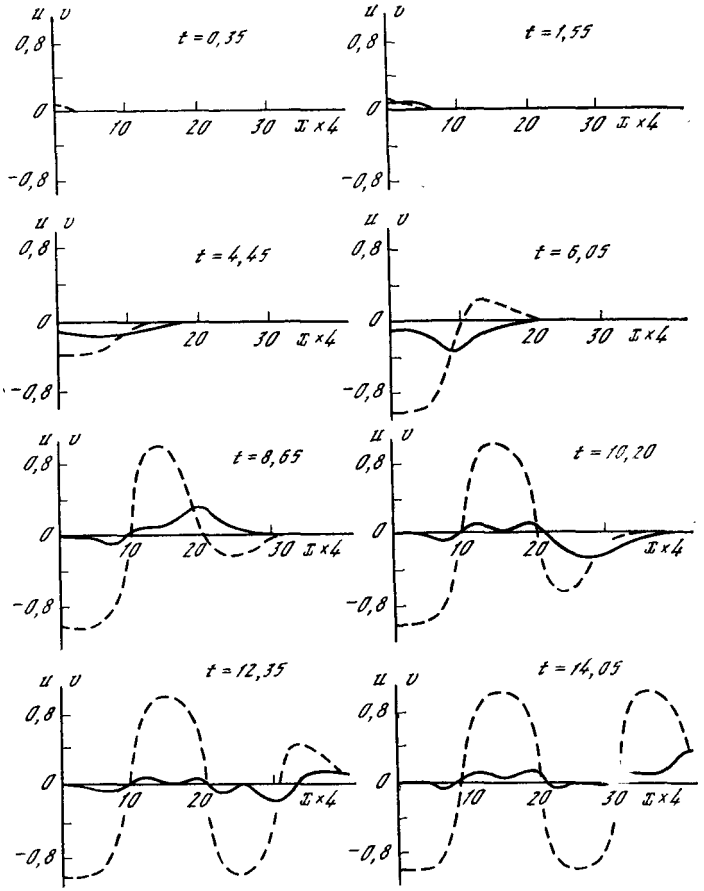


Рис. 15. Возникновение структур на соседних пространственных масштабах

В отличие от модели Гирера и Мейнхардта здесь $u_t = 0{,}18u_{xx} + u - v + (4^v - u)(u^2 + v^2)$; $v_t = 0{,}576v_{xx} + u + v - (u + 4v)(u^2 + v^2)$

вании многие внутриклеточные механизмы можно не учитывать, это сильно упрощает задачу.

Второе. Процесс дифференцировки идет в несколько стадий. На первой стадии определяется, какие клетки будут отвечать за формирование того или иного органа. После этого их судьба определена. Происходит «разметка» будущего организма, или, как говорят, вырабатывается позиционная информация. Существенные черты этого

процесса разметки, по-видимому, и отражает модель Гирера и Мейнхардта.

Третье. Механизм выработки позиционной информации универсален. В отличие от первых двух утверждений, с которыми согласно большинство биологов, последнее широко дискутируется. Какова степень универсальности? Одинаков ли он для всех видов или разные виды характеризуются «одними уравнениями, но с разными коэффициентами»? Наверное, создание математических моделей уже в ближайшем будущем позволит точнее ответить на вопросы о природе морфогенеза.

Подумаем теперь, какие черты морфогенеза могли бы найти отражение в более полной его модели. Процесс возникновения структур в модели Гирера и Мейнхардта не локализован: объект будет развиваться до тех пор, пока не начнет сказываться влияние краевых условий. В самоорганизующихся системах в природе это развитие часто ограничивается не внешними причинами, а внутренними свойствами объекта. Действительно, вспомним явление регенерации: морфогенетические процессы заканчиваются после того, как восстановлено целое, а не по причине отсутствия питания или из-за других внешних факторов.

Эту идею можно сформулировать еще и так. По мере того как вырабатываются все более реальные представления о сложных нелинейных системах, у их моделей появляется все большая «автономность»: в модели брюсселятора есть независимость от деталей начальных данных, в модели тепловых структур — независимость от краевых условий и возникающих структур друг от друга.

Стремление сосредоточить внимание на внутренних свойствах среды является очень древним. Утверждения о существовании набора характерных для среды форм, или, как бы мы сейчас сказали, собственных функций среды, которые и позволяют объяснить разнообразие мира, типичны для философии Платона и Аристотеля. Тенденцию к выявлению внутренних свойств среды мы видим сегодня в физических теориях, имеющих дело со свойствами вакуума, сложного и интересного объекта. Возможно, этот путь окажется плодотворным и в синергетике при моделировании процессов морфогенеза.

Есть еще одна общая черта в поведении сложных систем, которая может найти отражение в создаваемых моделях. Вспомним те нелинейные процессы, которые мы рассмотрели выше. В каждом из них есть определенная

область параметров или стадия, где нелинейная система особенно чувствительна к воздействиям, согласованным с ее внутренними свойствами (назовем их для краткости резонансным возбуждением). Эксперименты показывают, что такое поведение типично для морфогенетических процессов.

Резонансное возбуждение представляет огромный интерес в синергетике. Понимание способов воздействия на сложные системы и последствий таких воздействий — конечная цель их исследования. Может быть, в реальных системах, как и в рассмотренных нами раньше моделях, слабое резонансное воздействие окажется действеннее, чем в тысячи раз более сильное, но не согласованное со свойствами системы. Воздействие на человека? Природу? Экономику? Невольно напрашивается аналогия с человеческим организмом: массаж или иглоукалывание, известные уже тысячелетия и основанные на многовековом опыте, дают результаты, часто недоступные современным, гораздо более сильно (но не резонансно) действующим на организм средствам.

Однако пока неизвестно, как перевести на язык формул и уравнений эти представления. Может быть, сегодня он еще слишком беден для этого... И все же разговор о будущих моделях хочется закончить на оптимистической ноте. Видимо, в процессе развития научной идеи можно выделить как наиболее важный этап постановки задачи (нулевой цикл науки). Интенсивная работа над нулевым циклом в этих задачах, часть которых мы попытались показать читателям, вселяет надежду, что не за горами то время, когда можно будет рассказать о более полных и содержательных моделях морфогенеза.

Впрочем, мы говорили только об одном взгляде на эти вопросы. Существует много других подходов, возможно, более глубоких. Сама проблема математического моделирования морфогенеза в настоящее время вызывает много споров. Одни авторы настаивают на том, что пора биологам осваивать математические модели и вообще с большим уважением относиться к результатам математического моделирования, поскольку «как только биолог дерзнет объяснять общие принципы, управляющие развитием живого в целом, он неизбежно столкнется с трудностями, которые помогут преодолеть только принципы, исповедуемые математиком». Другие дают понять, что биологи тоже занимались делом и достигли крупных успехов в изучении общих принципов, а также что ма-

тематикам следует поближе познакомиться с работами биологов. Они говорят о том, что на проблему морфогенеза можно взглянуть и по-другому: клетки, которые в процессе развития оказались снаружи, очевидно, находятся в других условиях и вырабатывают другие ферменты, нежели внутренние клетки, и «проблема состоит в том, чтобы выяснить, какие конкретные вещества из среды действуют на наружные клетки и какие изменения в них вызывают».

Оба цитированных высказывания взяты из одного и того же научно-популярного журнала, и точки зрения обоих авторов сейчас разделяют много исследователей. И если отвлечься от полемического азарта сторон, то надо признать, что в вопросе о том, какие черты морфогенеза представляются наиболее важными и требуют первоочередного изучения, у каждой из сторон есть веские аргументы. Вместе с тем обоим авторам и нам, конечно, ясно, что удачная математическая модель, опирающаяся на экспериментальные факты, глубокое понимание биологических проблем, могут помочь и биологам, и математикам, и специалистам многих других областей.

Подход, развитый синергетикой, предлагает начать с простейших аналогов сложных биологических процессов, таких, как возникновение структур и их развитие. Часто приходится слышать упрек в том, что синергетика, касаясь биологических процессов, дает ответ на вопрос, как эти процессы могли бы происходить, а не на вопрос, как они происходят на самом деле. Такой упрек, наверное, неправомерен. Вспомним физику: все началось с того же, с обсуждения, что является «естественным путем» тела, на которое не действуют силы,— прямая или окружность, и вообще надо ли прилагать силу, чтобы тело двигалось равномерно и прямолинейно. В обсуждении этих вопросов рождались понятия «силы», «скорости», «инерциальной системы», которые позже и привели к законам Ньютона и соответствующим математическим моделям. Причем картины мира Аристотеля, Декарта, других мыслителей давали скорее ответ на вопрос, как мог бы быть, по их мнению, устроен мир, хотя всем им хотелось разобраться, как же он устроен на самом деле. Наверно, обсуждение таких вопросов — закономерный этап; только после него начинается эффективное и плодотворное использование точных наук.

Есть здесь и другой аспект. Задача в том, как могли бы быть устроены процессы, аналогичные морфогенезу,

представляется тоже очень интересной. Давайте немного пофантазируем. Допустим, что нам удалось создать активную нелинейную среду, где такие процессы возможны, и мы помещаем в нее некоторый элемент, обладающий способностью делиться. Через некоторое время мы получаем, к примеру, самообновляющуюся, возможно способную к самосовершенствованию вычислительную машину. Интересно, как должен был бы быть устроен такой элемент, какая информация должна быть в него заложена. Вспоминается роман К. Воннегута «Колыбель для кошки», в котором высказана похожая мысль. В нем герой создает «зародыш», превращающий при охлаждении воду не в обычный лед, а в «лед-9», который плавится только при высокой температуре, что и приводит планету к катастрофе. Что ж, своевременное предупреждение: резонансное воздействие на сложные системы требует осторожности и глубокого анализа последствий.

Из сказанного следует, что есть не только прямая связь — методы и представления математики и синергетики помогают в решении биологических задач, но и обратная, которая сейчас, может быть, является более важной. Опыт, накопленный биологией в изучении сложных систем, размышление над биологическими проблемами, вопросами морфогенеза помогают в рождении новых идей синергетики, в создании новых математических моделей.

САМООРГАНИЗАЦИЯ. О ПРИНЦИПАХ ПОСТРОЕНИЯ УПРОЩЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В СИНЕРГЕТИКЕ

Теперь мы попробуем выяснить, чем же обусловлена общность в поведении сложных систем при переходе от неупорядоченного состояния к упорядоченному. Почему в задачах синергетики упрощенные математические модели часто дают ту же качественную картину, что и гораздо более полные и сложные? Что же позволяет рассматривать синергетику как науку, а не как набор нескольких удачно решенных интересных задач?

Это, наверное, самая сложная глава, и если читатель не хочет разбираться в том, как исследовать математические модели синергетики, и его интересует только то, что получится, он может пропустить ее.

Большой вклад в решение этих вопросов был внесен Г. Хакеном и его последователями. На идеях, выдвинутых этим научным направлением, мы и остановимся.

Вернемся к знакомому уравнению теплопроводности и посмотрим на него с другой стороны. Разложим решение (4) в ряд Фурье. Тогда в силу принципа суперпозиции решение линейного уравнения в частных производных эквивалентно решению бесконечной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dC_n}{dt} = -a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 C_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{29}$$

Пусть нас интересует решение на моменты времени $t > t_1$ и ответ мы хотим получить с достаточно высокой точностью ε. Формулы (9), (10) дают точный ответ. Но неужели, чтобы узнать, каким будет распределение температуры при $t > t_1$ с ошибкой, не большей ε, нам нужно решать бесконечную последовательность дифференциальных уравнений?

Посмотрим на рис. 16. Он подскажет нам, что нужно делать. На нем показано, как меняются амплитуды нескольких первых гармоник со временем. Картина такова: чем больше номер гармоники, тем быстрее уменьшается ее амплитуда. В результате, чтобы получить ответ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ при $t > t_1$, нам нужно решить только первые пять уравнений в (29) (учесть пять членов соответствующих сумм), на моменты с $t > t_2$ достаточно трех уравнений, а на моменты $t > t_3$ хватит двух. Это замечательный факт — вместо решения всей бесконечной системы (29) нам начиная с некоторого момента времени достаточно решить всего несколько уравнений, т. е. указание точности и времени, начиная с которого нам нужен ответ, очень упростило задачу.

А можно ли так же подойти к исследованию нелинейных систем, в которых идут диффузионные процессы? Пусть мы знаем уравнения в частных производных, описывающие такую систему. Поступая с ними таким же образом, как при выводе (29) из уравнения теплопроводности, получим бесконечную систему уравнений:

$$dC_n/dt = f_n(C_0, C_1, \ldots) - \gamma_n C_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{30}$$

C_n — коэффициенты Фурье; члены $\gamma_n C_n$ обусловлены диффузионными процессами (будем считать, что мы так перенумеровали уравнения, что $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m < \ldots$);

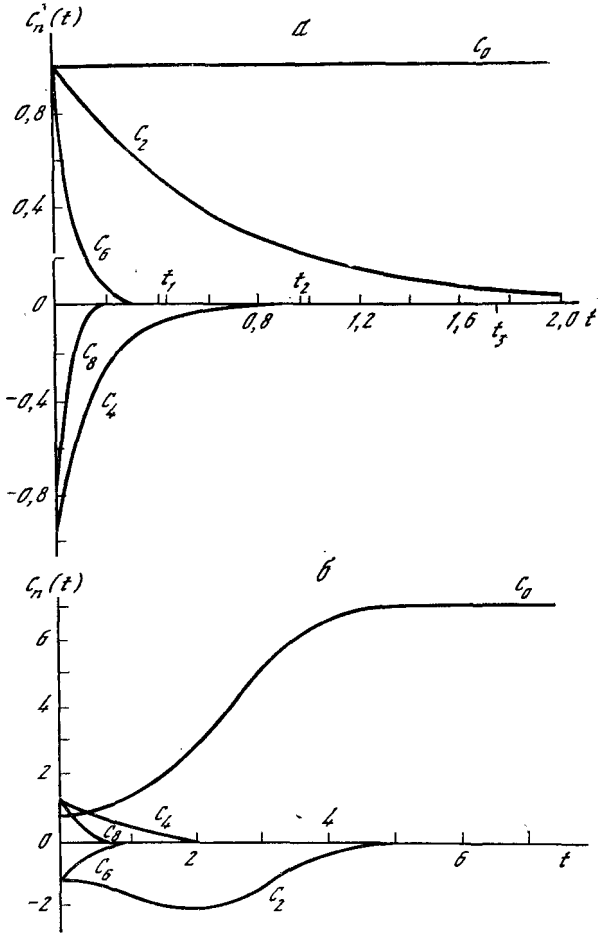


Рис. 16. Типичная картина изменения функций $C_n(t)$

а — для линейного уравнения теплопроводности; *б* — для уравнения $u_t = u_{xx} + u - 2u^3 \cdot 10^{-2}$

f_0, f_1, ..., f_m, ... — нелинейные функции, которые могут зависеть от амплитуд всех гармоник. Система (30) гораздо сложнее, чем уравнения (29). Там все они были независимы, здесь — связаны. На первый взгляд анализ (30) представляется безнадежной задачей. Но посмотрим на зависимости $C_m(t)$ для какого-нибудь нелинейного уравнения.

Чтобы получить эти зависимости, мы вновь используем ЭВМ (см. рис. 16). Мы видим ту же закономерность, что и для линейного уравнения: амплитуды гармоник с высшими номерами убывают быстрее, и с определенного момента ими можно пренебречь. Попробуем учесть это и построить приближенный метод анализа системы (30).

Рассмотрим одно из уравнений этой системы:

$$dC_m/dt = -\gamma_m C_m + f_m(C_0, C_1, \ldots, C_m, \ldots).$$

Здесь функция $f_m(C_0, C_1, \ldots, C_m, \ldots)$ зависит от времени, поэтому вначале исследуем более простое уравнение

$$dC_m/dt = -\gamma_m C_m + F(t). \tag{31}$$

Пусть нам известно, что характерное время изменения функции F равно δ (это то время, за которое значение F увеличивается или уменьшается в e раз. Например, это может быть функция вида $F(t) = Ae^{-t/\delta}$. Если бы функции $F(t)$ в правой части не было, то амплитуда C_m уменьшалась бы в e раз за время $\tau_m = 1/\gamma_m$.

В самом деле, функция $C_m = c_m^0 e^{-\gamma_m t}$ является решением уравнения

$$dC_m/dt = -\gamma_m C_m. \tag{32}$$

Если $\tau_m = 1/\gamma_m \ll \delta$ и нас интересуют процессы, которые идут с характерными временами, гораздо большими τ_m, то изменение амплитуды C_m можно описывать не дифференциальным уравнением (31), а алгебраическим уравнением

$$-\gamma_m C_m + F(t) = 0.$$

Это фундаментальное допущение о том, что $\delta \gg 1/\gamma_m$, получило название адиабатического приближения.

Предположим также, что выполнены неравенства $\gamma_m \ll \gamma_{m+1} < \gamma_{m+2} < \ldots$ Они говорят о том, что процессы, описываемые первыми уравнениями, идут гораздо медленнее остальных. Если, кроме того, функции f_m таковы, что применимо адиабатическое приближение, то мы придем к системе $m+1$ дифференциальных и последовательности алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &dC_n/dt = f_n(C_0, C_1, \ldots) - \gamma_n C_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, m, \\ &C_n = f_n(C_0, C_1, \ldots)/\gamma_n, \quad n = m+1, m+2, \ldots, \end{aligned} \tag{33}$$

которые описывают процессы с характерными временами $\tau \gg 1/\gamma_m$ [11].

Допустим, что нам удалось выразить C_{m+1}, C_{m+2}, ... амплитуды прочих мод через C_0, C_1, ..., C_m из последовательности алгебраических уравнений (или мы знаем, что C_{m+1}, C_{m+2} и остальные моды гораздо меньше, чем первые m), тогда желанная цель достигнута: указав точность и характерные времена, мы приходим к системе $m+1$ дифференциальных уравнений

$$dC_n/dt = \varphi_n(C_0, C_1, \ldots, C_m) - \gamma_n C_n, \quad n = 0, 1, \ldots, m, \tag{34}$$

с которой иметь дело значительно проще, чем с исходными уравнениями. Этот подход впервые был предложен и эффективно применен Г. Хакеном. Он позволил ввести ряд новых понятий и был обобщен на многие другие нелинейные системы.

Нам кажется, что здесь нашего читателя охватят сомнения: не слишком ли часто ему встречались слова «если», «пусть», «допустим». Каков смысл всех этих формальных манипуляций? И что хорошего в том, что в каких-то случаях от (30) удается перейти к (34)? Попробуем ответить на эти вопросы.

Есть глубокая связь между «забыванием деталей начальных данных» в открытых диссипативных системах и возможностью перейти к упрощенным моделям. В самом деле, если разложить в ряд Фурье сложную изрезанную функцию с разрывами, максимумами, то многие коэффициенты будут иметь близкие амплитуды (чтобы передать детали, надо много гармоник). Когда функция становится гладкой, близкой к периодической, то для ее приближенного описания достаточно нескольких мод. Но именно переход к таким функциям (см. рис. 10, 11) мы будем наблюдать при сложных изрезанных начальных концентрациях $X(x, 0)$, $Y(x, 0)$ в модели брюсселятора. (И, следовательно, на «больших временах» здесь также можно дать более простое описание процесса, связанное с решением нескольких уравнений вида (34), а не с решением задачи в частных производных.)

Смысл уравнений (34) таков: в системе имеется иерархия — медленные моды управляют быстрыми. Те же

---

[11] В ряде случаев возможность перейти от системы (30) к системе (33) была строго обоснована в работах академика А. Н. Тихонова и его учеников.

закономерности мы видим во многих сложных системах. Так, например, головной мозг управляет всего лишь несколькими степенями свободы нашего тела, к которым «подстраиваются» все остальные.

Замечательно то, что одни и те же упрощенные модели могут описывать самые различные процессы. Это особенно важно, когда мы имеем дело с нелинейными уравнениями. Не решая их, мы понимаем многие важные качественные черты процессов, которые стоят за этими уравнениями.

Приведем в этой связи интересную мысль о будущем науки, высказанную Р. Фейнманом: «Грядущая великая эра пробуждения человеческого разума принесет с собой метод качественного анализа содержания уравнений. Сегодня еще мы не способны на это». Синергетика сделала ряд важных шагов в этом направлении.

ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ

Для того чтобы экспериментально изучать структуры, достаточно иметь сковороду, немного масла и какой-нибудь мелкий порошок, чтобы было заметно движение жидкости. Нальем в сковороду масло с размешанным в нем порошком и будем подогревать ее снизу (рис. 17).

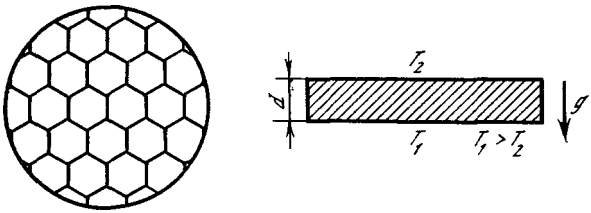


Рис. 17. Ячейки Бенара, возникающие в подогреваемом снизу слое жидкости при $\Delta T > \Delta T_c$

Если дно сковороды плоское и нагреваем мы ее равномерно, то можно считать, что у дна и на поверхности поддерживаются постоянные температуры: снизу — T_1, сверху — T_2. Пока разность температур $\Delta T = T_1 - T_2$ невелика, частички порошка неподвижны, а следовательно, неподвижна и жидкость. Будем плавно увеличивать температуру T_1. С ростом разности температур до значения

ΔT_c наблюдается все та же картина, но когда $\Delta T > \Delta T_c$, вся среда разбивается на правильные шестигранные ячейки (см. рис. 17), в центре каждой из которых жидкость движется вверх, по краям — вниз. Если взять другую сковороду, то можно убедиться, что величина возникающих ячеек практически не зависит от ее формы и размеров. Этот замечательный опыт впервые был проделан Бенаром в начале нашего века, а сами ячейки получили название ячеек Бенара.

В качестве первого шага хотелось бы предсказать критическую разность температур ΔT_c и объяснить, почему возникают именно шестиугольники. Наверно, у наших читателей возник и третий вопрос: какое отношение к синергетике имеют ячейки Бенара, формирующиеся в сравнительно простой на первый взгляд системе? Начнем с последнего вопроса.

Ученым давно известны уравнения, описывающие движение жидкости. Однако и в настоящее время вопросы гидродинамики находятся в центре внимания исследователей.

Физика плазмы, аэродинамика, физика моря часто ставят задачи, которые мы пока не умеем решать аналитически и которые не под силу даже наиболее мощным из современных ЭВМ. И тут на помощь приходят упрощенные математические модели, в изучении которых может помочь синергетика. На них мы и обратим основное внимание, рассматривая ячейки Бенара.

Непосредственно решить систему уравнений, описывающую движение жидкости,— дело довольно сложное, попробуем пойти по другому пути. Вспомним модель брюсселятора. В исходные уравнения у нас входило восемь параметров (k_1, k_2, k_3, k_4, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{D}_1$, $\tilde{D}_2$), но мы так удачно перешли к безразмерным переменным, что в самой модели их осталось четыре (A, B, D_1, D_2).

Если сделать то же самое в нашей задаче, то выяснится, что достаточно исследовать движение жидкости в зависимости всего лишь от двух безразмерных параметров. Первый параметр — это число Рэлея

$$R = \alpha g d^3 \Delta T / \nu \varkappa, \tag{35}$$

где α — коэффициент объемного расширения жидкости; g — ускорение свободного падения; d — толщина слоя жидкости (см. рис. 17); ν — вязкость; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

Второй параметр — число Прандтля

$$P = \nu/\varkappa, \tag{36}$$

представляющее собой отношение коэффициентов вязкости и теплопроводности. Из формул (35) и (36) мы уже знаем довольно много. Пусть ячейки Бенара в нашей жидкости возникают при разности температур ΔT_c. Мы теперь можем сказать, например, что в жидкости, где вязкость и теплопроводность в 2 раза выше ($\nu_1 = 2\nu$, $\varkappa_1 = 2\varkappa$), они возникнут, если разность температур станет в 4 раза больше, чем $\Delta T_c (\Delta T_{c_1} = 4\Delta T_c)$. Нетрудно проверить, что оба случая характеризуются одними числами Рэлея и Прандтля, а именно они и входят в уравнения.

Посмотрим еще раз на модель брюсселятора. Внешне появление ячеек напоминает формирование стационарных диссипативных структур в этой модели. Разность температур играет здесь роль параметра B, а все состояния, где жидкость неподвижна, по-видимому, лежат на термодинамической ветви. Есть здесь и «забывание» системой начальных данных. Встряхнем сковороду с шестигранными ячейками (это эквивалентно заданию новых начальных данных) и поставим на место. Очень быстро будет восстанавливаться прежняя картина. Действуя по аналогии, естественно предположить, что критическое значение числа Рэлея можно найти из уравнений движения жидкости, линеаризованных около термодинамической ветви. Именно так все и обстоит на самом деле. И причина этого в том, что ячейки Бенара, как и немонотонные стационарные распределения в модели брюсселятора, являются диссипативными структурами.

По этому пути можно было бы пойти и дальше, и мы вновь столкнулись бы с косинусами и экспонентами. Значение ΔT_c, полученное таким образом, для большинства жидкостей с высокой точностью совпадает с экспериментальными данными. Однако забудем на время о методе линеаризации и подумаем над физической сущностью эффекта Бенара.

Суть этого явления можно пояснить очень просто. При большой разности температур более теплая жидкость снизу расширяется и стремится поменяться местами с более холодными, а значит, и имеющими большую плотность слоями, расположенными сверху. (Состояние, когда внизу находится легкая, а вверху тяжелая жидкость, неустойчиво.) При малой разности температур жидкость неподвижна из-за наличия вязкости.

Посмотрим теперь на уравнение, описывающее распределение температуры жидкости. Оно выглядит так:

$$T_t + u_1 T_x + u_2 T_y + u_3 T_z = \varkappa (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \qquad (37)$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — проекции вектора скорости жидкости на оси координат. Ось z направим по вертикали, вдоль нее и действует сила тяжести. В нашем случае можно считать $|T_z| \gg |T_x|$, $|T_z| \gg |T_y|$, $|T_{zz}| > |T_{xx}|$, $|T_{zz}| \gg |T_{yy}|$. Если пренебречь малыми членами, то уравнение (37) упростится:

$$T_t + u_3 T_z = \varkappa T_{zz}. \qquad (38)$$

Первый член слева и член в правой части описывают знакомый нам процесс теплопроводности. Когда жидкость неподвижна, все тепло передается к поверхности благодаря теплопроводности. Такой процесс описывает стационарное решение уравнения (38), при этом

$$T(z) = T_1 + (T_2 - T_1) z/d.$$

Второй член описывает механизм теплопередачи, когда тепло переносится благодаря движению самой жидкости — его еще называют «конвективный теплообмен». С ростом температуры $\Delta T > \Delta T_c$ доля теплового потока, переносимого конвекцией, возрастает, и поэтому о формировании ячеек Бенара часто говорят как о конвективной неустойчивости.

Попробуем разобраться, не прибегая к громоздким вычислениям, почему при $R > R_c$ ячейки шестигранны. Будем считать, что все ячейки одинаковы и имеют форму многоугольника в плоскости x, y. Из соображений симметрии (отсутствия выделенного направления в этой плоскости) следует, что это будет правильный многоугольник. Так как ячейки одинаковы, ими можно заполнить всю плоскость (иначе было бы несколько типов ячеек). А плоскость можно заполнить только правильными треугольниками, квадратами и шестиугольниками.

Но почему же природа выбрала для ячеек форму шестиугольника, а не треугольника или квадрата?

Для нелинейных систем, изучаемых синергетикой, можно сформулировать принцип минимальной диссипации энергии. Он не является строго доказанным утверждением, но вместе с тем он опирается на опыт изучения многих нелинейных систем. Не претендуя на строгость, его можно сформулировать так: «Когда природа допускает существование нескольких процессов, достигающих

одной и той же цели, то реализуется тот, который требует минимальных энергетических затрат»[12].

Применим этот принцип к нашей задаче.

Диссипация энергии в жидкости будет зависеть от отношения площади ячейки к ее объему. Чем меньше это отношение, тем меньше диссипация энергии. Нетрудно убедиться, что это отношение минимально именно для шестигранных ячеек. Ячейки Бенара похожи на пчелиные соты, форма которых обеспечивает наибольшую вместимость при наименьших затратах материала. Шестигранные ячейки, как видим, не случайность, а оптимальное решение, найденное природой.

Будем увеличивать разность температур ΔT. Ячейки исчезают. Жидкость начинает двигаться неупорядоченно, в ней возникают и быстро исчезают вихри, участки, где жидкость двигается вверх и вниз, хаотически перемещаются по поверхности. Такое движение жидкости называют турбулентным. Его изучение представляет собой очень важную задачу. Большие успехи в ее развитии достигнуты в последнее десятилетие.

Хаотическое движение жидкости наводит на мысль об использовании случайных функций, с которыми мы имели дело, рассматривая поведение брюсселятора и флюктуирующие силы, действующие на шарик. И тут возникает вопрос, который волнует ученых почти сто лет. Заложен ли случайный характер процессов в самих уравнениях гидродинамики или для его объяснения надо привлекать какие-то другие процессы (например, флюктуирующие силы), которые в самих уравнениях не содержатся? На первый взгляд ответ кажется очень простым. Начальные и краевые условия должны полностью определять все решение уравнения при $0 \leqslant t < \infty$, и никакой случайности тут места нет. А что если решение не единственно (простейший пример неединственности дает дифференциальное уравнение $dx/dt = x^{1/3}$: начальному условию $x = 0$ при $t = 0$ удовлетворяют сразу два решения: $x(t) = 0$ и $x(t) = (2/3)^{3/2} t^{3/2}$) и система то и дело «перепрыгивает» с одного решения на другое? А если для некоторых начальных данных вообще не существует решения при $0 \leqslant t < \infty$? Затраченные учеными усилия показывают, что вопрос о природе турбулентности, о причинах появления случайности (или, как ее называют, стохастичности) в движении жидкости является

[12] *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979.

глубоким и сложным. Этот вопрос важен для решения многих конкретных задач.

Понять то, что мы видим, когда ячейки пропадают и происходит переход к хаосу, поможет нам упрощенная модель, предложенная в начале семидесятых годов и исследованная Э. Лоренцем.

Мы поступим так, как уже предлагалось действовать выше: выделим неустойчивые моды (гармоники). В самом грубом приближении влиянием остальных гармоник можно пренебречь.

В результате мы получим систему уравнений (систему Лоренца), связывающую скорость жидкости X с величинами Y и Z, характеризующими ее температуру:

$$dX/dt = \sigma Y - \sigma X, \quad dY/dt = -XZ + rX - Y,$$
$$dZ/dt = XY - bZ. \qquad (39)$$

Здесь $r = R/R_c$, где R — число Рэлея, R_c — критическое число Рэлея; σ — число Прандтля, а b — постоянная (в нашем случае $b = 8/3$).

Поговорим теперь немного о системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Оказывается, множества решений очень большого числа дифференциальных уравнений похожи друг на друга. У них одинаковое количество стационаров, их решения ограничены и т. д. Эти вопросы изучает качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее основы были заложены французским математиком Анри Пуанкаре, работавшим в конце прошлого и начале нашего века. Его перу принадлежат сотни работ и около 30 книг, предвосхитивших развитие многих областей математики. В частности, ему принадлежит следующий замечательный результат. Решение системы уравнений (мы не будем уточнять детали формулировки)

$$dX/dt = P(X, Y), \quad dY/dt = Q(X, Y),$$

существующие при $0 \leqslant t < \infty$, в общем случае выходят либо на стационарное решение, либо на периодический режим. На первый взгляд кажется, что иначе и быть-то не может, сколько бы уравнений мы ни взяли (лишь бы они не зависели от t явно). Доказать это не удавалось, но интуитивно утверждение казалось очевидным. Успокаивала мысль, что если это и не так, то исключения, наверное, очень редки.

Исследование модели Лоренца (39) позволило взглянуть на этот вопрос по-новому.

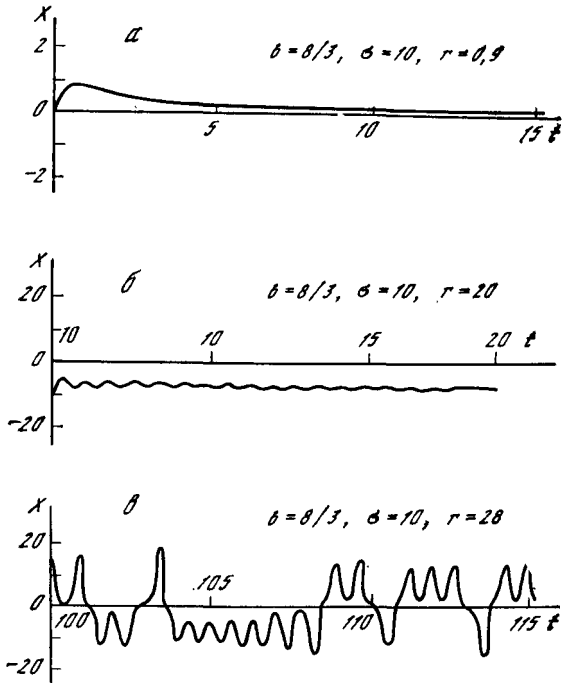


Рис. 18. Три типа поведения решений системы Лоренца

а — для состояний, лежащих на термодинамической ветви (аттрактор — точка $X=0$, $Y=0$, $Z=0$); *б* — для случая возникновения стационарных структур (аттрактор — две точки: $X=\sqrt{b(r-1)}$, $Y=\sqrt{b(r-1)}$, $Z=r-1$ и $X=-\sqrt{b(r-1)}$, $Y=-\sqrt{b(r-1)}$, $Z=r-1$); *в* — для случая, соответствующего хаосу (система обладает странным аттрактором)

При $r<1$ (что соответствует числам Рэлея, меньшим критического) $X\to 0$, $Y\to 0$, $Z\to 0$ при $t\to\infty$ (рис. 18). Это естественно: диссипативных структур не возникает, состояние соответствует термодинамической ветви.

При $r>1$, $\sigma<b+1$ либо $X\to\sqrt{b(r-1)}$, $Y\to\sqrt{b(r-1)}$, $Z\to r-1$ при $t\to\infty$ (см. рис. 18), либо $X\to-\sqrt{b(r-1)}$, $Y\to-\sqrt{b(r-1)}$, $Z\to r-1$ при $t\to\infty$. Начинается конвективное движение жидкости, возникают стационарные ячейки Бенара.

Но оказывается, что самым неожиданным образом ведет себя решение в области, где $\sigma>b+1$ и $r>\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma+1-b)$. Здесь, как показывают многочисленные расчеты, проведенные на ЭВМ, решение не выходит ни на стационарный, ни на периодический режим. Такое

решение показано на рис. 18. Здесь видно, что вначале происходит несколько колебаний увеличивающейся амплитуды в области, где $X > 0$. Далее функция «перескакивает» в область отрицательных значений. Здесь также наблюдается некоторое число колебаний, и вновь происходит «перескок» в положительную область. Число колебаний между «перескоками» может меняться в широких пределах. Можно ли сказать, что здесь мы имеем дело со случайным, или, как часто говорят, стохастическим процессом?

На первый взгляд ответ кажется отрицательным: формально начальные данные определяют всю дальнейшую судьбу системы. Но все дело в том, что решения системы Лоренца оказываются неустойчивыми: разность двух решений может быстро расти со временем, даже если их начальные данные были очень близки. Поскольку реально начальные данные всегда известны с некоторой погрешностью, то наши возможности предсказывать поведение системы оказываются ограниченными. То, что нельзя точно предсказать ход процесса, не проследив его весь, сближает систему Лоренца с вероятностными задачами.

Таким образом, системы дифференциальных уравнений могут описывать стохастические процессы без введения каких-либо флюктуирующих сил. Такие системы привлекают сейчас внимание математиков, физиков, биологов. Их все чаще называют системами, имеющими странные аттракторы. Аттракторы — это то множество значений, на которые система выходит при $t \to \infty$. (Такой выход часто можно рассматривать как «забывание» начальных данных. С целого класса начальных данных происходит выход на одно решение.) Поскольку до модели Лоренца аттракторы обычно представляли как множество изолированных особых точек или замкнутых кривых, то все остальные аттракторы отнесли к странным.

Сама система Лоренца была предложена как одна из упрощенных моделей физики атмосферы. И в этой связи возникает вопрос: можем ли мы в принципе предсказывать состояние атмосферы на достаточно большое время? Безусловно, глядя на процесс, описываемый системой Лоренца, не надо уподобляться одному древнегреческому философу, утверждавшему, что он знает, что ничего не знает. В самом деле, если известны уравнения, значения содержащихся в них функций в данный момент, то можно дать кратковременный прогноз поведения си-

стемы. Для этого достаточно использовать некоторые линеаризованные уравнения. Но что касается долговременных прогнозов, то сколько бы мы ни наблюдали систему, время от времени нам придется констатировать, что «функция достигла таких значений первый раз за 125 перескоков». Безусловно, модель Лоренца не избавляет от построения более полных и точных моделей атмосферы. Но она показывает, с какой ситуацией мы можем столкнуться при рассмотрении этих моделей.

В 70-е годы было показано, что многие процессы описываются либо уравнениями Лоренца, либо системами уравнений, у которых есть странные аттракторы. Такие уравнения описывают поведение некоторых типов волн в плазме, многие химические реакции в открытых системах, изменение численности определенных биологических сообществ, генерацию лазера в некотором диапазоне параметров. Делаются попытки связать модели со странными аттракторами и циклы солнечной активности.

В одной работе по странным аттракторам высказана мысль, что каждая новая идея проходит в своем развитии три этапа. Сначала говорят: «Это невозможно», потом: «Это не доказано» и затем: «Это общеизвестно». Исследования странных аттракторов очень быстро проходят весь путь, как, впрочем, и большинство других идей, связанных с синергетикой. В нелинейном языке, на котором ученые все чаще описывают природу, с исследованием странных аттракторов появились новые понятия.

Важно подчеркнуть, что возможность перейти к новому кругу идей дали упрощенные математические модели, качественно передающие основные черты поведения нелинейной системы. Возникновение новых представлений, подходов, идей, в котором огромную роль сыграл вычислительный эксперимент, привело к «цепной реакции» новых работ, идей, результатов в математике, физике, биологии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Успехи в решении многих задач позволили выделить в них общие закономерности, ввести новые понятия и на этой основе сформулировать новую систему взглядов — синергетику. Она изучает вопросы самоорганизации и поэтому должна давать картину развития и принципы самоорганизации сложных систем, чтобы применять их

в управлении. Впервые делается попытка описать саморазвитие мира в соответствии с его внутренними законами, опираясь на результаты целого комплекса точных наук. Эта задача имеет огромное значение, и, по нашему мнению, успехи в ее исследовании будут означать продвижение в решении глобальных задач: проблемы управляемого термоядерного синтеза, экологических проблем, задач управления и др.

Синергетика связана с глубокими философскими вопросами. Некоторые ее представления близки к философским взглядам Древнего Востока, где акцент делался на целостности системы, где подчеркивалась необходимость таких воздействий на природу и человека, которые были бы согласованы с их внутренними свойствами. Та же мысль выражается словами «резонансное возбуждение», мы их часто использовали и объясняли ранее. Резонансное воздействие может быть очень слабым, но влияние его сказывается достаточно долго, и система ведет себя не так, как это было бы во всех других случаях. Легко представить себе, какие огромные возможности дает знание законов резонансного воздействия на сложные системы. Это особенно важно в тех случаях, когда такие воздействия нельзя искать методом проб и ошибок.

Мы понимаем, что все приведенные примеры относятся к модельным задачам, и многим профессионалам, работающим в соответствующих областях науки, они могут показаться слишком простыми. В одном они правы: использование идей и представлений синергетики не должно подменять глубокого анализа конкретной ситуации. Выяснить, каким может быть путь от модельных задач и общих принципов к реальной проблеме,— дело специалистов. Авторы представляют, как проходился этот путь при исследовании ряда диссипативных структур в физике плазмы. Кратко можно сказать так: если в изучаемой системе можно выделить один самый важный процесс (или небольшое их число), то проанализировать его поможет синергетика. Она указывает направление, в котором нужно двигаться. И, по-видимому, это уже много.

Исследование большинства реальных нелинейных задач было бы невозможно без вычислительного эксперимента, без построения приближенных и качественных моделей изучаемых процессов (синергетика играет важную роль в их создании). Оба подхода дополняют друг друга. Эффективность применения одного зачастую определяется успешным использованием другого. Поэтому будущее

синергетики тесно связано с развитием и широким использованием вычислительного эксперимента.

Изученные в последние годы простейшие нелинейные среды обладают сложными и интересными свойствами. Структуры в таких средах могут развиваться независимо и быть локализованы, могут размножаться и взаимодействовать. Эти модели могут оказаться полезными при изучении широкого круга явлений.

Каковы возможные направления дальнейшего развития идей синергетики?

В настоящее время опубликовано около тысячи работ, в которых изучаются различные нелинейные двухкомпонентные среды. Естественно, возникает задача классификации таких сред. Для более простого класса объектов эта задача была успешно решена в теории катастроф Тома. Появился ряд интересных подходов, связанных с описанием широкого класса систем типа «реакция—диффузия».

В 70-е годы большое внимание в прикладной математике уделялось теории нелинейных волн. Получены замечательные результаты, разработаны новые методы анализа. Нелинейные волновые процессы могут играть важную роль в открытых диссипативных системах. Поэтому достижения теории нелинейных волн, возможно, дадут новое направление в развитии идей синергетики.

Быстро растет число экспериментальных работ, в которых идеи и принципы синергетики эффективно используются при исследовании конкретных систем. Среди них работы по изучению маломодового хаоса в гидродинамике и в различных колебательных реакциях, по анализу диссипативных структур в химической технологии, в физике плазмы.

Синергетика охватывает очень широкий круг задач. Трудно предвидеть, в какой области использование ее идей окажется наиболее плодотворным. Мы желаем читателям успехов в освоении и применении синергетики и в дальнейшем ее развитии.

РЕКОМЕНДУЕМ ПРОЧИТАТЬ

О методах и перспективах синергетики.

На широкий круг читателей рассчитаны:

Романовский Ю. М. Принципы самоорганизации в физике, химии и биологии. М.: Знание, 1981.

Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. М.: Мир, 1979.

Иваницкий Г. Р. Борьба идей в биофизике. М.: Знание, 1982. (Сер. Биология; № 6).

Кадомцев Б. Б., Рыдник В. И. Волны вокруг нас. М.: Знание, 1981.

О постановке вычислительного эксперимента и роли упрощенных моделей:

Самарский А. А. Что такое вычислительный эксперимент? // Что такое прикладная математика. М.: Знание, 1980.

Моисеев Н. М. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979.

Более подготовленных читателей заинтересуют книги:

Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.

Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 354 с.

С моделью тепловых структур помогут ознакомиться работы:

Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982.

Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В. и др. Горение среды в виде сложных структур // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 6. С. 1330.

Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в средах с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 2.

Змитренко Н. В., Михайлов А. П. Инерция тепла. М.: Знание, 1982.

Широкий друг математических моделей биологических процессов рассмотрен в книгах:

Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.

Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978.

Кринский В. И., Медвинский А. Б., Панфилов А. В. Эволюция автоволновых вихрей. М.: Знание, 1986.

Странным аттракторам посвящена работа:

Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.

Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Парадоксы мира нестационарных структур. М.: Знание, 1985.

Самарский А. А., Курдюмов С. П., Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г. Нелинейные явления и вычислительный эксперимент // Вестн. АН СССР. 1985. № 9. С. 64—77.

Ряд математических вопросов, связанных с исследованием открытых нелинейных систем подробно рассмотрен в книге:

Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. Т. 28.

Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

ЯВЛЕНИЕ ИНЕРЦИИ ТЕПЛА

Н. В. ЗМИТРЕНКО, А. П. МИХАЙЛОВ

Процессы теплопроводности играют огромную роль в окружающей нас жизни — в явлениях природы, технике, быту. Без их знания невозможны были бы создание атомных реакторов и космических кораблей, строительство городов в районах вечной мерзлоты, изготовление нагревательных приборов и многие другие достижения человечества.

Первые научные представления о процессе теплопроводности сформировались еще в XVIII в., а в начале прошлого века усилиями многих замечательных ученых были заложены основы математической теории теплопроводности.

В настоящее время теория теплопроводности, результаты которой всегда сопоставлялись с практикой, с экспериментом, является одним из наиболее обширных и изученных разделов математической физики и прикладной математики.

История развития теории теплопроводности показывает мощь математического естествознания, основным содержанием которого является разработка и применение математических методов для решения задач механики, физики, химии, биологии и т. д. Прослеживая ее, можно хорошо видеть, как математика становится производительной силой. Полученные с помощью математики точные количественные результаты служат для совершенствования технологических процессов, создания новых уникальных аппаратов и устройств и зачастую позволяют на «кончике пера» или экране электронно-вычислительной машины обнаружить неизвестные ранее закономерности изучаемых явлений.

Цель данной статьи — продемонстрировать читателю, какую роль методы математики и информатики играют при изучении нового физического эффекта — инерции тепла, теоретически исследовавшегося в работах акаде-

мика А. А. Самарского, члена-корреспондента АН СССР С. П. Курдюмова и их сотрудников.

В исследовании этого эффекта принципиальную роль сыграл вычислительный эксперимент. Он помог выяснить качественную картину явления, сформировать новые понятия и представления. Его результаты оказались очень важными и при построении строгой математической теории явления.

Почему этот эффект интересен и в чем его сущность? Один из важнейших выводов о характере процесса теплопроводности, согласующийся с известным принципом термодинамики, состоит в том, что любые температурные неоднородности выравниваются с течением времени.

Инерция тепла означает в определенном смысле противоположное (и парадоксальное) протекание процесса теплопроводности. Действительно, при увеличении вклада энергии в среду тепло не распространяется в течение некоторого времени, а концентрируется, тепловое воздействие на среду оказывается локализованным на определенном ее участке.

Не противоречит ли это привычным представлениям? Нет. Сущность эффекта инерции тепла относительно проста и заключается в следующем. Хорошо известно, что скорость распространения тепла от горячих участков вещества к более холодным определяется пространственным распределением (профилем) температуры в веществе. Оказывается, существуют настолько «вогнутые», «пологие» распределения, что тепло в течение конечного времени задерживается в начальной области.

Возникает естественный вопрос: почему в столь хорошо изученной области этот эффект не был обнаружен ранее?

Дело в том, что инерционные профили температуры могут быть созданы только в том случае, если среда нагревается в режиме с обострением. Так называют режимы развития какого-либо процесса, когда некоторые характерные величины стремятся к бесконечности при приближении к конечному моменту времени. Режимы с обострением, несмотря на их внешнюю необычность, часто встречаются, например, в физических задачах. Однако в процессах теплопроводности они до настоящего времени систематически не изучались.

Таким образом, инерция тепла является внутренним свойством теплопроводной среды, а режимы с обострением, воздействуя на среду, «проявляют» это свойство.

Если ставить вопрос о практическом использовании эффекта инерции тепла, то требуется проверить условия применимости рассматриваемой модели, учесть осложняющие факторы и т. д.

Может ли инерция тепла быть обнаружена или это математическое свойство уравнений, предполагающее специфические среды, нереальные масштабы величин и т. д. Ответ таков: для реальных сред найдены условия, в которых осуществляется эффект локализации тепла. К настоящему времени создана общая теория и достигнуто понимание эффекта инерции тепла на физическом уровне.

Авторы при изложении старались придерживаться принципа «от простого — к сложному». На примере относительно простой нелинейной задачи излагаются результаты теории эффекта инерции тепла. При его исследовании используются автомодельные решения задач и теоремы сравнения решений. Теоремы сравнения отражают устойчивость процесса теплопроводности к различным возмущениям. В сочетании с автомодельными решениями они являются мощным методом исследования нелинейных задач теории теплопроводности. Результаты численных расчетов на ЭВМ, широко представленные в статье, дают наглядное представление об эффекте инерции тепла, позволяют сформулировать количественные условия его проявления.

Отметим, что вычислительный эксперимент не только не отрицает использование аналитических методов, но, напротив, предполагает их активное использование и дальнейшее развитие. О некоторых из них читатель узнает из этой статьи.

В свою очередь, автомодельные аналитические решения, ряд теоретических результатов оказали большое влияние на сам вычислительный эксперимент. Появились новые постановки задач — явление инерции тепла исследовалось в более сложных физических ситуациях. Найденные аналитические решения широко применяются при тестировании и отладке больших программных комплексов: анализ режимов с обострением и локализованных процессов предъявил новые требования к численным методам.

В статье показано, что явление инерции тепла носит общий характер и имеет место во многих сложных ситуациях.

Описание реальной среды с помощью приведенных моделей возможно далеко не всегда. В принципе надо

учитывать газодинамическое движение, поступление и потери энергии за счет различных физических эффектов и т. д.

Однако во многих случаях развитие режима с обострением приводит к «замораживанию» различных дополнительных эффектов, и при этом в полной мере проявляются изученные закономерности. Эти закономерности «работают» в реальных ситуациях и могут быть практически полезны.

Все изложенные результаты в силу общности математического описания справедливы не только для диффузии тепла, но и для любых диффузионных процессов. Тем самым экспериментальное исследование явления инерции тепла приобретает большое значение.

ПОНЯТИЕ РЕЖИМОВ С ОБОСТРЕНИЕМ

Начнем с забавного примера, заимствованного из «Журнала Британского межпланетного общества». Автор статьи обсуждает животрепещущий вопрос — рост численности населения Земли. Приводятся следующие соображения.

Пусть темп роста населения пропорционален произведению числа мужчин и женщин. Следовательно, справедливо уравнение

$$dN/dt = \alpha N_1 N_2, \tag{1}$$

где $N(t)$ — число жителей Земли, N_1, N_2 — количество мужчин и женщин, $0 < \alpha < 1$ — некоторый коэффициент пропорциональности. Приняв с большой точностью, что $N_1 = N_2 = N/2$, перепишем (1) в виде

$$dN/dt = \alpha N^2/4 \tag{2}$$

и проинтегрируем (2) от некоторого момента t_0 до момента t:

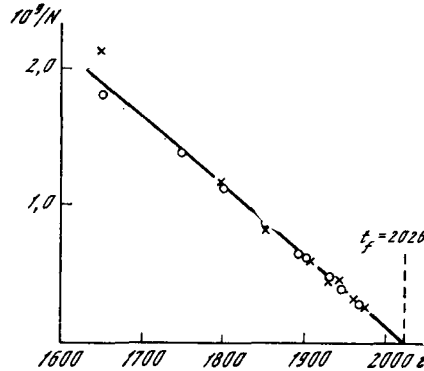
$$\frac{4}{\alpha}\left(-\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{N(t_0)}\right) = t - t_0,$$

откуда получаем

$$N(t) = \frac{4}{\alpha}\,\frac{1}{t_0 + \frac{4}{\alpha}N^{-1}(t_0) - t} = \frac{4}{\alpha(t_f - t)}, \tag{3}$$

где $t_f = t_0 + (4/\alpha)N^{-1}(t_0) > t_0$.

Согласно (3) число обитателей земного шара станет бесконечным в момент $t = t_f$!



ис. 1. Рост численности аселения Земли
атистические данные из раз-ых источников отмечены кру-очками и крестиками

Сопоставляя формулу (3) с имеющимися анными, можно вычислить величину α и ень точно предсказать ремя «конца света».

На рис. 1 приведена инамика роста численности населения емли в течение нескольких последних веков. Начиная XX в. статистические данные хорошо согласуются с ависимостью (3) — прямой линией. «Катастрофа» произойдет в пятницу 13 ноября 2026 г.

Разумеется, человечество может спать спокойно — существует немало очевидных причин, ограничивающих ост населения. По недавно опубликованному прогнозу ООН к середине следующего века на нашей планете будет проживать примерно 10 млрд человек.

Режимы с обострением, т. е. процессы, когда какие-ибо величины обращаются в бесконечность в некоторый онечный момент времени $t=t_f$ (*время обострения*), оделируют сильно нестационарные, быстро растущие о времени явления. Такие процессы иногда называют взрывными». Однако этот термин закрепился также за влениями, в которых величины растут экспоненциально, е. быстро, но все-таки не в режиме с обострением. о избежание путаницы не будем пользоваться этим ермином.

В реальной ситуации всегда действуют причины, раничивающие обострение. Процесс «не доходит» до есконечности. Однако новые, необычные свойства бостряющихся процессов могут проявиться и задолго до включения» ограничивающих эффектов.

Еще одним, уже вполне реальным примером режима обострением служит процесс схлопывания пузырьков аза в жидкостях.

Если нарушаются условия равновесия пузырька, скажем, резко поднимается давление в жидкости, то поверхность раздела газ—жидкость начинает схлопываться к его ентру. Развивается режим с обострением: например,

давление в жидкости вблизи поверхности пузырька меняется по закону $\sim (t_f - t)^{-6/5}$, где t_f — время схлопывания.

Обострение в этом случае обусловлено кумулятивным эффектом. Поверхность границы уменьшается пропорционально квадрату радиуса пузырька. Хотя энергия, характеризующая процесс, конечна, удельные параметры — давление, плотность энергии — неограниченно возрастают. Сходные процессы имеют место при кумуляции сферической ударной волны к ее центру.

Реально рост давления ограничен сжимаемостью жидкости, процессами вязкости и теплопроводности, противодавлением газа в пузырьках, несимметричностью кумуляции и рядом других факторов. Тем не менее в воде давление около пузырька воздуха успевает вырасти до нескольких сотен атмосфер. Локальное повышение давления приводит к образованию сильных ударных волн, распространяющихся в жидкости.

Именно этим механизмом объясняется повреждение поверхности движущихся в воде лопастей турбин и гребных винтов (кавитация). Согласно некоторым современным представлениям алмазы образовались в результате схлопывания пузырьков газа в расплавленных горных породах.

Свыше 10 лет назад был предложен один способ достижения сверхвысоких плотностей в веществе. Его упрощенная схема выглядит следующим образом.

Имеется газовый шар, поверхность которого равномерно облучается лазером. Излучение поглощается на границе этого шара. Сильно нагретые внешние слои испаряются и разлетаются к периферии. Давление на границе испаренного вещества растет, неиспаренная внутренняя часть шара начинает сжиматься.

Обычно в результате повышения давления образуются ударные волны, которые, проходя по неиспаренной массе газа, нагревают ее. Процесс сжатия затрудняется, так как для достижения заданной плотности теперь надо затратить больше энергии, чем в случае холодного газа. Указанную трудность удается избежать, если мощность лазерного импульса изменяется в режиме с обострением:

$$G(t) = G_0 (t_f - t)^n, \qquad (4)$$

где $n = -(9\gamma - 7)/(3\gamma - 1)$ определяется показателем адиабаты газа γ (для водорода $\gamma = 5/3$, $n = -2$).

Режим (4) обеспечивает безударное сжатие газового пара в принципе до любых плотностей (реально процесс прерывается в некоторый момент $t < t_f$).

Этот вывод следует из соответствующих решений уравнений газовой динамики и подтвержден с помощью вычислительного эксперимента.

Практическая реализация принципа «сверхсжатия» сталкивается как с трудностями создания лазеров с нужными параметрами, так и с появлением дополнительных физических эффектов, ухудшающих сжатие.

Можно выделить несколько причин возникновения режимов с обострением. Первая из них — нелинейность процесса. В уравнении вида $du/dt = F(u)$, $t > 0$, $u(0) = u_0 > 0$ режим с обострением возникает, если правая часть достаточно быстро стремится к бесконечности при $u \to \infty$, точнее, при условии, что $\int\limits_{u_0}^{\infty} \frac{du}{F(u)} < \infty$[1]. При этом в теории дифференциальных уравнений говорят, что решение не существует «в целом». Пример такого решения (3) приведен выше. В противном случае решение существует для всех $t > 0$.

Другая причина — кумуляция и близкие к ней эффекты, связанные с пространственной неоднородностью начальных условий. Например, ударная волна, выходящая на поверхность звезды, неограниченно ускоряется благодаря резкому падению плотности у поверхности.

Наконец, режим с обострением может быть «навязан» объекту извне с помощью граничных условий.

При изучении эффекта инерции тепла мы будем в основном иметь дело с последним случаем, который назовем *граничным режимом с обострением.*

ИНЕРЦИЯ ТЕПЛА ПРИ НАГРЕВЕ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СРЕДЫ В РЕЖИМЕ С ОБОСТРЕНИЕМ

Пусть на границе теплопроводной среды температура растет в режиме с обострением. Каковы в этом случае свойства процесса распространения тепла?

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию. Будем предполагать, что процесс одномерный, в веществе нет

[1] Обычные требования, налагаемые на функцию $F(u)$ и обеспечивающие существование решения, считаем выполненными.

никаких источников и стоков тепла, среда однородна; начальная температура равна нулю либо во всем веществе, либо достаточно далеко от границы. Примем, что коэффициент температуропроводности (см. ниже уравнение (5)) зависит от температуры степенным образом: $k(T)=k_0T^\sigma$, $\sigma>0$. Параметр σ характеризует нелинейность среды. Приведем ряд характерных примеров.

Лучистая теплопроводность. В ряде случаев в очень горячем веществе (плазма, атмосферы звезд) перенос тепла осуществляется излучением. Коэффициент теплопроводности (равный коэффициенту температуропроводности, умноженному на удельную теплоемкость единицы объема) сильно зависит от температуры: $\varkappa_R \sim T^{6,5}$.

Это классический пример так называемой нелинейной теплопроводности: при линейной зависимости теплового потока от градиента температуры коэффициент пропорциональности существенным образом зависит от температуры.

Электронная теплопроводность. В плазме более легкие и подвижные по сравнению с ионами электроны часто являются основными переносчиками тепла. При этом во многих практически интересных случаях электроны представляют собой идеальный газ. Для него $\varkappa_e \sim T^{5/2}$.

Молекулярная теплопроводность — это механизм теплопроводности в газе, находящемся при обычных условиях. Переносчиками тепла являются молекулы газа. Коэффициент молекулярной теплопроводности $\varkappa_M \sim \sqrt{T}$.

Отметим, что степенная зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, помимо рассмотренных случаев, справедлива и для многих других сред.

Для справки укажем численные значения некоторых коэффициентов теплопроводности.

Коэффициент лучистой теплопроводности водородной плазмы (смесь протонов и электронов разных концентраций) плотности и температуры T задается формулой

$$\varkappa_R = 1{,}2\cdot 10^4 T^{6,5}\rho^{-2} \text{ эрг эВ}^{-1}\text{см}^{-1}\text{с}^{-1}.$$

Для той же водородной плазмы при 10^{-4} г см$^{-3}<\rho<10^4$ г см$^{-3}$, 1 эВ $<T<10^6$ эВ *коэффициент электронной теплопроводности*

$$\varkappa_e = 3{,}1\cdot 10^8 T^{5/2} \text{ эрг эв}^{-1}\text{см}^{-1}\text{с}^{-1}.$$

Коэффициент ионной теплопроводности в такой плазме в 43 раза меньше электронной ($\varkappa_i \approx \varkappa_e\sqrt{m_e/m_p}$, где m_e — масса электрона, m_p — масса протона).

Коэффициент молекулярной теплопроводности для аргона (одноатомный газ)

$$\varkappa_M = 1{,}2 \cdot 10^8 T^{1/2} \text{ эрг эВ}^{-1}\text{см}^{-1}\text{с}^{-1}.$$

При сделанных предположениях процесс моделируется следующей первой краевой задачей в полупространстве для уравнения нелинейной теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad x > 0, \tag{5}$$

$$-\infty < t_0 \leqslant t < t_f < \infty, \tag{6}$$

$$T(0, t) \to \infty, \quad t \to t_f,$$

$$T(x, t_0) = T_0(x), \quad T_0(x) \equiv 0, \quad x > R, \tag{7}$$

где t_0 — время начала процесса нагрева, $0 \leqslant R < \infty$ — некоторая константа (это так называемые «финитные» начальные данные).

Для удобства проведем «сдвиг» по времени и положим время обострения $t_f = 0$, тогда $t_0 \leqslant t < 0$. Этот чисто формальный прием не должен нас смущать: время по-прежнему *возрастает*, течет от прошедшего к будущему.

Проведем моделирование процесса нагрева на ЭВМ и посмотрим, как происходит прогрев нелинейной среды, если на ее границе температура меняется в режиме с обострением. Расчеты показывают, что процесс распространения тепла может качественно отличаться в зависимости от граничного режима (рис. 2).

В одном случае тепло неограниченно распространяется в среде (рис. 2, *а*). Нагретые участки передают тепло еще не прогревшимся. Все происходит в соответствии с нашими интуитивными представлениями о теплопереносе.

Но есть и два других режима, которые на первый взгляд кажутся поразительными (рис. 2, *б* и 2, *в*). Несмотря на неограниченный рост температуры, тепло локализовано и не распространяется за определенную границу.

Использовать такие режимы прогрева было бы очень заманчиво, например в технологических процессах или в задачах физики плазмы.

Сначала мы расскажем о математических методах исследования таких режимов. Многие из них приводят

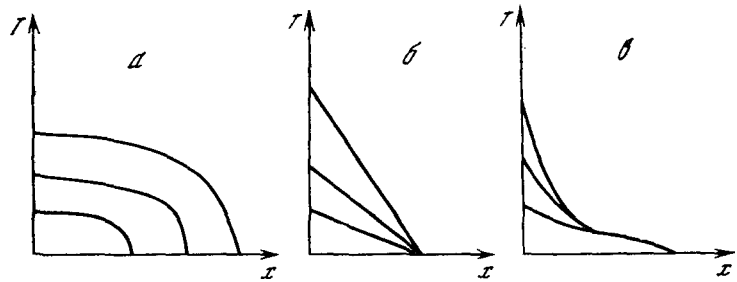


Рис. 2. Различные режимы распространения тепла

не только к объяснению результатов вычислительного эксперимента, но и к возникновению новых понятий и представлений.

В 1963 г. А. А. Самарский и И. М. Соболь нашли частное решение задачи (5)—(7), обладающее необычными физическими свойствами:

$$T_s(x, t) = \begin{cases} A_s(-t)^{-1/\sigma}(1 - x/x_\Phi)^{2/\sigma}, & x \leqslant x_\Phi, \\ 0, & x > x_\Phi, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$x_\Phi = x_s \equiv \sqrt{2k_0 A_s^\sigma (\sigma + 2)/\sigma}, \tag{9}$$

константа $A_s > 0$ определяет интенсивность граничного режима, величина x_Φ — глубину проникновения тепловой волны в вещество.

На границе температура растет в режиме с обострением:

$$T(0, t) = A_S(-t)^{-1/\sigma}$$

Начальные условия (начальная температура) имеют вид

$$T_0(x) = T_S(x, t_0) = \begin{cases} A_S(-t_0)^{-1/\sigma}\left(1 - \dfrac{x}{x_\Phi}\right)^{2/\sigma}, & x \leqslant x_\Phi, \\ 0, & x > x_\Phi. \end{cases}$$

В чем же проявляется необычность свойств этого решения? Из (8) видно, что фронт волны неподвижен, а полуширина нагретой области постоянна.

Решение (8) описывает остановившуюся (!) тепловую волну (рис. 3. Здесь и далее, если это специально не оговорено, значения моментов времени и параметров даны в условных единицах). Будем называть его S-ре-

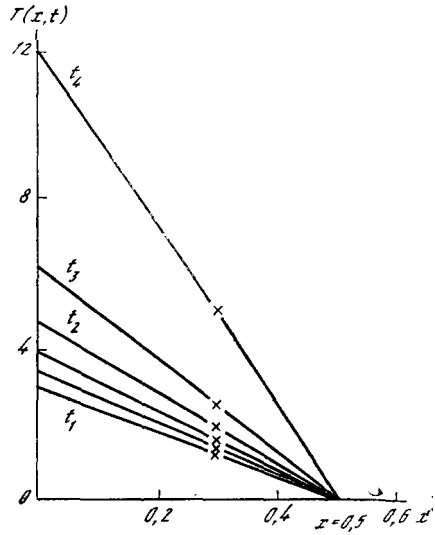


Рис. 3. Решение S-режима (2.8) для разных моментов времени

$t_0 = t_1 = -1{,}25 \cdot 10^{-2}$, $t_2 = -5{,}3 \cdot 10^{-3}$, $t_3 = -2{,}9 \cdot 10^{-3}$, $t_4 = -9 \cdot 10^{-4}$, (параметры: $k_0 = 0{,}5$, $\sigma = 2$, $A_0 = 0{,}354$; $n = -0{,}5$; крестиками отмечена полуширина тепловой волны)

жимом. В этом режиме при $t \to 0$ в вещество поступает неограниченное количество энергии, температура и коэффициент теплопроводности при всех $0 \leqslant x \leqslant x_s$ стремятся к бесконечности.

Тем не менее в течение всего процесса тепло не проникает далее точки с координатой $x = x_s$, которая определяется интенсивностью граничного режима A_s и свойствами вещества k_0, σ.

Будем говорить, что имеет место эффект инерции, или *локализации тепла*.

Решение (8) показывает, что процесс теплопроводности может быть локализован в области конечных размеров — *области локализации* (x_s — *глубина локализации*). Появляется возможность концентрировать любое количество энергии в ограниченных участках среды без распространения ее за пределы зоны локализации.

Возникает естественный вопрос о степени общности эффекта. Ведь решение (8) соответствует строго фиксированным краевым условиям и свойствам среды и, кроме того, был сделан ряд упрощающих предположений. Не является ли оно некоторой математической «экзотикой», не имеющей реального физического содержания?

Чтобы ответить на этот вопрос, будем последовательно усложнять ситуацию.

Прежде всего рассмотрим более широкий класс граничных режимов с обострением.

При исследовании оказываются полезными так называемые теоремы сравнения решений параболических уравнений. Для рассматриваемой ситуации из теоремы

сравнения следует, что выполнение неравенств

$$T_0^{(1)}(x) \leqslant T_0(x) \leqslant T_0^{(2)}(x), \quad 0 \leqslant x < \infty,$$
$$T^{(1)}(0, t) \leqslant T(0, t) \leqslant T^{(2)}(0, t), \quad t > 0$$

влечет за собой неравенство

$$T^{(1)}(x, t) \leqslant T(x, t) \leqslant T^{(2)}(x, t), \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad t > 0.$$

Здесь $T^{(1)}(x, t)$, $T(x, t)$, $T^{(2)}(x, t)$ — решения задачи, соответствующие краевым условиям $T_0^{(1)}(x)$, $T_0(x)$, $T_0^{(2)}(x)$ $T^{(1)}(0, t)$, $T(0, t)$, $T^{(2)}(0, t)$.

Теоремы сравнения имеют ясный физический смысл — большее (меньшее) тепловое действие на среду приводит к формированию большего (меньшего) поля температур в ней в любой момент времени. Тем самым, используя частные решения, например решение (8), можно оценить (ограничить сверху и снизу) изучаемое решение и, не зная его в деталях, сделать выводы общего характера. Пусть граничная температура $T(0, t)$ в (6) такова, что $T_0(0, t) \leqslant A_s(-t)^{-1/\sigma}$ при $t_0 \leqslant t < 0$, а начальная температура $T_0(x) \leqslant T_s(x, t_0)$, т. е. краевые условия произвольны, но ограничены сверху краевыми условиями для S-режима.

Тогда из теоремы сравнения и из свойств S-режима сразу следует, что в задаче (5) — (7) имеет место локализация тепла!

При этом глубина локализации $x_ф$ не превосходит величину $x_s (x_ф \leqslant x_s)$, а решение в зоне локализации ограничено сверху (мажорируется) функцией $T_s(x, t)$.

Существует широкий класс граничных режимов и начальных данных, приводящих к локализации тепла. Для этого достаточно, чтобы они мажорировались S-режимом[2].

Однако полученный результат не дает полного ответа на поставленный вопрос.

Во-первых, существуют граничные режимы, которые нельзя мажорировать функцией $T_s(0, t)$, например $T(0, t) = A_0(-t)^n$, где $n < -1/\sigma$. В этом случае из решения (8) и теорем сравнения нельзя получить информацию о локализации тепла или ее отсутствии.

---

[2] Ясно, что всегда можно указать S-режим, мажорирующий также любой режим без обострения. Это означает лишь то, что за время $t_0 \leqslant t < 0$ тепло не проникает за точку $x = x_s$ (конечная скорость), но температура при $0 \leqslant x < x_s$ в отличие от режимов с обострением ограничена.

Во-вторых, необходимо установить детальные пространственно-временные характеристики режимов с обострением.

Дальнейший шаг в исследовании состоит в том, что сначала строится широкий класс автомодельных решений задач (5)—(7), обладающих разнообразными физическими свойствами.

Автомодельные решения соответствуют некоторому частному виду функций $T(0, t)$, $T_0(x)$, их построение выглядит следующим образом.

Из теории размерностей следует выбор граничного условия в виде степенной функции времени

$$T(0, t) = A_0(-t)^n, \quad n < 0, \quad A_0 = \text{const} > 0, \tag{10}$$

так как $k(T)$ — степенная функция температуры. Параметр n характеризует скорость роста температуры на границе. Как будет показано ниже, отсутствие или наличие локализации зависит от соотношения между n и σ.

Далее необходимо исключить из задачи параметры, «мешающие» автомодельности. Для этого положим формально $t_0 = -\infty$, а в качестве начальной температуры возьмем «нулевой фон»[3]:

$$T(x, -\infty) \equiv 0, \quad x > 0. \tag{11}$$

Задача (5), (10), (11) автомодельна, ее решение имеет вид

$$T(x, t) = A_0(-t)^n f(\xi), \tag{12}$$

где

$$\xi = x/\left[k_0^{1/2} A_0^{\sigma/2} (-t)^{(1+n\sigma)/2}\right] \tag{13}$$

— автомодельная координата, которая отличается от реальной пространственной координаты лишь масштабным, зависящим от времени коэффициентом (прямые скобки). Случай $n = -1/\sigma$ соответствует S-режиму ($\xi \sim x$)[4].

Рассмотрим физические свойства решений.

а. В случае $n < -1/\sigma$ волна имеет конечный фронт, координата которого неограниченно увеличивается при $t \to 0$. То же самое справедливо для полуширины волны.

---

[3] Одна из причин «популярности» этого приближения состоит в возможности сформулировать автомодельную задачу.

[4] О поведении решений и других свойствах математической модели (5) подробнее см.: *Змитренко Н. В., Михайлов А. П.* Инерция тепла. М.: Знание, 1982.

Проследим за судьбой решения в фиксированной точке $x = x_0 < \infty$. Отвечающая ей автомодельная координата стремится к нулю при $t \to 0$, а $T(x_0, t) \to \infty$, $t \to 0$.

Итак, при приближении к моменту обострения волна охватывает все пространство, температура (и поток тепла) в любой точке неограниченно возрастает. Говорить о локализации не приходится. Решение вполне аналогично «бегущей волне» (см. рис. 2, *а*), но «бесконечные» параметры достигаются в конечный момент времени. Происходит «сверхбыстрый» прогрев среды.

б. Совсем по-иному дело обстоит при $n > -1/\sigma$. Из (13) получаем, что полуширина волны стремится к нулю.

С решением подобного типа мы еще не сталкивались. Его можно назвать *тепловой волной с уменьшающейся эффективной глубиной прогрева*. С течением времени поступающая в вещество энергия сосредоточивается во все более сокращающейся области вблизи границы. Фронт тепловой волны находится в бесконечности. В автомодельном решении иначе быть и не может. Ведь фронту волны соответствует фиксированная автомодельная координата $\xi_ф$, и если $\xi_ф < \infty$, то его пространственная координата обязана сокращаться. В среде без стоков тепла такая ситуация, естественно, невозможна. Следовательно, необходимо, чтобы координата фронта была на бесконечности, т. е. $\xi_ф = \infty$.

В фиксированной точке $0 < x_0 < \infty$, $\xi(x_0, t) \to \infty$, $t \to 0$, т. е. соответствующая автомодельная координата в отличие от предыдущего случая стремится к координате фронта.

Можно показать, что при $t \to 0$, несмотря на беспредельный рост температуры в точке $x = 0$, температура во всем остальном пространстве ограничена (!) сверху некоторой *предельной кривой*. Естественно говорить в этом случае о локализации тепла.

Хотя построенные автомодельные решения соответствуют идеализированной ситуации (процесс начат в момент $t_0 = -\infty$, начальная температура равна нулю), их роль трудно переоценить.

Во-первых, они указывают на существование трех различных режимов распространения тепла в зависимости от скорости роста граничной температуры при $t \to 0$.

При $n = -1/\sigma$ осуществляется уже знакомый нам S-режим.

Случай $n < -1/\sigma$ будем называть *автомодельным* HS-режимом (от higher — выше), так как этот граничный закон превосходит любой граничный S-режим (рис. 4).

Автомодельный LS-режим (от lower — ниже) отвечает значениям $-1/\sigma < n < 0$ и является более «медленным», чем S-режим (см. рис. 4).

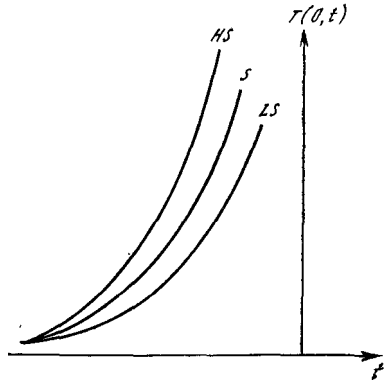


Рис. 4. Сравнение роста температуры в S-, HS- и LS-режимах

Мы будем придерживаться этой терминологии и в общем случае. Если при $t \to 0$ температура обращается в бесконечность лишь в точке $x = 0$, то будем говорить об LS-режиме, если в ограниченной области, то имеет место S-режим, если во всем пространстве, то HS-режим. Других возможностей, очевидно, не существует.

Во-вторых, автомодельные решения в сочетании с теоремами сравнения решений дают подробную информацию о решениях в общем случае. Они служат хорошими «ориентирами» среди множества решений нелинейной задачи.

Наконец, при определенных условиях решения неавтомодельных задач со временем приближаются к автомодельным и с хорошей точностью описываются ими.

Вернемся к задаче (5)—(7) и получим достаточные условия отсутствия или наличия локализации.

Рассмотрим сначала случай, когда в (7) $T_0(x) \equiv 0$, а температура на границе $T(0, t)$ в (6) растет не медленнее, чем в автомодельном HS-режиме, с некоторой постоянной A_0 и $n < -1/\sigma$: $T(0, t) \geqslant A_0(-t)^n$, $-\infty < t_0 \leqslant t < 0$. Будет ли иметь место локализация тепла?

Ответим на этот вопрос, имея в своем распоряжении соответствующие автомодельные решения. Поясним лишь ход рассуждений, не приводя их полностью.

Для некоторого момента времени t_* $(t_0 < t_* < 0)$ найдется автомодельное решение $T_a^*(x, t)$ в HS-режиме (отвечающее той же константе n и некоторой константе $A_0^* < A_0$), мажорируемое решением исходной задачи

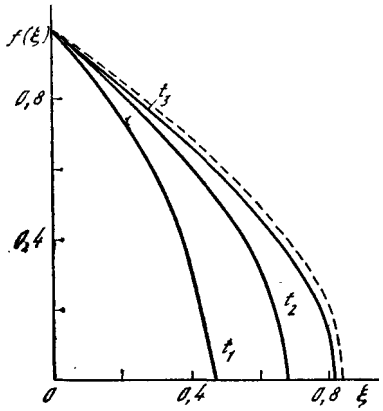


Рис. 5. Установление профиля температуры в HS-режиме
$t_1 = -0{,}92\cdot10^{-2}$, $t_2 = -6{,}15\cdot10^{-3}$, $t_3 = -1{,}05\cdot10^{-3}$ ($k_0 = 0{,}5$, $\sigma = 2$; $A_0 = 0{,}12$, $n = -1$, $t_0 = 0{,}112$; пунктиром указано решение задачи для $\tilde{f}(\xi)$)

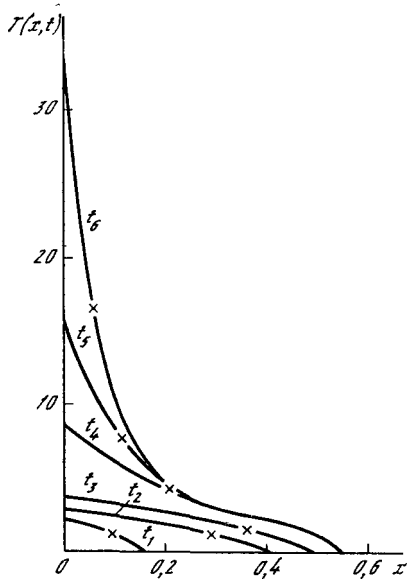


Рис. 6. Установление профиля температуры в LS-режиме
$t_1 = -1{,}02\cdot10^{-1}$, $t_2 = -3{,}1\cdot10^{-2}$, $t_3 = -1{,}05\cdot10^{-2}$, $t_4 = -3\cdot10^{-4}$, $t_5 = -2{,}4\cdot10^{-5}$, $t_6 = -10^{-6}$ ($k_0 = 0{,}5$, $\sigma = 2$; $A_0 = 1{,}06$, $n = -0{,}25$; $t_0 = 0{,}1125$, $T(x, t_0) = 0$)

$T(x, t)$. Это утверждение легко получается из теоремы сравнения с использованием решения типа «бегущей волны». Таким образом, $T_a^*(x, t) \leqslant T(x, t)$ при всех $x \geqslant 0$ для моментов времени $t_* \leqslant t < 0$.

Так как $T_a^*(x, t) \to \infty$ всюду при $t \to 0$, то и $T(x, t) \to \infty$ для всех $x \geqslant 0$ и $t \to 0$.

Итак, если $T(0, t) \geqslant A_0(-t)^n$, $n < -1/\sigma$, *то локализация в задаче* (5) — (7) *отсутствует.*

Утверждение об отсутствии локализации тем более будет справедливо, если в (7) $T_0(x) \neq 0$, в частности если начальные данные всюду будут отличны от нуля.

На рис. 5 приведены результаты расчета тепловой волны с помощью ЭВМ. Так как граничный закон автомоделен, то решение «выходит» на соответствующий автомодельный HS-режим.

Конкретизируем теперь свойства решений в случае

$$T(0, t) \leqslant A_S(-t)^{-1/\sigma}$$

Пусть $T(x, t_0) \equiv 0$, а $T(0, t) \leqslant A_0(-t)^n$, $n > -1/\sigma$, т. е. граничная температура не превосходит граничной температуры некоторого LS-режима. Решение задачи мажорируется решением для S-режима. Минимальная константа A_S в (6) определяется из условия равенства температур на границе в момент $t = t_0$:

$$A_0(-t_0)^n \equiv A_S(-t_0)^{-1/\sigma}.$$

Отсюда и из (9) следует уточненная *оценка для глубины локализации тепла*:

$$x_{LS} \leqslant x_S = \left[2k_0A_0^\sigma(\sigma+2)/\sigma\right]^{1/2}(-t_0)^{(1+n\sigma)/2}, \qquad (14)$$

т. е. глубина локализации тепла для LS-режима зависит также от времени начала процесса и увеличивается с увеличением $|t_0|$.

Решение рассматриваемой задачи мажорируется по начальным условиям автомодельным LS-режимом при тех же значениях σ, A_0, k_0 (в момент $t = t_0 > -\infty$ автомодельное решение отлично от нуля при всех $0 \leqslant x < \infty$). Следовательно, *в области локализации $T(x, t)$ ограничена предельной кривой. Сохраняется важнейшее свойство LS-режима.*

Если $T(x, t_0) \neq 0$ в конечной области, то, выбирая в автомодельных решениях константы A_S, A_0 достаточно большими, получим те же результаты (случай, когда начальная температура отлична от нуля во всем пространстве, рассмотрен ниже).

При нагреве среды в S-режиме тепловая волна сначала движется по веществу, полуширина области нагрева увеличивается. При некотором t_y, $t_0 < t_y < 0$, полуширина стабилизируется, фронт приближается к точке $x = x_S$ и решение практически не отличается от автомодельного.

Численный расчет процесса распространения тепла в LS-режиме приведен на рис. 6. Волна продвигается до момента $t_y = t_4 = -3 \cdot 10^{-4}$, после чего фронт практически останавливается, а полуширина волны начинает сокращаться. Решение в области $0 \leqslant x \leqslant x_{LS}$ приобретает автомодельный характер. В окрестности фронта автомодельность нарушается, из-за локализации фронт не может «уйти на бесконечность», как в автомодельном решении. Отметим без доказательства, что для $n \leqslant -1/(\sigma+2)$ поступающая в среду при $t \to 0$ энергия бесконечна (несмотря на наличие предельной кривой).

При $n > -1/(\sigma+2)$ в среду поступает ограниченное количество энергии.

Итак, в рамках задачи (5)—(7) мы получили исчерпывающие сведения о действии граничных режимов с обострением на теплопроводную среду и убедились в общем характере эффекта инерции тепла. Обсудим теперь физические причины, приводящие к инерции тепла, а потом перейдем к дальнейшим обобщениям.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ ИНЕРЦИИ ТЕПЛА

Естественно напрашивается простое толкование эффекта локализации: поскольку среда нагревается в режиме с обострением, то тепло за конечное время успеет распространиться только на конечное расстояние.

Однако это соблазнительное по своей простоте объяснение опровергается таким примером: если на границе среды имеют место HS-режимы (кстати, более «быстрые», чем S- и LS-режимы), то локализация тепла отсутствует и тепловая волна неограниченно перемещается по веществу.

Очень скоро мы увидим, что инерция является внутренним свойством процесса теплопроводности, а режимы с обострением лишь «проявляют» это свойство подобно лакмусовой бумажке.

Забудем на время о граничных режимах. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (5). В среде задан начальный профиль температуры $T_0(x)$. Какова его эволюция со временем?

Справедливо следующее утверждение.

Пусть $T(x, t)$ — решение задачи Коши для уравнения (5) с начальной температурой

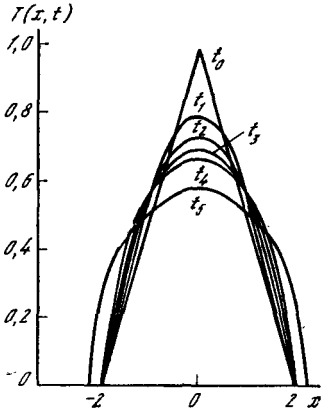
$$T(x, t_0) = \begin{cases} T_m(1-|x|/x_0)^{2/\sigma}, & |x| \leqslant x_0, \\ 0, & |x| > x_0. \end{cases} \tag{15}$$

Тогда тепловая энергия локализована в области $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$ (в начальной области) в течение времени, не меньшего, чем

$$t^* = x_0^2\sigma/[2k_0(\sigma+2)T_m^\sigma], \tag{16}$$

т. е. $T(x, t) = 0$, $|x| \geqslant x_0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + t^*$.

Иными словами, и в задаче Коши имеет место инерция тепла! Заключенное в какой-либо области среды тепло не сразу распространяется в соседние участки ве-



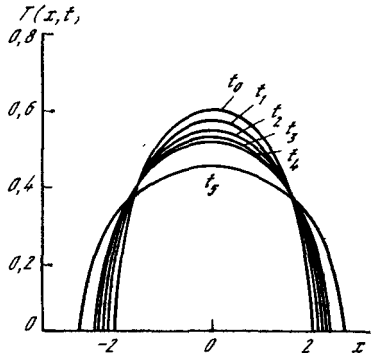


Рис. 7. Локализация тепла в задаче Коши. Начальные данные соответствуют профилю температуры S-режима

$t_0 = -1$, $t_1 = -0{,}75$, $t_2 = -0{,}5$, $t_3 = -0{,}25$, $t_4 = 0$, $t_5 = 1{,}5$ ($k_0 = 1$, $\sigma = 2$, $x_0 = 2$, $T_m = 1$, $t^* = 1$)

Рис. 8. Пример профиля температуры, не обладающего «инерцией» $T_m = 0{,}62$ и $x_0 = 2$ в (2.23), $k_0 = 1$, $\sigma = 2$; $t_0 = 1$, $t_1 = -0{,}5$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0{,}5$, $t_4 = 1$, $t_5 = 4$

щества (рис. 7). Время локализации оценивается снизу по формуле (16) и зависит от параметров профиля x_0, T_m.

Сказанное справедливо также в случае любого начального распределения температуры $T_0(x)$, мажорируемого функцией (8) (и имеющего совпадающие с ним фронты). Это непосредственно следует из теоремы сравнения.

Значения времен t^* могут быть совершенно различными. Так, в водородной, полностью ионизованной плазме с концентрацией электронов $n_e = 10^{15}$ см$^{-3}$ возмущение температуры (15) с $T_m = 1$ эВ и размером $x_0 = 10$ см не растекается в течение времени $t^* = 2 \cdot 10^{-3}$ с. В то же время для межзвездного газа возмущение температуры с $T_m = 1$ эВ и размером $x_0 = 100$ парсек удерживалось бы в течение $t^* \approx 10^{26}$ с $\approx 10^{18}$ лет, что много больше возраста Вселенной ($\approx 10^{10}$ лет). В обоих случаях теплопроводность предполагалась электронной; в последнем случае она зависит от магнитного поля, имеющегося в межзвездной среде.

Таким образом, в теплопроводной среде существует класс инерционных профилей температуры, обладающих свойством локализации в течение конечного времени.

Этот класс определяется свойствами среды (в данном случае параметром σ).

Примером профиля температуры, не обладающего инерцией, является функция вида (рис. 8)

$$T(x, t_0) = \begin{cases} T_m \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right)^{1/\sigma}, & |x| \leqslant x_0, \\ 0, & |x| > x_0. \end{cases} \tag{17}$$

Теперь мы можем объяснить физическую сущность инерции тепла.

Как следует из уравнения (5), темп роста температуры со временем в любой точке среды зависит от пространственного распределения температуры в окрестности этой точки (правая часть уравнения). Если профиль температуры в достаточной степени вогнутый, то температура не меняется (или слабо меняется) в течение некоторого времени.

Из (15) видно, что вогнутыми профилями являются такие, для которых в окрестности фронта выполняется условие

$$\partial^2 T^{\sigma/2}/\partial x^2 \geqslant 0, \qquad x \to x_ф.$$

При $\sigma = 2$ (именно для него приведены численные расчеты на всех рисунках) понятие вогнутости совпадает с обычным.

Ясно, что инерция может существовать лишь конечное время. К температурному фронту поступает тепло из более нагретых областей, формируется выпуклый профиль, и волна начинает двигаться по веществу. Этот процесс хорошо виден на рис. 7.

В чем же роль граничных режимов с обострением?

Медленные режимы с обострением формируют и поддерживают в среде инерционные профили температуры, причем в S-режиме поступающее с границы тепло распределяется по всему профилю, а в LS-режиме — лишь у границы (профиль более вогнутый).

Формирование инерционных профилей происходит на вполне определенной глубине локализации, определяемой соответствующими параметрами процесса. Когда тепловая волна достигает глубины локализации, то выпуклый, распространяющийся профиль перестраивается на вогнутый. С этого момента осуществляется локализация тепла — фронт стабилизируется, полуширина волны постоянна или сокращается (см. рис. 6). Если «отключить»

на границе режим с обострением, например поток тепла положить равным нулю при $x=0$, то увидим картину, знакомую по рис. 7.

При быстрых режимах с обострением (HS-режимы) в среду поступает количество тепла большее, чем то, которое необходимо для поддержания формы профиля. В результате область, занятая тепловой волной, увеличивается, локализация отсутствует.

Так же, как и в случае HS-режима, при нагреве среды в режимах без обострения невозможно сконцентрировать неограниченную энергию лишь в конечной области. Они всегда создают выпуклые профили, локализация отсутствует.

Итак, локализация тепла, проявляющаяся при развитии в среде режимов нагрева с обострением, не связана со скоростью протекания процесса как таковой. Лишь правильное согласование темпа роста температуры (параметр n) со свойствами среды (σ) приводит к образованию в веществе пространственных распределений температуры, обладающих свойством инерции.

До сих пор мы изучали инерцию тепла, пользуясь приближением «нулевого фона».

Однако в реальных процессах температура никогда не обращается в нуль. К тому же, строго говоря, обычное уравнение теплопроводности в окрестности фронта не применимо, надо рассматривать другие модели. Отметим, что в задаче Коши принадлежность профиля температуры к классу инерционных определяется фактически асимптотикой функции $T_0(x)$ в окрестности точек $|x| = x_0$, т. е. фронта.

Значит ли это, что инерция тепла определяется лишь такой деталью, как структура тепловой волны в окрестности ее фронта?

Нет, это не так. При выходе на автомодельные S- и LS-режимы фронт волны продвигается, асимптотика температуры в его окрестности совсем не та, что у инерционного профиля. Вдобавок, численный расчет в принципе не может точно воспроизвести структуру фронта, так как разностная схема моделирует некоторую другую (дискретную) среду. Тем не менее как теоретически, так и с помощью вычислительного эксперимента мы убедились в существовании инерции тепла. Таким образом, инерционность профиля определяется не деталями поведения температуры в окрестности фронта, а характером профиля в целом.

Чтобы окончательно доказать это утверждение, вернемся к задаче (5)—(7), но будем теперь считать, что начальная температура отлична от нуля во всем пространстве (для простоты — постоянна).

В этом случае коэффициент теплопроводности нигде не обращается в нуль, поэтому скорость распространения возмущений бесконечна. Мы не можем понимать инерцию тепла в прежнем смысле, так как нет четкой границы тепловой волны.

Представления о локализации принимают эффективный характер. Под эффективной локализацией тепла мы будем понимать следующее. Существует конечная область пространства, в которой температура неограниченно нарастает при приближении к моменту обострения. Вне области локализации температура и поступившая в нее тепловая энергия ограниченны при $t \to 0$. Физически понятно, что фон при этом будет несуществен.

Температура на границе (тем более при действии режимов с обострением) может превзойти фоновое значение в любое число раз. Тепловые процессы будут идти гораздо медленнее в области, граничащей с фоном, чем в зоне нагрева (в данном случае различия усиливаются из-за нелинейности среды). Поэтому в итоге фоном можно будет пренебречь, картина будет такая же, как в уже изученном случае.

На рис. 9 приведены результаты численного эксперимента для случая S-режима (см. рис. 3). После того как температура на границе увеличилась примерно в 10 раз по сравнению с фоновой, численное решение заметно не отличается от (8), четко проявляются установленные ранее свойства S-режима. В момент $t_y = -9 \cdot 10^{-3}$ ($t_y \approx t_5$) отношение энергии, вышедшей из зоны локализации (ее размер определен по формуле (9) для «нулевого фона») к энергии, содержащейся в ней, равно 0,05. В дальнейшем это отношение стремится к нулю.

Таким образом, в задаче с температурным фоном осуществляется эффективная локализация тепла в S-режиме на той же самой глубине, что и в задаче без фона. Между эффективной локализацией тепла и локализацией в прежнем понимании нет существенной разницы.

Полученный результат является принципиальным. Инерция тепла или ее отсутствие определяется лишь видом граничного режима и не зависит от характера начального распределения температуры. В частности, не-

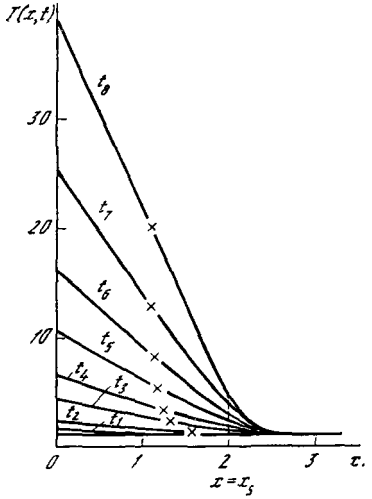


Рис. 10. Локализация тепла в случае постоянного коэффициента теплопроводности

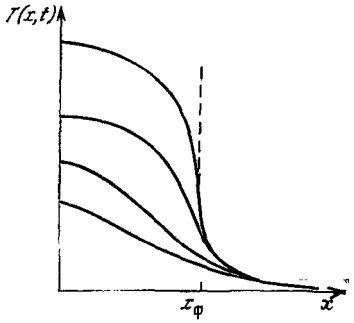


Рис. 9. Локализация тепла при наличии температурного фона

$T_0 = 1$, $A_S = 1$, $n = -1/\sigma$, $k_0 = 1$, $\sigma = 2$ ($x_S = 2$),

$t_0 = -1$, $T(0, t_0) = T_0$; $t_1 = -3{,}86 \cdot 10^{-1}$, $t_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-1}$,

$t_3 = -5{,}48 \cdot 10^{-2}$, $t_4 = -2{,}37 \cdot 10^{-2}$, $t_5 = -9{,}14 \cdot 10^{-3}$,

$t_6 = -3{,}9 \cdot 10^{-3}$, $t_7 = -1{,}58 \cdot 10^{-3}$, $t_8 = -6{,}37 \cdot 10^{-4}$

важно, существует или нет в рассматриваемой задаче конечный фронт тепловой волны.

Легко сформулировать приближенное количественное условие проявления локализации. Чтобы исключить влияние начальных данных, необходимо сообщить среде энергию, по крайней мере на порядок большую, чем начальная. Например, в случае S-режима установление локализации произойдет в том случае, если температура на границе примерно в 10 раз превысит начальную (так как характерный размер тепловой волны постоянен). Именно этот факт иллюстрирует рис. 9.

Рассуждения предыдущего пункта позволяют поставить важный вопрос. Обязательно ли инерция тепла связана с нелинейностью среды или достаточно граничного режима с обострением определенного вида для ее осуществления? Ведь одним из свойств среды с нелинейной теплопроводностью является возможность конечной скорости распространения тепловых возмущений. Мы уже убедились, что локализация тепла не определяется этим свойством.

Возможна ли инерция тепла, например, в среде с постоянной теплопроводностью, описываемой классическим уравнением?

Ответ на этот вопрос положительный. Пример соответствующего расчета показан на рис. 10. Видно, что правее некоторой границы $x_ф$ температура нагреваемого вещества хотя и отлична от нуля (ср. с нелинейной теплопроводностью), но ограничена в течение всего процесса. Левее же $x_ф$ температура растет в режиме с обострением. Доля тепла, проникшего правее $x_ф$, с течением времени стремится к нулю — это случай так называемой эффективной локализации.

Задача о нагреве такой среды в режиме с обострением описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \infty, \qquad t_0 < t < 0, \tag{18}$$

$$T(0, t) \to \infty, \qquad t \to 0,$$

$$T(x, t_0) = 0, \qquad 0 \leqslant x < \infty.$$

Общее решение этой задачи хорошо известно и было получено еще в прошлом веке, однако изучение режимов с обострением приводит к новым результатам, казалось бы, в давно исследованной области.

Можно показать, что в зависимости от того, как растет температура $T(0, t)$ на границе при $t \to 0$, может существовать любой из трех возможных режимов распространения тепла. Если

$$T(0, t) = A_0 e^{a_0(-t)^n}, \tag{19}$$

то при $n = -1$ температура неограниченно растет во всех точках $0 \leqslant x \leqslant x_ф$ при $t \to 0$. Глубина локализации легко находится:

$$x_ф = x_c \equiv 2\sqrt{k_0 a_0}. \tag{20}$$

При $x > x_c$ температура ограничена сверху, ограничена также и тепловая энергия, содержащаяся правее точки $x = x_c$.

Таким образом, закон (19) обеспечивает эффективную локализацию тепла в S-режиме.

В однородной среде с бесконечной скоростью распространения возмущений также существует инерция тепла!

Тем самым значительно расширяются возможности ее экспериментального исследования и применения, так как

линейное уравнение теплопроводности описывает большое количество разнообразных диффузионных процессов.

Из теорем сравнения сразу следует, что любой граничный закон, мажорируемый (19), также приводит к локализации тепла в области, не большей, чем $0 < x < x_c$.

В задаче (19) можно получить также LS-режим (при $-1 < n < 0$) и HS-режим (при $n < -1$).

Можно сказать, что для среды с постоянной теплопроводностью «инерция» тепла является более естественным свойством, чем для нелинейной среды. К ее проявлению приводит более широкий класс режимов с обострением, так как в этом случае границей между S- и LS-режимами является экспоненциальный режим (в нелинейной среде S-режим — степенная функция времени).

С помощью точных формул удается получить лишь общую классификацию режимов с обострением. Их более детальные свойства, такие, как, например, изменение со временем полуширины волны, определить в общем случае для функции $T(0, t)$ удается далеко не всегда.

Для некоторых частных случаев вида граничного закона такое исследование можно провести с помощью так называемых *приближенных автомодельных решений* (ПАР). Пусть, например, в (18) граничный закон имеет вид

$$T(0, t) = A_0\left[e^{a_0(-t)^n} - 1\right], \qquad n < 0$$

(добавление константы сделано для удобства). В этом случае автомодельные решения построить нельзя хотя бы потому, что задача содержит два параметра с размерностью длины. Один из них типичен для среды с постоянной теплопроводностью $l_1 = \sqrt{k_0 t}$, другой — $l_2 = \sqrt{k_0 a_0^{-1/n}}$.

Заменой $v(x, t) = A_0 \ln\left(\frac{T(x, t)}{A_0} + 1\right)$ задача преобразуется к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{k_0}{A_0}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \qquad 0 < x < \infty, \qquad t_0 \leqslant t < 0;$$

$$v(0, t) = A_0 a_0 (-t)^n, \qquad t_0 \leqslant t < 0; \tag{21}$$

$$v(x, t_0) = 0, \qquad 0 \leqslant x < \infty.$$

Граничное условие (21) является привычной степенной функцией времени.

Оказывается, что при $t \to 0$ первый член в правой части уравнения (21) мал по сравнению со вторым, и им можно пренебречь. Решение исходной задачи описывается автомодельным решением (степенной автомодельностью) более простой, *вырожденной* задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_0}{A_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \quad 0 < x < \infty, \quad -\infty < t < 0,$$

$$u(0, t) = A_0 a_0 (-t)^n, \quad u(x, -\infty) = 0,$$

изучить которое не представляет особого труда (это и есть ПАР).

Относительная точность улучшается с течением времени:

$$\left| 1 - \frac{A_0}{T} e^{u/A_0} \right| \to 0, \quad t \to 0.$$

Построение ПАР возможно для широкого класса уравнений теории теплопроводности (и горения) и является перспективным методом исследования.

Не вдаваясь в подробности, приведем закон изменения полуширины волны в задаче (18) с условием (19)

$$x_{эф}(t) \approx (-t)^{(1-n)/2}.$$

В отличие от среды с нелинейной теплопроводностью полуширина сокращается во всех трех режимах. Обычно применяемая оценка эффективной глубины проникновения тепловой волны $x_{эф}(t) \approx \sqrt{k_0(-t)}$ в данном случае неправильно описывает процесс при $t \to 0$.

Постоянство теплофизических свойств среды или степенная зависимость их от температуры являются лишь некоторым приближением к реальной ситуации.

Можно ли утверждать, что инерция тепла существует в среде с произвольной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры [5]?

В этом случае не удается, как правило, построить нетривиальные автомодельные или приближенные автомодельные решения, обладающие свойством локализации.

В настоящее время единственным способом исследования таких процессов является обобщение методов срав-

---

[5] Если теплоемкость вещества зависит от температуры $c = c(T)$, то уравнение, описывающее распространение тепла, принимает вид $\rho_0 c(T)\partial T/\partial t = (\partial/\partial x)(\varkappa(T)\partial T/\partial x)$ и сводится к (5) заменой $u(T) = \int c(T)\, dT$.

нения решений уравнений теории теплопроводности, т. е. уравнений параболического и эллиптического типов.

Сущность этого подхода состоит в следующем. Сравниваются решения задач, отвечающих не только разным краевым условиям, но и разным уравнениям, например разным функциям $k(T)$. В определенном смысле речь идет об устойчивости решения относительно возмущения коэффициентов уравнения. Причем в ряде случаев оказывается удобным сравнивать не сами решения, а некоторые функции от них и т. д. В качестве одного из сравниваемых решений можно выбрать решение хорошо изученного уравнения, например уравнения (5), и сделать выводы общего характера.

Для уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

которое является частным случаем общего параболического уравнения, *теорема сравнения* решений первой краевой задачи в полупространстве *по коэффициентам* уравнения формулируется так.

Пусть $T^{(1)}(x, t)$ и $T^{(2)}(x, t)$ — решения, соответствующие условиям $T^{(1)}(0, t)$, $T^{(2)}(0, t)$ и $T_0^{(1)}(x)$, $T_0^{(2)}(x)$ и функциям $k^{(1)}(T)$, $k^{(2)}(T)$. Тогда из неравенств $T_0^{(1)}(x) \leqslant T_0^{(2)}(x)$, $T^{(1)}(0, t) \leqslant T^{(2)}(0, t)$, $k^{(1)}(T) \leqslant k^{(2)}(T)$, $\frac{d}{dT}\left[k^{(2)}(T)/k^{(1)}(T)\right] \geqslant 0$, $T \geqslant 0$ следует, что $T^{(1)}(x, t) \leqslant T^{(2)}(x, t)$ всюду в рассматриваемой области[6].

Из сформулированной теоремы (и ее обобщений) следует важный вывод.

Пусть задана нелинейная теплопроводная среда, тогда по конкретному виду коэффициента $k(T)$ всегда можно указать закон роста температуры на границе $T(0, t)$, такой, что процесс распространения тепла будет локализован. И наоборот, всегда можно указать класс граничных режимов, приводящих к «сверхбыстрому» прогреву среды (когда локализация отсутствует).

Свойства среды всегда отклоняются от идеальных (вычисленных теоретически) или от полученных в экспе-

---

[6] На функции $T_0^{(2)}(x)$, $T^{(2)}(0, t)$ требуется наложить некоторые дополнительные условия, которые в случае задач с обострением всегда выполняются. Точно так же функции $k^{(i)}(T)$ удовлетворяют определенным условиям, обеспечивающим существование решений.

рименте. Однако это не сказывается на факте существования инерции тепла. Этот эффект универсален, его можно исследовать экспериментально в любой заданной среде, если обеспечить соответствующий рост температуры на границе (подвод тепла).

Отклонения от заданного граничного режима легко оцениваются на основе теорем сравнения.

Пусть, например, в задаче (5)—(7)

$$T(0,\ t)=A(t)(-t)^n, \qquad n<0, \qquad t_0\leqslant t<0,$$

где $A_1\leqslant A(t)\leqslant A_2$, $A_i=\text{const}$.

Для определенности рассмотрим S-режим ($n=-1/\sigma$). Тогда отклонение в глубине локализации оценивается по формуле

$$\frac{\Delta x_\Phi}{x_\Phi}\approx\frac{\sigma}{2}\frac{\Delta T(0,\ t)}{T(0,\ t)}.$$

Например, при $\sigma=2$ 10%-ная погрешность в задании температуры на границе приводит к такой же погрешности в определении глубины локализации.

Само решение ограничено сверху и снизу решениями (8) с константами A_1 и A_2. В среднем сохраняются все свойства S-режима.

До сих пор мы рассматривали инерцию тепла, пользуясь одномерным приближением. Теми же методами можно показать, что все представления и результаты остаются в силе и в многомерном случае.

Однако здесь появляется новый элемент — форма области локализации тепла. Она может быть весьма необычной. Приведем пример. Распределение температуры вида

$$T(x,\ y,\ z,\ t_0)=\begin{cases} T_m\left(1-\dfrac{r}{x_0}\right)^{2/\sigma}, & r=\alpha_1|x|+\alpha_2|y|+ \\ & +\alpha_3|z|\leqslant x_0, \\ 0, \quad r>x_0, & \end{cases}$$

где $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$, $\alpha_i>0$, $i=1,\ 2,\ 3$, заданное в восьмигранник $r\leqslant x_0$ (x_0 — расстояние от центра до боковой грани) в качестве начальных данных задачи Коши (для трехмерного аналога уравнения (12)) удерживается в нем в течение времени, не меньшего, чем

$$t_0^*=\sigma x_0^2/\left[2k_0(\sigma+2)\,T_m^\sigma\right],$$

Можно сказать, что в среде существует не меняющий в течение конечного времени своей формы «тепловой кристалл». По истечении времени локализации внутри восьмигранника (в частном случае это октаэдр) формируется выпуклый профиль температуры и начинается растекание тепла. Такая форма области локализации лишний раз подчеркивает необычность эффекта инерции тепла.

На рис. 11 представлена численная реализация «теплового кристалла» в двумерном случае. Начальная температура задана в виде пирамиды, основанием которой является область локализации (для двумерной геометрии — ромб).

Выше мы рассмотрели влияние различных осложняющих факторов на эффект локализации тепла и показали, что все основные черты эффекта присутствуют и в этих случаях. Приведем теперь некоторые количественные оценки эффекта локализации для реальной среды.

Вернемся, например, к рис. 6, 9, демонстрирующим установление S- и LS-режимов, начинающихся в момент времени $t=t_0$. В каждом таком случае существует некоторый момент $t=t_y$, что для $t_y<t<0$ решение близко к автомодельному (не реализуется лишь бесконечный фронт LS-режима).

Установление автомодельного решения удобно характеризовать безразмерными отношениями $T(0,\ t_y)/T(0,\ t_0)=\bar{T}$, $t_y/t_0=\bar{t}$. Эти безразмерные величины могут зависеть только от безразмерных параметров n и σ. Многочисленные расчеты, проведенные для широкого диапазона n и σ, показали, что $\bar{T}\approx 10$ в случае S-режима и соответственно $\bar{t}=\bar{T}^{-\sigma}\approx 10^{-\sigma}$. Например, для электронной теплопроводности ($\sigma=2{,}5$) $\bar{t}\approx 10^{-3}$. В случае LS-режима ($n>-1/\sigma$) критерий установления еще мягче ($\bar{T}\lesssim 6$).

Отметим теперь одну важную особенность процесса установления S-режима. Неравенство $T(0,\ t_y)/T(0,\ t_0)=(t_0/t_y)^{1/\sigma}\gtrsim 10$, гарантирующее проявление всех основных свойств S-режима, зависит лишь от отношения времен и не содержит определенного масштаба времени (рис. 12). Значит, сами абсолютные значения t_0 и t_y могут быть выбраны произвольно[7]. Этот выбор следует производить таким образом, чтобы удовлетворить дополнительным требованиям: критериям применимости мо-

[7] Это утверждение, очевидно, справедливо и для LS-режима.

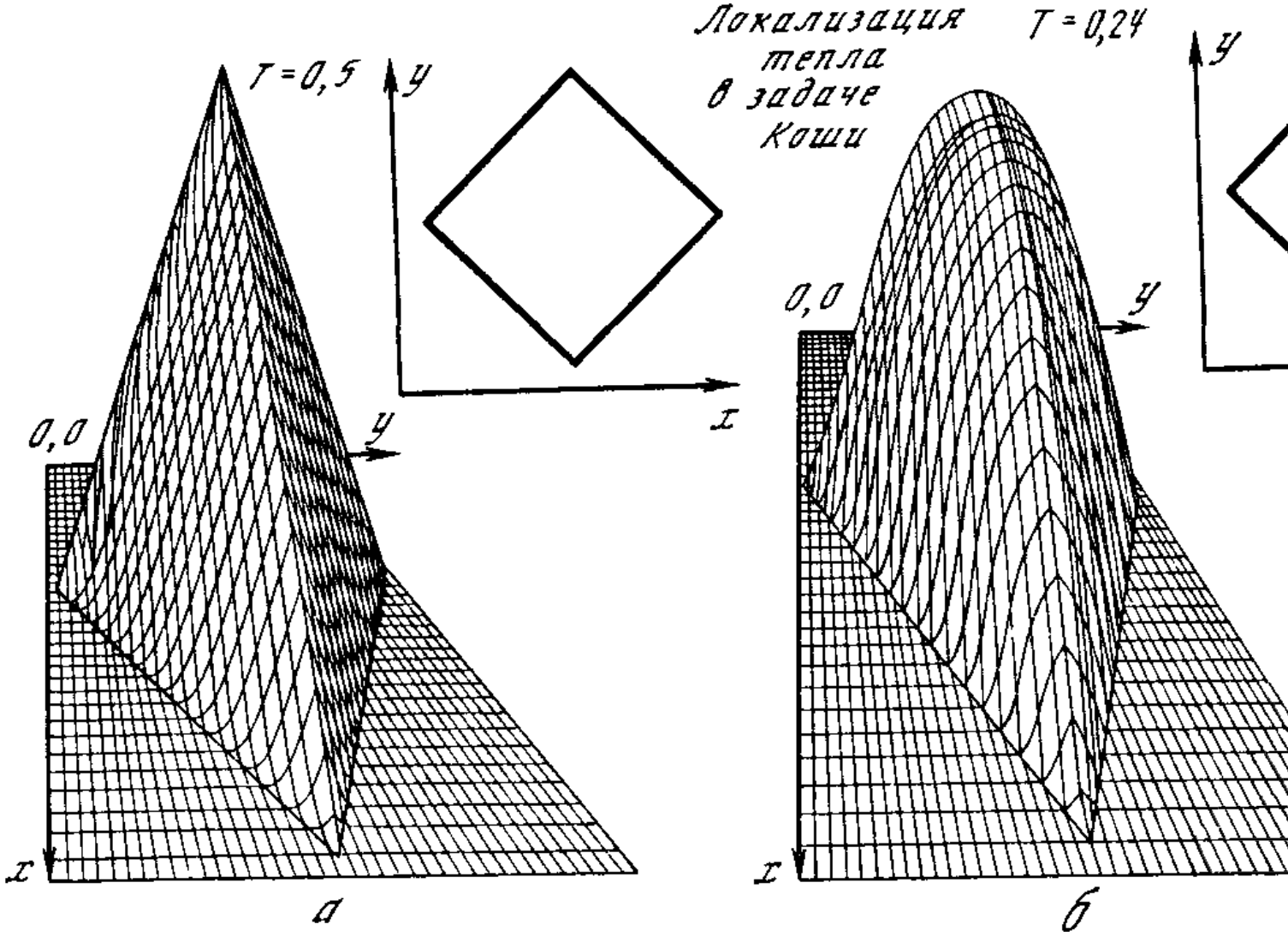
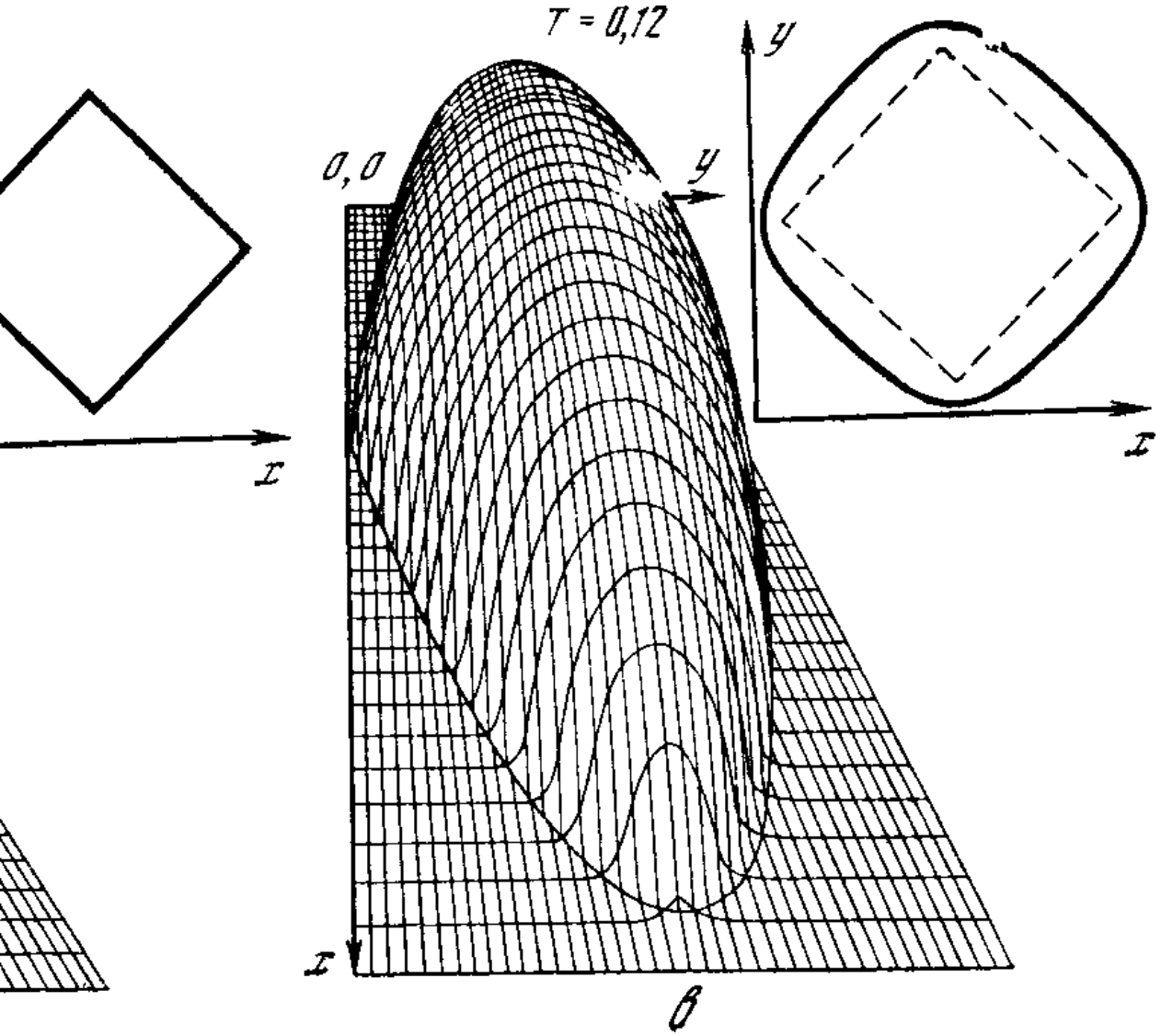


Рис. 11. Двумерный аналог «теплового кристалла»
$a - t = -1$; $б - t = -0{,}2$; $в - t = 7$ $(t^* = 1)$.


T = 0,12
0,0
y
x
y
x
x
в

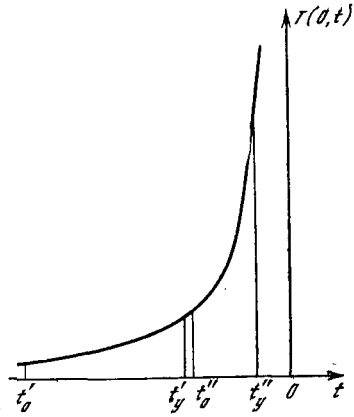


Рис. 12. Два способа реализации одного и того же S-режима

Разности $\Delta t' = t'_y - t'_0$ и $\Delta t'' = t''_y - t''_0$ различны, но отношения температур в начале и конце процесса одинаковы в силу равенства $t'_0/t'_y = t''_0/t''_y$

дели Фурье для теплопроводности, отсутствию влияния газодинамического движения и т. п. Глубина прогрева $x_ф$ (9) при любом выборе t_0 будет одна и та же, так как реализуется один и тот же режим с данной постоянной A_S.

Рассмотрим процесс нагрева водородной плазмы с электронной теплопроводностью в S-режиме. Предположим, что с помощью некоторого источника на границе плазма—вакуум создается поток тепла

$$W(0, t) = \begin{cases} B_0(-t)^{1,4}, & t_0 \leqslant t \leqslant \varepsilon < 0, \\ 0, & t > \varepsilon, \quad B_0 = \text{const} > 0. \end{cases} \tag{22}$$

Здесь $\varepsilon \approx t_y$ — время «отключения» источника нагрева. Газодинамическим движением, объемным излучением из плазмы и другими процессами будем пренебрегать.

Возьмем $\varepsilon = 10^{-3} t_0$. Тогда режим (22) создаст профиль температуры, соответствующий S-режиму (8). Вычислим его параметры, считая, что расплывание тепла поперек направления падающего потока происходит на расстояния порядка самой глубины прогрева. Значения максимальной температуры $T(0, \varepsilon) = T_м$, максимального потока $W(0, \varepsilon) = W_м$, полной вложенной энергии E_0 и глубины прогрева $x_ф$ для различных значений ε и плотности плазмы $\rho = 2 \cdot 10^{-3}$ г/см^3 приведены в таблице.

ε, нс	$T_м$, эВ	$W_м$, Вт/см^2	E_0, Дж	$x_ф$, см
$-5 \cdot 10^{-3}$	1000	10^{14}	$4 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$
$-5 \cdot 10^{-1}$	100	$6 \cdot 10^{10}$	$7{,}2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$-1{,}5 \cdot 10^{2}$	10	$2 \cdot 10^{6}$	$7{,}2 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-3}$

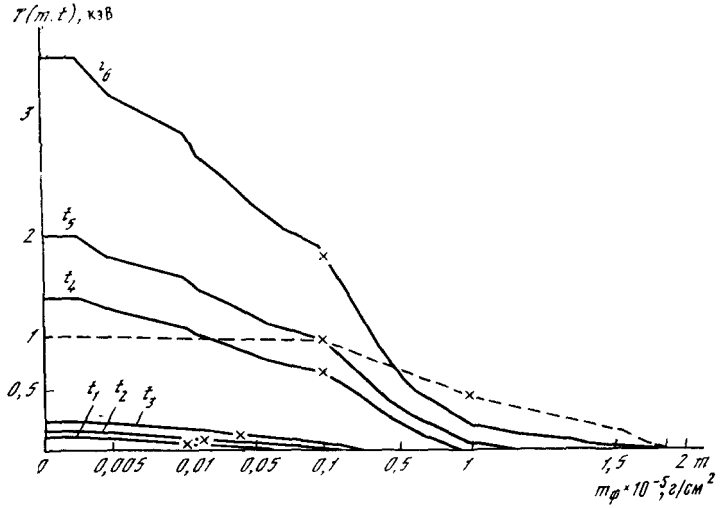


Рис. 13. Профили температуры при нагреве среды в S-режиме с учетом газодинамического движения

$t_1 = -4$ (800ε), $t_2 = -3{,}02$ (600ε), $t_3 = -2{,}03$ (400ε), $t_4 = -5 \cdot 10^{-2}$ (10ε), $t_5 = -2{,}3 \cdot 10^{-2}$ (4,6ε), $t_6 = -5 \cdot 10^{-3}$(ε) (крестики — полуширина волны, пунктирная линия — соответствующее решение для неподвижной среды)

Две последние оценки иллюстрируют соотношения подобия при реализации одного и того же закона $B_0(-t)^{1,4}$ с разными t_0 (и $\varepsilon = 10^{-3}t_0$).

Для приведенных в таблице параметров оказывается существенным газодинамическое движение: за времена локализации звуковые возмущения в нагретой плазме распространяются на расстояния $\gtrsim x_ф$.

Учет газодинамического движения можно провести с помощью вычислительного эксперимента. Приведем результаты численного расчета для случая первой строки таблицы. На рис. 13 температура отложена по массовой координате, т. е. дана не в точках оси x, а в точках с данной массой $m = \int \rho dx$, отсчитываемой от вакуума. Это гораздо удобнее, так как граница плазмы — вакуум — быстро движется налево.

Расчеты показывают, что для времени $t \geqslant 5\varepsilon$ профили плотности и скорости практически уже не меняются. Тепловые процессы при приближении к моменту обострения развиваются быстрее, чем газодинамические. Движение среды «замирает». До достижения этого момента двигающаяся тепловая волна создает в районе $m = m_ф$ пик

плотности, примерно в 50 раз превышающей начальное значение.

Сопоставим данные расчета (см. рис. 13) при $t = \varepsilon$ с первой строкой таблицы. Мы видим, что:

1) точная глубина прогрева $m_ф$ близка к оцененной, а эффективная (крестики) значительно меньше, профиль температуры более «вогнутый», чем в решении (8) для неподвижной среды (пунктир);

2) уменьшение прогретой массы привело к большему значению температуры вблизи границы — примерно 25% прогретой массы имеет температуру $\gtrsim 10^3$ эВ;

3) «выход» на S-режим (установилась полуширина) произошел в момент $t = 10^{-2} t_0$, т. е. на порядок раньше, чем в неподвижной среде.

Таким образом, газодинамическое движение способствует проявлению локализации тепла.

Обратим внимание на то, что изучение изложенных здесь задач привело к углублению нашего понимания поведения такого сложного физического объекта, каким является плазма. В этом, как мы убедились, принципиальную роль играет использование вычислительного эксперимента и методов информатики. Анализ модельного уравнения позволил найти новые интересные режимы и принципы, которые могут быть использованы при создании экспериментальных установок, при изучении новых явлений.

Здесь, как и в большинстве других случаев, эффективное применение ЭВМ невозможно без глубокого исследования модели, анализа конкретной физической ситуации, без построения эффективных методик вычислительного эксперимента. Такое сочетание расчетов на ЭВМ и аналитического исследования составляет характерную черту методов информатики.

РЕКОМЕНДУЕМ ПРОЧИТАТЬ

О математическом описании процессов диффузии и теплопроводности:

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.

Самарский А. А., Соболь И. М. Примеры численного расчета температурных волн // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3, № 4. С. 703—719.

Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью // Докл. АН СССР, 1975. Т. 233, № 6. С. 1344—1347.

Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 2. С. 321—324.

Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В. и др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 6. С. 1330—1333.

Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация тепла в нелинейных средах // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1826—1841.

Самарский А. А. О новых методах исследования асимптотических свойств параболических уравнений // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1981. Т. 158. С. 153—162.

Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 217—243.

Многие вопросы, связанные с высокотемпературными явлениями, рассмотрены в книге:

Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. 2-е изд. М.: Наука, 1966. 688 с.

Подробнее познакомиться с численными методами исследования нелинейных сред поможет книга:

Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

Процессы в открытых нелинейных системах обсуждаются в работах:

Hoerner S. von. Population explosion and interstellar expansion // J. of the British Interplanetary Society. 1975. Vol. 28, N 11. P. 691—712.

Проблемы лазерного термоядерного синтеза/Пер. под ред. А. А. Филюкова. М.: Атомиздат, 1976. С. 15—21.

Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.

Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 354 с.

Романовский Ю. М. Процессы самоорганизации в физике, химии и биологии: (В помощь лектору). М.: Знание. 1981. 47 с.

Шредингер Э. Что такое жизнь? (С точки зрения физика). 2-е изд. М.: Атомиздат, 1972. 88 с.

Пример задачи, в которой явление инерции тепла оказывается очень важным, есть в работе:

Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26, № 9. С. 620—621.

ОБ АВТОРАХ И ПУБЛИКАЦИЯХ

Самарский Александр Андреевич, академик, заместитель академика-секретаря Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации, председатель Научного совета по комплексной проблеме «Математическое моделирование».

Попов Юрий Петрович, доктор физико-математических наук, заместитель директора Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР.

Переработанный вариант брошюры, впервые изданиой в издательстве «Знание».

Курдюмов Сергей Павлович, член-корреспондент АН СССР, заведующий сектором Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР.

Малинецкий Георгий Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР.

Вариант брошюры, впервые изданной в издательстве «Знание».

Змитренко Николай Васильевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР.

Михайлов Александр Петрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР.

Сокращенный и переработанный вариант брошюры, впервые изданной в издательстве «Знание».