МАТЕМАТИКА, КИБЕРНЕТИКА

ПОДПИСНАЯ НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ 1983/4

А.А. Арсеньев
А.А. Самарский

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ЗНАНИЕ

НОВОЕ В ЖИЗНИ, НАУКЕ, ТЕХНИКЕ

НОВОЕ В ЖИЗНИ, НАУКЕ, ТЕХНИКЕ

ПОДПИСНАЯ НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

МАТЕМАТИКА, КИБЕРНЕТИКА

4/1983

Издается ежемесячно с 1967 г.

А. А. Арсеньев,
А. А. Самарский

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Издательство «Знание» Москва 1983

ББК 22.18
А 85

АРСЕНЬЕВ Алексей Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор МГУ, специалист по дифференциальным уравнениям математической физики.

САМАРСКИЙ Александр Андреевич — академик АН СССР, Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий, специалист по математической физике и вычислительной математике.

Рецензент: Свешников А. Г. — профессор, доктор физико-математических наук.

Арсеньев А. А., Самарский А. А.

А85 Что такое математическая физика. — М.: Знание, 1983. — 64 с. — (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика»; № 4).
11 к.

Современная математическая физика — это наука, которая занимается изучением фундаментальных законов природы математическими методами. В брошюре в популярной форме рассказывается о ее месте в системе естественных наук, значении в формировании научной картины мира. Дается описание методов математической физики и говорится о ее роли в решении задач научно-технического прогресса.

Рассчитана на студентов, преподавателей, научных работников, лекторов и слушателей народных университетов.

1704020000 ББК 22.18
53

© Издательство «Знание», 1983 г.

ВВЕДЕНИЕ

Бурное развитие науки и техники в наши дни было бы невозможно без успехов в решении сложных комплексных задач. В решении этих задач наравне со специалистами самых разных профессий — физиками, врачами, инженерами, технологами — участвуют и специалисты-математики.

В современной технике широко используются процессы, основанные на применении полупроводников, лазеров, плазмы, пучков заряженных частиц. Расчет этих процессов требует, наряду с глубоким пониманием сложной физики происходящих явлений, совершенного владения современными методами вычислительной математики.

Выбор оптимальных режимов таких классических технологических процессов, как процессы кристаллизации, плавки, сварки, также связан с учетом тонких физических эффектов и требует проведения большого числа сложных расчетов.

В медицине для диагностики и лечения используются лазерное излучение, пучки заряженных частиц, рентгеновское излучение. Чтобы оценить действие этих факторов на человека, нужно провести расчеты сложных физических процессов, происходящих при взаимодействии частиц и излучения с организмом.

В основе всех подобного рода расчетов лежит математическое моделирование физических процессов, которое сейчас стало одним из основных методов исследования в науке и технике.

Изучением математических моделей физических явлений занимается математическая физика.

При написании этой брошюры мы поставили перед собой задачу рассказать читателям, не имеющим профессиональной подготовки в области математической физики, о неко-

торых основных проблемах и методах математической физики и о ее роли в развитии научно-технического прогресса.

При этом мы более подробно остановились на проблемах математической физики, которые связаны с решением прикладных задач, и постарались рассказать непрофессионалу о том, как специалисты по математической физике решают предложенные им задачи и с какими проблемами они при этом встречаются.

В последнее время в математической физике произошли фундаментальные изменения, связанные с широким применением ЭВМ и созданием на их базе нового метода исследования — вычислительного эксперимента, который существенно расширяет класс эффективно решаемых математической физикой задач.

Проблемам, связанным с применением ЭВМ в математической физике, мы уделили главное внимание.

Для разъяснения некоторых примеров в книге использованы формулы, включающие операцию предельного перехода, производные, интегралы. Читатель, не очень хорошо знакомый с этими понятиями, может пропустить те рассуждения, где они встречаются, — основное содержание книги от примеров не зависит.

1. НАУКА О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Основные этапы расчета физических явлений. Рассказ о математических моделях мы начнем с несколько шуточного примера. Согласно известной легенде, мысль о законе всемирного тяготения возникла у Ньютона, когда он наблюдал за падением яблока. Сколько времени понадобилось Ньютону для открытия Великого закона Природы?

Если пренебречь сопротивлением воздуха и считать начальную скорость падения яблока равной нулю, то время падения t, ускорение свободного падения g и высота h, с которой упало яблоко, связаны между собой соотношением

$$h-gt^2/2=0, \qquad (1)$$

из которого находим

$$t=(2h/g)^{1/2}.$$

Приняв $g=10$ м/с^2, $h=2$ м, мы получим $t=0{,}6$. Итак,

чтобы открыть великий закон природы, нужно менее секунды времени.

Проанализируем теперь ход наших рассуждений в процессе решения этой задачи. Мы рассматриваем физическое явление — падение яблока. Когда падало яблоко, ветка яблони качалась, яблоко в полете вертелось, Ньютон думал и происходило еще много других событий, тем или иным образом связанных друг с другом. Нас интересует только одна характеристика явления — зависимость времени падения яблока от высоты.

Тем самым мы делаем первый шаг: строим физическую модель явления, выделив в рассматриваемом процессе только существенное для нас: связь между временем падения яблока и высотой.

Второй шаг: описание физического процесса — падения яблока — уравнением (1). Уравнение (1) является математической формулировкой закона свободного падения тел, открытого, по существу, еще Галилеем на основе анализа экспериментальных данных. Уравнение (1), как и следовало ожидать, не отражает многих второстепенных черт рассматриваемого явления: колебания ветки, удара яблока о землю и т. д. Но это уравнение позволяет вычислить интересующую нас характеристику явления.

Третий шаг: мы решаем уравнение (1) и находим время t. Решение уравнения (1) — это чисто математическая задача, и правила, по которым мы находим решение уравнения (1), не зависят от физического смысла переменных t, g, h. Решение этого уравнения мы могли бы поручить человеку, который ничего не знает о рассматриваемом нами явлении.

Четвертый шаг: решение уравнения (1) мы интерпретируем как время падения яблока и, наконец, на основе наших расчетов делаем определенные выводы о времени, необходимом для открытия закона всемирного тяготения.

Далеко не всегда интерпретация результата решения математической задачи в терминах физической модели явления очевидна.

В качестве второго примера рассмотрим рассуждения, часто приводимые в учебниках по физике плазмы при выводе формулы для частоты плазменных колебаний *.

---

* Напомним, что плазма — это газ, состоящий из ионов и электронов.

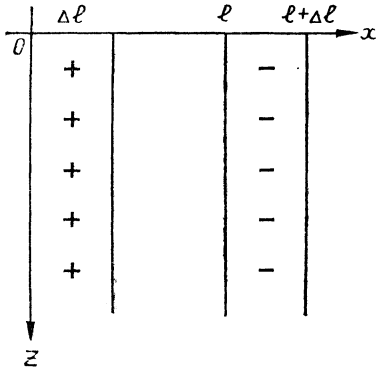


Рис. 1.

В каждом макроскопически большом объеме плазмы находится равное число электронов и ионов, поэтому в целом плазма электрически нейтральна. Представим себе, что на плазму падает электромагнитная волна $E_0 \sin \omega t$ частоты ω. Как оценить частоту, при которой волна будет взаимодействовать с плазмой наиболее интенсивно?

Пусть волна распространяется вдоль оси z, а вектор электрического поля коллинеарен оси x (рис. 1). Рассмотрим слой электронов плазмы шириной l. Пусть под действием электрического поля волны этот слой сместится на величину Δl. Смещением ионов по сравнению с электронами можно пренебречь, так как масса каждого иона в тысячи раз больше массы электрона, и их смещение будет приблизительно во столько же раз меньше. Тогда справа будет избыток электронов, а слева — их недостаток. Возникнет электрическое поле плазмы, которое по величине равно $4\pi en\Delta l$, где e — заряд электрона, а n — плотность электронов (это поле между пластинами плоского конденсатора, на которых имеется поверхностный заряд плотностью $\pm en\Delta l$). Таким образом, на электроны плазмы будет действовать поле E плазмы и поле электромагнитной волны $E_0 \sin \omega t$. Уравнение движения электронов плазмы имеет вид:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \Delta l = -4\pi e^2 \Delta l n + eE_0 \sin \omega t, \qquad (2)$$

из которого легко найти смещение

$$\Delta l = \frac{(eE_0)/m}{(4\pi e^2 n)/m - \omega^2} \sin \omega t.$$

Значение частоты

$$\omega_{пл} = (4\pi e^2 n/m)^{1/2},$$

при которой смещение $\Delta l \to \infty$, носит название плазменной частоты; она имеет физический смысл частоты собствен-

ных (т. е. происходящих без участия внешних сил) колебаний плазмы.

При совпадении частоты падающей волны с плазменной частотой в рассматриваемой нами модели амплитуда вынужденных колебаний электронов плазмы будет бесконечно большой, на этой основе обычно делается вывод о том, что электромагнитные волны с частотой, близкой к плазменной частоте, сильно взаимодействуют с плазмой *.

Мы описали взаимодействие плазмы с волной уравнением (2). Ясно, что это описание — очень грубое приближение (мы не учли неоднородности плазмы, движения ионов, влияния магнитного поля и т. д.), поэтому на основе нашего приближения мы можем делать выводы лишь о порядке интересующей нас величины.

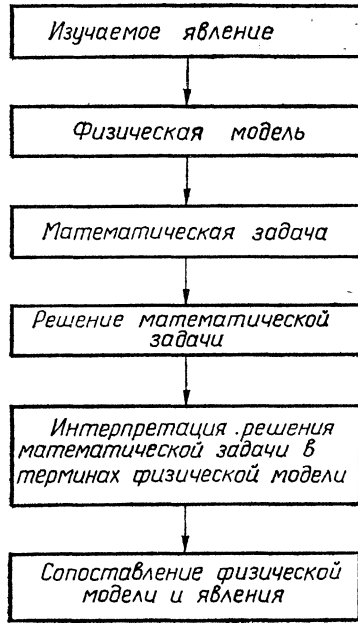
Естественно желание получить более точные результаты. На первый взгляд сделать это легко: хорошо известны уравнения которые описывают плазму, подробно учитывая все факторы — движение электронов и ионов, влияние магнитного поля и т.д. Но оказывается, что, во-первых, в общем случае эти уравнения очень сложны и, во-вторых, в качестве исходных данных в эти уравнения входят величины, которые известны из эксперимента с большой погрешностью. Здесь мы сталкиваемся с одной из центральных проблем математической физики — проблемой выбора между подробностью описания явления и возможностью эффективно провести численные расчеты. Чем точнее мы пытаемся учесть все процессы в происходящем явлении, тем сложнее становится его математическое описание и тем труднее получить количественную информацию на основе этого описания. Случается так, что математическая формулировка физических законов, описывающих явление, настолько сложна, что непосредственно на основе этой формулировки с помощью современных вычислительных средств нет возможности получить количественную информацию о явлении. Именно такая ситуация типична для большинства задач современной математической физики. Чтобы понять, как в математической физике решается эта проблема, проанализируем наши рассуждения, связанные с двумя рассмотренными выше примерами.

И в задаче о вычислении времени падения яблока, и в

---

* В этом случае наблюдается резонансное отражение элекромагнитной волны.

задаче о вычислении частоты собственных колебаний плазмы мы руководствовались следующей схемой исследования.



Обратим внимание на то, что для вычисления нужной характеристики явления нам пришлось дать его математическое описание. Это математическое описание называется математической моделью явления.

Понятие математической модели физического явления. Слово «модель» происходит от латинского слова *modus* (мера, масштаб, способ действия). В частности, оно обозначает копию предмета, служащую для его изучения. Совершенно очевидно, что для этого модель должна правильно воспроизводить изучаемые свойства предмета. Например, процесс обтекания самолета воздухом зависит от формы самолета, поэтому форма обдуваемых в аэрогидродинамических трубах моделей самолетов точно повторяет форму самолетов. Математическая модель физического явления —

это обычно система уравнения, описывающая элементарные физические процессы, из которых явление складывается. Математическая модель предназначена для расчета характеристик физического явления. Изучению средствами математики доступна лишь математическая модель явления. По существу, эта мысль была известна еще Аристотелю, который писал: «... какими же предметами должен заниматься математик? Ведь, конечно, не окружающими нас вещами, ибо ни одна такая вещь не сходна с тем, что исследуют математические науки». Как бы тривиальной ни казалась эта мысль, из нее вытекает важное следствие: во-первых, чтобы получить количественное описание явления, нужно найти адекватное математическое описание всех его существенных особенностей, т. е. составить математическую модель явления, и, во-вторых, нужно всегда проявлять осторожность при сопоставлении результатов расчетов с физическим явлением, ибо математическая модель никогда не бывает тождественна наблюдаемому явлению. Математическая физика — это наука о математических моделях физических явлений. В рассматривавшемся выше случае математическая модель падения яблока — это уравнение (1). Ту же физическую модель мы могли бы исследовать и на другой математической модели, например, решая дифференциальное уравнение

$$\frac{dt}{ds} = (2gs)^{-1/2}, \quad t(h) = 0. \tag{3}$$

Можно показать, что алгебраическое уравнение (1) и дифференциальное уравнение (3) описывают одну и ту же физическую модель.

Если бы мы попытались рассчитать время падения яблока с очень большой точностью, нам пришлось бы учитывать сопротивление воздуха, форму яблока и ряд других факторов. Для этого нам нужно было бы строить другую физическую модель. Таким образом, одно и то же явление может изучаться на разных физических моделях, а одна и та же физическая модель может описываться разными математическими моделями. При исследовании сложных явлений каждый этап — построение физической модели, формулировка математической задачи, ее решение и т. д.— часто проводится отдельным коллективом ученых.

Задача специалиста по математической физике состоит в исследовании математической модели физического явления, причем это исследование он должен уметь провести так,

чтобы оно служило познанию физической сущности явления. Обычно специалист по математической физике участвует в построении математической модели на основе физической модели, осуществляет исследование возникшей математической задачи, решает ее и принимает участие в интерпретации решения математической задачи в терминах физической модели.

Специалисты по математической физике работают во многих научных учреждениях. Без их участия невозможен расчет сложных физических явлений, оптимизация технологических процессов, создание новой техники.

2. НЕМНОГО ИСТОРИИ

Математическая физика как самостоятельная наука возникла примерно в начале XIX — конце XVIII века. Выдающийся французский математик, который много занимался проблемами теоретической физики, А. Пуанкаре (1854—1912) писал: «Математическая физика, как мы знаем, произошла от небесной механики, которая произвела ее на свет в конце XVIII века в ту пору, когда она только что достигла полного развития». Заметим, что «механическое» происхождение математической физики ощутимо сказывалось на ней довольно долго.

Выше мы говорили, что математическая физика — это наука о математических моделях физических явлений. Сам метод познания явлений природы на моделях возник задолго до математической физики в процессе создания мифологии. По существу, одна из функций мифа — служить моделью для объяснения явлений природы. Вспомним, например, поэтический миф о похищении Персефоны, в котором упоминается о причинах смены времен года: «... каждый год покидает свою мать Персефона и каждый раз Деметра погружается в печаль и снова облекается в темные одежды. Вся природа горюет об ушедшей: желтеют на деревьях листья...» В мифе явления природы объясняются на основе поведения богов. Боги — это люди, выступающие как элементы модели. Мотивы поведения богов чаще всего человеческие: любовь, ненависть и т. д. Эти мотивы рассматриваются в мифе как «аксиомы модели», не требующие объяснений. В мифе поведение богов связывается с наблюдаемыми явлениями: образованием гор, сменой времен года и т. д. Исходя из принятой модели

явлений, человек строил свое поведение и пытался воздействовать на природу — он молился, приносил богам жертвы и т. д.

Позже появились попытки научного объяснения явлений природы: Фалес (624—547 до н. э.), Анаксимен (585—525 до н. э.), Гераклит (530—476 до н.э.), Демокрит (460—370 до н. э.). Одна из наиболее известных ранних попыток такого рода принадлежит Аристотелю (384—322 до н. э.). Аристотель в основу объяснения явлений природы положил ряд постулатов. Часть этих постулатов соответствовала повседневному опыту, часть носила фантастический характер и даже являлась шагом назад по сравнению с догадками предшественников Аристотеля. Из принятых им постулатов Аристотель чисто дедуктивным путем выводил следствия, которые в простейших случаях не противоречили поверхностным наблюдениям (например, Аристотель утверждал, что более тяжелое тело падает быстрее, что тела движутся лишь под действием сил. Действительно, в воздухе тяжелый камень падает быстрее пера, а чтобы двигать повозку по дороге, необходимо прикладывать силу). Великая заслуга Аристотеля состоит не в изложении конкретных сведений по описанию природы, а в глубоком и систематическом развитии дедуктивного метода, которым практически в неизменном виде широко пользуется современная наука.

Задачи количественного описания явлений природы Аристотель перед собой не ставил и не рассматривал эксперимент как критерий истинности теории. Во времена Аристотеля наука была абсолютно не подготовлена к решению таких задач. Позже на важность эксперимента в познании природы указывали многие великие мыслители древности: живший на рубеже старой и новой эры архитектор и ученый Витрувий, ученый, художник и философ Леонардо да Винчи (1452—1519). Но впервые систематически обращаться к эксперименту стал итальянский физик и философ Галилео Галилей (1564—1642). Он требовал глубокого критического анализа результатов наблюдений, а в своих исследованиях о движении тел под действием силы тяжести он стремился к количественному согласию выводов теории и эксперимента. В математической физике развитие идей о важности экспериментального метода познания привело в наше время к созданию нового научного направления — вычислительного эксперимента.

Первая удачная математическая модель простейшего

физического явления (механического движения) и математическая формулировка одного из самых фундаментальных законов природы (закона всемирного тяготения) были даны в вышедшей в 1687 г. работе И. Ньютона (1642—1727) «Математические начала натуральной философии». Открытия Ньютона опирались на исследования Коперника, Кеплера, Галилея, на методы великих греческих математиков древности и наряду с работами Галилео Галилея явились началом новой эпохи в естествознании. Характерно, что начало этой эпохи сопровождалось и началом систематического применения математических методов в физике.

В своей работе И. Ньютон применил схему рассуждений, которая позже стала образцом для работ по математической физике: математическая точная постановка задачи, ее решение, интерпретация решения в терминах физической модели. Примерно в это же время (в начале XVII — середине XVIII века) усилиями многих ученых (Ньютон, Лейбниц, Ферма, Декарт), вдохновлявшихся идеями Евдокса и Архимеда, создается аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Этот аппарат сначала применялся для решения задач механики, а в конце XVIII — начале XIX века он стал систематически применяться для построения математических моделей распространения волн в упругих телах и в «эфире» *, распространения тепла, для решения задач электростатики, газовой динамики, механики жидкостей и др. Многие великие математики того времени были выдающимися физиками или механиками (Гаусс, Лагранж, Эйлер, Риман и др.). Увеличение числа и усложнение математических моделей, описывающих физические явления, привело к созданию науки, которая изучает эти модели, — математической физики.

Образцом для построения большинства моделей физических явлений в то время была классическая механика. Довольно долго господствовало мнение, что исчерпывающее и единственно правильное объяснение всех явлений можно получить сведением этих явлений к механическому движению (атомов, «эфира» и т. д.).

---

* Ученые того времени под «эфиром» подразумевали гипотетическую субстанцию, служащую переносчиком взаимодействия или универсальной системой отсчета.

В вышедшей в 1873 г. работе «Трактат об электричестве и магнетизме» Дж. К. Максвелл (1831—1879), обобщая идеи и эксперименты М. Фарадея (1791—1867) и некоторые известные ранее законы взаимодействия зарядов и токов, предложил принятую ныне математическую модель электродинамики. В ее основу Дж. К. Максвелл положил уравнения, которые теперь носят его имя. Первоначально считали, что эти уравнения описывают особый род механических движений некоторой гипотетической среды — «эфира». Лишь гораздо позже их стали рассматривать как уравнения, описывающие самостоятельный объект — электромагнитное поле. В математической физике уравнения Максвелла сыграли выдающуюся роль: наряду с уравнениями гидродинамики они долго были и главным источником задач, и основой самых значительных успехов математической физики. Большой класс математических моделей физических явлений в газах, твердых телах, жидкостях строится на основе статистических гипотез о поведении молекул вещества. В современных исследованиях статистический подход используется при выводе кинетических уравнений *.

Основы статистического подхода к построению математических моделей физических явлений были заложены в работах Р. Клаузиуса, Дж. К. Максвелла, Л. Больцмана и систематически изложены Л. Больцманом в «Лекциях по кинетической теории газов» (1872).

Применение теоретико-вероятностных соображений и статистических гипотез было принципиально новым шагом в математической физике. Статистические идеи в значительной степени подготовили мышление физиков к восприятию идей квантовой теории (известно, что Планк в период создания квантовой гипотезы находился под влиянием идей Больцмана). Наибольшее развитие статистический подход получил в работах Дж. Гиббса (1839—1903).

Большой вклад в развитие методов математической физики внесли крупные русские ученые М. В. Остроградский (1801—1862), А. М. Ляпунов (1857—1918) и В. А. Стеклов (1864—1926).

В начале нашего века в теоретической физике произошла революция, которая привела к изменению точек

* Кинетическими уравнениями называются уравнения, описывающие макроскопические потоки частиц вещества или излучения на основе представлений о характере микроскопического взаимодействия частиц.

зрения на многие рассматривавшиеся математической физикой модели и установлению более четких границ их применимости. Тогда же стала ощущаться необходимость более строгого подхода к основам математической физики, и Д. Гильберт в 1900 г. среди своих знаменитых проблем сформулировал проблему аксиоматического построения физики. Работа по аксиоматике и анализу логической структуры различных физических теорий является важным разделом современной математической физики.

В 1916 г. А. Эйнштейн предложил носящие его имя уравнения теории тяготения, а в 1932 г. Джон фон Нейман (1903—1957) опубликовал книгу «Математические начала квантовой механики», в которой подводится итог великим открытиям пионеров квантовой теории, и квантовая механика впервые была изложена как математически непротиворечивая теория.

Работы Гиббса, Эйнштейна, фон Неймана, Гильберта по своему духу связаны с новейшим периодом развития математической физики, для которого характерно широкое использование идей функционального анализа, теории вероятностей, современной геометрии и топологии.

3. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Основные «блоки», из которых ныне строится большинство математических моделей физических явлений (если только эти явления не затрагивают процессы превращения элементарных частиц, процессы, происходящие в очень сильных гравитационных полях, на очень больших по сравнению с размерами Солнечной системы или малых по сравнению с размерами атомных ядер расстояниях), — это уравнения механики, электродинамики, уравнения квантовой механики, кинетические уравнения. Уравнения классической механики, квантовой механики, электродинамики являются формулировками фундаментальных законов природы. Уравнения кинетики, уравнения Больцмана, Власова, уравнения переноса тепла и излучения в простейших случаях можно вывести из фундаментальных законов на основе ряда дополнительных гипотез, в остальных случаях справедливость этих уравнений основывается на экспериментальном подтверждении выводимых из них следствий. Уравнения механики сплошных сред и газовой динамики

можно рассматривать как математическую формулировку законов механики в применении к жидким, упругим или газообразным средам, если только постулировать ряд соотношений типа связи между объемом и давлением, внутренними напряжениями и деформацией и т. д. С другой стороны, эти уравнения можно рассматривать как уравнения, описывающие движения очень большого (в пределе бесконечного) числа взаимодействующих частиц, и тогда с помощью комбинации предельных переходов, не все из которых пока удается математически строго обосновать, можно получить и уравнения механики сплошных сред, и газовой динамики, и дополнительные соотношения типа уравнений состояния. В современной математической физике часто используется комбинация этих подходов.

Все перечисленные выше основные уравнения являются дифференциальными. Поэтому, особенно в ранний период развития математической физики (когда ее основным предметом изучения были задачи механики сплошной среды, электродинамики, теплопроводности, а основными методами — аналитические), ее математическим аппаратом была теория дифференциальных уравнений в частных производных.

На математическую физику часто смотрели просто как на посвященный приложениям раздел теории дифференциальных уравнений в частных производных.

В то же время сама теория дифференциальных уравнений в частных производных развивалась главным образом в процессе решения задач математической физики: физические аналогии подсказывали правильную математическую постановку задач и иногда указывали на пути их решения.

Многие современные математические теории (теория потенциала, теория ортогональных рядов, теория интегральных уравнений) развились из различных приемов решения дифференциальных уравнений математической физики.

Сейчас многие разделы теории дифференциальных уравнений приобрели законченный вид, хотя по-прежнему эта теория занимает (по крайней мере по числу публикаций) центральное место в том разделе математики, который принято называть математическим анализом.

Общие сведения о дифференциальных уравнениях. Уравнения, связывающие значение неизвестной функции в данной точке и значения ее производных в той же точке, называются дифференциальными. Если неизвестные функции

зависят лишь от одной переменной, такие уравнения носят название обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если функции зависят от нескольких переменных и в уравнение входят частные производные по этим переменным, то такие дифференциальные уравнения называются уравнениями в частных производных.

Приведем сначала примеры обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Уравнение малых колебаний тела массы m на пружине с коэффициентом жесткости k имеет вид:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku \tag{4}$$

(трением мы пренебрегаем).

Общим решением уравнения (4) является функция

$$u(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

2. Уравнения движения N масс m_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, которые притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения, имеют вид:

$$\frac{d^2\vec{R}_i}{dt^2} = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \gamma m_j \left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right) \Big/ \left|\vec{R}_i - \vec{R}_j\right|^3, \tag{5}$$

где γ — гравитационная постоянная, $\vec{R}_i$ — радиус-вектор массы m_i.

В случае $N=2$ общее решение этой системы уравнений может быть найдено в явном виде, оно, в частности, описывает движение Земли вокруг Солнца при пренебрежении влиянием других планет. В случае $N=3$ решение системы (5) — это знаменитая проблема трех тел, ее исследование не закончено до сих пор.

Большинство уравнений математической физики является уравнениями в частных производных.

Приведем простейшие примеры задач математической физики, сводящихся к решению уравнений в частных производных. С этих задач, по существу, началось развитие и теории уравнений в частных производных, и математической физики.

Задачи, которые мы рассмотрим ниже, относятся к уравнениям одного из трех простейших типов: гиперболическому, параболическому или эллиптическому. Эта клас-

сификация не является исчерпывающей: существуют уравнения, не принадлежащие ни к одному из этих типов. Однако большое число интересных с точки зрения приложений уравнений принадлежит одному из этих типов, а внутри каждого типа свойства уравнений имеют много общего.

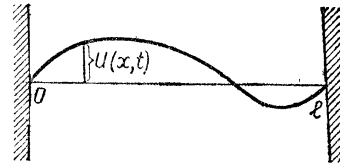


Рис. 2

Волновое уравнение. Уравнение малых колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (6)$$

было получено Б. Тейлором (1685—1731) в 1715 г. и изучено Ж. Л. Даламбером (1717—1783) и Л. Эйлером (1707—1783) в 1745—1747 гг. В уравнении (6) функция $u(x, t)$ — это отклонение от положения равновесия точки струны с координатой x в момент времени t (рис. 2). Масштаб измерения времени и расстояния выбран так, чтобы скорость распространения сигнала по струне была равна единице.

С физической точки зрения ясно, что для определения движения колеблющейся струны нужно знать ее начальное положение, начальные скорости всех точек струны и закон движения концов струны. Если струна имеет в выбранных единицах расстояния длину l и начало координат помещено в одном из ее концов, то задача об определении формы колеблющейся струны формулируется так: найти дважды дифференцируемую в области $D=\{x, t;\ 0<x<l,\ t>0\}$ функцию $u(x, t)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (6) и условиям:

$$\lim_{t\to+0} u(x, t) = \varphi(x), \quad \lim_{t\to+0} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \psi(x), \quad 0<x<l, \qquad (7)$$

$$\lim_{x\to+0} u(x, t) = \mu_1(t), \quad \lim_{x\to l-0} u(x, t) = \mu_2(t), \quad t>0. \qquad (8)$$

Функция $\varphi(x)$ задает отклонение струны от положения равновесия в точке x в момент времени $t=0$, функция $\psi(x)$ — скорость струны в точке x в момент времени $t=0$, функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ задают закон движения концов струны.

Уравнение (6) можно рассматривать, грубо говоря, как

закон распространения заданных на границе области D значений функции $u(x, t)$ внутрь области D.

Если струна неограниченна (такая идеализация удобна в том случае, когда нас интересует движение далеких от концов участков струны в течение времени, малом по сравнению с временем распространения сигнала от одного конца струны до другого), то решение уравнения (6) ищется в области $\{x, t;\ -\infty<x<\infty,\ t>0\}$. В этом случае условия (7) также ставятся в области $-\infty<x<\infty$, а условия (8) не нужны.

Прямой проверкой можно доказать, что решение задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0,\\ \lim_{t\to+0} u(x, t)=\varphi(x), \quad -\infty<x<\infty, \\ \lim_{t\to+0}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}=\psi(x), \quad -\infty<x<\infty\end{gathered} \tag{9}$$

дается формулой Даламбера

$$u(x, t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

На основе этой формулы можно сделать два наблюдения.

Во-первых, решение задачи (9) есть сумма двух функций:

$$u(x, t)=a(x+t)+b(x-t),$$

первая из которых постоянна на прямых $x+t=\text{Const}$ и описывает волну, идущую при $t\to+\infty$ в направлении $x\to-\infty$, вторая функция постоянна на прямых $x-t=\text{Const}$ и описывает волну, идущую при $t\to+\infty$ в направлении $x\to+\infty$. Таким образом, решение задачи (8) есть суперпозиция распространяющихся волн.

Во-вторых, значение функции $u(x, t)$ в точке t определяется только начальным отклонением струны в точках $x+t$, $x-t$ и начальной скоростью струны на участке $[x-t, x+t]$, т. е. скорость распространения возмущения по струне конечна. Можно показать, что формула (9) верна и для ограниченной струны в тех точках x, t, которые удовлетворяют условию

$$t<x+t<l.$$

Уравнение (6) — это простейший пример уравнения гиперболического типа и фактически оно было первым подробно изученным уравнением в частных производных. Уравнения гиперболического типа обычно описывают распространение колебаний (в частности, электромагнитных волн).

Современная теория уравнений гиперболического типа основана на работах Ж. Адамара и И. Г. Петровского.

Уравнение теплопроводности. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{11}$$

впервые было получено Ж. Б. Фурье (1768—1830) при изучении процесса теплопроводности (его работа «Аналитическая теория тепла» была опубликована в 1822 г., само уравнение было получено Ж. Б. Фурье, по-видимому, около 1807 г.). Уравнение (11) описывает, например, распределение температуры в плоском слое однородного вещества, если это распределение зависит только от расстояния до края слоя, или распределение температуры в тонком стержне, если температура мало меняется на поперечном сечении стержня. В этом случае переменная x играет роль координаты точки стержня, переменная t играет роль времени, а $u(x,t)$ — температура точки стержня с координатой x в момент времени t.

С физической точки зрения ясно, что, например, для определения распределения температуры по длине стержня в момент времени t нужно знать распределение температуры в начальный момент времени и закон изменения температуры на концах стержня. Поэтому полная постановка задачи об определении температуры нагретого стержня состоит в следующем: нужно найти дважды дифференцируемую по x и один раз дифференцируемую по t в области $D=\{x,t;\ 0<x<l, t>0\}$ функцию $u(x,t)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (11) и условиям

$$\begin{gathered}\lim_{t\to+0} u(x,t)=u_0(x),\ 0<x<l,\\ \lim_{x\to+0} u(x,t)=T_1(t),\\ \lim_{x\to l-0} u(x,t)=T_2(t).\end{gathered} \tag{12}$$

Функция $u_0(x)$ описывает распределение температуры в начальный момент времени, функции $T_1(t)$ и $T_2(t)$ —

законы изменения температуры на концах стержня. Условия (12) могут иметь и другой вид. Например, если концы стержня теплоизолированы, то поток тепла через них равен нулю, что приводит к условиям:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0,\quad \lim_{x\to l-0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0.$$

Если стержень бесконечен, то условия (11) ставятся в области $\{-\infty<x<\infty\}$, уравнение (10) задается в области $\{x,\ t;\ -\infty<x<\infty,\ t>0\}$, а вместо условий (12) для определения единственного решения, оказывается, нужно наложить требование, указанное А. Н. Тихоновым

$$|u(x,t)|\leqslant A\exp(b|x|^{2-\varepsilon}),\qquad (13)$$

где $A>0$, $b>0$ и $\varepsilon>0$ некоторые константы. Заметим, что для уравнения (6) никакого требования подобного типа для выделения единственного решения в случае бесконечной по оси x области не нужно. Если условие (13) выполнено, то единственное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0,$$

$$\lim\ u(x,t)=u_0(x)\quad t\to+0$$

дается формулой

$$u(x,t)=(1/4\pi t)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-(x-\xi)^2/4t\right)u_0(\xi)\,d\xi.\qquad (14)$$

Из этой формулы, между прочим, следует, что если в начальный момент времени температура была больше нуля на отрезке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, $\delta>0$, а вне его равна нулю, то температура стержня будет больше нуля, в любой момент $t>0$ в любой точке x.

Воспользуемся другой интерпретацией решения уравнения (11): это уравнение описывает распределение вероятности координаты броуновской частицы. Величина $u(x,t)\Delta x$ в этой интерпретации есть вероятность того, что броуновская частица в момент t находится в окрестности Δx точки x. Из формулы (14) следует, что броуновская частица, локализованная в момент времени $t=0$ в окрестности точки x_0, в любой последующий момент времени может быть найдена сколь угодно далеко от точки x_0, т. е. мгновенная скорость броуновской частицы равна бесконечности. Так получилось потому, что при выводе уравнения теплопроводности мы пренебрегли явлениями, связанными с конечной ско-

ростью распространения тепла, а при выводе уравнения для плотности вероятности координаты броуновской частицы не учитывались явления, связанные с конечностью массы и скорости этой частицы. Конечность скорости распространения сигнала и конечность скорости движения любого тела есть фундаментальный закон физики. Таким образом, из уравнения (11) формально вытекают следствия, которые противоречат фундаментальным законам физики. Следует ли на этой основе отвергать уравнение (11) как модель процесса теплопроводности или броуновского движения? Более подробное рассмотрение показывает, что нарушения фундаментальных законов в данном случае очень малы (т. е. очень мал уровень теплового сигнала вдали от точки x_0 и очень мала вероятность найти броуновскую частицу вдали от точки x_0). В рамках разумной точности уравнение (13) хорошо описывает процессы теплопроводности и броуновского движения и является приемлемой математической моделью для этих процессов.

Уравнение (11) является простейшим примером уравнения параболического типа. Уравнения этого типа описывают процессы теплопроводности, диффузии, броуновского движения, намагничивания и т. д.

Рассмотрим уравнение Шредингера, описывающее плотность $\psi(x,t)$ распределения вероятности координаты квантовомеханической частицы в поле с потенциалом $V(x)$:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

(для простейшего одномерного случая).

Аналогия между этим уравнением и уравнением (11), описывающим диффузию, на раннем этапе развития квантовой теории послужила темой многочисленных дискуссий и до сих пор является основой многих исследований по квантовой механике.

Уравнение Лапласа. Потенциал электрического поля в двумерной области, в которой заряды отсутствуют, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D. \tag{15}$$

Это уравнение встречается в работах Эйлера 1752 г. П. Лапласом (1749—1827) оно было опубликовано в 1785 г. В 1813 г. С. Пуассон (1781—1840) получил обобщение этого

уравнения на тот случай, когда в области есть заряды, распределенные с плотностью $\rho(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4\pi\rho(x, y), \quad (x, y)\in D. \tag{16}$$

Уравнение (16) называется уравнением Пуассона. Уравнения (15) и (16) лишь простейшая форма рассмотренных Эйлером, Лапласом и Пуассоном уравнений. Эти авторы рассматривали и более сложные случаи. Уравнения (15) и (16) представляют собой примеры уравнений эллиптического типа.

Простейшая задача, сводящаяся к решению уравнения (15), состоит в следующем: найти потенциал электрического поля в некоторой двумерной области D, если на границе области задано распределение потенциала. С математической точки зрения эта задача формулируется так: найти дважды дифференцируемую по x и y функцию $u(x,y)$, которая внутри области D удовлетворяет уравнению (15) и условию

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)\in\partial D} u(x,y)=\psi(\xi,\eta), \quad (x,y)\in D,$$

где $\psi(\xi,\eta)$ — заданная на границе ∂D области D функция. Например, если область D — прямоугольник $[0<x<a]$; $[0<y<b]$ и функция $\psi(x,y)$ на нижнем основании задана формулой

$$\psi(x,0)=\sin(\pi x/a), \quad 0<x<a,$$

а на всех остальных сторонах прямоугольника D она равна нулю, то решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,$$

$$\lim_{y\to+0} u(x, y)=\sin(\pi x/a), \quad 0<x<a,$$

$$\lim_{y\to b-0} u(x, y)=0, \quad \lim_{x\to+0} u(x, y)=0, \quad \lim_{x\to a-0} u(x, y)=0$$

дается формулой

$$u(x, y)=\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(b-y)\sin\frac{\pi}{a}x}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}, \tag{17}$$

из которой можно получить представление о характере решений уравнения (15).

Функции, удовлетворяющие уравнению (15) в некоторой области D, называются гармоническими в D. Если функция $W(z)$ от комплексной переменной $z=x+iy$ аналитична в области D (т. е. если у функции $W(z)$ в каждой точке области существует производная), то действительная и мнимая части функции $W(z)$ (т. е. функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в представлении $W(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$) в области D являются гармоническими функциями. На этом основан один из самых мощных в прошлом метод решения связанных с уравнением (15) задач (метод конформных преобразований), позволяющий решить ряд важных проблем гидродинамики и электростатики.

Теория уравнений эллиптического типа — один из самых развитых отделов теории дифференциальных уравнений в частных производных, в котором получены наиболее глубокие и законченные результаты.

Метод разделения переменных. Одним из первых достаточно общих методов решения сформулированных выше краевых задач для дифференциальных уравнений был метод разделения переменных. В зачаточном виде он был применен еще Тейлором для отыскания частных решений уравнения малых колебаний струны, а широко впервые стал использоваться Ж. Б. Фурье, именем которого он часто и называется. Связанные с методом Фурье понятия (ряда Фурье, собственной функции, собственного значения и т. д.) имели фундаментальное значение в развитии математической физики. Особенно важна была роль этих понятий при возникновении квантовой механики.

Поясним сущность метода разделения переменных на примере решения простейшего уравнения теплопроводности.

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<t<\infty, \quad 0<x<l \tag{18}$$

и условиям

$$\lim_{x\to+0} u(x,t)=\lim_{x\to l-0} u(x,t)=0 \tag{19}$$

$$\lim_{t\to+0} u(x,t)=u_0(x). \tag{20}$$

Найдем сначала не равные тождественно нулю частные решения уравнения (18), которые удовлетворяют условию

(19) и равны произведению функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от t:

$$u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x). \tag{21}$$

(Индекс n введен нами в искомую функцию по соображениям, которые будут ясны ниже.)

Подставляя определенную формулой (21) функцию $u_n(x,t)$ в уравнение (18), мы получим, что функция $u_n(x,t)$ удовлетворяет уравнению (18), если выполнено равенство

$$\frac{1}{T_n}\frac{dT_n}{dt}=\frac{1}{X_n}\frac{d^2X_n}{dx^2}. \tag{22}$$

Левая часть равенства (22) не зависит от t, правая часть не зависит от x. Следовательно, должно быть выполнено равенство

$$\frac{1}{T_n}\frac{dT_n}{dt}=\frac{1}{X_n}\frac{d^2X_n}{dx^2}=-\lambda_n,$$

где λ_n — некоторая константа. Таким образом, функция $T_n(t)$ и $X_n(x)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dt}T_n(t)+\lambda_nT_n(t)=0, \qquad \frac{d^2}{dx^2}X_n+\lambda_nX_n=0. \tag{23}$$

В уравнении (20) две независимых переменных, а в каждом из уравнений (23) только по одной независимой переменной, т. е. переменные «разделились».

Заметим, что аналогичный прием используется в теоретической механике при интегрировании уравнений Гамильтона — Якоби.

Легко найти общие решения уравнений (23):

$$T_n(t)=C_n\exp(-\lambda_nt),$$

$$X_n(x)=A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,x+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,x.$$

Таким образом мы получаем, что удовлетворяющая уравнению (18) и имеющая представление (21) функция $u_n(x,t)$ записывается так:

$$u_n(x,t)=\exp(-\lambda_nt)\left[A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,x+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\right].$$

Из условия

$$u_n(0,t)=0$$

мы находим

$$A_n=0.$$

Из условия

$$u_n(l,t)=0$$

мы находим

$$B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, l = 0.$$

Если

$$u_n(x,t) \neq 0,$$

то это равенство может быть выполнено только в том случае, когда

$$\sqrt{\lambda_n}\, l = \pi n,$$

откуда

$$\lambda_n = (\pi n/l)^2.$$

Следовательно, удовлетворяющие уравнению (18) условиям (19) функции $u_n(x,t)$, которые допускают представление (21), имеют вид:

$$u_n(x, t) = B_n \exp\left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right] \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где B_n — произвольные константы.

Любая линейная комбинация конечного числа функций u_n удовлетворяет уравнению (18) и условиям (19), но, вообще говоря, не удовлетворяет условию (20). Будем искать удовлетворяющую условию (20) функцию как предел линейных комбинаций функций u_n:

$$u(x, t) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} B_n \exp\left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right] \sin \frac{\pi n}{l} x \right). \quad (24)$$

Предполагая, что ряд (24) сходится при каждом $t>0$, умножим обе части равенства (24) на $\sin(n\pi x/l)$ и проинтегрируем по x в интервале $0<x<l$. Получим:

$$\int_0^l u(x, t) \sin \frac{\pi m}{l} x\, dx = B_m \frac{l}{2} \exp\left[-\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t\right],$$

т. е.

$$B_m = \frac{2}{l} \lim_{t\to+0} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{\pi m}{l} x\, dx =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi m}{l} x\, dx. \quad (25)$$

Формула (25) выражает коэффициенты B_m через известную функцию $u_0(x)$. Подставляя это выражение в формулу (24), мы получим:

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \exp\left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right] \times$$

$$\times \left[\int_0^l u_0(x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx\right] \sin\frac{\pi n}{l} x. \qquad (26)$$

Можно доказать, что если функция $u_0(x)$ непрерывна, то ряд (26) сходится и его сумма действительно является решением задачи (18)—(20).

Для большинства практических целей при $t \gg 1$ хорошим приближением к решению служит первый член ряда (26), т. е. формула

$$u(x, t) \cong \frac{2}{l} \exp\left[-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t\right] \times$$

$$\times \left[\int_0^l u_0(x) \sin\frac{\pi}{l} x\, dx\right] \sin\frac{\pi}{l} x.$$

Применение аналогичного приема к задаче о малых колебаниях струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$$

приводит к формуле

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$

где

$$u_n(x, t) = \left[A_n \cos\frac{\pi n}{l} t + B_n \sin\frac{\pi n}{l} t\right] \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^l v_0(x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx.$$

Формула (27) представляет движение струны как суперпозицию «элементарных» гармонических колебаний — «квантов движения». Представление о сложном движении

как о суперпозиции простых гармонических колебаний сыграло исключительно важную роль при становлении квантовой теории и до сих пор является рабочим инструментом в квантовой теории твердых тел (на нем основано понятие «фононов»).

Метод разделения переменных применим к узкому классу задач, но решение этих задач в свое время послужило ключом к пониманию многих важных проблем математической физики.

Уравнения Навье — Стокса. Все рассмотренные нами выше уравнения были линейными. Особенность линейных уравнений состоит в том, что если V и W — два решения, то функция $\alpha V+\beta W$ при любых постоянных α и β снова является решением. Это обстоятельство позволяет построить общее решение линейного дифференциального уравнения из фиксированного набора его «элементарных» решений и сильно упрощает теорию линейных дифференциальных уравнений.

Пожалуй, самым знаменитым примером нелинейного дифференциального уравнения математической физики является система дифференциальных уравнений Навье — Стокса, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости.

Пусть (x_1, x_2, x_3) — декартовы координаты точек заполненной жидкостью области D; $u_i(x_1,x_2,x_3,t)$ $1 \leqslant i \leqslant 3$ — компоненты вектора скорости частицы жидкости, находящейся в момент времени t в точке (x_1,x_2,x_3); $p(x_1,x_2,x_3, t)$— давление жидкости в точке (x_1,x_2,x_3) в момент времени t. Если на жидкость не действуют внешние силы, то при определенной идеализации эти величины связаны системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{3} u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \left(\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) - \dfrac{\partial p}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad u_i(x_1, x_2, x_3, t)\big|_{(x_1, x_2, x_3) \in \partial D} = 0 \end{cases} \tag{28}$$

$$u_i(x_1, x_2, x_3, 0) = u_i^0(x_1, x_2, x_3),$$

где ν — вязкость жидкости. Система уравнений (28) называется системой уравнений Навье — Стокса. Первые три уравнения этой системы (первая строка) — запись второго закона Ньютона для частицы жидкости: слева стоит ускорение, а справа — сила, отнесенная к единице

массы. Пропорциональное вязкости слагаемое моделирует переход энергии макроскопического движения жидкости в энергию теплового движения ее молекул. Последнее уравнение системы (28) (вторая строка) — это условие несжимаемости жидкости. Условие равенства нулю скорости жидкости на границе описывает прилипание частиц жидкости к стенкам сосуда.

Ни одному из нелинейных уравнений математической физики не посвящено столько работ, сколько системе уравнений Навье — Стокса. Несмотря на это, ряд принципиальных вопросов, связанных с системой уравнений Навье — Стокса, остается нерешенным. До сих пор неизвестно, существуют ли у системы (28) при произвольных гладких начальных данных гладкие решения, которые остаются гладкими (т. е. дифференцируемыми) неограниченно долго, единственно ли негладкое (обобщенное) решение системы (28), действительно ли описывает система (28) переход к турбулентному движению жидкости при определенных условиях.

В системе (28) четыре неизвестных функции от четырех аргументов, что делает задачу численного решения системы (28) очень сложной. В полной мере она стала под силу исследователям лишь совсем недавно.

В последнее время рядом исследователей на основе анализа кинетических уравнений предложены такие модели диссипации энергии в жидкости, которые приводят к уравнениям движения жидкости, отличным от уравнений Навье — Стокса (например, вязкость берется зависящей от скорости).

Эти «модифицированные» уравнения иногда выглядят более сложно. В качестве примера, наряду с системой уравнений Навье — Стокса (28) рассмотрим еще две системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{3} u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \left(\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) - \\ - \varepsilon \left(\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum\limits_{s,\,k} \left(\dfrac{\partial u_s}{\partial u_k} \right)^2 \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right), \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \qquad (28')$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{3} u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \end{cases} \tag{28''}$$

Система уравнений (28′) иногда используется при теоретическом анализе свойств решений системы уравнений Навье — Стокса. Система уравнений (28″) — это система уравнений Эйлера, описывающая движение идеальной жидкости.

На первый взгляд самой сложной является система (28′), а самой простой — система (28″), ибо система уравнений Навье — Стокса получается из системы (28′) при $\varepsilon=0$, а система (28″) при $\nu=0$, $\varepsilon=0$. В действительности, однако, самой трудной для исследования является система уравнений Эйлера. Дело в том, что присутствие в уравнении «лишних» производных неизвестной функции позволяет получить дополнительную информацию о решении уравнения.

Это обстоятельство нужно учитывать при составлении математических моделей и помнить о том, что далеко не всегда уравнение, которое внешне выглядит более просто, является более простым с теоретической или вычислительной точки зрения.

Однако вопрос о том, удачны или нет предлагаемые ныне для описания движения вязкой жикости «замены» системы уравнений Навье — Стокса, может решить только практика.

Решение интересных с точки зрения приложений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных редко можно найти «точно», т. е. в виде суперпозиции уже известных функций. Поиски случаев «точной» интегрируемости продолжаются все время, и недавно были разработаны новые методы отыскания «точных» решений уравнения Кортевега — де Фриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

«кубического» уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu |u|^2 u = 0$$

и уравнения «Синус — Гордон»

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0.$$

Они интересны тем, что являются простейшими примерами нелинейных уравнений, описывающих распространение волн в диспергирующей среде (т. е. в среде, где скорость распространения колебаний зависит от частоты и амплитуды колебаний). Используя «точные» решения, ученым удалось изучить ряд интересных явлений: фокусировку лазерного излучения, возникновение и развитие «уединенных» волн — солитонов и т. д.

Примером решения типа «уединенной» волны для уравнения Кортевега — де Фриза является функция

$$u(x,t) = 12\mu^2/\sigma \operatorname{ch}^2(\mu x - 4\mu^3 t),$$

где μ — константа. Эта функция описывает волну, амплитуда которой пропорциональна скорости распространения. Если уравнение распространения колебаний линейное, амплитуда колебаний не зависит от скорости, в чем можно убедиться на примере рассмотренного выше волнового уравнения.

Много «точных» решений найдено для дифференциальных уравнений газовой динамики (автомодельные решения). Для поиска «точных» решений используются приемы, основанные на методах теории групп, спектральной теории дифференциальных уравнений и т. д.

Но основным методом решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных является численное интегрирование.

Об общей теории дифференциальных уравнений. Вернемся снова к линейным дифференциальным уравнениям. Выше мы рассмотрели три простейших примера дифференциальных уравнений гиперболического (уравнение (5)), параболического (уравнение (10)) и эллиптического (уравнение (15)) типов. В каждом примере нам нужно было найти функцию $u(x,y)$, которая в прямоугольнике $D=\{x,y;\ 0<x<l,\ 0<y<g\}$ удовлетворяет уравнению, а на границе прямоугольника D — некоторым условиям. Эти условия в наших примерах диктовались физическим смыслом рассматривавшихся примеров. Можно показать, что решение рассмотренных нами для каждого уравнения задач существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи

(т. е. мало меняется при малом изменении функций, заданных на границе области).

Такие задачи называются корректно поставленными. Мы видим, что для каждого рассмотренного нами уравнения есть свои дополнительные условия, при которых решение уравнения является корректно поставленной задачей. Физическая интуиция подсказывает, что, например, те дополнительные условия, которые мы принимаем в случае уравнений эллиптического типа (задание функции на всей границе прямоугольника D), для уравнения параболического типа принимать нельзя, ибо для уравнения параболического типа значение функции на верхнем основании прямоугольника однозначно определяется значениями на нижнем основании и боковых сторонах, и его нельзя задать произвольно. Возникает задача: как для произвольно заданного дифференциального уравнения описать все те дополнительные условия, при которых решение этого уравнения является корректно поставленной задачей? Решением этой и аналогичных проблем занимается общая теория дифференциальных уравнений. Заметим, что очень сложен вопрос и о том, всегда ли существуют для произвольного дифференциального уравнения такие дополнительные условия, которые приводят к корректной задаче. Пока решение этой проблемы удалось получить лишь для некоторого класса линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и только тогда, когда область изменения независимых переменных есть полупространство, хотя ряд очень интересных результатов частного характера получен и в других случаях.

Далеко не все интересные и содержательные с физической точки зрения задачи приводят к корректным задачам. Например, некорректной является задача об определении начального распределения температуры тела по измеренной температуре в момент $t>0$. Теория некорректных задач — важный и развивающийся раздел современной теории дифференциальных уравнений. В ее развитие фундаментальный вклад внесли советские ученые А. Н. Тихонов, В. К. Иванов, М. М. Лаврентьев.

Начала теории дифференциальных уравнений в частных производных впервые были изложены в знаменитом «Интегральном исчислении» Л. Эйлера, которое вышло в 1768—1774 гг. Конечно, это не была теория в современном понимании этого слова, а просто скорее ряд гениальных догадок и набор приемов отыскания решений дифферен-

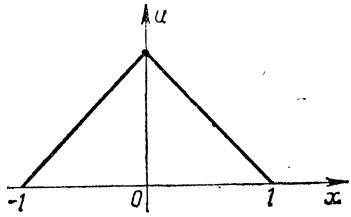


Рис. 3

циальных уравнений (впрочем, отыскание таких приемов — всегда дело первостепенной важности, и совсем недавно удалось найти несколько новых интересных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений).

Одним из первых и до сих пор одним из самых общих и глубоких результатов теории дифференциальных уравнений в частных производных является доказанная в 1874 г. С. В. Ковалевской (1850—1891) знаменитая теорема о том, что задача Коши (пример задачи Коши — рассмотренная нами выше задача для бесконечной струны) для уравнения с аналитической зависимостью * от производных и независимых переменных всегда имеет аналитическое решение.

Современная общая теория дифференциальных уравнений занимается главным образом линейными уравнениями и очень специальными классами нелинейных уравнений.

Понятие обобщенного решения. В процессе развития теории дифференциальных уравнений в частных производных понятие решения дифференциального уравнения претерпело существенные изменения.

Раньше решением дифференциального уравнения называлась функция, которая имеет все входящие в уравнение производные, причем эти производные удовлетворяют уравнению в каждой точке, где ищется решение. Такие решения теперь называются классическими решениями. Понятие классического решения оказалось слишком стеснительным для практики, ибо далеко не все интересные с точки зрения приложений задачи имеют классическое решение.

Рассмотрим, например, задачу о малых колебаниях бесконечной струны. Предположим, что в начальный момент времени отклонение струны от положения равновесия имеет изображенный на рис. 3 вид, а начальная скорость струны равна нулю.

Задача об определении формы струны в последующие моменты времени сводится к решению задачи

* Функция называется аналитической, если она разлагается в ряд Тейлора. 32

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\frac{\partial u(x, +0)}{\partial t} = 0, \tag{29}$$

$$u(x, +0) \equiv \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x+1, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Если мы подставим начальные данные задачи в формулу Даламбера, по которой находится решение задачи (29) в случае гладких (т. е. достаточное число раз дифференцируемых) начальных данных, то получим

$$u(x,t) = [u_0(x+t) + u_0(x-t)]/2. \tag{30}$$

Правая часть формулы (30) не дифференцируема по x при фиксированном t и не дифференцируема по t при фиксированном x на прямых

$$x+t=0, \quad x+t=\pm 1, \quad x-t=0, \quad x-t=\pm 1,$$

поэтому не ясно, в каком смысле можно говорить о том, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (6).

Пусть $u_0^{(n)}(x)$, — последовательность дважды дифференцируемых функций, которая при $n \to \infty$ сходится к функции $u_0(x)$. (Такую последовательность легко получить, например, сглаживая углы у графика функции $u_0(x)$.)

Пусть $u^{(n)}(x,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

$$u^{(n)}(x, +0) = u_0^{(n)}(x),$$

т. е.

$$u^{(n)}(x,t) = [u_0^{(n)}(x+t) + u_0^{(n)}(x-t)]/2.$$

Естественно понимать под решением задачи (29) предел функций $u^{(n)}(x,t)$ при $n \to \infty$, а этот предел и дается формулой (30).

Таким образом, правая часть формулы (30) является пределом функций, каждая из которых удовлетворяет уравнению (29), т. е. пределом «классических» решений уравнения (6). Функции, которые являются пределами классических решений дифференциального уравнения, называются обобщенными решениями. Обобщенное решение не

всегда имеет все входящие в уравнение производные. Простейший пример обобщенного решения волнового уравнения — даваемая правой частью формулы (30) функция $u(x,t)$.

Существуют и другие подходы к построению обобщенных решений: на основе интегральных тождеств, вариационных принципов и т. д. Не всегда различные подходы к построению обобщенных решений приводят к одному и тому же классу решений.

Впервые обобщенные решения дифференциальных уравнений в частных производных стал систематически изучать в 1936 г. С. Л. Соболев, хотя они встречались и раньше в работах Ж. Адамара и других исследователей.

Пример уравнения математической физики, не являющегося дифференциальным уравнением. Не все уравнения математической физики являются дифференциальными уравнениями. Уравнения переноса (Больцмана, Власова и их обобщения) являются интегро-дифференциальными уравнениями. В частности, интегро-дифференциальным является уравнение Больцмана для переноса нейтронов в среде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v\left(\sum_{i=1}^{3} \Omega_i \frac{\partial N}{\partial x_i}\right) + \frac{vN}{l(v)} =$$

$$= \int_0^t d\tau \iiint_D K\left(\tau, v', \Omega_1', \Omega_2', \Omega_3'; v, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\right) \times$$

$$\times N\left(v', \Omega_1', \Omega_2', \Omega_3', x_1, x_2, x_3, t-\tau\right) dv'\, d\Omega'. \qquad (32)$$

Здесь $N(v, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, x, t)$ — плотность нейтронов в точке x в момент времени t, v — их скорость в направлении единичного вектора Ω, K, l — величины, характеризующие физические параметры среды, в которой распространяются нейтроны. К решению уравнения (32) сводятся основные математические проблемы расчета ядерных реакторов.

Заметим, что многие другие уравнения — уравнение переноса излучения, уравнение Больцмана в кинетической теории газов в линейном приближении, уравнение Власова в теории плазмы (в линейном приближении) — имеют структуру, аналогичную уравнению (32).

Теперь изучением уравнения (32) занимается специальный раздел математической физики — теория переноса

нейтронов, которая превратилась фактически в отдельную науку со своими проблемами и методами.

Сегодня ясно, что задачи математической физики имеют свою специфику, не сводящуюся только к проблемам теории дифференциальных уравнений или их обобщений. Причиной этого, на наш взгляд, являются два обстоятельства.

Во-первых, широкое применение современных ЭВМ в научных исследованиях привело к изменению понятия «решение задачи» в классических разделах математической физики и к созданию нового метода исследования — вычислительного эксперимента.

Во-вторых, многие проблемы современной математической физики, связанные с квантовой теорией, статистической физикой, биофизикой и др., приводят к задачам, не описываемым дифференциальными уравнениями.

4. НЕКОТОРЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Структура вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент — это эксперимент над математической моделью явления, который состоит в том, что по одним параметрам модели вычисляются другие ее параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах явления, описываемого математической моделью.

Технологический цикл вычислительного эксперимента можно разбить на несколько этапов:

выбор физического приближения и математическая формулировка задачи (построение математической модели);

предварительный анализ модели;

разработка вычислительного алгоритма;

реализация алгоритма решения задачи в виде программы для ЭВМ;

проведение расчетов на ЭВМ;

обработка, анализ и интерпретация результатов расчетов;

сопоставление с физическим экспериментом и в случае необходимости пересмотр математической модели.

Деление вычислительного эксперимента на этапы имеет в значительной степени условный характер. На самом деле все этапы тесно связаны между собой и служат одной цели — построению с необходимой точностью за возможно меньшее машинное время адекватного количественного описания физического явления.

Структура вычислительного эксперимента показывает, что это сложный научно-производственный процесс. Обычно в нем участвует большой коллектив специалистов различного профиля — от физиков-теоретиков и экспериментаторов до программистов и инженеров-электронщиков. Успех дела зависит от ясного понимания участниками цели исследования, согласованности взаимодействия и, в частности, от умения находить компромиссные решения вопросов в областях, где перекрещиваются интересы различных специалистов.

Для творческого участия в вычислительном эксперименте специалист по математической физике должен обладать глубокими знаниями физики, вычислительной математики, программирования.

Выбор математической модели. Исходный пункт вычислительного эксперимента — выбор математической модели. Обычно в математической физике выбирают модели, которые поддаются исследованию с помощью уже имеющихся в распоряжении исследователя математических средств. Конечно, бывают такие случаи, когда логика исследования с необходимостью приводит к задачам совершенно неисследованной структуры. Такие задачи на первоначальном этапе могут лежать вне возможностей вычислительного эксперимента. О некоторых задачах такого класса мы скажем ниже.

До появления ЭВМ и современной вычислительной математики приходилось в основном ориентироваться на аналитические методы. Это в значительной степени определяло классическое содержание понятия «решить задачу». Чаще всего это означало найти аналитическое выражение искомой функции в виде удобной для исследования формулы. Отголоски этого подхода иногда встречаются и сейчас. Класс решаемых в таком смысле задач очень узок и совершенно недостаточен для практики, хотя решаемые аналитически задачи имеют большое методическое значение. Применение численных методов и ЭВМ дает возможность использовать сложные нелинейные математические модели, охватывающие все существенные черты физиче-

ского процесса в широкой области изменения параметров. При этом, в отличие от классического аналитического подхода, появляется возможность сначала получить полное количественное описание физического явления и уже на этой основе сделать общие выводы о присущих явлению закономерностях.

В ряде случаев вычислительный эксперимент позволяет подходить к созданию математических моделей с принципиально новых позиций. Поясним это на примере. Допустим, мы исследуем движение системы частиц, и нам нужно узнать, останутся ли эти частицы в фиксированной области пространства достаточно долго. Традиционный способ решения этой задачи состоит в решении задачи на устойчивость, т. е. в замене интересующего нас большого интервала времени бесконечным, что порождает специфические математические трудности. Возможности современных ЭВМ часто позволяют решить эту задачу «в лоб» — прямым интегрированием уравнений движения; при этом трудности решения задачи переносятся на решение специфических проблем вычислительной математики. Такой метод «прямого моделирования процесса» стал весьма популярен, в частности, при решении задач о взаимодействии потока заряженных частиц с твердым телом.

Примеры построения математических моделей. В своей основе создание математической модели явления — творческий акт, для которого нет каких-либо четких, всегда безотказно работающих правил. Но есть набор приемов, которые при составлении математических моделей часто приводят к цели: использования физических аналогий, вариационных принципов, учет законов сохранения и т. д. Для овладения этими приемами необходимо специальное обучение (которому, к сожалению, иногда уделяется слишком мало времени при подготовке специалистов).

Проиллюстрируем обычно употребляемые при выводе математических моделей рассуждения на простых примерах.

Выведем уравнение малых колебаний струны. Это уравнение можно получить, применяя к бесконечно малому участку струны второй закон Ньютона, но мы найдем уравнение малых колебаний струны на основе вариационного принципа Гамильтона. Напомним в упрощенном виде содержание этого принципа.

Пусть $Q(t)$ — обобщенная координата механической системы (т. е. величина, которая полностью задает поло-

жение механической системы; это может быть и вектор и даже, как в рассматриваемом ниже примере, функция), $\frac{dQ}{dt}$ — скорость механической системы.

С точки зрения принципа Гамильтона механическая система описывается функцией Лагранжа $L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right)$ которая является функцией от координаты и скорости. В простейших случаях функция Лагранжа равна разности между кинетической и потенциальной энергией.

Рассмотрим интеграл

$$S[Q] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt.$$

Этот интеграл есть функционал от функции $Q(t)$: каждой дифференцируемой на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ функции $Q(t)$ он сопоставляет число. Функционал $S[Q]$ называется функционалом действия.

Оказывается, что если движение системы происходит по законам механики, то описывающая это движение функция $Q(t)$ является стационарной функцией для функционала $S[Q]$. Иначе говоря, это означает, что для любой функции $\varphi(t)$, равной нулю в окрестности точек t_1, t_2 и удовлетворяющей тому условию, что величина $Q(t) + \varepsilon\varphi(t)$, $|\varepsilon| \ll 1$ является возможной координатой нашей системы, справедливо равенство:

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[Q + \varepsilon\varphi]\,|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{32}$$

Равенство (32) позволяет получить уравнение для определения функции $Q(t)$.

В рассматриваемом нами случае положение струны описывается функцией $u(t, x)$.

Координатой нашей системы является функция $u(t, x)$, рассматриваемая как функция от x при фиксированном t.

Предположим, что струна имеет постоянную линейную плотность ρ_0 и натянута с силой F_0. Тогда кинетическая энергия струны есть

$$W_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\rho_0 \int_0^l \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx.$$

Если мы считаем амплитуду колебаний струны малой, то тогда ее потенциальная энергия приближенно (с точностью до величин порядка $\left(\frac{du}{dx}\right)^3$ равна

$$W_{\text{пот}} = \frac{1}{2} F_0 \int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx,$$

и функция Лагранжа нашей системы

$$L\left(u, \frac{du}{dt}\right) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^l \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx - \frac{1}{2} F_0 \int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Действие на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ равно

$$S[u] = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\int_0^l \left[\rho_0 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - F_0 \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right] dx\right] dt.$$

Условие стационарности действия приводит к уравнению:

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[u + \varepsilon\varphi]|_{\varepsilon=0} = \int_0^T \left[\int_0^l \left[\rho_0 \frac{du}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - F_0 \frac{du}{dx} \frac{d\varphi}{dx}\right] dx\right] dt =$$

$$= -\int_0^T \left[\int_0^l \left[\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \varphi(x, t)\, dx\right] dt. \qquad (33)$$

При выводе этого уравнения мы применили интегрирование по частям и учли, что

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x, T) = 0,$$
$$\varphi(0, t) = \varphi(l, t) = 0.$$

Правая часть (33) должна быть равна нулю для любой функции $\varphi(x, t)$, поэтому необходимо, чтобы выполнялось равенство $\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, т. е.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = F_0/\rho_0. \qquad (34)$$

Заменой переменных

$$t \to ct$$

уравнение (34) сводится к уравнению (6).

Принцип Гамильтона может быть обобщен так, что он будет применим в задачах электродинамики и в задачах квантовой механики. Вариационный принцип Гамиль-

тона сводит задачу о получении уравнений движения к задаче построения лагранжиана системы, т. е. к задаче о нахождении кинетической и потенциальной энергии системы как функции координат и скоростей (в простейших случаях). Это делает принцип Гамильтона очень удобным методом построения математических моделей.

Отметим, что в развитие принципа Гамильтона большой вклад внес русский ученый М. В. Остроградский поэтому он иногда называется принципом Гамильтона — Остроградского.

В качестве второго примера рассмотрим процесс теплопроводности в плоском слое однородного вещества. Пусть c — удельная теплоемкость вещества, ρ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности. Будем считать, что все эти величины не зависят от координат. Пусть $T(x, t)$ — температура на расстоянии x от левой границы слоя $x=0$ в момент времени t. Мы будем считать, что температура зависит только от x и t. Сделанные выше предположения по существу представляют собой описание физической модели. Справедливость этих предположений должна проверяться на опыте.

Для вывода уравнения теплопроводности применим закон сохранения тепла. Воспользуемся следующими утверждениями, которые представляют собой математическую формулировку законов теплопроводности.

1. Количество тепла в объеме V

$$Q=\iiint\limits_V c\rho T dxdydz. \tag{35}$$

2. Скорость изменения количества тепла в объеме V в результате теплообмена через границу есть

$$\iint\limits_{\partial V} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS, \tag{36}$$

где n — направление внешней нормали к границе ∂V тела. Первое утверждение, по существу, есть математическая формулировка определения удельной теплоемкости, второе—математическая формулировка гипотезы о процессе распространения тепла в веществе (закона Фурье). Согласно этому закону поток тепла через участок поверхности ΔS пропорционален площади участка ΔS и градиенту температуры на поверхности S, т. е. величине $\frac{dT}{dx}$, где

x — расстояние, отсчитываемое по нормали к поверхности S.

Если тепло сохраняется, т. е. в среде нет источников и стоков, то для любого объема V внутри слоя должно выполняться равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V c\rho T\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial V} \lambda \frac{\partial T}{\partial n}\,dS,$$

которое представляет собой математическую формулировку закона сохранения тепла.

Возьмем в качестве объема V параллелепипед с основанием, параллельным краю слоя, и высотой Δx. Получим

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t}\Delta S \int\limits_x^{x+\Delta x} T(x, t)\,dx =$$

$$= \lambda\,\Delta S\left[\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x, t)\right].$$

Разделив обе части равенства на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, мы получим уравнение

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{37}$$

которое должно быть выполнено при всех $t>0$, $x>0$. Это уравнение описывает процесс теплопроводности.

Математическая модель и опыт. Остановимся на вопросе о том, как сделанные при выводе уравнения (37) гипотезы могут быть проверены на опыте и в каком смысле можно утверждать, что законы (35) и (36) являются следствием опыта.

Для проверки на опыте, что некоторая величина описывается дифференцируемой функцией $T(x,t)$, нам нужно проверить, что в каждой точке x существует предел отношения $[T(x+\Delta x,t)-T(x,t)]/\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, а для этого нам нужно в каждой точке x провести бесконечное число бесконечно точных измерений. Невозможность такого процесса очевидна. Совершенно так же уравнения (35) и (37) представляют собой утверждение о результатах бесконечного числа экспериментов и, строго говоря, никогда не могут быть проверены на опыте. Мы не можем утверждать, что уравнение (37) является прямым следствием эксперимента. В любом эксперименте фактически проверя-

ются лишь косвенные следствия гипотез, сделанных при построении математической модели, и эксперимент может либо опровергнуть совокупность этих гипотез (но не каждую гипотезу в отдельности), либо подтвердить их лишь частично.

Ясно, что конечное число опытов всегда может быть описано бесконечным числом теорий. Вопрос о взаимоотношении теории и эксперимента очень сложен и является предметом изучения специальных наук. Цель предыдущих рассуждений состояла только в том, чтобы указать на нетривиальность рассматриваемой проблемы.

Для нас в связи с этим важно заметить, что, поскольку процесс построения математической модели не является протокольной записью результатов опыта, большое значение имеет багаж математических знаний и стиль мышления ученого, занятого составлением математических моделей, ибо это в значительной степени определит те представления, которые у него возникнут при анализе экспериментальных данных и которые будут им использованы для создания математической модели.

Общие замечания о построении математических моделей. В процессе составления математической модели необходимо «расщепить» явление на элементарные физические процессы, понять, какие из них важны, а какие можно учесть лишь приближенно, придумать способ приближенного описания второстепенных физических процессов и т. д. Обычно создание правильной математической модели явления происходит методом «проб и ошибок»: создается грубая модель, исследуется ее поведение, результаты сравниваются с экспериментом или предсказаниями других моделей, модель уточняется и т. д. Иногда создание математической модели идет и по другому пути: начав со сложной системы уравнений, исследователь выясняет, что в силу специфики рассматриваемой задачи некоторые уравнения можно упростить и получить более пригодную для расчетов модель. Часто процесс такого упрощения идет на «физическом» уровне математической строгости. При выводе математической модели эвристические соображения и нестрогие с математической точки зрения рассуждения допустимы, однако всегда следует помнить, что результаты расчета будут соответствовать той модели, для которой они производились, а не той, которая послужила отправной точкой для эвристических рассуждений.

При составлении математической модели следует стремиться к тому, чтобы обозначения были по возможности проще, а формулировка всей задачи компактна и красива. Обычно с математической моделью работает коллектив исследователей, и понятные обозначения облегчают их общение. Важно выбрать естественные для данного явления единицы измерения. Это облегчит расчет и обеспечит малость численных значений тех величин, которые оказывают малое влияние на ход процесса. Для того чтобы знать характерные диапазоны изменения всех входящих в задачу величин, используются оценки, вытекающие из общих физических принципов: законов сохранения, более грубых моделей и т. д. Полезно с помощью графика составить наглядное представление о возможных состояниях системы (построив фазовый портрет системы).

Построение математических моделей явлений в сплошных средах имеет свои особенности. Очень часто эти модели включают, помимо основных уравнений, выражающих общий законы сохранения, некоторые дополнительные соотношения, описывающие свойства конкретных сред и фактически являющиеся коэффициентами уравнений. Это коэффициенты теплопроводности, диффузии, электропроводности, поглощения излучения, вязкости и т. д. К таким соотношениям относятся и уравнения состояния (соотношения, задающие плотность среды как функцию давления и температуры, или их аналоги). Зависимость коэффициентов от термодинамического состояния среды порождает дополнительные «нелинейности» в уравнениях.

При построении математической модели необходимо с достаточной точностью знать физические характеристики среды. В противном случае самые лучшие методы расчета не смогут обеспечить правильного представления о реальном явлении. В изучаемых физиками процессах реализуются самые различные условия — от комнатных температур до звездных и от газовых плотностей до твердотельных. Большинство этих условий настолько далеки от обычных, что непосредственное экспериментальное определение свойств вещества оказывается невозможным. С другой стороны, при этих условиях зачастую неприменимы уже изученные в теоретической физике упрощенные модели, вроде модели идеального газа. Поэтому определение свойств вещества, как говорят «физическое оснащение» математической модели, представляет собой крупную самостоятельную научную проблему. Она сводится к решению сложных кван-

товомеханических задач, которое оказывается возможным лишь при использовании численных методов на ЭВМ, и фактически требует проведения специальных вычислительных экспериментов, опирающихся на физические эксперименты.

Анализ математической модели. После того как задача о вычислении искомой характеристики физического явления сформулирована в математических терминах, необходим анализ получившейся математической задачи. Специфика задач математической физики состоит в том, что их предварительный математический анализ обычно идет параллельно с анализом физики явления, отражаемой моделью.

Для предварительного исследования построенной модели вначале используются все традиционные методы, применяемые физиками: качественный размерностный анализ, поиск частных решений, рассмотрение предельных случаев.

Таким образом добывается первичная (быть может, грубая) информация о качественном характере явления. Полученные на этом этапе точные решения необходимы, кроме того, как тесты для проверки качества вычислительных алгоритмов, которые будут строиться для решения полной задачи.

С математической точки зрения в процессе предварительного анализа задачи необходимо ответить на вопросы: имеет ли задача решения, и если имеет, то сколько, какова качественная зависимость решения от параметров и как построить оптимальный алгоритм вычисления искомой величины? Если математическая задача настолько сложна, что для нее на все эти вопросы ответить не удается, то для исследования математических свойств первоначальной модели создается упрощенная модель, в которой сохранены лишь некоторые свойства исходной математической задачи. Такая «вторичная» математическая модель обычно выполняет несколько функций: во-первых, на ней могут исследоваться математические вопросы принципиального характера (например, существование у того класса задач, к которому принадлежит исходная задача, решения, обладающего определенными свойствами), во-вторых, на «вторичной» математической модели может быть исследован качественный характер зависимости решения от параметров (зависит ли оно от параметров непрерывно, может ли решение неограниченно возрастать и т. д.) и,

наконец, исследование «вторичной» модели дает опыт (а иногда и тесты для отработки алгоритма), необходимый для решения исходной задачи.

Иногда математическое исследование задачи подменяется рассуждениями о «физической очевидности» существования решения с заданными свойствами. Здесь следует заметить, что из существования явления в природе еще не следует внутренняя непротиворечивость предложенной для описания этого явления математической модели, даже если при создании этой модели мы использовали рассуждения, которые кажутся нам абсолютно безупречными. Дело в том, что математическая модель формулируется в терминах, являющихся очень далеко идущей идеализацией тех свойств, которые действительно могут быть проверены на опыте. Внутренняя непротиворечивость и физический смысл сделанных при такой идеализации предположений часто совершенно неочевидны. (Например, следствием сделанных нами при выводе уравнения теплопроводности предложений явилось равенство бесконечности скорости распространения тепла — результат, который трудно было предвидеть заранее.)

Больше того, математические идеализации физических понятий в разных аксиоматических системах могут иметь существенно разные свойства, как, например, понятия непрерывности в классическом и конструктивном анализе. «Физическая очевидность» рассуждений часто бывает обманчива: в свое время идея абсолютного пространства и одновременность событий в разных точках пространства казались очевидными, пока исследователи не столкнулись с задачами электродинамики.

Опыт показывает, что на предварительных этапах исследования математически бессмысленные модели (когда у математической задачи нет решения) возникают не так уж редко, поэтому тщательный анализ математической корректности задачи необходим.

5. ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭТАПА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Пример построения разностной схемы. Следующий шаг вычислительного эксперимента — конструирование вы-

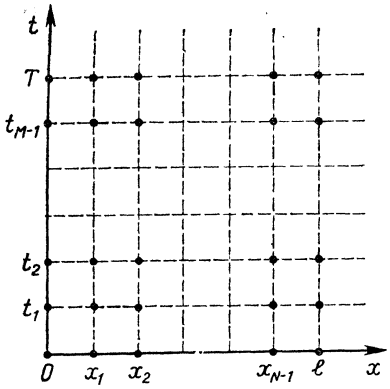


Рис. 4

числительного алгоритма. В большинстве случаев конструирование вычислительного алгоритма подразумевает два этапа: построение разностной схемы * для математической модели, т. е. аппроксимацию исходной системы дифференциальных уравнений системой разностных (сеточных (алгебраических)) уравнений, и построение метода для быстрого решения полученных разностных уравнений.

Построение разностной схемы можно рассматривать как замену непрерывной среды некоторым ее дискретным аналогом. При этом возникают новые параметры — шаги разностной сетки (по времени и пространству), вводимые для замены области непрерывного изменения аргументов конечным множеством точек. В качестве примера рассмотрим разностную схему для простейшего уравнения теплопроводности. Исходная задача для дифференциального уравнения имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{38}$$

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$

$$\lim_{x \to +0} u(x, t) = 0, \quad \lim_{x \to l-0} u(x, t) = 0. \tag{39}$$

Нужно определить функцию $u(x, t)$, которая удовлетворяла бы уравнению (38) и граничным условиям (39).

Разделим отрезок $[0, l]$ на N частей точками деления

$$x_i = ih, \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \quad h = l/N,$$

а отрезок $[0, T]$ на M частей точками деления

$$t_j = j\tau, \quad 0 \leqslant j \leqslant M, \quad \tau = T/M.$$

Точки с координатами $\{ih, j\tau\}$, $0 \leqslant i \leqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant M$ образуют сетку в области $D = [0, l] \times [0, T]$, рис. 4.

---

* Существуют приемы численного решения дифференциальных уравнений, основанные на других идеях: на методе разделения переменных, вариационных принципах, и т. д., но они применимы к узкому кругу задач.

Из определения производной как предела разностного отношения следует, что

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_j+\tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} + \delta_{ij}^{(1)}(\tau),$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_i+h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i-h, t_j)}{h^2} + \delta_{ij}^{(2)}(h),$$

где символы $\delta_{ij}^{(1)}(\tau)$ и $\delta_{ij}^{(2)}(h)$ обозначают величины, стремящиеся к нулю при $\tau \to 0$, $h \to 0$.

Если функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (38), то она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\tau}[u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)] - \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)] = \delta_{ij}^{(1)}(\tau) - \delta_{ij}^{(2)}(h) \qquad (40)$$

в точках $0<x_i<l$, $0<t_j<T$.

Обозначим $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Мы видим, что величины u_i^j удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}[u_i^{j+1} - u_i^j] - \frac{1}{h^2}[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j] = \\ = \delta_{ij}^{(1)}(\tau) - \delta_{ij}^{(2)}(h) \\ u_i^0 = \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \quad u_0^j = u_N^j = 0. \end{cases} \qquad (41)$$

Так как при малых τ и h правая часть равенства (41) мала, естественно ожидать, что величины u_i^j будут при малых τ и h мало отличаться от решений y_i^j системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}[y_i^{j+1} - y_i^j] - \frac{1}{h^2}[y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j] = 0 \\ y_i^0 = \varphi_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \quad y_0^j = y_N^j = 0. \end{cases} \qquad (42)$$

В этой системе неизвестны величины y_i^j, $0<i<N$, $j>0$, а величины y_i^0, y_0^j и y_N^j заданы, τ и h входят в систему как параметры. Относительно неизвестных y_i^j система (42) является системой линейных уравнений. Можно показать, что решение y_i^j системы (42) мало отличается от решения $u(x_i, t_j)$, если τ и h достаточно малы. Число неизвестных в системе (42) равно $(N-1)\times$ м. Если бы мы рассматривали уравнение с двумя пространственными переменными, то в аналогичной ситуации число неизвестных было бы

равно $(N-1)^2 \times M$. Специфика систем алгебраических уравнений, получаемых в результате разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, состоит в том, что их решение можно свести к многократному решению систем уравнений с меньшим числом неизвестных—качество, особенно ценное при реализации алгоритма решения на ЭВМ. В частности, процесс решения системы (42) можно свести к последовательному определению неизвестных по явным формулам. Разностные схемы, обладающие таким свойством, называются явными.

Из системы (42) мы имеем:

$$y_i^{j+1} = y_i^j + \frac{\tau}{h^2}\left[y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j\right]. \qquad (43)$$

Теперь заметим, что при $j=0$ значения неизвестных заданы, по формулам (43) мы можем определить y_i^1 затем y_i^2 и т. д. Чтобы ошибки при таком процессе решения системы (42) не накапливались, должно быть выполнено условие устойчивости схемы (42)

$$\tau/h^2 < 1/2.$$

Это условие оказывается слишком жестким, и лучшие результаты дает разностная схема, устойчивая при любых τ и h:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}\left[y_i^{j+1} - y_i^j\right] - \frac{1}{2h^2}\left\{\left[y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}\right] + \right. \\ \left. + \left[y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j\right]\right\} = 0 \\ y_i^0 = \varphi_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \quad y_0^j = y_N^j = 0, \quad j > 0. \end{cases} \qquad (44)$$

В этой разностной схеме для определения неизвестных y_i^{j+1} через y_i^j мы должны решать систему $(N-1)$ уравнений. Схемы, в которых неизвестные y_i^{j+1} не выражаются по явным формулам, называются неявными. Неявные схемы, как правило, обладают рядом преимуществ.

Будем рассматривать систему (44) как систему уравнений относительно y_i^{j+1} при заданных значениях неизвестных y_i^j. Эта система имеет специальный вид: в каждое уравнение системы входят лишь три неизвестных с индексами $i-1$, i, $i+1$. Для решения подобных систем линейных уравнений разработан очень эффективный метод решения — метод прогонки, который хорошо работает даже при очень больших N.

Алгоритм решения системы уравнений строится так: сначала по заданным значениям y_i^0 методом прогонки определяются y_i^1, потом y_i^2 и т. д. Можно показать, что для обеспечения высокой точности решения таким методом при больших M достаточно выполнения условия $\tau/h < 1/\pi$.

Проблемы, связанные с созданием разностных схем. Естественно желание использовать грубые сетки с большими шагами (с малым числом узлов), так как время решения на машине разностных уравнений возрастает с увеличением числа узлов. Однако разностная схема близка к исходной дифференциальной задаче лишь при очень малых шагах сетки. Если шаг сетки не является достаточно малым, то решение разностного уравнения может заметно отличаться от значений решения дифференциального уравнения в тех же точках, и возможно возникновение различных нежелательных эффектов, которые с физической точки зрения могут быть интерпретированы как появление фиктивных источников (стоков) энергии, мощность которых пропорциональна величине шага сетки.

Для избежания подобных явлений необходимы специальные меры. В настоящее время сформулирован ряд принципов, которые следует соблюдать при построении разностных схем. Например, при дискретизации задач, связанных с описанием сплошной среды, естественно требовать, чтобы полученная дискретная модель правильно отражала основные свойства сплошной среды. В первую очередь в модели должны выполняться основные законы сохранения — массы, импульса, полной энергии. Разностные схемы, обладающие таким качеством, называют консервативными. Развитие принципа консервативности привело к понятию полной консервативности: в полностью консервативных схемах при конечных величинах шагов сетки помимо основных законов сохранения соблюдаются также балансы в отдельных видах энергии (кинетической, тепловой, магнитной). Практика показала весьма высокую эффективность полностью консервативных схем, с помощью которых был решен ряд сложных практически важных задач магнитной гидродинамики, радиационной газовой динамики и т. д.

Разностная схема представляет собой систему алгебраических, вообще говоря, нелинейных уравнений. Для их решения применяются различные итерационные методы, что приводит к необходимости решать на каждой итерации

систему линейных алгебраических уравнений высокого порядка (10^2—10^6 уравнений). Разработка экономичных методов решения таких систем является серьезной проблемой и одной из главных задач теории численных методов.

Особенности реализации алгоритмов на ЭВМ. Разностная аппроксимация дифференциального уравнения и алгоритм решения получившегося в результате этой аппроксимации алгебраического уравнения дают алгоритм решения исходной задачи. Однако, прежде чем широко использовать алгоритм на практике, надо теоретически оценить его качество (устойчивость, экономичность, сходимость, точность и. д.). Этим занимается теория численных методов — один из интенсивно развивающихся разделов вычислительной математики.

Затем возникает проблема реализации вычислительного алгоритма в виде программы для ЭВМ. С точки зрения программирования вычислительный эксперимент характерен тем, что для каждой модели необходимо решать большое число вариантов (для разных параметров задачи) и, кроме того, изменять (уточнять) саму математическую модель. «Многовариантность» и «многомодельность» вычислительного эксперимента проявляются в многократных изменениях реализующей алгоритм программы, причем изменения касаются и структуры программы в целом, и отдельных ее частей. В этой ситуации вопрос об организации вычислений и технологии программирования выступает на первый план. Современная технология строится на основе модульной (блочной) структуры математической модели и алгоритма. Сборку программы из модулей можно производить с помощью специальной программы автоматически. Реализация этой идеи вылилась в новое важное направление — создание проблемно-ориентированных программных комплексов и систем, называемых пакетами прикладных программ. Характерная особенность пакетов состоит в возможности их постоянного развития и расширения благодаря включению модулей, реализующих новые возможности. При создании пакетов прикладных программ, помимо их функционального наполнения (программ, реализующих отдельные вычислительные алгоритмы), большое значение имеют работы по системному обеспечению пакета (создание программ, осуществляющих сборку общей

программы из отдельных модулей, реализующих вычислительные алгоритмы).

Несмотря на многообразие всех физических и технических проблем, их математическое описание сводится, как правило, к ограниченному числу классов уравнений (математических моделей). Различные физические процессы допускают сходные математические описания. Так, процессы диффузии, теплопроводности, намагничивания ферромагнетиков описываются одним и тем же уравнением теплопроводности, а стационарные процессы теплопроводности, диффузии, течения несжимаемой жидкости, электростатики описываются уравнением Лапласа. Отсюда следует, что математические методы, разработанные для одной области физики, могут быть применимы и для других областей, поэтому один и тот же пакет прикладных программ может быть с успехом использован в вычислительных экспериментах для различных физических объектов.

Анализ результатов вычислительного эксперимента. Последний этап в технологическом цикле вычислительного эксперимента — обработка, анализ, интерпретация расчетных данных и их сопоставление с результатами физических экспериментов. Современный физический эксперимент сам нуждается в математической обработке результатов. Причем речь идет не о первичной, например статистической, а полной обработке, цель которой отыскание основных физических параметров (температуры, плотности, давления, времени жизни, массы и т. д.). В современном физическом эксперименте параметры вещества часто имеют экстремальное значение, и прямое измерение физических характеристик затруднено или вообще невозможно. Информацию приходится извлекать из косвенных данных путем обработки фотоснимков, осциллограмм и т. д. Чтобы получить искомые физические характеристики по этим данным, часто бывает нужно провести самостоятельный вычислительный эксперимент. После окончания анализа расчетных данных и сравнения с физическим экспериментом может оказаться, что необходимо принять во внимание некоторые новые физические факторы (например, более точно учесть геометрию задачи, учесть различие в температуре ионов и электронов и т. д.). Это приводит к новой математической модели, для которой повторяется весь цикл вычислительного эксперимента. Процесс вычислений может повторяться также из-за необходимости совершенствования алгоритма расчета.

Если достигнуто нужное понимание особенностей физического процесса и получено удовлетворительное согласие с данными физического эксперимента, вычислительный эксперимент можно считать законченным. После его завершения естественно стремление построить на основании расчетов задачи в полной постановке некоторую упрощенную математическую модель, например, интерполяционного типа, в уравнениях которой коэффициенты подбираются по результатам вычислительного эксперимента. Такие модели, описываемые несложными наглядными формулами, оказываются весьма полезными и для инженерных целей, и при планировании дальнейших расчетов в исследуемой области. Создание грубых моделей, построенных по результатам расчетов сложных моделей, иногда приводит к иллюзорному преуменьшению роли вычислительного эксперимента для полной модели (ведь качественные результаты можно получить и на основе грубой модели). Это очевидное заблуждение может приводить к парадоксам типа «математика исчезла, физика осталась» или «физик-теоретик должен освободиться от математики».

6. РОЛЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Вычислительный эксперимент и познание физической сущности явления. Специфика вычислительного эксперимента состоит в том, что он может дать информацию о явлении только в том случае, если его математическая модель содержит адекватное математическое описание всех элементарных физических процессов, из которых состоит явление.

Иногда приходится сталкиваться с мнением, что после того, как все составляющие физическое явление процессы поняты и найдено их правильное математическое описание оставшиеся трудности в описании самого явления носят чисто технический характер, и их преодоление не может внести ничего принципиально нового в наши знания о самом явлении. История развития гидродинамики и недавняя история развития физики плазмы показывают, что от знания математического описания всех элементарных физических процессов, составляющих явление, до знания самого явления часто бывает очень далеко. В этой ситуации вычислительный эксперимент может помочь достичь

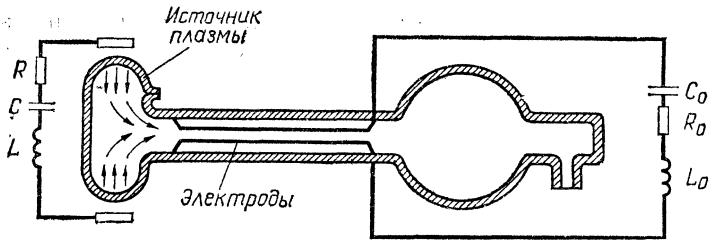


Рис. 5

того, что А. Пуанкаре считал главной целью математической физики. (А. Пуанкаре писал: «Цель математической физики заключается не только в том, чтобы облегчить физику вычисление некоторых постоянных или интеграцию некоторых дифференциальных уравнений. Ее главная цель состоит в том, чтобы знакомить физика со скрытой гармонией вещей, показывая их ему под новым углом зрения».)

Приведем один пример. Свыше пятнадцати лет назад при изучении численными методами движения плотной плазмы в магнитном поле был обнаружен новый физический эффект *T*-слоя: при определенных условиях в плазме образуется самоподдерживающаяся область повышенной температуры, которая существует конечное время и в которой сосредоточены электрические токи и джоулев нагрев. С помощью вычислительного эксперимента были найдены условия образования *T*-слоя и исследованы возможности его возникновения в движущейся плазме. Эта работа была оценена как открытие нового физического эффекта. Через 5 лет *T*-слой был обнаружен в физических экспериментах, проведенных в различных научных учреждениях страны.

Опишем один из таких экспериментов и результаты его сопоставления с соответствующим вычислительным экспериментом. Схема экспериментальной установки — рельсотрона — представлена на рис. 5. В результате сжатия газа (водорода) в особом роде высоковольтного разряда в газе образовывался сгусток плазмы. Этот сгусток впрыскивался в заполненное холодным непроводящим водородом пространство между двумя параллельными электродами. Горячий плазменный сгусток замыкает электрическую цепь, возникающее при прохождении тока по этой цепи магнитное поле тормозит движение сгустка плазмы. При определенных значениях параметров в экспе-

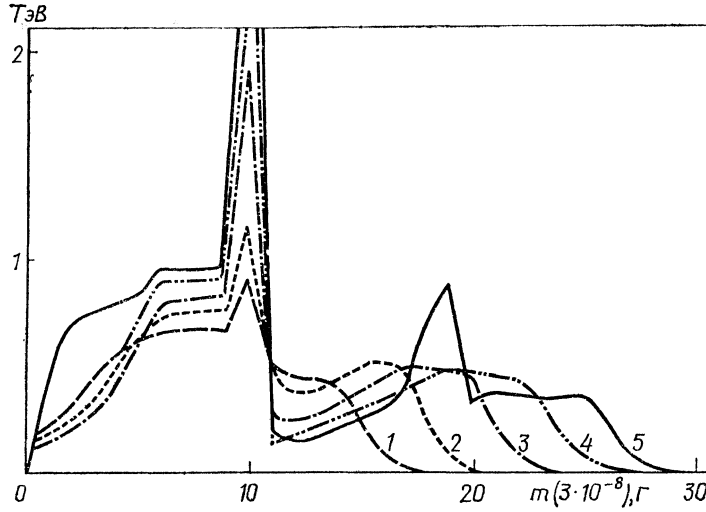


Рис. 6

рименте наблюдается сложная структура, образованная чередующимися зонами сравнительно горячего (2—5 эВ) и холодного (0,2—0,5 эВ) газа, которые перемещаются в направлении, противоположном направлению начального движения сгустка.

В численном эксперименте задача о торможении плазменного сгустка магнитным полем рассматривалась в рамках одномерных уравнений магнитной гидродинамики. Плазменный сгусток моделировался ударной волной, распространяющейся по заполняющему рельсотрон холодному газу. Численные значения параметров сгустка, внешней электрической цепи и т. д. были согласованы с экспериментальными данными. Уравнение состояния для водорода, а также зависимость электропроводности от термодинамического состояния вещества брались из соответствующих таблиц.

На рис. 6 показано распределение температуры по массе газа в разные моменты времени: 1—2 мкс, 2—4 мкс, 3—6 мкс, 4—8 мкс, 5—10 мкс; u_0=750 В. По мере нарастания разрядного тока и прогрева газа в сгустке ток сосредотачивается в передней части сгустка. Здесь же локализуется джоулев нагрев, а также электромагнитная тормозящая

сила. Эти эффекты и приводят к возникновению T-слоя. Бурное, взрывоподобное выделение тепла в зоне T-слоя вызывает разброс газа из этой области и усиливает начальную ударную волну, моделирующую сгусток. С ростом полного тока электромагнитная сила, действующая в основном районе T-слоя, увеличивается, что приводит к торможению T-слоя, его остановке и даже к движению в обратном направлении. При этом образуется волна разрежения, распространяющаяся наряду с исходной ударной волной и охлаждающая газ. Поэтому зона джоулева нагрева вытесняется в район фронта ударной волны. В результате возникает второй T-слой, и все описанные выше процессы повторяются. Таким образом, в потоке формируются неоднородности — горячие T-слои, разделенные зонами холодного газа. Подчеркнем, что вся эта картина составлена на основе анализа расчетов, т. е. результатов численного эксперимента, и лишь потом наблюдалась в физическом эксперименте.

Приведенный выше пример показывает, что вычислительный эксперимент стал новым мощным средством теоретических исследований в физике. Иногда (например, в астрофизике при исследовании ранних стадий развития Вселенной или при изучении внутреннего строения звезд) вычислительный эксперимент является единственным средством получения количественной информации о явлении. Большие возможности вычислительного эксперимента были продемонстрированы при решении таких крупнейших научно-технических программ, как овладение ядерной энергией и освоение космического пространства. В процессе работы над этими программами в начале 50-х годов, когда были созданы и впервые применены ЭВМ, начал складываться новый стиль исследований, который уже к середине 60-х годов оформился в вычислительный эксперимент.

К середине 90-х годов ожидается появление ЭВМ с емкостью памяти около 10^{11} слов и быстродействием до 10^{12} опер/с. Если проекты создания таких ЭВМ будут реализованы, то исследователи получат в свое распоряжение машины, которые по быстродействию и памяти будут превосходить машины 70-х годов примерно во столько же раз, во сколько машины 70-х годов превосходят конторские счеты. Это потребует от занятых в вычислительном эксперименте специалистов по математической физике перехода

на качественно новый уровень работы, а процесс обучения таких специалистов мы должны начать уже сегодня.

Сейчас коллективы квалифицированных научных сотрудников, владеющих современными методами вычислительной математики и математической физики и имеющие в своем распоряжении современные ЭВМ, — это мощный научный потенциал, который используется для решения крупнейших национальных программ. Достаточно назвать некоторые из них, чтобы почувствовать их масштаб и актуальность: проблемы ядерной физики, управляемый термоядерный синтез, физика плазмы, МГД-преобразование энергии, физика лазеров, аэрогидродинамика, метеорология и т. д.

Вычислительный эксперимент и развитие математики. Вызванное развитием техники вычислительного эксперимента расширение класса эффективно решаемых задач физики и умножение рассматриваемых современной математической физикой моделей оказало глубокое влияние на математику последних десятилетий и еще раз подтвердило слова А. Пуанкаре: «Нужно было бы окончательно забыть историю науки, чтобы не вспомнить, что стремление познать природу имело самое постоянное и самое счастливое влияние на развитие математики».

Вычислительный эксперимент поставил перед математикой ряд крупных проблем, потребовавших развития новых математических теорий (теории разностных схем, теории алгоритмических языков и т. д.). Возникла необходимость углубленного изучения принципов, которые кладутся в основу вывода математических моделей из основных физических законов. Если раньше работа по математическому обоснованию рассуждений, используемых при выводе модельных уравнений с помощью основных законов физики, иногда рассматривалась как излишнее наведение математической строгости, то теперь такой анализ стал важной научно-производственной проблемой, ибо в сложных случаях физическая интуиция не всегда дает ответ и редко позволяет проводить систематическое уточнение моделей. Помимо чисто прикладных целей, интенсивное изучение основ теории имеет и большое общенаучное значение — оно обогащает физику более глубоким пониманием явлений, а рассмотрение новых задач с естественнонаучным содержанием, как правило, стимулирует развитие математики.

Покажем это на примере математических задач статистической физики. Статистическая физика изучает поведение очень большого (10^{20}—10^{25}) числа взаимодействующих частиц. Одна из основных задач статистической физики — описание поведения такого ансамбля частиц на основе информации о попарном взаимодействии частиц.

Представим себе замкнутый объем газа при нормальных давлении и температуре. В одном кубическом сантиметре такого газа примерно 10^{19} молекул, которые движутся хаотически. Средняя скорость молекул 10^4 см/с, каждую секунду молекула газа испытывает в среднем 10^9 столкновений с другими молекулами. Было бы абсолютно безнадежно и бесполезно пытаться описать поведение такого газа, решая уравнения движения всех молекул. Взаимодействие молекул газа является «слабым»: оно сводится в основном только к столкновениям, а бо́льшую часть времени молекулы газа движутся как свободные частицы. На этой основе еще основоположники статистической теории (Дж. К. Максвелл, Л. Больцман, Р. Клаузиус) построили математические модели, которые правильно описывают поведение газа. Но в современной физике встречаются случаи, когда частицы взаимодействуют между собой сильно (очень плотные газы, жидкости, плазма). Как описать поведение большого числа таких частиц? Чтобы это сделать, нужно сначала тщательно проанализировать более простой случай слабого взаимодействия и ответить на вопросы, почему в газе движение молекул является хаотическим и как хаотическое движение молекул приводит к закономерностям поведения газа? Из опыта мы знаем, что макроскопическое возмущение в газе (например, звуковые волны) довольно быстро затухает. Каков молекулярный механизм этого затухания? Не противоречит ли необратимый процесс затухания макроскопических возмущений в газе обратимому (т. е. симметричному относительно прошлого и будущего) характеру уравнений механики, которые описывают движение молекул? На все эти вопросы пытались ответить еще классики статистической теории, однако для этого им, как правило, нужно было привлекать дополнительные предположения типа знаменитой эргодической гипотезы и делать не вытекающие из уравнений движения предположения о статистическом поведении молекул.

Современные исследования показали, что дело не в свойствах типа эргодической гипотезы, а в том, что рассматриваемые системы (газ, плазма и т. д.) состоят из очень боль-

шого числа частиц. Чтобы качественно правильно описать поведение таких систем, оказалось полезным разработать математическую теорию динамических систем, состоящих из бесконечного числа частиц. Разработка этой теории потребовала развития ряда очень интересных и содержательных математических теорий, таких, как, например, интегрирование и дифференцирование в бесконечномерных пространствах, изучение бесконечных систем дифференциальных уравнений, разработка специальных методов теории возмущений, создание новых разделов функционального анализа и теории вероятностей.

В последнее время в ряде работ при изучении систем с бесконечным числом степеней свободы интенсивно применяется новая теория бесконечно малых («нестандартный анализ»), которая с новых позиций трактует основные понятия анализа: предел, производную и т. д.

В результате проделанной работы оказалось возможным дать математически строгий вывод уравнений Больцмана и Власова, оценить их точность, построить математически обоснованные модели фазовых переходов (т. е. переходов системы из одного равновесного состояния в другое, например, перехода из нормального состояния в сверхпроводящее для металлов).

Очень большое значение для практики имело создание алгоритма вывода кинетических уравнений из уравнений движения частиц в тех случаях, когда классические рассуждения типа проведенных Больцманом не «работали». С одной стороны, все эти достижения способствовали более глубокому пониманию физики явлений в системах из очень большого числа частиц и позволили дать количественное описание явлений в плазме, плотных газах и т. д. С другой стороны, возникшие при решении этих проблем математические задачи оказались столь богатым источником новых идей и представлений, что теперь многие чисто математические журналы печатают обзоры и статьи по математическим вопросам статистической механики.

Второй аспект проблемы, связанной с расширением класса изучаемых моделей, лучше всего иллюстрирует «взрывное» увеличение числа примеров точно решаемых нелинейных уравнений. Раньше редко брались за решение нелинейных задач и стремились строить «линеаризованные» модели. Теперь исследователь знает, что задачу всегда можно будет решить численно, поэтому (и конечно, потому, что другого выхода нет — часто только нелинейная модель

с нужной точностью описывает явление) увеличилось внимание к нелинейным моделям: ими стало заниматься гораздо больше людей, появился опыт исследования нелинейных задач в численном эксперименте, и это практически одновременно привело к созданию новых аналитических методов решения нелинейных задач в разных научных центрах. Полученные аналитические решения позволили обнаружить ряд новых эффектов в нелинейных волновых процессах (взаимодействие солитонов, бесконечное число законов сохранения и т. д.). Часть этих явлений сначала была обнаружена в численных экспериментах, и это помогло исследователям в решении чисто аналитических вопросов.

Одним из интереснейших факторов, обнаруженных в теории нелинейных уравнений с помощью комбинации численных и аналитических методов, является открытие механизма образования структур в нелинейной диссипативной среде, если в этой среде происходят процессы горения, диффузии и т. д.

Такие процессы описываются дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+q.$$

В том случае, если k и q не зависят от u, решение этого уравнения описывает «растекание» тепла.

Если же коэффициенты k и q зависят от u, то характер решения может быть существенно иным. Недавно было открыто, что при некоторых k и q уравнение может иметь локализованные в ограниченной области пространства решения, которые либо стабилизируются при $t\to\infty$, либо неограниченно растут, причем может быть несколько неперекрывающихся областей локализации.

Ряд общих закономерностей образования таких структур обнаружен с помощью комбинации аналитической техники и вычислительного эксперимента для простейших модельных уравнений, а затем с помощью специально разработанных методов перенесен на общие уравнения параболического типа*.

---

* См. Змитренко Н. В., Михайлов А. П. Инерция тепла. М., Знание, 1982; Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы, М., Знание, 1983.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Наряду с задачей количественного описания явлений природы и их осмысления, т. е. понимания «скрытой гармонии» явлений, математическая физика выполняет еще одну функцию, о которой американский физик Ф. Дайсон писал: «Математика для физика это не только инструмент, с помощью которого он может количественно описать любое явление, но и главный источник представлений и принципов, на основе которых зарождаются новые теории».

Математические методы помогают зарождению новых теорий во многих разделах физики: в теории плазмы, нелинейных колебаний, физике твердого тела и т. д. Но пожалуй, наиболее известным примером в этом отношении является квантовая теория поля и теория элементарных частиц. Создание математически непротиворечивой теории взаимодействия элементарных частиц — одна из увлекательнейших, труднейших и еще не решенных задач математической физики. Поиск решения этой проблемы ведется на путях создания новых физических представлений и с использованием практически всех известных ныне математических средств: от теории броуновского движения до алгебраической топологии. Сейчас трудно сказать, на каком пути будет достигнут успех.

Повышение математической культуры физиков-теоретиков и распространение знаний о новых методах современной математики оказывает глубокое положительное влияние в областях, подчас далеких от тех, в которых эти методы были впервые применены.

Сегодня практически нет раздела математики, который не находил бы применения при решении задач физики.

В связи с этим интересно заметить, что на сегодняшний день в математической физике фактически сложилось два языка, которые условно, заимствуя термины из обихода программистов, можно было бы назвать языком «разработчика» и языком «пользователя».

Язык разработчика — это язык профессионала, занятого созданием новых методов решения задач, исследованием математической структуры моделей и созданием принципиально новых моделей физических явлений. Для этих целей естественно использовать высокую степень математической абстракции, и адекватным математическим языком в этих вопросах служат современный функциональ-

ный анализ, алгебра, топология, геометрия и другие разделы чистой математики.

Неформальное общение занятых этими вопросами специалистов по математической физике (на семинарах, конференциях и т. д.) фактически осуществляется на «сокращенном» математическом языке, но при окончательной формулировке результатов к языку разработчика применяются обычные в современной математике требования к математической строгости, ибо вне этих требований изложение утверждений об абстрактных математических понятиях было бы просто бессмысленным.

Язык пользователя — это язык человека, занятого решением узкого круга прикладных задач и часто являющегося специалистом в какой-либо смежной области: физике, технике и т. д., что налагает определенный отпечаток на стиль его мышления. Пользователя интересует больше всего результат расчета.

В своей работе пользователь чаще всего применяет уже известные математические методы, но иногда ему приходится применять их вне исследованных границ их применимости.

Чтобы «привязать» стандартные математические модели к конкретной ситуации, пользователь должен обладать известной долей образного мышления и неизбежно опираться на соображения, лежащие вне математики. Пользователю достаточно иметь самые общие представления о математически строгих доказательствах теорем существования решений у рассматриваемых им уравнений и о строгих доказательствах истинности используемых им математических фактов. Это для него необходимо лишь для того, чтобы в совершенстве владеть техникой вычислений и чтобы уметь привязать абстрактные математические понятия к конкретной физической ситуации.

Соблюдение требований математической строгости гарантирует от ошибочных заключений в рассуждениях, использующих абстрактные математические понятия в математическом контексте, однако после того как с этими понятиями связываются образы из области физики, техники, биологии и т. д., тем же целям в конкретной ситуации могут служить физическая интуиция и опыт исследователя.

Высокая степень математической абстракции для пользователя часто бывает не только не нужна, но и вредна, поскольку является непривычной и сковывает мышление.

С нашей точки зрения, существование таких двух языков является нормальным явлением. Каждый из этих языков адекватен задаче на разных этапах ее решения. Но «разработчиков» это обязывает излагать свои результаты, предназначенные для численного решения задач, на языке «пользователя», а от «пользователя» это требует готовности освоить предлагаемые «разработчиком» методы.

К сожалению, иногда встречается тенденция насаждать «высокую» математику и требования математической строгости там, где они абсолютно не нужны, или вести рассуждения на «физическом» уровне математической строгости в вопросах, не имеющих отношения к физике.

Современная математическая физика, несмотря на необозримое разнообразие ее методов, — единая наука, которую объединяет стремление познать физический мир на основе его математической модели, и она прекрасна именно потому, что в ней все методы — самые новейшие достижения чистой математики и успехи вычислительной техники — связаны в неразрывное целое и служат познанию природы.

РЕКОМЕНДУЕМ ПРОЧИТАТЬ

Элементарное изложение основных фактов математического анализа можно найти в книгах: Понтрягин Л. С. Анализ бесконечно малых. М., Наука, 1980. Никольский С. М. Элементы математического анализа. М., Наука, 1981.

Для систематического изучения математического анализа можно рекомендовать рассчитанный на физиков и инженеров курс В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа» (т. 1 — 2. М., Наука, 1980 — 1982) или курс. Л. Д. Кудрявцева «Курс математического анализа» (т. 1—2, М., Высшая школа, 1981).

С основами математической физики можно ознакомиться по книгам А. Н. Тихонова и А. А. Самарского «Уравнения математической физики» (М., Наука, 1972) и С. К. Годунова «Уравнения математической физики» (М. Наука, 1979).

Элементарным введением в теорию численных методов математической физики могут служить книги А. А. Самарского «Введение в численные методы» (М., Наука, 1982) и Н. Н. Калиткина «Численные методы» (М., Наука, 1979).

Теория разностных методов решения задач математической физики изложена в книге А. А. Самарского «Теория разностных схем» (М., Наука, 1977).

Популярное изложение вопросов, связанных с разностными схемами, есть в брошюре А. А. Самарского и Ю. Н. Карамзина «Разностные уравнения» (М., Знание, 1978).

Вопросы взаимоотношения математики и физики рассматривались во многих работах, одна из недавних работ этого направления книга Ю. И. Манина «Математика и физика» (М., Знание, 1979).

О роли прикладной математики в системе естественных наук и ее методах можно прочесть в книге академ. А. Н. Тихонова и проф. Д. П. Костомарова «Рассказы о прикладной математике» (М., Наука, 1979).

Популярное изложение идей, связанных с применением вычислительного эксперимента, есть в статьях А. А. Самарского «Что такое вычислительный эксперимент?» (Сб.: «Что такое прикладная математика». М., Знание, 1980) и «Математическое моделирование и вычислительный эксперимент» (Вестник АН СССР, 1979, № 5).

Вопросы программного обеспечения крупных задач математической физики обсуждаются в брошюре В. Я. Карпова и Д. А. Корягина «Пакеты прикладных программ» (М., Знание, 1983).

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
1. Наука о математических моделях физических явлений 4
2. Немного истории 10
3. Краткие сведения об основных уравнениях математической физики 14
4. Некоторые принципы построения математических моделей в математической физике 35
5. Особенности вычислительного этапа решения задач математической физики 45
6. Роль вычислительных методов в математической физике 52
7. Заключительные замечания 60
Рекомендуем прочитать 63

Алексей Алексеевич АРСЕНЬЕВ,
Александр Андреевич САМАРСКИЙ
ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Гл. отраслевой редактор Л. А. Ерлыкин. Редактор Г. Г. Карвовский. Мл. редактор Г. И. Валюженич. Обложка художника Л. П. Ромасенко. Худож. редактор М. А. Бабичева. Техн. редактор А. М. Красавина.
Корректор В. И. Гуляева.

ИБ № 5465

Сдано в набор 18.02.83. Подписано к печати 31.03.83. Т-02302.
Формат бумаги 84×108 1/32. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл. печ. л. 3,36. Усл. кр.-отт. 3,57. Уч.-изд. л. 3,44.
Тираж 30 120 экз. Заказ 286. Цена 11 коп.

Издательство «Знание». 101835, ГСП, Москва,
Центр, проезд Серова, д. 4. Индекс заказа 834 304.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области