ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2002, том 42, № 9, с. 1368–1382

УДК 519.633.6

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ[1)]

© 2002 г. П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский

(125047 Москва, Миусская пл., 4а ИММ РАН)
e-mail: vab@imamod.ru

Поступила в редакцию 01.10.01 г.

При построении разностных схем для задач гидродинамики, тепло- и массопереноса большое внимание уделяется монотонным схемам, т.е. схемам, для которых выполнен принцип максимума на сеточном уровне. Рассмотрены монотонные схемы на неструктурированных сетках, построенных на основе триангуляции Делоне интегроинтерполяционным методом (методом баланса) при выборе контрольных объемов в виде многоугольников Вороного. В качестве модельных рассмотрены стационарные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии с дивергентными и недивергентными конвективными слагаемыми. Формулируются достаточные условия монотонности, безусловно монотонные схемы строятся на основе принципа регуляризации разностных схем. Библ. 33.

Свойство монотонности мы связываем с выполнением принципа максимума для разностных уравнений [1], [2]. При использовании регулярных прямоугольных сеток наиболее просто строятся безусловно-монотонные схемы с направленными разностями. Для задач конвекции-диффузии известны (см., например, [3], [4]) различные типы безусловно-монотонных разностных схем второго порядка.

Как правило, принцип максимума формулируется для эллиптических уравнений с конвективными слагаемыми, записанными в недивергентной форме (см., например, [5] для дифференциальных и [1] для сеточных задач соответственно). Тем не менее задачи с конвективными слагаемыми в дивергентной форме имеют не меньший теоретический и практический интерес. Сеточный принцип максимума для одномерных дивергентных уравнений конвекции-диффузии впервые сформулирован в [6].

Работа [7] посвящена построению монотонных разностных схем для эллиптических уравнений второго порядка с недивергентными и дивергентными конвективными слагаемыми. Принцип максимума формулируется для сеточных задач, записанных на стандартном пятиточечном шаблоне при рассмотрении двумерных задач на регулярных прямоугольных сетках. В соответствии с принципом регуляризации разностных схем [1], [8], монотонные схемы строятся на основе возмущения коэффициентов разностной схемы с тем, чтобы выполнить достаточные условия справедливости принципа максимума.

В настоящей работе строятся монотонные аппроксимации конвективного переноса с использованием направленных разностей на произвольной неструктурированной сетке. Для заданного набора узлов формируется триангуляция Делоне, а сами разностные схемы строятся интегроинтерполяционным методом (методом баланса). В качестве контрольного объема выступают многоугольники Вороного. На основе принципа регуляризации предлагаются безусловно монотонные схемы для задач конвекции-диффузии, подобные тем, что рассматривались на прямоугольных сетках [7]. Результаты данной работы анонсированы в [9].

1. ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Для содержательного обсуждения проблем построения монотонных разностных схем в качестве модельных будем рассматривать краевые задачи для уравнений конвекции-диффузии. Необходимо выделить записи конвективного слагаемого в дивергентной, недивергентной и симметричной формах [10], которые являются типичными в различных прикладных проблемах.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 02-01-00555).

В области Ω ищем решение уравнения конвекции-диффузии в недивергентной (характеристической) форме:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{1}$$

которое дополняется простейшими граничными условиями

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega. \tag{2}$$

Также рассматриваем уравнение конвекции-диффузии в дивергентной (консервативной) форме:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u) - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega. \tag{3}$$

И, наконец, часто представляет интерес уравнение конвекции-диффузии в симметричной форме:

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} + \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u)\right) - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega. \tag{4}$$

На множестве функций $u(\mathbf{x})$, удовлетворяющих однородным граничным условиям (2), стационарную задачу конвекции-диффузии можно записать в виде операторного уравнения

$$\mathcal{A}u = f, \quad \mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{D}. \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{D}$ – оператор диффузии, который определяется выражением

$$\mathcal{D}u = -\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right). \tag{6}$$

Оператор конвективного переноса $\mathcal{C}$, в соответствии с (1), (3), (4), записывается в различных формах. Для оператора конвективного переноса в недивергентной форме в соответствии с (1) положим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$, где

$$\mathcal{C}_1 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}. \tag{7}$$

Аналогично, из (3) имеем $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$, где

$$\mathcal{C}_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u). \tag{8}$$

Принимая во внимание (4), находим, что оператор конвективного переноса в симметричной форме имеет вид

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 = (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)/2,$$

причем

$$\mathcal{C}_0 u = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} + \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u)\right). \tag{9}$$

На дискретном уровне необходимо сохранить все основные свойства дифференциальной задачи. Это достигается, в частности, тем, что для сеточных операторов зафиксированы те же основные свойства, что и для дифференциальных [10]. В качестве примера отметим свойство консервативности (выполнение законов сохранения на сеточном уровне). Здесь мы основное внимание уделим свойству монотонности.

Решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с первыми производными удовлетворяют принципу максимума [5]. На основе принципа максимума получены соответствующие априорные оценки в равномерной норме. В теории разностных схем [1] принципу максимума традиционно и давно (см., например, [2]) уделяется значительное внимание. В част-

ности, он используется для исследования сходимости разностных схем в равномерной норме. Разностные схемы, удовлетворяющие принципу максимума, называются монотонными.

Принцип максимума обычно формулируется для уравнений с конвективными слагаемыми в недивергентной форме (1). Это относится как к дифференциальной (см. [5]), так и к разностной (см. [1]) задачам. Однако не меньший интерес представляют задачи с конвективными слагаемыми в дивергентной форме (3). Для рассматриваемых задач конвекции-диффузии выполнен принцип максимума, который формулируется в следующем виде.

Теорема 1 (принцип максимума). *Пусть* $f(\mathbf{x}) > 0$ ($f(\mathbf{x}) < 0$) *в уравнении* (5), *тогда* $u(\mathbf{x}) \geq 0$ ($u(\mathbf{x}) \leq 0$) *для всех* $\mathbf{x} \in \Omega$.

Принцип максимума для эллиптических уравнений с недивергентными конвективными слагаемыми (уравнение конвекции-диффузии в форме (1)) хорошо известен [11]. Некоторые более общие результаты в этом направлении приведены, например, в [5], [12].

Остановимся поэтому на рассмотрении уравнения конвекции-диффузии в дивергентной форме (3). Доказательство (см. [7]) снова проводится от противного. Будем считать, что при выполнении $f(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, имеется область Ω^*, целиком лежащая внутри Ω, в которой $u(\mathbf{x}) < 0$.

Для уравнения (3) с конвективными слагаемыми в дивергентном виде доказательство проведем на основе интегрирования уравнения (3) по подобласти Ω^*. С учетом $u(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega^*$, и теоремы о дивергенции имеем

$$-\int\limits_{\partial\Omega^*} k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial n}d\mathbf{x} = -\int\limits_{\Omega^*} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{10}$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к границе $\partial\Omega^*$. В силу наших предположений об отрицательности решения в подобласти Ω^*, левая часть (10) неотрицательна, а правая – положительна. Полученное противоречие и дает доказываемое неравенство $u(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$.

Доказательство принципа максимума для уравнения конвекции-диффузии в симметричной форме (4) проводится аналогично. В условиях $f(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, предположим, что в подобласти Ω^* ($\Omega^* \cup \partial\Omega^* \subset \Omega$) для решения задачи (2), (4) верно $u(\mathbf{x}) < 0$. Домножим уравнение (4) на $u(\mathbf{x})$ и проинтегрируем его по Ω^*. Используя формулу Грина, приходим к равенству

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Omega^*} k(\mathbf{x})\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega^*} f(\mathbf{x})u(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{11}$$

Снова это равенство не может иметь места, и поэтому $u(\mathbf{x}) \geq 0$ во всей области Ω.

Замечание 1. Принцип максимума доказывается и в усиленной формулировке, когда вместо строгих неравенств $f(\mathbf{x}) > 0$ ($f(\mathbf{x}) < 0$) используются условия $f(\mathbf{x}) \geq 0$ ($f(\mathbf{x}) \leq 0$).

На основе сформулированного принципа максимума исследуется однозначная разрешимость краевых задач конвекции-диффузии. В частности, для уравнений в недивергентной форме устанавливаются соответствующие априорные оценки в равномерной норме.

2. РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ

Произвольная сетка генерируется из некоторого множества узлов. Наиболее естественно и просто по этому общему множеству точек определить триангуляцию – построить треугольную сетку. Использовать более сложные конструкции неструктурированных сеток чаще всего нет необходимости.

Встает проблема оптимизации триангуляции по каким-то критериям. Основной критерий оптимизации состоит в том, чтобы полученные треугольники, с одной стороны, были близки к равносторонним (не должно быть слишком острых углов). Это локальный критерий, который относится к одному треугольнику. Второй (глобальный) критерий состоит в том, чтобы соседние треугольники не слишком сильно разнились по площади (критерий равномерности сетки).

Имеется специальная триангуляция – триангуляция Делоне, которая обладает рядом оптимальных свойств. Одно из них заключается в стремлении полученных треугольников к равноугольным. Более точно отмеченное свойство формулируется следующим образом: при триангуляции Делоне максимизируется минимальное значение внутренних углов треугольников. Более полное обсуждение свойств триангуляции Делоне и связанных с нею проблем можно найти в обзорах [13], [14]. Формальное определение триангуляции Делоне (см., например, [15]) связывается

со свойством, что для каждого треугольника все другие узлы лежат вне описанной окружности. Для нашего дальнейшего изложения очень важна связь триангуляции Делоне с диаграммной (разбиением) Вороного.

Многоугольником Вороного для отдельного узла будет множество точек, которые лежат ближе к этому узлу, чем ко всем другим. Для двух точек множества определяются полуплоскостью, которая ограничена перпендикуляром к середине отрезка, соединяющего эти две точки. Поэтому многоугольником Вороного будет пересечение таких полуплоскостей для всех пар узлов, образованных данным узлом и всеми другими узлами. Подчеркнем, что этот многоугольник всегда выпуклый.

Каждая вершина многоугольника Вороного является точкой встречи трех многоугольников Вороного. С каждой из этих вершин связывается треугольник, построенный по соответствующим узлам контактирующих многоугольников Вороного. Это и есть триангуляция Делоне. Тем самым между диаграммой Вороного и триангуляцией устанавливается взаимное соответствие.

При триангуляции Делоне мы получаем оптимальное разбиение расчетной области по заданному множеству узлов – оптимальное с точки зрения максимизации минимальных углов треугольников. Триангуляции Делоне соответствует диаграмма Вороного, которая для каждого узла однозначно определяет множество точек области. Это выделение множества точек делается по совершенно прозрачному геометрическому критерию максимальной близости к узлу. Тем самым триангуляция Делоне и диаграмма Вороного полностью определяют (и определяют оптимально и однозначно) расчетную треугольную сетку и контрольный объем.

Триангуляция Делоне активно используется в вычислительной практике при построении схем конечных элементов (см., например, [16]). Имеется также много хорошо проработанных вычислительных методов генерации таких треугольных сеток и соответствующее программное обеспечение.

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением двумерных задач. Будем считать, что расчетная область представляет собой выпуклый многоугольник Ω с границей $\partial\Omega$. Для точек области используем обозначения $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$.

В области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ введена сетка $\overline{\omega}$, состоящая из узлов $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, причем углы многоугольника Ω являются узлами. Пусть ω – множество внутренних, а $\partial\omega$ – множество граничных узлов, т.е. $\omega = \overline{\omega} \cap \Omega$, $\partial\omega = \overline{\omega} \cap \partial\Omega$. С каждым узлом $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, свяжем контрольный объем Ω_i как определенную часть расчетной области. В качестве контрольного объема выбираются многоугольники Вороного или их часть, принадлежащая Ω.

Контрольные объемы покрывают всю расчетную область, так что

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} \overline{\Omega}_i, \quad \overline{\Omega}_i = \Omega_i \cup \partial\Omega_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для общих граней контрольных объемов используем обозначения

$$\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \Gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для узла i определим множество соседних узлов $\mathcal{W}(i)$, для которых контрольные объемы имеют общие грани с контрольным объемом для узла i, т.е.

$$\mathcal{W}(i) = \{j \mid \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \varnothing, j = 1, 2, \ldots, M\}, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Введем также обозначения

$$V_i = \int_{\Omega_i} d\mathbf{x}, \quad l_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} d\mathbf{x}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M,$$

для площади контрольного объема и длины ребра многоугольника Вороного соответственно.

3. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА

Прежде чем переходить к конкретному обсуждению проблем построения разностных схем на треугольных сетках, отметим некоторые возможные общие подходы, которые могут найти (и находят) применение.

Схемы метода конечных элементов. Наиболее простой (с методологической точки зрения) подход к построению дискретных аналогов на треугольных сетках состоит в использовании метода конечных элементов. Другое дело, что не всегда можно ограничиться стандартными вариантами конечноэлементной аппроксимации.

В вычислительной практике широко используются кусочно-линейные конечные элементы, которые соответствуют аппроксимации приближенного решения на каждом треугольнике линейной функцией. При этом в задачах конвекции-диффузии мы получаем аналоги схем с центрально-разностной аппроксимацией конвективных слагаемых.

При конечноэлементной аппроксимации есть проблемы получения монотонных схем, т.е. схем, для которых выполнен принцип максимума. В теории метода конечных элементов проблема решается использованием не метода Галеркина, а его обобщения – метода Петрова–Галеркина (см., например, [3]). В этом случае пробные функции, из которых конструируется решение, и поверочные, которые дают систему уравнений, различаются. На таком достаточно искусственном пути получаются схемы, имеющие, например, большое сходство со схемами с направленными разностями.

Метод опорных операторов. В этом подходе (более подробное изложение см. в [17], [18]) исходная задача формулируется в терминах дифференциальных операторов векторного анализа: дивергенция, градиент и ротор. Далее на выбранной сетке аппроксимируется один из этих операторов. Другие операторы уже определяются из некоторых связей интегрального характера между дифференциальными операторами. Этим достигается согласованная аппроксимация операторов, дающая такие свойства, как консервативность, сопряженность и т.д.

Для треугольных расчетных сеток метод опорных операторов развивается, например, в [19]. Основные особенности связаны с заданием множества сеточных функций. Например, решение может аппроксимироваться в узлах треугольной сетки, потоки – в ячейках (ячеечно-узловая аппроксимация) либо в центрах граней ячейки (разнесенные сетки).

Метод баланса (интегроинтерполяционный метод). Одним из основных подходов к построению разностных схем на нерегулярных сетках является классический интегроинтерполяционный метод [20]. Метод баланса основан на следующих основных положениях.

(i) Необходимо задать сетку (определить множество узлов, множество сеточных функций).

(ii) Для каждого отдельного узла определяется окрестность (контрольный объем) – часть расчетной области, отнесенной к заданному узлу.

(iii) Разностная схема получается интегрированием исходного уравнения по контрольному объему с некими предположениями о поведении решения.

В зависимости от того, как все это делается, мы и приходим к тому или иному варианту метода контрольного объема.

При построении разностных схем на треугольной сетке методом контрольного объема естественно задавать сеточные функции в узлах. Это стандартный, но единственный вариант. В качестве альтернативы можно использовать задание функции в некоторых точках, связываемых с треугольной ячейкой. Примером может служить задание сеточных функций в вершинах многоугольников Вороного.

Второй, неопределенный момент порожден выбором контрольного объема. При триангуляции в качестве контрольного объема во многих работах выбирается часть треугольника, которая выделяется при пересечении медиан. В этом случае к каждому из узлов относится равная по площади часть треугольника.

Интересный вариант выбора контрольного объема связан с диаграммой Вороного. В этом случае к каждому отдельному узлу относится часть всей расчетной области, которая ближе всего расположена к нему (никакого равновеликого разделения треугольников здесь, конечно, нет). Важно, что и в том, и в другом случае в качестве критерия выбора контрольного объема положены совершенно прозрачные геометрические требования: в первом случае – разделение треугольника на три равновеликие части, во втором – геометрическая близость точек расчетной области.

Среди плюсов разделения медианами отметим, что его проводили для произвольного разбиения на треугольники, не ограничиваясь триангуляцией Делоне. Преимущества разбиения Вороного представляются более весомыми и связаны с ортогональностью сторон треугольника к граням многоугольников Вороного.

Эвристические соображения в пользу многоугольников Вороного связаны с идеей глобализации (оптимизации) сетки и контрольных объемов: оптимизация для всех узлов, а не для отдельного треугольника.

Метод баланса при использовании треугольных сеток необходимо реализовывать на триангуляции Делоне при выборе многоугольников Вороного в качестве контрольного объема. Это наиболее естественная процедура, позволяющая наиболее просто строить разностные схемы с использованием оптимизированных треугольных сеток.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$ введем скалярное произведение и норму

$$(u, w) = \int_\Omega u(\mathbf{x})w(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \|u\| \equiv (u, w)^{1/2} = \left(\int_\Omega u^2(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)^{1/2}$$

для произвольных функций $u(\mathbf{x})$ и $w(\mathbf{x})$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$.

Основное свойство оператора диффузионного переноса, определяемое согласно (6), связано с самосопряженностью и положительной определенностью в $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq \frac{\kappa}{\mathcal{M}_0}E \tag{12}$$

при $k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0$. Здесь E – тождественный оператор, а $\mathcal{M}_0$ – постоянная в неравенстве Фридрихса

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \mathcal{M}_0 \sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right)^2 d\mathbf{x}.$$

Для сеточных функций $y(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x})$, заданных в узлах $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$ и обращающихся в нуль в граничных узлах $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, зададим скалярное произведение в $H = L_2(\omega)$ и норму соотношениями

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} V_i y(\mathbf{x}_i)w(\mathbf{x}_i), \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

Определим расстояние между узлами $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j$:

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \left[\sum_{\alpha=1}^{2} (x_i^{(\alpha)} - x_j^{(\alpha)})\right]^{1/2},$$

и середину отрезка, соединяющего эти узлы:

$$\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)}), \quad x_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(x_i^{(\alpha)} + x_j^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2.$$

Сеточный оператор диффузионного переноса, который относится ко внутреннему узлу $\mathbf{x}_i \in \omega$, определяется в соответствии с интегроинтерполяционным методом из интегрирования по контрольному объему Ω_i:

$$Du = (Du)_i \approx \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i} \mathcal{D}u d\mathbf{x}. \tag{13}$$

Для вектора диффузионного потока используем выражение

$$\mathbf{q} = -k(\mathbf{x})\operatorname{grad} u$$

и тогда имеем

$$\mathcal{D}u = \operatorname{div}\mathbf{q}.$$

С учетом этого для правой части (13) получаем

$$\int_{\Omega_i} \mathcal{D}u dx = \int_{\partial\Omega_i} (\mathbf{q}, \mathbf{n})d\mathbf{x}, \tag{14}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль.

Разностную аппроксимацию нормальной компоненты потока на грани γ_{ij} обозначим $\mathbf{q}_{ij}^h$ и поэтому из (13), (14) для разностного оператора диффузионного переноса получим представление

$$(Dy)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}q_{ij}^h, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{15}$$

Для случая гладких коэффициентов уравнения и самого решения естественно использовать простейшие аппроксимации для потока по нормали в точке $\mathbf{x}_{ij}$:

$$q_{ij}^h = -k(\mathbf{x}_{ij})\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}. \tag{16}$$

Из (15), (16) получим для разностного оператора диффузионного переноса искомое представление

$$(Dy)_i = -\frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{17}$$

Как и при рассмотрении разностных схем на регулярных сетках [10], можно исследовать и другие аппроксимации для потоков. Этот момент особенно важен, в частности, для задач с кусочно-гладкими коэффициентами уравнения.

Для сеточных функций $y_i \equiv y(\mathbf{x}_i) = 0$, $w_i = 0$, $\mathbf{x}_i \in \partial\Omega$, имеем $(Dy, w) = (y, D^*w)$, т.е. разностный оператор (17) является самосопряженным в H. В силу

$$(Dy, y) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_i\in\omega}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)k(\mathbf{x}_{ij})\left(\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2, \tag{18}$$

он является также и положительным ($D = D^* > 0$).

Более того, сеточный оператор диффузионного переноса положительно определен. А именно, как и в дифференциальном случае, имеем (см. [21])

$$D = D^* \geq \frac{\kappa}{M_0}E, \tag{19}$$

где M_0 – постоянная, не зависящая от сетки, в разностном неравенстве Фридрихса

$$\|y\|^2 \leq \frac{M_0}{2}\sum_{\mathbf{x}_i\in\omega}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\left(\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2.$$

На свойстве монотонности разностного оператора диффузионного переноса мы остановимся позднее, после построения дискретных аналогов операторов конвективного переноса.

4. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

При построении разностных операторов конвективного переноса методом баланса удобно начать с рассмотрения оператора переноса в дивергентной форме (8). Положим

$$C_2u = (C_2u)_i \approx \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\mathscr{C}_2u\,d\mathbf{x} \tag{20}$$

для внутренних узлов сетки. Для правой части имеем

$$\int_{\Omega_i}\mathscr{C}_2u\,d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_i}(\mathbf{v}, \mathbf{n})u\,d\mathbf{x}.$$

Подобно случаю аппроксимации диффузионного переноса, будем относить нормальную компоненту скорости к середине отрезка, соединяющего узлы сетки. При использовании обозначений

$$b_{ij} = (\mathbf{v}, \mathbf{n})(\mathbf{x}_{ij})$$

для разностного оператора конвективного переноса из (20) получим

$$(C_2 y)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} \frac{y_j - y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь аппроксимацию оператора конвективного переноса в недивергентной форме (7). Вместо того чтобы пытаться строить непосредственные аппроксимации (1), используем свойство сопряженности с точностью до знака операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах.

Принимая во внимание однородные граничные условия (2), имеем

$$(\mathscr{C}_1 u, w) = \sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega v^{(\alpha)} \frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} w d\mathbf{x} = -\sum_{\alpha=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} (v^{(\alpha)} w) u d\mathbf{x} = -(u, \mathscr{C}_2 w).$$

Тем самым

$$\mathscr{C}_1^* = -\mathscr{C}_2. \tag{22}$$

В силу (22), оператор конвективного переноса в симметричной форме (9) будет кососимметричным ($(\mathscr{C}_0 u, u) = 0$):

$$\mathscr{C}_0 = -\mathscr{C}_0^*. \tag{23}$$

При выполнении условия несжимаемости среды

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{24}$$

кососимметричными будут и операторы конвективного переноса в недивергентном (7) и дивергентном (8) видах. Принципиальным при построении дискретных аппроксимаций операторов конвективного переноса является то, что свойство кососимметричности для оператора $\mathscr{C}_0$ имеет место для любых $v^{(\alpha)}(\mathbf{x})$, $\alpha = 1, 2$, в том числе и не удовлетворяющих условию несжимаемости (24).

Непосредственные выкладки дают

$$(C_2 y, w) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} y_i w_i + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} y_j w_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} y_i w_i - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} y_i w_j = -(y, C_1 w),$$

где учтено, что $b_{ij} = -b_{ji}$. Это дает возможность определить разностный оператор

$$(C_1 y) = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} \frac{y_j - y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{25}$$

По построению, разностные операторы конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах, определяемые согласно (21), (25), с точностью до знака сопряжены друг другу, т.е.

$$C_1^* = -C_2. \tag{26}$$

Для оператора конвективного переноса в симметричной форме (9) с учетом представления

$$C_0 = (C_1 + C_2)/2$$

из (21) и (25) получим наиболее компактную аппроксимацию

$$(C_0 y)_i = \frac{1}{2V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} y_j, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{27}$$

Основное свойство этого разностного оператора есть

$$C_0^* = -C_0, \tag{28}$$

причем это свойство кососимметричности имеет место при любом поле скоростей (для произвольных векторов $\mathbf{v}$, не обязательно удовлетворяющих какому-то разностному аналогу свойства несжимаемости (24)).

При численном решении задач механики сплошной среды большое значение имеет согласование аппроксимаций операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах. Согласованность понимается в том смысле, что один разностный оператор совпадает с другим в случае, когда соответствующее разностное условие несжимаемости имеет место. Такой момент важен, так как в случае дифференциальных уравнений такая эквивалентность существует и именно она обеспечивает выполнимость не одного, а нескольких законов сохранения. В частности, для уравнений Навье–Стокса для несжимаемой среды оператор конвективного переноса в уравнении движения не дает вклада ни в кинетическую энергию, ни в отдельные компоненты импульса (энергетическая нейтральность и нейтральность по импульсу). При использовании простейших аппроксимаций мы можем рассчитывать на что-то одно: мы следим либо за кинетической энергией, либо за импульсом.

При рассмотрении несжимаемой среды (условие (24)) на дифференциальном уровне можно использовать любую из трех (7)–(9) эквивалентных форм записи конвективных слагаемых. Это – следствие следующей формулы векторного анализа:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}u) = (\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}u) + u\operatorname{div}\mathbf{v},$$

которая, в свою очередь, базируется на формуле дифференцирования произведения двух функций. Для операторов конвективного переноса

$$\mathscr{C}_2 u = \mathscr{C}_1 u + (\operatorname{div}\mathbf{v})u. \tag{29}$$

При построении конечно-разностных аппроксимаций операторов конвективного переноса естественно стремиться к отбору таких разностных операторов, которые имели бы отмеченное выше свойство (29) дифференциальных операторов – свойство перехода одной разностной аппроксимации в другую.

Из (21), (25) имеем

$$C_2 y = C_1 y + \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathscr{W}(i)} l_{ij}b_{ij}y_i, \quad \mathbf{x}_i\in\omega.$$

Этому равенству придадим форму, аналогичную (29):

$$C_2 y = C_1 y + (\operatorname{div}_h\mathbf{v})y, \tag{30}$$

где разностный оператор дивергенции есть

$$\operatorname{div}_h\mathbf{v} = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathscr{W}(i)} l_{ij}b_{ij}, \quad \mathbf{x}_i\in\omega. \tag{31}$$

К аппроксимации дивергенции вектора посредством (31) приходим, используя определение

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{\delta\to 0}\left[\left(\int_{\partial V}\mathbf{v}d\mathbf{S}\right)\left(\int_V dV\right)^{-1}\right],$$

где V – область, ∂V – граница области, δ – диаметр области. Выражение (31) можно рассматривать как соответствующую квадратурную формулу для правой части при интегрировании по контрольному объему для узла $\mathbf{x}_i\in\omega$.

На равномерных прямоугольных сетках операторы (21), (25) соответствуют использованию обычных центрально-разностных аппроксимаций. По сравнению с аппроксимациями направленными разностями мы в этом случае можем рассчитывать на большую точность. Однако при этом не всегда для разностного решения выполнен принцип максимума, т.е. схемы с центрально-разностными аппроксимациями не всегда являются монотонными. При построении безусловно монотонных схем необходимо ориентироваться на применение схем с направленными разностями.

Выделим положительную и отрицательную составляющие нормальной компоненты скорости, положив

$$b_{ij} = b_{ij}^+ + b_{ij}^-,$$

где

$$b_{ij}^{+} = \frac{1}{2}(b_{ij} + |b_{ij}|), \quad b_{ij}^{-} = \frac{1}{2}(b_{ij} - |b_{ij}|).$$

При аппроксимации правой части (22) будем использовать значение сеточной функции либо в центральном, либо в периферийном узле, в зависимости от знака скорости. Это приводит нас к разностному оператору конвективного переноса в виде

$$(C_2 y)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij}(b_{ij}^{-} y_j + b_{ij}^{+} y_i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{32}$$

Наиболее просто аппроксимация оператора конвективного переноса в недивергентной форме (9) проводится на основе использования (30). При использовании разностного оператора дивергенции (31) для разностного аналога (9) имеем выражение

$$(C_1 y)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}^{-}(y_j - y_i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{33}$$

Тем самым получены аппроксимации (32) и (33) операторов конвективного переноса в дивергентной (9) и недивергентной (7) формах направленными разностями. Причем эти аппроксимации согласованы в смысле выполнения равенства (30).

5. МОНОТОННОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Краевым задачам (1), (2) и (2), (3) поставим в соответствие разностные задачи

$$Cy + Dy = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \tag{34}$$

для сеточных функций $y(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$. Для правых частей (34) положим, например,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Для того чтобы воспользоваться результатами выполнения принципа максимума на сеточном уровне [1], запишем разностные задачи (34) в виде

$$\alpha_i y_i - \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} \beta_{ij} y_i = \phi_i, \quad \mathbf{x}_i \in \omega, \tag{35}$$

$$y_i = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega. \tag{36}$$

Будем считать, что $\bar{\omega}$ является связной сеткой.

Для разностной задачи (35), (36) справедлив принцип максимума, т.е. разностная схема монотонна при выполнении (см. [1]) условий

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_{ij} > 0, \quad j \in \mathcal{W}(i), \tag{37}$$

$$\delta_i \equiv \alpha_i - \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} \beta_{ij} \geq 0, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{38}$$

Разностная схема (34) для задачи (1), (2) при использовании аппроксимаций (17) и (33) записывается в виде (35), (36) с коэффициентами

$$\alpha_i = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}^{-} + \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{V_i} l_{ij} b_{ij}^{-} + \frac{1}{V_i} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad j \in \mathcal{W}(i),$$

$$\delta_i = 0, \quad \mathbf{x}_i \in \omega.$$

Условия монотонности (37), (38) безусловно выполнены.

Рассмотрим теперь схему (34), в которой используется разностный оператор конвективного переноса $C = C_1$, определяемый согласно (25). Схема (17), (25), (34) записывается в каноническом виде (35), (36) при

$$\alpha_i = -\frac{1}{2V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{1}{d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{2V_i}l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)}, \quad j\in\mathcal{W}(i),$$

$$\delta_i = 0, \quad \mathbf{x}_i\in\omega.$$

Определим локальное сеточное число Пекле:

$$\mathrm{Pe}_{ij} = \frac{|b_{ij}|d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)}{k(\mathbf{x}_{ij})}, \quad j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega.$$

Условия монотонности (37) приводят к ограничениям

$$\mathrm{Pe}_{ij} < 2, \quad j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega. \tag{39}$$

Такие ограничения типичны при использовании центрально-разностных аппроксимаций на регулярных сетках [10].

Для задачи конвекции-диффузии с дивергентными конвективными слагаемыми (2), (3) при использовании направленных аппроксимаций (17) и (32) имеем

$$\alpha_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}^+ + \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{1}{d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{V_i}l_{ij}b_{ij}^- + \frac{1}{V_i}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)}, \quad j\in\mathcal{W}(i),$$

$$\delta_i = \mathrm{div}_h\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}_i\in\omega.$$

Тем самым стандартные условия монотонности (37), (38) будут выполнены только при $\mathrm{div}_h\mathbf{v}\geq 0$.

Аналогичная ситуация имеет место при рассмотрении разностных схем на прямоугольных сетках [10], [22]. Безусловное выполнение принципа максимума для схем с направленными разностями для уравнения (34) можно в этом случае связать с диагональным преобладанием не по строкам (как условия (37), (38)), а по столбцам. Вторая, более перспективная при рассмотрении разностных схем на неструктурированных сетках возможность связана с установлением принципа максимума в стандартной формулировке для сопряженной задачи (см. [10], [23]).

Рассмотрим сопряженный к C_2, определяемый согласно (32) оператор. Принимая во внимание $l_{ij} = l_{ij}$, $b_{ij}^+ = -b_{ij}^-$, получаем

$$(C_2y, v) = \sum_{\mathbf{x}_i\in\omega}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}(b_{ij}^-y_j + b_{ij}^+y_i)v_i = \sum_{\mathbf{x}_i\in\omega}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}y_ib_{ij}^+(v_i - v_j).$$

Тем самым

$$C_2^*v = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}^+(v_i - v_j), \quad \mathbf{x}_i\in\omega. \tag{40}$$

При рассмотрении сопряженной задачи

$$C_2^*v + Dv = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\omega, \tag{41}$$

устанавливается обычным образом безусловная выполнимость принципа максимума в стандартной формулировке. Напомним, что речь идет о формулировке принципа максимума в следующей форме: при выполнении условий (37), (38) решение задачи (35), (36) неотрицательно (неположительно), если правая часть (35) неотрицательна (неположительна).

Покажем, что из выполнения принципа максимума для сопряженной задачи следует выполнение принципа максимума для исходной задачи. Для каждого $\mathbf{x}_i \in \omega$ определим сеточную функцию

$$\delta_h(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1/V_i, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_i, \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i. \end{cases}$$

Определим сеточную функцию $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ при заданном $\mathbf{x}_i \in \omega$ как решение задачи

$$C_2^* G + DG = \delta_h(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{42}$$

В силу выполнения принципа максимума для сопряженной задачи (41), функция $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \geq 0$.

Домножив скалярно уравнение (42) на решение исходной краевой задачи

$$C_2 y + Dy = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

с учетом (42) получим представление решения

$$y(\mathbf{x}_i) = (G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), \varphi(\mathbf{x})).$$

Тем самым $y(\mathbf{x}_i) \geq 0$, $\mathbf{x} \in \omega$. Следовательно, принцип максимума имеет место и для исходной задачи (17), (32), (34).

При рассмотрении разностной схемы (17), (21), (34) исследование проводится аналогично. Монотонность разностной схемы (17), (21), (41) устанавливается при ограничениях (39). Итог нашему рассмотрению подводит

Теорема 2. *Разностные схемы с аппроксимациями конвективного переноса направленными разностями* (17), (33), (41) *и* (17), (32), (41) *для задач конвекции-диффузии* (1), (2) *и* (2), (3) *являются безусловно монотонными, а для схем* (17), (25), (34) *и* (17), (21), (34) *принцип максимума выполнен при ограничениях* (39).

6. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ МОНОТОННЫЕ СХЕМЫ

Обсудим кратко возможности построения монотонных разностных схем на основе принципа регуляризации на примере модельных задач конвекции-диффузии (1), (3). Аналогичные результаты были получены при рассмотрении разностных схем на регулярных прямоугольных сетках [10], [7], [22].

Принцип регуляризации разностных схем предложен в [8], где его возможности при построении разностных схем необходимого качества демонстрируются на ряде примеров. Наиболее впечатляющие результаты получены (см., например, [1], [24], [25]) в процессе рассмотрения нестационарных задач математической физики (схемы расщепления) при построении итерационных методов решения сеточных уравнений.

Принцип регуляризации традиционно широко используется для построения устойчивых разностных схем при приближенном решении краевых задач для уравнений с частными производными. За счет малых возмущений операторов разностной схемы имеется возможность контролировать рост нормы решения при переходе с одного временнóго слоя на другой. Будем использовать этот общий методологический прием для построения безусловно-монотонных разностных схем на треугольных сетках.

Построение безусловно-монотонных разностных схем на основе принципа регуляризации реализуется следующим образом.

1. Для поставленной задачи строится некоторая простейшая разностная схема (производящая разностная схема), которая не обладает необходимыми свойствами, например является условно-монотонной.

2. Эта схема записывается в единой (канонической) форме, для которой условия монотонности известны.

3. Качество разностной схемы (ее монотонность) улучшается за счет возмущения коэффициентов(операторов) разностной схемы в необходимом направлении.

В качестве производящей (исходной, первичной) для задачи конвекции-диффузии с недивергентным конвективным переносом (1), (2) возьмем схему (17), (34), в которой используется разностный оператор конвективного переноса $C = C_1$ в виде (25). Схема записывается в каноничес-

ком виде, в качестве которого при рассмотрении монотонных схем естественно взять (35), (36). Как мы установили выше, эта схема является монотонной при ограничениях (39).

Монотонизацию схемы проведем на основе возмущения сеточных коэффициентов. С учетом определения локального сеточного числа Пекле мы можем возмущать как коэффициент диффузии, так и компоненты скоростей. Для того чтобы получить монотонную схему, необходимо либо уменьшать скорость, либо увеличивать диффузию (и то и другое имеет право на жизнь). Мы здесь ограничимся вариантом с возмущением коэффициента диффузии.

Регуляризованную схему запишем в виде

$$Cy + D_\rho y = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{43}$$

За регуляризацию отвечает сеточная функция $\rho(\mathbf{x}) \geq 0$, определенная в точках $\mathbf{x}_{ij}$ расчетной области Ω. Регуляризованный оператор диффузионного переноса по аналогии с (17) определяется выражением

$$(D_\rho y)_i = -\frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij}(1+\rho(\mathbf{x}_{ij}))k(\mathbf{x}_{ij})\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{44}$$

Регуляризованная схема (44) принимает вид (15), (16) при

$$\alpha_i = -\frac{1}{2V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij}(1+\rho_{ij})k(\mathbf{x}_{ij})\frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{2V_i}l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}(1+\rho_{ij})k(\mathbf{x}_{ij})\frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad j \in \mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega.$$

Сеточный коэффициент ρ_{ij} обеспечивает монотонность при

$$1 + \rho_{ij} > \mathrm{Pe}_{ij}/2, \quad j \in \mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{45}$$

Тем самым получены условия монотонности регуляризованной схемы (44). Даже в рассматриваемых условиях монотонизации за счет коэффициента диффузии мы имеем очень много возможностей: можно указать много сеточных функций $\rho(\mathbf{x})$, которые обеспечивают выполнимость (45). Понятно, что необходимо стремиться к тому, чтобы эта регуляризующая функция была максимально близка к нулю. Отметим некоторые возможности в этом направлении, отталкиваясь прежде всего от известных в литературе по вычислительной гидродинамике безусловно-монотонных схем.

Принимая во внимание, что $\mathrm{Pe}_{ij} = O(h)$, для сохранения порядка аппроксимации при использовании равномерной прямоугольной сетки выберем регуляризующий множитель $\rho_{ij} = O(h^2)$. Аналогично поступим и при использовании треугольной сетки:

$$\rho_{ij} > \eta \mathrm{Pe}_{ij}^2, \quad j \in \mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{46}$$

Из достаточных условий монотонности (45) следует, что достаточно положить $\eta > 1/16$. К классу (46) принадлежат, например, схемы предложенные в [26], [27].

Понятно, что вместо (46) можно использовать более сложные регуляризаторы. Примером может служить экспоненциальная схема [28], [29], которая соответствует использованию регуляризатора в форме

$$\rho_{ij} = \mathrm{Pe}_{ij}\mathrm{cth}\,\mathrm{Pe}_{ij} - 1, \quad j \in \mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{47}$$

Экспоненциальная схема (43), (44), (47) является безусловно монотонной и имеет второй порядок аппроксимации при использовании прямоугольных равномерных расчетных сеток. Основной ее недостаток связан с относительно большой вычислительной сложностью задания коэффициентов разностной схемы. Естественно попытаться упростить коэффициенты этой разностной схемы без потери основных ее свойств.

Используя разложение при малых Pe_{ij}:

$$\mathrm{cth}\,\mathrm{Pe}_{ij} \approx 1/\mathrm{Pe}_{ij} + \mathrm{Pe}_{ij}/3,$$

из (47) получаем

$$\rho_{ij} > \eta \mathrm{Pe}_{ij}^2/3, \quad j \in \mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{48}$$

Схема (43), (44), (48) принадлежит к ранее выделенному классу регуляризованных разностных схем (43), (44), (46) ($\eta = 1/3$). Подобные попытки обсуждаются в [30], [31].

Интересно, что достаточные условия (45) монотонности регуляризованной схемы (43) могут быть удовлетворены выбором

$$\rho_{ij} > \eta \mathrm{Pe}_{ij}, \quad j \in \mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega, \tag{49}$$

при $\eta \geq 1/2$. Однако при этом теряется порядок аппроксимации: регуляризованная схема (43), (44), (49) имеет только первый порядок аппроксимации на равномерных прямоугольных сетках. При $\eta = 1/2$ из (49) получаем обычную схему с направленными разностями.

Гибридные монотонные схемы строятся на основе использования разрывных регуляризаторов Pe_{ij}. Например, хорошо известная гибридная схема из [30] соответствует выбору простейшего разрывного регуляризатора

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 0, & \mathrm{Pe}_{ij} < 2, \\ \mathrm{Pe}_{ij}/2, & \mathrm{Pe}_{ij} \geq 2, \end{cases}$$

в регуляризованной схеме (43), (44). Очевидно, что эта гибридная схема безусловно монотонна.

Можно предложить и другие регуляризованные монотонные схемы, связанные с некоторыми другими возможностями [10], [7] задания сеточной функции $\rho_{ij} = O(h^2)$. Среди них отметим

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{Pe}_{ij}^2}{4 + 2\mathrm{Pe}_{ij}}, \quad j \in \mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega,$$

которая представляет собой аналог монотонной схемы, рассмотренной в [32].

Подобным образом строятся и безусловно монотонные разностные схемы для уравнения (3). В качестве производящей возьмем схему (17), (34) с оператором конвективного переноса (21). При записи этой схемы в виде (35), (36) получим

$$\alpha_i = \frac{1}{2V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} + \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{2V_i} l_{ij} b_{ij} + \frac{1}{V_i} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad j \in \mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega.$$

Подобно задаче конвекции-диффузии с оператором конвективного переноса в недивергентной форме, регуляризацию проведем на основе возмущения коэффициента диффузии, т.е. вместо схемы (34) будем использовать (43). В этом случае

$$\alpha_i = \frac{1}{2V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} + \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} (1 + \rho_{ij}) k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{2V_i} l_{ij} b_{ij} + \frac{1}{V_i} (1 + \rho_{ij}) k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad j \in \mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega.$$

При ограничениях (45) устанавливается монотонность этой схемы. Необходимо только еще раз подчеркнуть, что для исследования таких схем привлекается сопряженная задача. Тем самым верна

Теорема 3. *Регуляризованные разностные схемы* (21), (43), (44) *и* (25), (43), (44) *для задач конвекции-диффузии* (1), (2) *и* (2), (3) *являются безусловно-монотонными при ограничениях* (45) *на регуляризующую сеточную функцию.*

На основе принципа регуляризации строятся и нелинейные монотонные схемы на регулярных [33] и треугольных [9] сетках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. *Forsythe G.E., Wasow W.R.* Finite difference methods for partial differential equations. New York: Wiley, 1960.
3. *Morton K.W.* Numerical solution of convection-diffusion problems. London: Chapman and Hall, 1996.
4. *Ross H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical methods for singular perturbed differential equations // Convection-Diffusion and Flow Problems. Berlin: Springer, 1995.
5. *Gillbary D., Trudinger N.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer, 1983.
6. *Кареткина Н.В.* Безусловно устойчивая разностная схема для параболических уравнений, содержащих первые производные // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 1. С. 236–240.
7. *Вабищевич П.Н.* Монотонные разностные схемы для задач конвекции-диффузии // Дифференц. ур-ния. 1994. Т. 30. С. 503–513.
8. *Самарский А.А.* О регуляризации разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 1. С. 62–93.
9. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Монотонные разностные схемы на треугольных сетках // Докл. РАН. 2000. Т. 371. С. 742–746.
10. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
11. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. New York: Interscience, 1953.
12. *Protter M.H., Weinberger H.F.* Maximum principles in differential equations. New York: Springer, 1984.
13. *Aurenhammer F.* Voronoi diagrams – A survey of a fundamental geometric data structure // ACM Comput. Surveys. 1991. V. 23. P. 345–405.
14. *Fortune S.* Voronoi diagrams and Delaunay triangulations // Comput. Euclidean Geometry (Lect. Notes Ser. Comput.). Vol. 1. Singapore: World Scient., 1992. P. 193–233.
15. *Ласло М.* Вычислительная геометрия и компьютерная графика на *C*++. М.: Бином, 1997.
16. *George P.-L., Borouchaki H.* Delaunay triangulation and meshing // Appl. Finite elements. Hermes: Paris, 1998.
17. *Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. и др.* Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Критерий, 1996.
18. *Shashkov M.* Conservative finite-difference methods on general grids. Boca Raton: CRC Press, 1996.
19. *Арделян Н.В., Космачевский К.В.* Неявный свободно-лагранжев метод расчета двумерных магнитогазодинамических течений // Матем. моделирование. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1993. С. 25–44.
20. *Самарский А.А.* Уравнения параболического типа и разностные методы их решения / Тр. Всес. совещания по дифференц. ур-ниям, 1958. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960. С. 148–160.
21. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Разностные схемы для задач конвекции-диффузии на нерегулярных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 5. С. 726–739.
22. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational heat transfer. Chichester: Wiley, 1995.
23. *Голант Е.И.* О сопряженных семействах разностных схем для уравнений параболического типа с младшими членами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 5. С. 1162–1169.
24. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
25. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
26. *Briggs D.G.* A finite difference scheme for the incompressible advection-diffusion equation // Comput. Meths. Appl. Mech. Engng. 1975. V. 6. P. 233–241.
27. *Joseph M.* Finite difference representations of vorticity tyransport // Comput. Meths. Appl. Mech. Engng. 1983. V. 39. P. 107–116.
28. *De G. Allen D.N., Southwell R.V.* Relaxation methods applied to determine the motion in two dimensions of a viscous fluid past a fixed cylinder // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1955. V. 8. P. 129–145.
29. *Doolan E.P., Miller J.J.H., Schilders W.H.A.* Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers. Dublin: Boole Press, 1980.
30. *Patankar S.V.* Numerical heat transfer and fluid flow. Washington, D. C.: Hemisphere, 1980.
31. *Chien J.C.* A general finite-difference formulation with application to Navier-Stokes equations // Comput. and Fluids. 1977. V. 5. P. 15–31.
32. *Самарский А.А.* О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 3. С. 548–551.
33. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Нелинейные монотонные схемы для уравнения переноса // Докл. АН СССР. 1998. Т. 361. С. 21–23.