ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 376, № 6, с. 738–741

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

# УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ ПО ВРЕМЕНИ СЕТКАХ

© 2001 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. Л. Макаревич, П. П. Матус

Поступило 13.11.2000 г.

Центральное место при теоретическом исследовании численных методов решения задач математической физики занимает общая теория устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [1, 2]. Получены достаточные и необходимые условия устойчивости разностных схем, рассматриваемых в конечномерных гильбертовых пространствах, по начальным данным и правой части для широких классов двух- и трехслойных схем [3]. Результаты более поздних исследований отражены в работах [4, 5].

Для повышения точности приближенного решения, адаптации используемой расчетной сетки к особенностям точного решения задачи используются неравномерные сетки. Среди таких адаптивных методов выделим схемы на неравномерных сетках по пространству для задач с большими изменениями решения по пространственным переменным. Вторая возможность ориентирована на задачи с адаптацией по времени, использованием неравномерных сеток по времени.

К настоящему времени основные результаты теории устойчивости операторно-разностных схем получены при использовании равномерных сеток по времени. Для двухслойных разностных схем переход на неравномерные сетки не носит принципиального характера [6] – из послойных оценок нетрудно получить оценки устойчивости на любой момент времени. Для трехслойных схем ситуация становится сложнее. Имеются лишь некоторые (см., например, [7, 8]) частные результаты в этом направлении исследований.

В данной работе получены общие условия устойчивости трехслойных операторно-разностных схем на неравномерных сетках. Рассмотрение базируется на использовании двух канонических форм трехслойных разностных схем, одна из которых (традиционная каноническая форма [1, 3]) более подходит для сетки с увеличивающимся шагом, вторая – для сетки с уменьшением шага по времени. Достаточные условия устойчивости согласованы с известными результатами по устойчивости при использовании равномерной сетки.

1. Приведем вначале канонические формы трехслойных операторно-разностных схем, которые используются нами при исследовании схем на неравномерных по времени сетках. Пусть заданы вещественное конечномерное пространство $H$ и неравномерная сетка по времени

$$\hat{\bar{\omega}}_\tau = \{t_n = t_{n-1} + \tau_n, n = 1, 2, \ldots, N, t_0 = 0, t_N = T\} = \\ = \hat{\omega}_\tau \cup \{0, T\}.$$

Обозначим через $B_\alpha$: $H \to H$, $\alpha = 0, 1, 2$, линейные операторы в $H$, зависящие от $\tau_n$, $t_n$. Рассмотрим задачу Коши для операторно-разностного уравнения

$$\begin{gathered} B_2 y_{n+1} + B_1 y_n + B_0 y_{n-1} = \varphi, \\ y(0) = u_0, \quad y_t(0) = u_1, \\ n = 1, 2, \ldots, N-1, \end{gathered} \tag{1}$$

где $y = y_n = y(t_n) \in H$ – искомая функция, а $\varphi_n$, $u_0$, $u_1 \in H$ заданы. Будем использовать следующие безындексные обозначения для шагов сетки и сеточных функций:

$$\tau = \tau_n, \quad \tau_+ = \tau_{n+1},$$

$$\tau^* = 0.5(\tau_{n+1} + \tau_n), \quad \hat{y} = y_{n+1}, \quad \check{y} = y_{n-1}.$$

Для разностных производных положим

$$y_t = \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau_{n+1}}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau_n}, \quad y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{\tau_n + \tau_{n+1}},$$

$$y_{\bar{t}\hat{t}} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau^*}, \quad y_{\bar{t}t} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau_{n+1}}.$$

Получение общих критериев устойчивости базируется на использовании той или иной канонической формы для записи операторно-разностной схемы. При удачном выборе канонической

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва
Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск

формы критерии устойчивости записываются в наиболее простых и максимально удобных для практического использования операторных неравенствах.

Традиционная каноническая форма для трехслойной разностной схемы (1) имеет вид

$$\begin{gathered} Dy_{\bar{t}\hat{t}} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \quad t \in \hat{\omega}_\tau, \\ y(0) = u_0, \quad y_t(0) = u_1, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$A = B_0 + B_1 + B_2, \quad B = \tau^*(B_2 - B_0),$$

$$D = \frac{\tau_+\tau}{2}(B_2 + B_0),$$

$$B_2 = \frac{1}{\tau_+\tau^*}D + \frac{1}{2\tau^*}B,$$

$$B_1 = A - \left(\frac{1}{\tau_+\tau^*} + \frac{1}{\tau\tau^*}\right)D, \quad B_0 = \frac{1}{\tau\tau^*}D - \frac{1}{2\tau^*}B.$$

Каноническая форма (2) для трехслойной схемы (1) может непосредственно связываться с аппроксимацией эволюционного уравнения

$$D\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Au = f.$$

Эту запись удобно использовать при рассмотрении схемы (1) при $\tau_{n+1} \ge \tau_n$.

Мы будем также рассматривать трехслойную операторно-разностную схему (1) в виде

$$\begin{gathered} D\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau_n\tau_{n+1}} + B\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{\tau_n + \tau_{n+1}} + Ay_n = \varphi, \\ y(0) = u_0, \quad y_t(0) = u_1, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$A = B_0 + B_1 + B_2, \quad B = \tau^*(B_2 - B_0),$$

$$D = \frac{\tau_+\tau}{2}(B_2 + B_0), \quad B_2 = \frac{1}{\tau_+\tau}D + \frac{1}{2\tau^*}B,$$

$$B_1 = A - \frac{2}{\tau_+\tau}D, \quad B_0 = \frac{1}{\tau_+\tau}D - \frac{1}{2\tau^*}B.$$

Данная каноническая форма удобна при получении априорных оценок для случая $\tau_{n+1} \le \tau_n$.

2. Для простоты ограничимся исследованием устойчивости трехслойной операторно-разностной схемы (1) по начальным данным. На основе приводимых ниже априорных оценок можно [3, 4] получить основные априорные оценки устойчивости и по правой части.

Исследуем устойчивость схемы (1) по начальным данным в зависимости от соотношения шагов $\tau_{n+1}$ и $\tau_n$. При использовании сетки с увеличением шага по времени рассмотрим задачу Коши

$$Dy_{\bar{t}\hat{t}} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = 0, \quad t \in \hat{\omega}_\tau, \tag{4}$$

$$y(0) = u_0, \quad y_t(0) = u_1. \tag{5}$$

Для самосопряженного и неотрицательного оператора $R$ определим полунорму сеточной функции $u$:

$$\|u\|_R^2 = (Ru, u), \quad R = R^* \ge 0.$$

Непостоянный самосопряженный положительно-определенный оператор $R$ липшиц-непрерывен с постоянной $c_R > 0$, если

$$|((R_n - R_{n-1})u_n, u_n)| \le c_R\tau_n(R_{n-1}u_n, u_n). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть операторы схемы* (4), (5) *при*

$$\tau_{n+1} \ge \tau_n \tag{7}$$

*удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered} D_n = D(t_n) = D_n^* > 0, \\ B_n = B(t_n) > 0, \quad A_n = A(t_n) = A_n^* > 0, \end{gathered} \tag{8}$$

$$R_n = D_n - \frac{\tau_n\tau_{n+1}}{4}A_n \ge 0, \tag{9}$$

$$B \ge \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{4}A. \tag{10}$$

*Тогда решение задачи* (4), (5) *устойчиво по начальным данным и имеют место априорные оценки*:

$$\|y_{t,n}\|_R^2 + \|y_n^{(0.5)}\|_A^2 \le \|y_t(0)\|_R^2 + \|y_0^{(0.5)}\|_A^2, \tag{11}$$

*если операторы $R$, $A$ постоянные*;

$$\|y_{t,n}\|^2_{D - \frac{\tau_{n+1}^2}{4}A} + \|y_n^{(0.5)}\|_A^2 \le \|y_t(0)\|^2_{D - \frac{\tau_1^2}{4}A} + \|y_0^{(0.5)}\|_A^2, \tag{12}$$

*если операторы $D$, $A$ постоянные*;

$$\begin{gathered} \|y_{t,n}\|^2_{D_n - \frac{\tau_{n+1}^2}{4}A_n} + \|y_n^{(0.5)}\|_{A_n}^2 \le \\ \le M\left\{\|y_t(0)\|^2_{D_0 - \frac{\tau_1^2}{4}A_0} + \|y_0^{(0.5)}\|_{A_0}^2\right\}, \end{gathered} \tag{13}$$

*где $M = e^{c_0T}$, $c_0 = \max\{c_D, c_A\}$, если операторы $D$, $A$ липшиц-непрерывные.*

Для получения априорных оценок при $\tau_{n+1} \le \tau_n$ приведем разностную схему (4) к виду (3). Имеет место следующее представление:

$$D\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{\tau_n\tau_{n+1}}+$$
$$+\left(B-\frac{\tau_{n+1}-\tau_n}{\tau_{n+1}\tau_n}D\right)\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2\tau^*}+Ay_n = 0. \quad (14)$$

Теорема 2. *Пусть операторы* $D(t)$, $B(t)$, $A$ *удовлетворяют условиям*

$$D(t) = D^*(t)>0, \quad B(t)>0, \quad A = A^*>0,$$
$$R = D-\frac{\tau_n\tau_{n+1}}{4}A\geq 0$$

*и* $A$, $R$ *– постоянные операторы. Тогда при*

$$\tau_{n+1}\leq\tau_n \quad (15)$$

*операторно-разностная схема* (4) *устойчива по начальным данным и выполняется априорная оценка*

$$\|y_{t,n}\|_R^2+\|y_n^{(0.5)}\|_A^2\leq\left(\frac{\tau_1}{\tau_{n+1}}\right)^2\times$$
$$\times\{\|y_t(0)\|_R^2+\|y_0^{(0.5)}\|_A^2\}. \quad (16)$$

Доказательство основывается на использовании записи схемы в виде (14) и скалярном умножении на $\tau_n\tau_{n+1}(y_{n+1}-y_{n-1})$.

3. Объединим полученные результаты и сформулируем общую теорему о равномерной устойчивости трехслойных операторно-разностных схем. Рассмотрим наиболее сложный случай, когда принцип сгущения может меняться. Положим, что переход от одного закона сгущения к другому проходит $k$ раз в узлах $0<t_{m_1}<t_{m_2}<\ldots<t_{m_k}<T$.

Теорема 3. *Пусть операторы* $D(t)$, $B(t)$, $A$ *удовлетворяют условиям*

$$D(t) = D^*(t)>0, \quad A = A^*>0,$$
$$R = D-\frac{\tau_n\tau_{n+1}}{4}A\geq 0, \quad (17)$$

$$B\geq\max\left\{\frac{\tau_{n+1}-\tau_n}{4}A, 0\right\} \quad (18)$$

*и* $A$, $R$ *– постоянные операторы. Пусть временные шаги связаны соотношением*

$$c_0^{-1}\leq\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\leq c_0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1. \quad (19)$$

*Тогда решение задачи* (4), (5) *устойчиво по начальным данным и для произвольных* $\tau$ *выполняется априорная оценка*

$$\|y_n\|_{(1)}\leq c_0^k\|y_1\|_{(1)}, \quad \|y_n\|_{(1)}^2 = \|y_{t,n}\|_R^2+\|y_n^{(0.5)}\|_A^2,$$
$$\|y_1\|_{(1)}^2 = \|y_t(0)\|_R^2+\|y_0^{(0.5)}\|_A^2, \quad (20)$$

*где* $k$ *– конечное число изменений принципа сгущения сетки.*

4. Приведем иллюстративный пример исследования трехслойной схемы с весами на неравномерной сетке для эволюционного уравнения второго порядка. Рассмотрим схему с весами

$$y_{\bar{t}\hat{t}}+Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)} = 0, \quad y(0) = u_0, \quad y_t(0) = u_1,$$
$$y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1y_{n+1}+(1-\sigma_1-\sigma_2)y_n+\sigma_2y_{n-1}. \quad (21)$$

Схема (21) приводится к каноническому виду (2) при

$$D_n = E+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\tau_n\tau_{n+1}A,$$
$$B_n = (\sigma_1\tau_{n+1}-\sigma_2\tau_n)A =$$
$$= \left((\sigma_1-\sigma_2)\tau^*+(\sigma_1+\sigma_2)\frac{\tau_{n+1}-\tau_n}{2}\right)A,$$
$$A = A^*\neq A(t)>0.$$

Оператор

$$R = D-\frac{\tau_n\tau_{n+1}}{4}A = E+\frac{\tau_n\tau_{n+1}}{2}\left(\sigma_1+\sigma_2-\frac{1}{2}\right)A$$

будет постоянным при

$$\sigma_1+\sigma_2 = \frac{1}{2}.$$

Тогда оператор $B$ примет вид

$$B = \left((\sigma_1-\sigma_2)\tau^*+\frac{\tau_{n+1}-\tau_n}{4}\right)A.$$

Условие $B\geq\frac{\tau_{n+1}-\tau_n}{4}A$ при $\sigma_1+\sigma_2 = \frac{1}{2}$ будет выполнено, если $\sigma_1\geq\sigma_2\geq 0$.

Таким образом, при выполнении условий

$$\sigma_1+\sigma_2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_1\geq\sigma_2\geq 0 \quad (22)$$

схема с весами (21) устойчива по начальным данным и при любых $\tau$ верна априорная оценка

$$\|y_{t,n}\|^2+\|y_n^{(0.5)}\|_A^2\leq c_0^k\{\|y_t(0)\|^2+\|y_0^{(0.5)}\|_A^2\}, \quad (23)$$

где

$$c_0^{-1} \le \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}} \le c_0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

а $k$ – конечное число изменений принципа сгущения сетки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
3. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
4. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998.
5. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Гулин А.В.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 2. С. 152–187.
6. *Мокин Ю.И.* // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 3. С. 640–651.
7. *Diakonov E.G., Bokov A.G.* // Dokl. Bolgar AN. 1975. V. 28. № 2. P. 157–160.
8. *Bokov A.G.* // Godishn. Vissh. Uchebni Zabed. Prilozh. mat. 1976. V. 12. № 2. P. 87–96.