ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 376, № 4, с. 454–457

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

© 2001 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Ф. Лисбона

Поступило 06.10.2000 г.

Учет движения деформируемой пористой среды (скелета) при фильтрации жидкости важен во многих прикладных проблемах. Под фильтрационной консолидацией понимают взаимосвязанные процессы деформирования пористой среды и фильтрации насыщающей ее жидкости [1, 2].

Первые математические модели фильтрационной консолидации предложены в работе [3] в предположении о несжимаемости скелета и жидкости. В модели Био поведение системы пористая среда–жидкость описывается системой уравнений для неизвестного вектора перемещений скелета и давления жидкости. В настоящее время построены модели для описания фильтрационной консолидации в более общих условиях [4], например, рассматриваются задачи с нелинейным законом фильтрации насыщающей жидкости, проводится учет реологических свойств.

Исследованию проблем существования и единственности решения начально-краевой задачи для уравнений Био посвящена работа [5]. Вопросы корректности для нелинейных моделей фильтрационной консолидации обсуждаются, например, в статье [6]. Численные алгоритмы решения задач фильтрационной консолидации на основе конечноэлементных аппроксимаций рассматриваются для модели Био в работах [7, 8]. В [9] исследуются приближенные методы для более общих нелинейных задач фильтрационной консолидации несжимаемой жидкости.

В данной работе представлены вопросы построения разностных схем для численного решения задач фильтрационной консолидации с учетом сжимаемости жидкости, в частности модельная задача с постоянными коэффициентами в прямоугольной расчетной области. Рассмотрение базируется на использовании согласованных аппроксимаций операторов градиента и дивергенции. Получены априорные оценки разностного решения задачи и на их основе устанавливается сходимость двухслойной разностной схемы.

1. В качестве модельной возьмем двумерную задачу фильтрационной консолидации. Для точек ограниченной расчетной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ – вектор перемещений скелета, а p – давление жидкости.

Ограничимся простейшим случаем однородной среды с постоянными свойствами скелета и жидкости. Классическая модель Био основывается на предположении о несжимаемости скелета и фильтрующейся жидкости. Мы рассматриваем несколько более общую ситуацию с учетом сжимаемости жидкости. Нестационарный процесс фильтрационной консолидации при отмеченных условиях описывается (см., например, [2]) системой уравнений

$$-\mu\Delta\mathbf{v} - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} + \operatorname{grad}p = 0, \qquad (1)$$

$$a\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{v}) - \chi\Delta p = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad 0 < t \le T. \qquad (2)$$

Здесь λ и μ – коэффициенты Ламэ, $a = n_f\beta$, n_f – пористость, β – сжимаемость жидкости, $\chi = \dfrac{k}{\mu_f}$, k – проницаемость, а μ_f – вязкость жидкости. Источниковый член $f(\mathbf{x}, t)$ используется, например, для описания процессов нагнетания или откачки фильтрующей жидкости.

Граничные условия для уравнений (1), (2) возьмем в простейшем виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega, \qquad (3)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega. \qquad (4)$$

Принимая во внимание (2), зададим также начальные условия

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega, \qquad (5)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega. \qquad (6)$$

Условия (5), (6) позволяют найти начальное распределение перемещений $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$.

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва
Сарагосский университет, Испания

Из (1), (3) имеем краевую задачу

$$-\mu\Delta\mathbf{v}_0 - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}s + \operatorname{grad}p_0 = 0,$$

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega$$

для определения $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$.

2. Определим гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ со скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = \int\limits_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}.$$

Для двумерных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ зададим гильбертово пространство $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, в котором скалярное произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2).$$

Определим на множестве вектор-функций $\mathbf{v}$, равных нулю на $\partial\Omega$, оператор

$$\mathcal{A}\mathbf{v} = -\mu\Delta\mathbf{v} - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{7}$$

Оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен в $\mathcal{H}^2$. Кроме того, имеет место энергетическая эквивалентность оператора $\mathcal{A}$ и оператора

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

А именно, справедлива оценка

$$-\mu(\tilde{\Delta}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \le (\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \le -(\lambda+2\mu)(\tilde{\Delta}\mathbf{v}, \mathbf{v}). \tag{8}$$

С учетом этого $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \ge \mu\delta E$, где E – единичный (тождественный) оператор, а $\delta > 0$ – минимальное собственное значение оператора Лапласа.

Отмеченные свойства самосопряженности и положительной определенности оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathcal{H}^2$ отслеживаются при построении дискретных аналогов поставленной дифференциальной задачи (1)–(6).

Аналогично для функций, удовлетворяющих граничному условию (3), определим оператор $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}p = -\chi\Delta p. \tag{9}$$

В $\mathcal{H}$ оператор $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* \ge \chi\delta E$.

С учетом введенных обозначений дифференциальную задачу (1)–(6) запишем в виде системы уравнений

$$\mathcal{A}\mathbf{v} + \operatorname{grad}p = 0, \tag{10}$$

$$a\frac{dp}{dt} + \frac{d}{dt}(\operatorname{div}\mathbf{v}) + \mathcal{B}p = f, \tag{11}$$

дополненной начальными условиями.

Будем использовать обозначения

$$(u, y)_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}u, y), \quad \|u\|_{\mathcal{C}} = \sqrt{(u, u)_{\mathcal{C}}}$$

для $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* \ge \gamma E$, $\gamma > 0$. Принимая во внимание свойства самосопряженности и положительной определенности операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, нетрудно установить следующую априорную оценку для решения (10), (11):

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}}^2 + a\|p\|^2 \le$$

$$\le \|\mathbf{v}_0\|_{\mathcal{A}}^2 + a\|p_0\|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|f(\mathbf{x}, \theta)\|_{\mathcal{B}^{-1}}^2 d\theta, \tag{12}$$

которая обеспечивает устойчивость по начальным данным и правой части.

3. Построение разностных схем для решения краевой задачи (1)–(6) начнем с аппроксимации по пространству. Для того чтобы не осложнять изложение техническими деталями, будем рассматривать задачу в прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x}|\ \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$$

и использовать равномерную прямоугольную сетку с шагами h_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть ω – множество внутренних узлов сетки:

$$\omega = \{\mathbf{x}|\ \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1,$$
$$N_\alpha h_\alpha = l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\},$$

а $\partial\omega$ – множество граничных узлов. Разностное решение задачи (1)–(6) на момент времени t обозначим $\mathbf{v}_h(x, t)$, $p_h(x, t)$, $\mathbf{x}\in\omega\cup\partial\omega$, $0 < t \le T$.

В стандартных безындексных обозначениях теории разностных схем [10] для правой и левой разностных производных имеем

$$w_x = \frac{w(x+h) - w(x)}{h}, \quad w_{\bar{x}} = \frac{w(x) - w(x-h)}{h},$$

и поэтому, например, вторая разностная производная определяется выражением

$$w_{\bar{x}x} = \frac{1}{h}(w_x + w_{\bar{x}}) = \frac{w(x+h) - 2w(x) + w(x-h)}{h^2}.$$

Для сеточных функций, обращающихся в нуль на $\partial\omega$, определим гильбертово пространство $H = L_2(\omega)$, скалярное произведение и норму в котором введем соотношениями

$$(y, w) = \sum_{x\in\omega} ywh_1h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Для векторных сеточных функций $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ аналогично дифференциальному случаю положим $H^2 = H\oplus H$, так что

$$(\mathbf{y}, \mathbf{w}) = (y_1, w_1) + (y_2, w_2), \quad \|\mathbf{y}\| = (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}.$$

Если оператор $C = C^* > 0$, то через H_C обозначим пространство H, снабженное скалярным произведением $(y, w)_C = (Cy, w)$ и нормой $\|y\| = \sqrt{(Cy, y)}$.

Аппроксимируем дифференциальный оператор $\mathcal{A}$ разностным оператором

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

С использованием обычных аппроксимаций [10] для отдельных элементов операторной матрицы получим

$$A_{11}y = -\mu\Delta_h y - (\lambda+\mu)y_{\bar{x}_1 x_1},$$

$$A_{12}y = A_{21}y = -\frac{\lambda+\mu}{2}(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}),$$

$$A_{22}y = -\mu\Delta_h y - (\lambda+\mu)y_{\bar{x}_2 x_2}.$$

Здесь использована обычная пятиточечная аппроксимация оператора Лапласа:

$$\Delta_h y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}.$$

Для сеточных функций $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$, имеем

$$(A\mathbf{y}, \mathbf{w}) = (\mathbf{y}, A\mathbf{w}),$$

т.е. оператор A самосопряжен в H^2.

Кроме того, имеем

$$-\mu\tilde{\Delta}_h \le A \le -(\lambda+2\mu)\tilde{\Delta}_h, \qquad (14)$$

где

$$\tilde{\Delta}_h = \begin{pmatrix} \Delta_h & 0 \\ 0 & \Delta_h \end{pmatrix}.$$

Эта оценка полностью аналогична приведенной выше оценке (8) для дифференциального оператора $\mathcal{A}$.

На основании этого $A = A^* \ge \mu\delta_h E$, $\delta_h > 0$, и тем самым разностный оператор A обладает теми же основными свойствами самосопряженности и положительной определенности, что и дифференциальный оператор $\mathcal{A}$.

При аппроксимации оператора $\mathcal{B}$, определяемого согласно (9), получим

$$By = -\chi\Delta_h y, \qquad (15)$$

причем $B = B^* \ge \chi\delta_h E$.

После аппроксимации по пространству от (10), (11) придем к задаче Коши для системы дифференциально-разностных уравнений

$$A\mathbf{v}_h + \mathrm{grad}_h p_h = 0, \qquad (16)$$

$$a\frac{dp_h}{dt} + \frac{d}{dt}(\mathrm{div}_h \mathbf{v}_h) + Bp_h = f_h(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \omega. \qquad (17)$$

Аппроксимация операторов градиента и дивергенции заслуживает отдельного рассмотрения.

На множестве функций $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$, $x \in \partial\Omega$, имеет место равенство

$$(\mathbf{v}, \mathrm{grad}p) = -(p, \mathrm{div}\mathbf{v}),$$

т.е. оператор дивергенции совпадает с сопряженным к оператору градиента. Будем ориентироваться на такие аппроксимации операторов градиента и дивергенции, чтобы аналогичное свойство было выполнено на разностном уровне:

$$(\mathbf{v}_h, \mathrm{grad}_h p_h) = -(p_h, \mathrm{div}_h \mathbf{v}_h). \qquad (18)$$

Различные классы таких согласованных аппроксимаций операторов градиента и дивергенции широко используются при численном решении задач динамики вязкой несжимаемой жидкости (см., например, [11, 12]). Отметим некоторые основные возможности при использовании общей сетки для компонент вектора перемещений и давления.

Простейший вариант связан с использованием направленных разностей для аппроксимаций операторов градиента и дивергенции. Например, при использовании разностного оператора градиента

$$\mathrm{grad}_h y = \{y_{x_1}, y_{x_2}\}, \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

согласованная аппроксимация для оператора дивергенции имеет вид

$$\mathrm{div}_h \mathbf{w} = (w_1)_{\bar{x}_1} + (w_2)_{\bar{x}_2}, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Можно использовать аппроксимации второго порядка для градиента и дивергенции, когда

$$\mathrm{grad}_h y = \{y_{\mathring{x}_1}, y_{\mathring{x}_2}\},$$

$$\mathrm{div}_h \mathbf{w} = (w_1)_{\mathring{x}_1} + (w_2)_{\mathring{x}_2}, \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

на множестве сеточных функций $y(\mathbf{x}, t) = 0$, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$.

4. Построим простейшие разностные схемы для решения задачи Коши для системы (16), (17). Будем использовать равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$. Пусть $y^n(\mathbf{x}) = y(\mathbf{x}, t_n)$, где $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, N$, $N\tau = T$.

Рассмотрим двухслойную схему с весом σ:

$$A\mathbf{v}_h^{n+1} + \mathrm{grad}_h p_h^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \qquad (19)$$

$$a\frac{p_h^{n+1} - p_h^n}{\tau} + \frac{\mathrm{div}_h \mathbf{v}_h^{n+1} - \mathrm{div}_h \mathbf{v}_h^n}{\tau} +$$

$$+ B(\sigma p_h^{n+1} + (1-\sigma)p_h^n) = f_h(\mathbf{x}, \sigma t_{n+1} + (1-\sigma)t_n), \qquad (20)$$

$$n = 1, 2, \ldots, N, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

При стандартных ограничениях на вес σ устанавливается устойчивость разностной схемы (19), (20). Более точно имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *При* $\sigma \geq 0.5$ *для разностного решения системы* (19), (20) *справедлива априорная оценка*

$$\left\|\mathbf{v}_h^{n+1}\right\|_A^2 + a\left\|p_h^{n+1}\right\|^2 \leq \left\|\mathbf{v}_h^n\right\|_A^2 + a\left\|p_h^n\right\|^2 + \\ + \frac{\tau}{2}\left\|f_h(\mathbf{x}, \sigma t_{n+1} + (1-\sigma)t_n)\right\|_{B^{-1}}^2. \qquad (21)$$

Оценка (21) является разностным аналогом оценки (12) для решения дифференциальной задачи (1)–(6).

Для исследования скорости сходимости разностной схемы рассмотрим задачу для погрешности. Пусть

$$\delta\mathbf{v}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_n), \quad \delta p^n(\mathbf{x}) = p^n(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}, t_n), \\ \mathbf{x} \in \omega, \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

тогда из (19), (20) получим

$$A\delta\mathbf{v}_h^{n+1} + \mathrm{grad}_h \delta p_h^{n+1} = \psi_1^{n+1}(\mathbf{x}), \\ n = 0, 1, \ldots, N, \qquad (22)$$

$$a\frac{\delta p_h^{n+1} - \delta p_h^n}{\tau} + \frac{\mathrm{div}_h \delta\mathbf{v}_h^{n+1} - \mathrm{div}_h \delta\mathbf{v}_h^n}{\tau} + \\ + B(\sigma\delta p_h^{n+1} + (1-\sigma)\delta p_h^n) = \psi_2^{n+1}(\mathbf{x}), \qquad (23) \\ n = 1, 2, \ldots, N, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Для погрешности аппроксимации уравнения (1) на гладких решениях задачи имеем

$$\psi_1^{n+1}(\mathbf{x}) = -A\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \\ - \mathrm{grad}_h p(\mathbf{x}, t_{n+1}) = O(|h|^\alpha),$$

где $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ и $\alpha = 1$ при использовании аппроксимаций операторов градиента и дивергенции направленными разностями и $\alpha = 2$ – центральными разностями.

Для погрешности аппроксимации уравнения (2) получим

$$\psi_2^{n+1}(\mathbf{x}) = O(\tau^\nu + |h|^\alpha),$$

где $\nu = 2$ при $\sigma = 0.5$ и $\nu = 1$ при $\sigma \neq 0.5$.

Теорема 2. *При* $\sigma \geq 0.5$ *разностное решение задачи Коши для системы уравнений* (19), (20) *сходится к достаточно гладкому решению задачи* (1)–(6) *со скоростью* $O(\tau^\nu + |h|^\alpha)$.

Доказательство основывается на получении для решения разностной задачи (22), (23) оценки, которая аналогична (21). Причем разностное решение $\mathbf{v}_h$ в H_A^2, а p_h в H. Аналогично исследуются разностные схемы для приближенного решения задач фильтрационной консолидации в более общий случай неоднородной среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984.
2. *Bear J., Bachmat Y.* Introduction to Modeling Phenomena of Transport in Porous Media. Dordrecht: Kluwer, 1991.
3. *Biot M.A.* // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. P. 1482–1499.
4. *Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. Казань, 1990.
5. *Ženišek A.* // Apl. mat. 1984. V. 29. P. 194–210.
6. *Даутов Р.З., Дроботенко М.И., Ляшко А.Д.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. С. 515–521.
7. *Murad M.A., Loula A.F.D.* // Intern. J. Numer. Methods Engrg. 1994. V. 37. P. 645–667.
8. *Yokoo Y., Yamagata K., Nagaoka H.* // Soils and Foundations. 1971. V. 11. P. 29–46.
9. *Дроботенко М.И., Ляшко А.Д.* // Изв. вузов. Математика. 1992. № 3(358). С. 3–6.
10. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
11. *Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г.* // Мат. моделирование. 1996. Т. 8. № 7. С. 81–108.
12. *Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г.* // Там же. 1997. Т. 9. № 4. С. 85–114.