ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2001, том 41, № 3, с. 407–419

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1)]

© 2001 г. В. И. Мажукин*, Д. А. Малафей**, П. П. Матус**, А. А. Самарский*

*(*125047 Москва, Миусская пл., 4а, ИММ РАН;*

***220072 Минск, ул. Сурганова, 11, ИМ НАН Беларуси)*

Поступила в редакцию 16.03.2000 г.
Переработанный вариант 05.09.2000 г.

Предлагаются новые разностные схемы второго порядка аппроксимации на неравномерных сетках с использованием стандартных шаблонов для стационарных и нестационарных задач с переменными коэффициентами. Для рассматриваемых в работе схем выполняется принцип максимума без ограничений на отношения коэффициентов и шагов пространственной сетки (безусловная монотонность для стационарных уравнений). Для многомерных задач построены экономичные схемы векторно-аддитивного типа. Проведенные в работе вычислительные эксперименты свидетельствуют о повышенной точности новых алгоритмов на грубых сетках по сравнению с известными схемами второго порядка точности, но первого порядка аппроксимации.

ВВЕДЕНИЕ

Повышение порядка точности метода без увеличения стандартного шаблона разностных схем всегда было актуальной задачей математической физики. Многочисленные примеры построения таких вычислительных методов четвертого порядка аппроксимации по пространственной переменной в случае равномерной сетки узлов для одномерных и многомерных уравнений математической физики можно найти в монографии [1]. При переходе от равномерной сетки к неравномерной порядок локальной погрешности аппроксимации обычно понижается. В работах [2]–[6] указывается на возможность повышения точности метода за счет аппроксимации исходного дифференциального уравнения не в узлах расчетной сетки, а в некоторых промежуточных точках. К сожалению, полученные в этих работах результаты в общем случае не обобщаются на дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

В настоящей работе предлагаются новые алгоритмы повышенного порядка аппроксимации на неравномерных сетках с использованием стандартных шаблонов для стационарных и нестационарных задач с непостоянными (в том числе нелинейными) коэффициентами. Несомненными достоинствами предложенных разностных схем являются: достаточная простота алгоритма при их машинной реализации, безусловная монотонность в стационарном случае (выполнение принципа максимума без ограничений на соотношения между пространственными шагами и величинами переменных коэффициентов), вырождение в случае равномерной сетки узлов в известную консервативную разностную схему.

В отличие от работы [7] здесь предлагаются экономичные устойчивые разностные схемы второго порядка локальной аппроксимации на неравномерных прямоугольных сетках для параболического уравнения произвольной размерности и с переменными коэффициентами. С помощью установленного принципа максимума для производных [8], [9] доказывается устойчивость решения новых вычислительных методов векторно-аддитивного типа в норме C. Проведенные в работе численные эксперименты позволяют выделить еще одно – и главное с вычислительной точки зрения – преимущество исследуемых в работе алгоритмов. Они значительно точнее схем первого порядка аппроксимации (порядок точности может быть один и тот же) именно на "грубых" пространственно-временных сетках. Это позволяет численно решить задачу с заданной степенью точности за меньшее расчетное время.

В работе получены соответствующие априорные оценки разностного решения, выражающие устойчивость по начальным данным и правой части. Доказана сходимость предложенных

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 01-00604).

алгоритмов к решению исходной дифференциальной задачи со вторым порядком. Теоретические исследования базируются на общей теории операторно-разностных схем [1], [10].

1. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим простейшую дифференциальную задачу

$$Lu = (k(x)u')' - d(x)u = -f(x), \quad 0 < x < l, \tag{1.1}$$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2, \quad 0 < k_1 \le k(x) \le k_2, \quad d(x) \ge d_1 > 0. \tag{1.2}$$

При построении монотонных схем второго порядка точности на трехточечном шаблоне с использованием произвольной неравномерной сетки $\hat{\bar{\omega}}_h = \hat{\omega}_h \cup \gamma_h$, $\hat{\omega}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1\}$, $\gamma_h = \{x_0 = 0, x_N = l\}$ будем ориентироваться на соотношение [2], [3]

$$u_{\bar{x}\hat{x},i} - u''(\bar{x}_i) = O(\hbar^2), \quad \bar{x}_i = x_i - \tilde{h}_i, \quad \tilde{h}_i = (h_{i+1} - h_i)/3. \tag{1.3}$$

Здесь используются стандартные обозначения из [1]: $u_{\bar{x}\hat{x}} = (u_x - u_{\bar{x}})/\hbar$, $u_x = (u_+ - u)/h_+$, $u_{\bar{x}} = (u - u_-)/h$, $\hbar = 0.5(h + h_+)$, $h = h_i$, $h_+ = h_{i+1}$, $v_\pm = v_{i\pm1} = v(x_{i\pm1})$, $v = v_i$. Выражение (1.3) означает, что относительно нерасчетной точки $\bar{x}_i$ (в случае равномерной сетки $\bar{x}_i \equiv x_i$) $u_{\bar{x}\hat{x}}$ аппроксимирует вторую производную со вторым порядком. Для построения аналогичных методов для уравнения (1.1) будем использовать тождество $(ku')' = 0.5((ku)'' + ku'' - k''u)$. Заменим на сетке $\hat{\omega}_h$ дифференциальный оператор L разностным L_h:

$$L_h u = 0.5[(ku)_{\bar{x}\hat{x}} + k_{(\beta_1,\beta_2)}u_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\bar{x}\hat{x}}u_{(\beta_3,\beta_4)}] - \bar{d}u_{(\beta_5,\beta_6)}, \tag{1.4}$$

где $\bar{d} = d(\bar{x})$, $v_{(\beta_k,\beta_{k+1})} = \beta_{ki}v_{i+1} + (1 - \beta_{ki} - \beta_{k+1,i})v_i + \beta_{k+1,i}v_{i-1}$, а переменные по пространству весовые множители определяются следующим образом:

$$\begin{gathered}\beta_1 = 0.5(|\tilde{h}| + \tilde{h})/h_+, \quad \beta_2 = 0.5(|\tilde{h}| - \tilde{h})/h, \quad \beta_3 = 0.5(\tilde{h}k_{\bar{x}\hat{x}} - |\tilde{h}k_{\bar{x}\hat{x}}|)/(h_+k_{\bar{x}\hat{x}}),\\ \beta_4 = -0.5(\tilde{h}k_{\bar{x}\hat{x}} + |\tilde{h}k_{\bar{x}\hat{x}}|)/(hk_{\bar{x}\hat{x}}), \quad \beta_5 = 0.5(\tilde{h} - |\tilde{h}|)/h_+, \quad \beta_6 = -0.5(|\tilde{h}| + \tilde{h})/h.\end{gathered} \tag{1.5}$$

В силу (1.3), (1.5),

$$(ku)_{\bar{x}\hat{x}} - (ku)''(\bar{x}) = O(\hbar^2), \quad v_{(\beta_k,\beta_{k+1})} - v(\bar{x}) = O(\hbar^2), \quad k = 1, 3, 5. \tag{1.6}$$

Следовательно, разностная схема

$$L_h y = -\varphi, \quad \varphi = f(\bar{x}), \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2 \tag{1.7}$$

аппроксимирует дифференциальную задачу (1.1), (1.2) со вторым порядком на произвольной неравномерной сетке. Несомненным достоинством схемы (1.7) является тот факт, что в случае равномерной сетки ($h_+ = h$) она вырождается в известную консервативную схему (см. [1]) $(ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_iy_i = -f(x_i)$, $a_i = 0.5(k_{i-1} + k_i)$, $y_0 = \mu_1$, $y_N = \mu_2$. Схема (1.7) может быть записана в каноническом виде (см. [1])

$$A_iy_{i-1} - C_iy_i + B_iy_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2 \tag{1.8}$$

с коэффициентами

$$\begin{gathered}A_i = 0.5[(k_{(\beta_1,\beta_2)} + k_{i-1})/(\hbar_ih_i) - \beta_{4i}k_{\bar{x}\hat{x},i}] - \beta_{6i}\bar{d}_i,\\ B_i = 0.5[(k_{(\beta_1,\beta_2)} + k_{i+1})/(\hbar_ih_{i+1}) - \beta_{3i}k_{\bar{x}\hat{x},i}] - \beta_{5i}\bar{d}_i, \quad C_i = \bar{d}_i + A_i + B_i, \quad F_i = f(\bar{x}_i).\end{gathered} \tag{1.9}$$

В дальнейшем будем использовать следующие сеточные нормы:

$$\|\cdot\|_C = \max_{1\le i\le N-1}|\cdot|, \quad \|\cdot\|_{\bar{C}} = \max_{0\le i\le N}|\cdot|, \quad \|\cdot\|_{C_\gamma} = \max_{i=\overline{0,N}}|\cdot|.$$

Для исследования устойчивости одновременно по граничным условиям и правой части (особенно в нестационарном случае) более удобной является

Лемма 1. *Пусть выполнены условия*

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{1.10}$$

Тогда для решения задачи (1.8) *справедлива оценка*

$$\|y\|_{\bar{C}} \le \max\{\|y\|_{C_\gamma}, \|F/D\|_C\}. \tag{1.11}$$

Выполнение условий (1.10) для коэффициентов (1.9) обеспечивается выбором пространственных весов в виде (1.5), которые адаптируются под сетку и коэффициент задачи. Например, подробно распишем веса $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ (тривиальные случаи $\tilde{h} = 0$ и $k_{\bar{x}\hat{x}} = 0$ мы не рассматриваем):

$$\beta_1 = \begin{cases} \tilde{h}/h_+, & \tilde{h} > 0, \\ 0, & \tilde{h} < 0, \end{cases} \qquad \beta_2 = \begin{cases} 0, & \tilde{h} > 0, \\ -\tilde{h}/h, & \tilde{h} < 0, \end{cases}$$

$$\beta_3 = \begin{cases} 0, & \tilde{h}k_{\bar{x}\hat{x}} > 0, \\ \tilde{h}/h_+, & \tilde{h}k_{\bar{x}\hat{x}} < 0, \end{cases} \qquad \beta_4 = \begin{cases} -\tilde{h}/h, & \tilde{h}k_{\bar{x}\hat{x}} > 0, \\ 0, & \tilde{h}k_{\bar{x}\hat{x}} < 0. \end{cases}$$

Выражения $k_{(\beta_1, \beta_2)}, -\beta_3 k_{\bar{x}\hat{x}}$ при $\tilde{h} > 0$, $k_{\bar{x}\hat{x}} < 0$ преобразуются к виду

$$k_{(\beta_1, \beta_2)} = \frac{\tilde{h}}{h_+}k_+ + \left(1 - \frac{\tilde{h}}{h_+}\right)k = \frac{\tilde{h}}{h_+}k_+ + \frac{2h_+ + h}{3h_+}k > 0,$$

$$-\beta_3 k_{\bar{x}\hat{x}} = -\frac{\tilde{h}}{h_+}k_{\bar{x}\hat{x}} > 0.$$

Аналогично рассматриваются и все остальные случаи.

Таким образом, при произвольном сгущении неравномерной сетки коэффициенты (1.9) разностной схемы (1.7) удовлетворяют условиям (1.10) (безусловная монотонность). Следовательно, разностная схема (1.7) устойчива по правой части, граничным условиям и для ее решения имеет место априорная оценка (1.11). Подставляя $y = z + u$ в уравнение (1.7), получаем задачу для погрешности метода:

$$L_h z = -\psi, \quad \psi = (L_h u + \varphi) - (Lu + f)(\bar{x}), \quad z|_{\gamma_h} = 0. \tag{1.12}$$

В соответствии с формулами (1.4), (1.6), погрешность аппроксимации $\psi = O(h^2)$, $h = \max\limits_{1 \le i \le N} h_i$. Так как для задачи (1.12) выполнены все условия принципа максимума (1.10), то из оценки (1.11) находим, что $\|z\|_{\bar{C}} \le \|\psi\|_C \le ch^2$, т.е. разностная схема (1.7) сходится к точному решению со вторым порядком.

2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В прямоугольнике $\bar{D} = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ ищется непрерывное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t).$$

Наряду с ранее введенной произвольной неравномерной пространственной сеткой $\hat{\bar{\omega}}_h$ будем рассматривать равномерную сетку по временной переменной $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \ldots, N_0, \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}$. Так как точка $\bar{x}_i = x_i + \tilde{h}_i$ не является в общем случае расчетной, то на основании разложения (1.6) заключаем, что

$$u_{t(\beta_1, \beta_2)} - \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, t) = O(\hbar^2 + \tau), \quad \bar{x} \in \hat{\omega}_h, \quad t \in \omega_\tau. \tag{2.1}$$

Используем формулы (1.4), (2.1) для построения на обычном шеститочечном шаблоне монотонной разностной схемы второго порядка аппроксимации на неравномерной сетке $\omega = \hat{\omega}_h \times \omega_\tau$:

$$y_{t(\beta_1,\beta_2)} = 0.5[(k\hat{y})_{\bar{x}\hat{x}} + k_{(\beta_1,\beta_2)}\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\bar{x}\hat{x}}\hat{y}_{(\beta_3,\beta_4)}] + \varphi, \tag{2.2}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad u_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}). \tag{2.3}$$

Здесь $v_t = (\hat{v} - v)/\tau$, $\hat{v} = v(x_i, t_{n+1})$, $\varphi = f(\bar{x}, \hat{t})$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < k_1 \le k(x) \le k_2$,

$$\tau > \|h_+^2 - h^2\|_C/(6k_1). \tag{2.4}$$

Тогда решение разностной задачи (2.2), (2.3) *устойчиво по начальным данным, граничным условиям, правой части и при любом* $t_n \in \omega_\tau$ *справедлива априорная оценка*

$$\|y(t_{n+1})\|_{\bar{C}} \le \max\left\{\|y_0\|_{\bar{C}}, \max_{1\le k\le n+1}\|y(t_k)\|_{C_\gamma}\right\} + \sum_{k=0}^{n}\tau\|\varphi(t_k)\|_C. \tag{2.5}$$

Доказательство. Схему (2.2) запишем в каноническом виде (1.8):

$$A_i y_{i-1}^{n+1} - C_i y_i^{n+1} + B_i y_{i+1}^{n+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}),$$

где

$$A_i = -\beta_{2i} + 0.5\tau[(k_{(\beta_1,\beta_2)} + k_{i-1})/(\hbar_i h_i) - \beta_{4i}k_{\bar{x}\hat{x},i}],$$

$$B_i = -\beta_{1i} + 0.5\tau[(k_{(\beta_1,\beta_2)} + k_{i+1})/(\hbar_i h_{i+1}) - \beta_{3i}k_{\bar{x}\hat{x},i}], \quad C_i = 1 + A_i + B_i, \quad F_i = y_{(\beta_1,\beta_2)} + \tau\varphi.$$

Проверим выполнение условий (1.10). По сравнению с рассмотренным выше стационарным случаем, в выражениях для коэффициентов A и B появились дополнительные слагаемые $-\beta_2$ и $-\beta_1$. Рассмотрим случай $\tilde{h} < 0$, при котором $\beta_1 = 0$, $-\beta_2 = \tilde{h}/h$. Отбрасывая в выражении для A положительное слагаемое с $k_{\bar{x}\hat{x}}$, получаем

$$A > \frac{\tilde{h}}{h} + 0.5\tau\frac{(1+\tilde{h}/h)k - \tilde{h}k_-/h + k_-}{\hbar h} = \frac{\tilde{h}}{h} + 0.5\tau\frac{(1+\tilde{h}/h)k + (1-\tilde{h}/h)k_-}{\hbar h}.$$

Так как $|\tilde{h}/h| < 1$, то $A > (h_+ - h)/(3h) + 2\tau k_1/[h(h + h_+)]$. Из последнего неравенства следует, что $A_i > 0$ при $\tau > |h_{i+1}^2 - h_i^2|/(6k_1)$. Коэффициент B рассматривается аналогично. Таким образом, неравенство (2.4) гарантирует выполнение условия положительности коэффициентов (1.10) и на основании леммы 1 заключаем, что $\|y^{n+1}\|_{\bar{C}} \le \max\{\|y^{n+1}\|_{C_\gamma}, \|F\|_C\}$. Так как переменные весовые множители $\beta_1, \beta_2 \ge 0$ неотрицательны, то $\|F\|_C \le \|y^n\|_{\bar{C}} + \tau\|\varphi^n\|_C$. Подставляя данную оценку в последнее неравенство, находим цепочку соотношений

$$\|y^{n+1}\|_{\bar{C}} \le \max\{\|y^{n+1}\|_{C_\gamma}, \|y^n\|_{\bar{C}} + \tau\|\varphi^n\|_C\} \le$$

$$\le \max\{\|y^{n+1}\|_{C_\gamma}, \|y^n\|_{C_\gamma} + \tau\|\varphi^n\|_C, \|y^{n-1}\|_C + \tau(\|\varphi^{n-1}\|_C + \|\varphi^n\|_C)\} \le \ldots$$

$$\ldots \le \max\left\{\max_{1\le k\le n+1}\{\|y^k\|_{C_\gamma}\} + \sum_{k=0}^{n}\tau\|\varphi^k\|_C, \|y^0\|_{\bar{C}} + \sum_{k=0}^{n}\tau\|\varphi^k\|_C\right\}.$$

Из данного неравенства и следует требуемое соотношение. Теорема доказана.

Замечание 1. Если сетка по пространству равномерна ($h_+ = h$), то разностная схема (2.2) преобразуется в известную чисто неявную схему

$$y_t = (a\hat{y}_{\bar{x}})_x + \varphi, \quad a = 0.5(k + k_-), \tag{2.6}$$

для которой априорная оценка устойчивости (2.5) уже выполнена без ограничений (2.4) на соотношения между шагами сетки τ и h (безусловная устойчивость).

3. МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Чтобы избавиться от ограничений (2.4), воспользуемся общей теорией операторно-разностных схем [1], [5]. Вместо (2.2) рассмотрим более общую схему с постоянным по времени весом σ:

$$y_{(\beta_1,\beta_2)t} = (ay_{\bar{x}}^{(s)})_{\hat{x}} + 0.5[(h_+\beta_1 k_x - h\beta_2 k_{\bar{x}})y_{\bar{x}\hat{x}} + (h_+\beta_3 y_x - h\beta_4 y_{\bar{x}})k_{\bar{x}\hat{x}}] + \varphi, \quad a = 0.5(k + k_-). \tag{3.1}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (однородные граничные условия):

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0. \tag{3.2}$$

При записи данной разностной схемы мы использовали тождество $v_{(\beta_1,\beta_2)} = v + h_+\beta_1 v_x - h\beta_2 v_{\bar{x}}$. Для простоты дальнейших выкладок также предположим, что $h_+ \geq h$ (сетка сгущается к началу координат) и $k_{\bar{x}\hat{x}} \geq 0$ для всех $x \in \hat{\omega}_h$. Тогда разностное уравнение (3.1) можно переписать в виде

$$Dy_t + A_1 y^{(\sigma)} + A_2 y = \varphi, \quad \varphi = f^{(\sigma)}(\bar{x}, t), \tag{3.3}$$

где $v^{(\sigma)} = \sigma v(t+\tau) + (1-\sigma)v(t) = \sigma\hat{v} + (1-\sigma)v$, а операторы D, A_1, A_2 при $i = 1, 2, \ldots, N-1$ определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} D = E + A_0, \quad (A_0 y)_i = \tilde{h}_i y_{x,i}, \quad \tilde{h} = (h_+ - h)/3, \\ (A_1 y)_i = -(ay_{\bar{x}})_{\hat{x},i}, \quad (A_2 y)_i = -\tilde{h}_i(k_{x,i}y_{x,i} - 2k_{x,i}y_{\bar{x},i} + k_{\bar{x},i}y_{\bar{x},i})/(2\hbar_i). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Пусть $\overset{\circ}{\Omega}_h$ – множество сеточных функций, заданных при каждом $t \in \omega_\tau$ на $\hat{\bar{\omega}}_h$ и равных нулю на границе. Определим вектор $y = y(t) = [y_1(t), \ldots, y_{N-1}(t)]^{\mathrm{T}}$ и линейное пространство $H = \overset{\circ}{\Omega}_h$ как множество таких векторов со скалярным произведением $(u, v) = \Sigma_{i=1}^{N-1} u_i v_i \hbar_i$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Так как $A_1 = A_1^* > 0$, то через H_{A_1} обозначим гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства H и снабженное скалярным произведением и нормой $\|y\|_{A_1}^2 = (A_1 y, y) = (a, y_{\bar{x}}^2] = \Sigma_{i=1}^{N-1} a_i y_{\bar{x},i}^2 h_i$. Тогда разностная схема (3.2), (3.3) может быть записана в каноническом виде двухслойных операторно-разностных схем (см. [1]):

$$By_t = Ay = \varphi, \quad y_0 = u_0, \tag{3.5}$$

$$B = D + \sigma\tau A_1, \quad A = A_1 + A_2, \quad A_1 = A_1^* > 0. \tag{3.6}$$

В дальнейшем нам понадобятся (см. [5], [10]) следующие леммы.

Лемма 2 (см. [4], [5, с. 348]). *При произвольных соотношениях на сеточные шаги и $h_+ \geq h$ имеет место операторное неравенство $D \geq (1/3)E$.*

Лемма 3. *Пусть в операторно-разностной схеме* (3.5), (3.6) *постоянный оператор $A = A_1 + A_2$, $A_1 = A_1^* > 0$ и оператор A_2 подчинен A_1 в следующем смысле:*

$$\|A_2 y\|^2 \leq \delta\|y\|_{A_1}^2, \quad \delta = \mathrm{const} > 0. \tag{3.7}$$

Тогда при

$$B(t) \geq \varepsilon E + 0.5\tau A_1, \quad \varepsilon > 0 - \textit{произвольная константа}, \tag{3.8}$$

разностная схема ρ-устойчива в H_{A_1} и имеет место априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A_1}^2 \leq M\left(\|y_0\|_{A_1}^2 + 0.5\varepsilon^{-1}\sum_{k=0}^{n}\tau\|\varphi_k\|^2\right), \tag{3.9}$$

где постоянная $M = e^{m_\varepsilon t_{n+1}}$, $m_\varepsilon = \delta/(2\varepsilon)$.

Доказательство. С учетом тождества $y = y^{(0.5)} - 0.5\tau y_t$ уравнение (3.5) запишем в виде $(B - 0.5\tau A_1)y_t + A_1 y^{(0.5)} = \varphi - A_2 y$. Умножим его скалярно в H на $2\tau y_t$:

$$2\tau((B - 0.5\tau A_1)y_t, y_t) + \|y_{n+1}\|_{A_1}^2 = \|y_n\|_{A_1}^2 + 2\tau(\varphi - A_2 y, y_t). \tag{3.10}$$

Применяя неравенство Коши с ε, находим оценку $2\tau(\varphi - A_2 y, y_t) \le \tau\varepsilon\|y_t\|^2 + 0.5\tau\varepsilon^{-1}(\|\varphi\|^2 + \|A_2 y\|^2)$. Учитывая данное неравенство в (3.10), условия (3.7) и (3.8), получаем оценку

$$\|y_{n+1}\|_{A_1}^2 \le (1 + \tau m_\varepsilon)\|y_n\|_{A_1}^2 + 0.5\varepsilon^{-1}\tau\|\varphi_n\|^2 \le e^{\tau m_\varepsilon}(\|y_n\|_{A_1}^2 + 0.5\varepsilon^{-1}\tau\|\varphi_n\|^2).$$

Отсюда и следует требуемое неравенство (3.9). Лемма доказана. Отметим, что подобная оценка для несамосопряженного оператора A установлена в [10, с. 185].

Следующая лемма устанавливает подчиненность операторов A_1, A_2, определенных формулами (3.4).

Лемма 4. *Пусть в разностной схеме* (3.3) *будет* $h_+/h \le c_1$, $|k'| \le c_2$. *Тогда неравенство* (3.7) *выполнено с постоянной* $\delta = 2c_2^2(1 + c_1)/k_1$.

Доказательство. Так как, по условию леммы,

$$|k_{\bar x}| \le h^{-1}\int_{x_-}^{x} |k'(\xi)|\,d\xi \le c_2,$$

то для нормы $\|A_2 y\|$ справедлива оценка

$$\|A_2 y\|^2 \le 2c_2^2(\|y_x\|^2 + \|y_{\bar x}^2\|). \tag{3.11}$$

Используя вложение (см. [5, с. 174]) $|[y_{\bar x}]|^2 \le k_1^{-1}\|y\|_{A_1}^2$ и неравенства $\|y_x\|^2 \le \Sigma_{i=1}^N h_i y_{\bar x, i}^2 \le k_1^{-1}\|y\|_{A_1}^2$, $\|y_{\bar x}\|^2 \le c_1 k_1^{-1}\|y\|_{A_1}^2$, из (3.11) получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

Приведенные выше вспомогательные результаты позволяют сформулировать следующий основной результат данного раздела.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм* 2, 4. *Тогда при* $\sigma \ge 0.5$, $0 < \varepsilon \le 1/3$ *разностная схема устойчива по начальным данным, правой части и для ее решения справедлива априорная оценка* (3.9).

Доказательство. Проверим выполнение условия (3.8). В силу предположений теоремы, $B - (\varepsilon E + 0.5\tau A) = (1/3 - \varepsilon)E + (\sigma - 0.5)\tau A_1 \ge 0$. Следовательно, оценка (3.9) выполнена. Теорема доказана.

Замечание 2. Укажем на принципиальную возможность построения на неравномерной сетке с использованием трехточечного шаблона разностных схем третьего порядка точности. Для простоты положим $k(x) \equiv 1$. Тогда при $\sigma_1 = -2(h + 2h_+)(h_+ - h)/(9\hbar h)$, $\sigma_2 = (2h + h_+)(h_+ - h)/(9\hbar h_+)$, $\delta = (h^2 + hh_+ + h_+^2)/36$ разностная схема

$$y_{(\sigma_1, \sigma_2)} + \delta y_{t\bar x\hat x} = y_{\bar x\hat x}^{(0.5)} + \varphi, \quad \varphi = f(\bar x, \bar t) + \delta f_{\bar x\hat x}, \quad \bar t = t_{n+1/2}, \tag{3.12}$$

аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\hbar^3 + \tau^2)$. Любопытно отметить, что в случае равномерной сетки схема (3.12) преобразуется в известную (см. [1]):

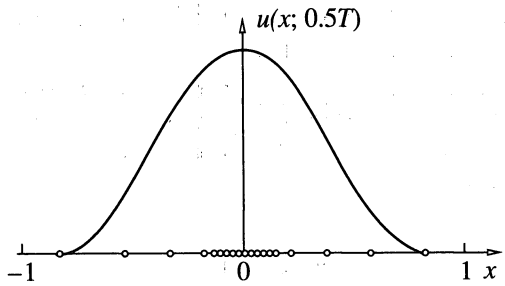
$$y_t = y_{\bar x x}^{(\sigma_0)} + \varphi, \quad \sigma_0 = 0.5 - h^2/(12\tau),$$

с порядком аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$.

4. НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u), \quad -l < x < l, \quad 0 < t \le T,\\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(-l, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t).\end{gathered} \tag{4.1}$$



Фиг. 1.

Соответствующая разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственной переменной имеет вид

$$y_{t(\beta_1,\beta_2)} = 0.5[(k(\hat{y})\hat{y})_{\bar{x}\hat{x}} + k_{(\beta_1,\beta_2)}(\hat{y})\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\bar{x}\hat{x}}(\hat{y})\hat{y}_{(\beta_3,\beta_4)}] + \varphi(\hat{y}), \tag{4.2}$$

где $\varphi = f(\hat{\bar{y}})$, $\bar{y}_i = (y_{i-1} + y_i + y_{i+1})/3$. Для демонстрации эффективности предложенных алгоритмов было проведено сравнение расчетов S-режима процесса горения с обострением (см. [11, с. 174]) по схеме (4.2) и нелинейному аналогу известной консервативной схемы (2.6) второго порядка точности, но первого порядка аппроксимации:

$$y_t = (a(\hat{y})\hat{y}_{\bar{x}})_{\hat{x}} + f(\hat{y}), \quad a_i = [k(y_i) + k(y_{i-1})]/2. \tag{4.3}$$

Для решения нелинейных разностных уравнений (4.2) и (4.3) применялся итерационный процесс, который для (4.2) записывается следующим образом:

$$\frac{\overset{s+1}{\hat{y}}_{(\beta_1,\beta_2)} - y_{(\beta_1,\beta_2)}}{\tau} = 0.5[(k(\overset{s}{\hat{y}})\overset{s+1}{\hat{y}})_{\bar{x}\hat{x}} + k_{(\beta_1,\beta_2)}(\overset{s}{\hat{y}})\overset{s+1}{\hat{y}}_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\bar{x}\hat{x}}(\overset{s}{\hat{y}})\overset{s+1}{\hat{y}}_{(\beta_3,\beta_4)}] + \varphi(\overset{s}{\hat{y}}).$$

где s – номер итерации, $s = 0, 1, 2, \ldots$. В случае S-режима горения $k(u) = u^\sigma$, $f(u) = u^{\sigma+1}$, $\sigma > 0$, а существующее в области $R \times (0, T_0)$ автомодельное решение имеет вид

$$u(x,t) = \begin{cases} (T_0 - t)^{-1/\sigma}\left(\dfrac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\cos^2\dfrac{\pi x}{L_S}\right)^{1/\sigma}, & |x| < L_S/2, \\ 0, \quad |x| \ge L_S/2. \end{cases}$$

Для проведения расчетов было выбрано $\sigma = 1$, $T_0 = 3$, $L_S = 8.886$, $-0.6L_S \le x \le 0.6L_S$, $0 \le t \le T_0/3$. Эксперимент проводился на сетках из табл. 1, в которой приведены соответствующие значения погрешностей вычислений

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C = \max_{(x,t)\in\omega} |y(x,t) - u(x,t)|.$$

На фиг. 1 показана исходная пространственная неравномерная сетка, покрывающая график точного решения задачи (4.1) при $t = T/2$. Увеличение узлов сетки осуществлялось делением каждого

Таблица 1

N	$h_{\max}$	$\tau = 0.1$		$\tau = 0.01$		$\tau = 0.001$	
		схема (4.2)	схема (4.3)	схема (4.2)	схема (4.3)	схема (4.2)	схема (4.3)
20	1.814	0.01	0.033	0.008	0.016	0.01	0.011
40	1.06	0.013	0.017	0.004	0.006	0.005	0.005
80	0.54	0.014	0.015	0.0014	0.0024	0.0014	0.0014
160	0.27	0.014	0.015	0.0011	0.0016	0.0005	0.0005
320	0.14	0.015	0.015	0.0013	0.0014	0.00017	0.00036

отрезка на два близко к середине по закону $x_{2i} = (0.375 + r)x_{i+1} + (0.625 - r)x_i$, где $r \in [0, 0.25)$ – нормально распределенная случайная величина.

Вычислительный эксперимент демонстрирует повышенную точность новой схемы на грубых сетках как по пространству, так и по времени. Примечательно, что на самой мелкой сетке погрешность схемы (4.2) в два раза меньше, чем у схемы (4.3), более точный расчет по которой требует меньшего временного шага τ.

5. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим краевую задачу для уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{5.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{5.2}$$

Используя стандартные обозначения $y = y^n$, $\hat{y} = y^{n+1}$, $\check{y} = y^{n-1}$, $y_t = (\hat{y} - y)/\tau$, $y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau$, $y_{\bar{t}t} = (y_t - y_{\bar{t}})/\tau$, $v^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{v} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)v + \sigma_2 \check{v}$, по аналогии с (3.1), (3.3) на сетке $\hat{\bar{\omega}}_h \times \bar{\omega}_\tau$ для задачи (5.1), (5.2) построим следующую схему второго порядка аппроксимации по пространственной переменной:

$$y_{\bar{t}t} + [(h^2/6)y_{\bar{t}t\bar{x}}]_{\hat{x}} + A_1 y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi - A_2 y, \tag{5.3}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad \hat{y}_0 = \hat{y}_N = 0, \tag{5.4}$$

где $\varphi = f^{(\sigma_1, \sigma_2)}(\bar{x}, t)$, $t \in \omega_\tau$, $\tilde{u}_0(x)$ выбирается так, чтобы погрешность аппроксимации второго начального условия была величиной $O(\tau^2)$, операторы A_1, A_2 определены соотношениями (3.4). При $k(x) = \text{const}$ схема (5.3) совпадает с предложенной в [3]. Так как на достаточно гладких функциях $u_{\bar{t}t} + [(h_2/6)u_{\bar{t}t\bar{x}}]_{\hat{x}} = u_{\bar{t}t} + [(h_+ - h)/3]u_{\bar{t}tx} + (h^2/6)u_{\bar{t}t\bar{x}\hat{x}} = \partial^2 u(\bar{x}, t)/\partial t^2 + (h^2/6)u_{\bar{t}t\bar{x}\hat{x}} + O(\hbar^2 + \tau^2)$, то $u_{\bar{t}t} + [(h^2/6)u_{\bar{t}t\bar{x}}]_{\hat{x}, i} - \partial^2 u(\bar{x}_i, t_n)/\partial t^2 = O(\hbar_i^2 + \tau^2)$. Используя тождество $v^{(\sigma_1, \sigma_2)} = v + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)v_{\mathring{t}} + 0.5\tau^2(\sigma_1 + \sigma_2)v_{\bar{t}t}$, формулы (1.3), (1.6), (2.1), заключаем, что имеет место соотношение $(A_1 u^{(\sigma_1, \sigma_2)} + A_2 u) - (\partial/\partial x)(k(\bar{x})\partial u(\bar{x}, t)/\partial x) = O(\hbar^2 + \tau)$. Следовательно, разностная схема (5.3), (5.4) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу со вторым порядком по пространственной переменной. Для получения соответствующих априорных оценок запишем схему в каноническом виде трехслойных операторно-разностных схем [1], [5], [10]:

$$Dy_{\bar{t}t} + By_{\mathring{t}} + A_1 y = \varphi_1, \quad \varphi_1 - \varphi - A_2 y, \tag{5.5}$$

где $D = E + A_0 + 0.5\tau^2(\sigma_1 + \sigma_2)A_1$, $A_0 y = [h^2/6)y_{\bar{x}}]_{\hat{x}}$, $B = \tau(\sigma_1 - \sigma_2)A_1$.

Лемма 5. *Пусть в операторно-разностной схеме* (5.5) *будет* $A_1 = A_1^* > 0$, $D = D^* > 0$, $B \ge 0$, $D \ge 0.25(1 + \varepsilon)\tau^2 A_1$, $D^{-1} \le E$, $\varepsilon = \text{const} > 0$. *Тогда схема устойчива по начальным данным, правой части, а для ее решения при произвольном* $\varepsilon > 0$ *имеет место априорная оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{A_1} \le M\left(\|y(0)\|_{A_1} + \|y_y(0)\|_D + \sum_{k=1}^{n} \tau\|\varphi_1(t_k)\|\right), \quad M = \sqrt{\varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon)}. \tag{5.6}$$

Лемма 6 (см. [1]). *Пусть* $g_n \ge 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \ge 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ – *неотрицательные функции. Если* f_n – *неубывающая функция* $(f_{n+1} \ge f_n)$, *то из неравенства* $g_{n+1} \le c_0 \Sigma_{k=1}^n \tau g_k + f_n$ $(n = 1, 2, \ldots$ $\ldots, g_1 \le f_0$, $c_0 = \text{const} > 0)$ *следует оценка* $g_{n+1} \le \exp(c_0 t_n) f_n$.

Используя леммы 5, 6 и условие подчиненности операторов (3.7) с константой $\delta = 2c_2^2(1 + c_1)/k_1$ (см. лемму 4), доказываем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть в разностной схеме* (5.3), (5.4) *будет* $\sigma_1 \ge \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \ge 0.5(1+\varepsilon) + h_{\max}^2/(3\tau^2 k_1)$, $h_+ \ge h$, $0 < k_1 \le k(x) \le k_2$, $|k'| \le c_2$, $h_+/h \le c_1$, $h_{\max} = \max\limits_{1 \le i \le N} h_i$. *Тогда для решения разностной задачи имеет место априорная оценка* (5.6) *с константой* $M = \sqrt{n_\varepsilon}\exp(\sqrt{\delta n_\varepsilon}\, t_n)$, $n_\varepsilon = (1+\varepsilon)/\varepsilon$.

Доказательство. Проверим выполнение условий леммы 5. Так как $\|y_{\bar{x}}\| \le k_1^{-1}\|y\|_{A_1}$, то $A_0 \ge -(h_{\max}^2/(6k_1))A_1$. Следовательно, $D - 0.25(1+\varepsilon)\tau^2 A_1 \ge E + 0.5\tau^2[(\sigma_1+\sigma_2) - h_{\max}^2/(3\tau^2 k_1) - 0.5(1+$ $+\varepsilon)]A_1 \ge 0$, $B \ge 0$, $A_1 = A_1^* > 0$, $D = D^* > 0$, $D^{-1} \le E$ при выполнении условий теоремы. На основании априорной оценки (5.6) заключаем, что $\|y_{n+1}\|_{A_1} \le \sqrt{n_\varepsilon}(\|y(0)\|_{A_1} + \|y_t(0)\|_D + \Sigma_{k=1}^n \tau\|\varphi_1(t_k)\|)$. Так как из неравенства треугольника и условия подчиненности операторов (3.7) следует оценка $\|\varphi_{1k}\| \le \|\varphi_k - A_2 y_k\| \le \|\varphi_k\| + \sqrt{\delta}\,\|y_k\|_{A_1}$, то

$$\|y_{n+1}\|_{A_1} \le \sqrt{n_\varepsilon}\left(\|y_0\|_{A_1} + \|y_{t,0}\|_D + \sum_{k=1}^{n}\tau\|\varphi_k\|\right) + \sqrt{\delta n_\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\tau\|y_k\|_{A_1}.$$

Усиливая последнее неравенство при помощи леммы 6, приходим к утверждению теоремы.

Недостатком рассмотренной выше схемы (5.3) является тот факт, что на равномерной сетке она не вырождается в классическую разностную схему для волнового уравнения. Кроме того, устойчивость чисто неявной схемы ($\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$), согласно условиям теоремы 3, имеет место при ограничении $\tau \ge \sqrt{2/(3k_1)}\,h$, обратном условию Куранта. Однако при приведении схемы (5.3) к каноническому виду оператор D остается самосопряженным, а в случае постоянных коэффициентов соответствующая разностная схема обладает консервативностью [2]. Ниже приводится еще один класс недивергентных схем, аппроксимирующих волновое уравнение (5.1) на произвольной неравномерной пространственной сетке с порядком $O(\hbar^2 + \tau)$:

$$y_{\bar{t}t} + ((h_+ - h)/3)y_{\bar{t}t\bar{x}} = (a y_{\bar{x}}^{(\sigma_1,\sigma_2)})_{\hat{x}} + 0.5[(h_+\beta_1 k_x - h\beta_2 k_{\bar{x}})y_{\bar{x}\hat{x}} + (h_+\beta_3 y_x - h\beta_4 y_{\bar{x}})k_{\bar{x}\hat{x}}] + \varphi. \tag{5.7}$$

Исследуем устойчивость данной разностной схемы. Лишь для наглядности рассуждений предположим, что $k(x) = 1$, $h_+ \ge h$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, $\varphi = 0$. Тогда схема (5.7) принимает простой вид:

$$y_{\bar{t}t} + [(h_+ - h)/3]y_{\bar{t}t\bar{x}} = \hat{y}_{\bar{x}\hat{x}}. \tag{5.8}$$

Теорема 4. *При сделанных выше предположениях и при* $\tau \ge \|h_+ - h\|_C/3$ *разностная схема устойчива по начальным данным и имеет место оценка* $\|y_{\bar{x}\hat{x}}^n\| \le \|u_{0\bar{x}\hat{x}}\| + \|\tilde{u}_{0\bar{x}}\|$.

Доказательство. К сожалению, мы не можем воспользоваться общей теорией операторно-разностных схем, так как оператор D (см. каноническую форму (5.5)) является несамосопряженным. Умножим уравнение (5.8) скалярно на $-2\tau y_{t\bar{x}\hat{x}}$. Получим энергетическое тождество

$$\|y_{\bar{t}x}^{n+1}\|^2 + \|y_{\bar{x}\hat{x}}^{n+1}\|^2 + \tau^2(\|y_{\bar{t}t\bar{x}}\|^2 + \|y_{t\bar{x}\hat{x}}\|^2) = \|y_{\bar{t}\bar{x}}^n\|^2 + \|y_{\bar{x}\hat{x}}^n\|^2 + 2\tau(\tilde{h}y_{\bar{t}t\bar{x}}, y_{t\bar{x}\hat{x}}). \tag{5.9}$$

С учетом предположений $h_+ \ge h$, $\tilde{h} \le \tau$ применим к последнему слагаемому неравенство Коши с ε : $2\tau(\tilde{h}y_{\bar{t}t\bar{x}}, y_{t\bar{x}\hat{x}}) \le \tau^2\|y_{\bar{t}\bar{x}\hat{x}}\|^2 + \|\tilde{h}\|_C^2\|y_{\bar{t}t\bar{x}}\|^2 \le \tau^2(\|y_{\bar{t}\bar{x}\hat{x}}\|^2 + \|y_{\bar{t}t\bar{x}}\|^2)$. Подставляя данное неравенство в (5.9), приходим к требуемому результату. Теорема доказана.

6. МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Пусть в области $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \cup [0, T]$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Omega = \{0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$, требуется найти непрерывную функцию $u(x, t)$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, удовлетворяющую начально-краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T,$$
$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad 0 < k_1 \le k_\alpha \le k_2, \tag{6.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad u(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma. \tag{6.2}$$

В $\overline{\Omega}$ введем произвольную прямоугольную, неравномерную по каждому направлению сетку

$$\hat{\overline{\omega}}_h = \{x = (x_1^{i_1}, \ldots, x_p^{i_p}), x_\alpha^{i_\alpha} = x_\alpha^{i_\alpha - 1} + h_\alpha^{i_\alpha}, i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, x_\alpha^0 = 0, x_\alpha^{N_\alpha} = l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Через $\hat{\omega}_h$ обозначим множество внутренних узлов сетки $\hat{\overline{\omega}}_h$ и γ_h – множество граничных узлов. Пространственно-временная сетка в области $\overline{Q}_T$ вводится стандартным образом:

$$\overline{\omega} = \hat{\overline{\omega}}_h \times \overline{\omega}_\tau, \quad \overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \ldots, N_0, \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}.$$

Далее будем использовать безындексные обозначения для координат ($x_\alpha = x_\alpha^{i_\alpha}$, $x_{\alpha\pm} = x_\alpha^{i_\alpha \pm 1}$) и для сеточных функций ($v = v_{i_1, \ldots, i_p} = v(x_1^{i_1}, \ldots, x_p^{i_p}, t_n)$, $v^{\pm 1\alpha} = v_{i_1, \ldots, i_\alpha \pm 1, \ldots, i_p}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$). Введем в рассмотрение сеточные функции $y_\alpha = y_\alpha(x^\alpha, t)$, $k_\alpha = k_\alpha(x^\alpha, t)$, которые будем вычислять в узлах

$$(x^\alpha, t) = (\bar{x}_1^{i_1}, \ldots, \bar{x}_{\alpha-1}^{i_\alpha - 1}, x_\alpha^{i_\alpha}, \bar{x}_{\alpha+1}^{i_\alpha + 1}, \bar{x}_p^{i_p}, t_n), \quad \bar{x}_\alpha = x_\alpha + \tilde{h}_\alpha, \quad \tilde{h}_\alpha = (h_{\alpha+} - h_\alpha)/3.$$

Тогда разностная схема второго порядка локальной аппроксимации, основанная на использовании векторно-аддитивных схем [8], [12] и переменных весов по пространству [9], будет иметь вид

$$y_{(\beta_{1l}, \beta_{2l})t} = \sum_{\alpha=1}^{l} \hat{\Lambda}_\alpha \hat{y}_\alpha + \sum_{\alpha=l+1}^{p} \Lambda_\alpha y_\alpha + \varphi, \quad \varphi = f(\bar{x}, \hat{t}), \quad l = 1, 2, \ldots, p,$$
$$\Lambda_\alpha u_\alpha = 0.5[(k_\alpha u_\alpha)_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} + k_{\alpha(\beta_{1\alpha}, \beta_{2\alpha})} u_{\alpha \bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} - k_{\alpha \bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} u_{\alpha(\beta_{3\alpha}, \beta_{4\alpha})}], \tag{6.3}$$

$$y_l(x^l, 0) = u_0(x^l) = u_{0l}, \quad \hat{y}_l|_{\gamma_h} = \mu(x^l, t) = \mu_l, \quad x^l \in \gamma_h, \quad l = 1, 2, \ldots, p. \tag{6.4}$$

Здесь

$$v_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = (v_{x_\alpha} - v_{\bar{x}_\alpha})/\hbar_\alpha, \quad \hbar_\alpha = 0.5(h_{\alpha+} + h_\alpha), \quad v_{x_\alpha} = (v^{+1_\alpha} - v)/h_{\alpha+}, \quad v_{\bar{x}_\alpha} = (v - v^{-1_\alpha})/h_\alpha,$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p), \quad v_{(\beta_{jl}, \beta_{(j+1)l})} = \beta_{jl} y_l^{+1_l} + (1 - \beta_{jl} - \beta_{(j+1)l}) y_l + \beta_{(j+1)l} y_l^{-1_l}, \quad j = 1, 3,$$

$$\beta_{1l} = 0.5(\tilde{h}_l + |\tilde{h}_l|)/h_{l+}, \quad \beta_{2l} = 0.5(|\tilde{h}_l| - \tilde{h}_l)/h_l,$$

$$\beta_{3l} = 0.5(\tilde{h}_l k_{l\bar{x}_l \hat{x}_l} - |\tilde{h}_l k_{l\bar{x}_l \hat{x}_l}|)/(k_{l\bar{x}_l \hat{x}_l} h_{l+}), \quad \beta_{4l} = -0.5(\tilde{h}_l k_{l\bar{x}_l \hat{x}_l} + |\tilde{h}_l k_{l\bar{x}_l \hat{x}_l}|)/(k_{l\bar{x}_l \hat{x}_l} h_l).$$

Разностная система уравнений (6.3), (6.4) решается последовательно одномерными прогонками, начиная с $l = 1$. В результате реализации получаем p значений решения в точках (x^α, t), $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Отметим, что в случае равномерной сетки схема (6.3) вырождается в многокомпонентную схему переменных направлений [13], [14], а в случае постоянных коэффициентов совпадает с рассмотренной в [9]. Используя разложение в ряд Тейлора

$$u(x^\alpha, t) = u(x, t) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne \alpha}}^{p} \tilde{h}_l \frac{\partial u(x^\alpha, t)}{\partial x_l} + O(|h|^2), \quad |h|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2, \quad h_\alpha = \max_{1 \le i_\alpha \le N_\alpha} h_\alpha^{i_\alpha},$$

приближенное решение в расчетной точке $(x, t) \in \omega$ можно найти по следующей формуле второ-

го порядка аппроксимации:

$$y(x, t) = y_\alpha(x^\alpha, t) - 0.5 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq \alpha}}^{p} [(\tilde{h}_l + |\tilde{h}_l|) y_{\alpha x_l} + (\tilde{h}_l - |\tilde{h}_l|) y_{\alpha \bar{x}_l}]. \tag{6.5}$$

Перейдем к получению оценок решения разностной задачи (6.3), (6.4) в норме C. Аналогично одномерному случаю определим сеточные нормы

$$\|\cdot\|_C = \max_{x \in \hat{\omega}_h} |\cdot|, \quad \|\cdot\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \hat{\bar{\omega}}_h} |\cdot|, \quad \|\cdot\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |\cdot|.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены такие условия:*

$$k_\alpha = k_\alpha(x^\alpha) \text{ не зависит от } t, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad \tau > \|h_{\alpha+}^2 - h_\alpha^2\|_C / (6k_1). \tag{6.6}$$

Тогда разностная схема (6.3), (6.4) *устойчива по начальным данным, правой части и граничным условиям, а для ее решения при любых* $l = 1, 2, \ldots, p$, $t \in \omega_\tau$ *справедлива оценка*

$$\|y_l\|_{\bar{C}} \le \|u_{0l}\|_{\bar{C}} + t\left(\max\left\{\|\mu\|_{C_t}, \left\|\sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u_{0\alpha} + \varphi(0)\right\|_C\right\} + \sum_{t'=\tau}^{t-\tau} \tau \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_C\right),$$

где

$$\|\mu\|_{C_t} = \max_{0 \le t' \le t-\tau} \left\{\max_{1 \le l \le p} \|\mu_{lt}(t')\|_{C_\gamma}\right\}, \quad l = 1, 2, \ldots, p.$$

Доказательство. Используя представление $\hat{y} = y + \tau y_t$, формулу (6.3) при $l = 1$ можно записать в виде $y_{(\beta_{11}, \beta_{21})t} = \tau \Lambda_1 y_{1t} + \Sigma_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y_\alpha + \varphi$. Учитывая, что $\Sigma_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y_\alpha = y_{(\beta_{1p}, \beta_{2p})\bar{t}} + \check{\varphi}$, последнее выражение преобразуем к виду

$$y_{(\beta_{11}, \beta_{21})t} = \tau \Lambda_1 y_{1t} + y_{(\beta_{1p}, \beta_{2p})\bar{t}} + \tau \varphi_{\bar{t}}. \tag{6.7}$$

Аналогично, для $l > 1$ можно получить

$$y_{(\beta_{1l}, \beta_{2l})\bar{t}} = \tau \Lambda_l y_{l\bar{t}} + y_{(\beta_{1(l-1)}, \beta_{2(l-1)})\bar{t}}, \quad l = 2, 3, \ldots, p. \tag{6.8}$$

В силу неравенства (6.6), для задач $y_{(\beta_{1l}, \beta_{2l})t} = \tau \Lambda_l y_{lt} + \Phi$, $y_{lt,0} = y_{lt,N_l} = \mu_{lt}$, $l = 1, 2, \ldots, p$, выполнены условия принципа максимума (1.10) относительно сеточной функции $y_{l\bar{t}}$. Следовательно, на основании неравенства $\|y_{(\beta_{1l}, \beta_{2l})t}\|_C \le \|y_{lt}\|_C$ и леммы 1, из (6.7), (6.8) следуют оценки

$$\|y_{1t}(t)\|_{\bar{C}} \le \max\{\|\mu_{1t}(t)\|_{C_\gamma}, \|y_{p\bar{t}}(t)\|_{\bar{C}} + \tau \|\varphi_{\bar{t}}(t)\|_C\},$$

$$\|y_{p\bar{t}}\|_{\bar{C}} \le \max\{\|\mu_{p\bar{t}}\|_{C_\gamma}, \|y_{(p-1)\bar{t}}\|_{\bar{C}}\} \le \ldots \le \max\left\{\max_{2 \le l \le p} \|\mu_{l\bar{t}}\|_{C_\gamma}, \|y_{1\bar{t}}\|_{\bar{C}}\right\}.$$

Отсюда находим, что

$$\|y_{1t}\|_{\bar{C}} \le \max\left\{\|\mu_{1t}\|_{C_\gamma}, \max_{2 \le l \le p} \|\mu_{l\bar{t}}\|_{C_\gamma}, \|y_{1\bar{t}}\|_{\bar{C}}\right\} + \tau \|\varphi_{\bar{t}}(t)\|_C \le \ldots$$

$$\ldots \le \max\left\{\max_{\tau \le t' \le t} \|\mu_{1t}(t')\|_{C_\gamma}, \max_{0 \le t' \le t-\tau} \left\{\max_{2 \le l \le p} \|\mu_{lt}(t')\|_{C_\gamma}\right\}, \left\|\sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u_{0\alpha} + \varphi(0)\right\|_C\right\} + \sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_C.$$

Подставляя последнее неравенство в очевидную оценку $\|\hat{y}\|_{\bar{C}} \le \|y\|_{\bar{C}} + \tau \|y_t\|_{\bar{C}}$, приходим к утверждению теоремы.

Замечания. 3. В случае равномерной по пространству сетки разностная схема имеет вид [14]

$$y_t + \sum_{\alpha=1}^{l} A_\alpha \hat{y}_\alpha + \sum_{\alpha=l+1}^{p} A_\alpha y_\alpha = \varphi, \quad \varphi = f(x, \hat{t}), \quad y_\alpha = y_\alpha(x, t), \quad l = 1, 2, \ldots, p, \tag{6.9}$$

$$A_\alpha u_\alpha = -(a_\alpha u_{\alpha\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}, \quad a_\alpha = 0.5(k_\alpha + k_\alpha^{-1_\alpha}), \quad k_\alpha = k_\alpha(x, t),$$

$$y_l(x, 0) = u_0(x), \quad \hat{y}_l|_{\gamma_h} = \mu(x, t), \quad x \in \gamma_h, \quad l = 1, 2, \ldots, p. \tag{6.10}$$

Для такой схемы на равномерной сетке утверждение теоремы 5 справедливо без ограничений на шаги τ и h.

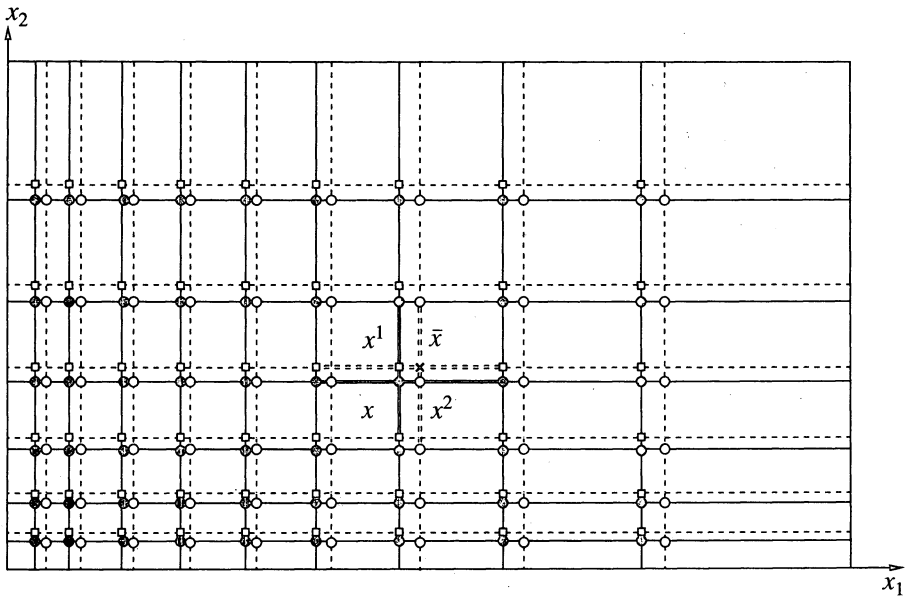
4. Применяя по аналогии с одномерным случаем метод энергетических неравенств, можно доказать устойчивость схемы (6.3) в пространстве W_2^1 без ограничений (6.6).

7. РАСЧЕТ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Для тестирования предложенной схемы был произведен расчет задачи (6.1), (6.2) при $p = 2$, $k_l(x) = (x_l + \gamma_l)^{p_l}$, $l = 1, 2, \ldots, p$, с точным решением

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{p} (x_l + \alpha_l)^{n_l} + \varepsilon(t + \beta)^m. \tag{7.1}$$

Правая часть $f(x, t)$ определяется в соответствии с методом пробных функций [1] непосредственной подстановкой в исходное уравнение его решения $u(x, t)$ и коэффициентов $k_l(x)$. Вычисления проводились в параллелепипеде единичного объема: $T = 1$, $l_\alpha = 1$, $\alpha = 1, 2$. Так как функция (7.1) резко возрастает в окрестности точки $x = (x_1, \ldots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \ldots, x_p)$ при $\alpha_l \ll 1$, $n_l < 0$, то по каждому направлению l исходная неравномерная сетка сгущается к началу отрезка по закону геометрической прогрессии (гармонические сетки): $h_+ = qh$ с $q = 1.5$. Дробление сетки осуществлялось аналогично эксперименту из разд. 5. При расчете задачи (6.1), (6.2), (7.1) было выбрано $\alpha_l = 0.1$, $n_l = -1$, $\gamma_l = 1$, $p_l = 1$, $l = 1, 2$, $m = 2$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 10^{-15}$. Для сравнения эта же задача была численно решена по схеме первого порядка аппроксимации (6.9), (6.10). В табл. 2 приведены результаты вычислений (см. разд. 5). Фиг. 2 иллюстрирует реализацию экономичной схемы (6.3) в двумер-



Фиг. 2.

Таблица 2

N	$h_{\max}$	$\tau = 0.1$		$\tau = 0.01$		$\tau = 0.001$	
		схема (6.3)	схема (6.9)	схема (6.3)	схема (6.9)	схема (6.3)	схема (6.9)
10	0.384	1.55	2.318	0.491	0.69	0.431	0.405
20	0.214	0.547	1.557	0.142	0.376	0.13	0.13
40	0.13	0.15	0.626	0.04	0.135	0.036	0.045
80	0.056	0.064	0.588	0.013	0.115	0.01	0.02
160	0.034	0.021	0.4	0.004	0.077	0.0026	0.006

ном случае. Здесь используются следующие обозначения: ⊙ – для $x = (x_1, x_2)$, × – для $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, □ – для $x' = (x_1, \bar{x}_2)$, ○ – для $x^2 = (\bar{x}_1, x_2)$. Схема аппроксимирует исходное уравнение со вторым порядком относительно точки $\bar{x}$. Значения сеточных функций $y_{1,2}$ вычисляются в точках $(x^{1,2}, t)$. Для определения величины разностного решения в узловой точке x затем применяется формула (6.5).

Отметим, что второй порядок сходимости по пространственной переменной схемы (6.3) наблюдается уже при $\tau = 0.1$, в то время как схемы (6.9) – лишь при значениях $\tau = 0.001$. Это обстоятельство дает весьма существенный выигрыш во времени расчета, необходимом для достижения заданной точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. *Полевиков В.К.* О применении адаптивных сеток при расчете свободной поверхности в задачах статики магнитной жидкости // Дифференц. ур-ния. 1994. Т. 30. № 12. С. 2146–2152.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы повышенного порядка точности на неравномерных сетках // Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 2. С. 265–274.
4. *Самарский А.А., Мажукин В.И., Матус П.П.* Разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного параболического уравнения // Дифференц. ур-ния. 1998. Т. 34. № 77. С. 980–987.
5. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. Минск: ЗАО ЦОТЖ, 1998.
6. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы второго порядка точности на неравномерных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 3. С. 413–424.
7. *Самарский А.А., Мажукин В.И., Малафей Д.А., Матус П.П.* Повышение точности разностных схем на неравномерных по пространству сетках // Докл. РАН. 1999. Т. 367. № 3. С. 310–313.
8. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Устойчивость векторных аддитивных схем // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 6. С. 746–748.
9. *Зыль А.Н., Матус П.П.* Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерных параболических уравнений на неравномерных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 7. С. 1151–1157.
10. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
11. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
12. *Вабищевич П.Н.* Векторные аддитивные схемы для эволюционных уравнений первого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 3. С. 44–51.
13. *Абрашин В.Н., Якубеня А.Н.* Экономичные схемы с явным выделением фронта для многомерных задач со свободными границами. I // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. № 6. С. 1055–1066.
14. *Абрашин В.Н.* Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики. I // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. № 2. С. 314–323.