МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **13** номер **2** год **2001**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© *А.А.Самарский, В.И.Мажукин, П.П.Матус, Г.И.Шишкин*

Институт математического моделирования РАН
Институт математики НАН Беларуси
Институт математики и механики УрО РАН

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 98-01-00362) и РФФИ-БФФИ (код проекта 00-01-81065 Бел2000а)

Для эллиптических и параболических уравнений произвольной размерности со знакопеременными коэффициентами при смешанных производных построены монотонные разностные схемы второго порядка локальной аппроксимации, удовлетворяющие принципу максимума. Получены априорные оценки устойчивости в норме C без соотношений на шаги сетки τ и h_α, $\alpha=1,2,\dots,p$ (безусловная устойчивость).

MONOTONE DIFFERENCE SCHEMES FOR EQUATIONS WITH MIXED DERIVATIVES

A.A.Samarskii, V.I.Mazhukin, P.P.Matus, G.I.Shishkin

Institute of Mathematical Modeling of RAS
Institute of Mathematics of NAS of Belarus
Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of RAS

There are considered elliptic and parabolic equations of arbitrary dimension with alternating coefficients at mixed derivatives. For such equations monotone difference schemes of the second order of local approximation are constructed. Schemes suggested satisfy the principle of maximum. A priori estimates of stability in the norm C without limitation on the grid steps τ and h_α, $\alpha=1,2,\dots,p$ are obtained (unconditional stability).

1. Введение

При численном решении задач математической физики особое внимание уделяется построению монотонных разностных схем с сохранением второго порядка локальной аппроксимации [1–2], которые хорошо зарекомендовали себя в вычислительной практике. Такие алгоритмы в настоящее время построены для эллиптических и параболических уравнений (без смешанных производных) с наличием младших производных. При построении монотонных разностных схем желательно сохранить второй порядок аппроксимации. Например, в работах [3–4] для линейного уравнения переноса строятся нелинейные разностные схемы второго порядка локальной аппроксимации по пространственной переменной.

В настоящей работе на основе комбинации двух известных разностных схем второго порядка аппроксимации [1] строятся схемы, удовлетворяющие принципу масимума для многомерных эллиптических и параболических уравнений со смешанными производными. Для этих алгоритмов получены априорные оценки устойчивости в сильной норме C. Отметим, что уравнения со смешанными производными возникают при рассмотрении вычислительных методов для классических уравнений (Лапласа, Пуассона и др.) на произвольных неортогональных сетках. Вследствие этого полученные результаты могут быть применены к построению эффективных вычислительных методов на адаптивных сетках. Кроме того, они могут послужить теоретической основой для обоснования вопросов устойчивости и сходимости хорошо известного метода динамической адаптации [5].

2. Разностные схемы для уравнений со знакопостоянными коэффициентами

В прямоугольнике $\bar{G} = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$ с границей Γ рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения, содержащего смешанные производные,

$$Lu - q(x)u = -f(x),\ x \in G,\ u = \mu(x),\ x \in \Gamma,\ x = (x_1, x_2),\ q(x) \ge c_0 > 0, \tag{2.1}$$

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} L_{\alpha\beta}u, \quad L_{\alpha\beta}u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right). \tag{2.2}$$

Предполагаются выполненными следующие условия эллиптичности:

$$c_1\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2 \le \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \le c_2\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2, \quad x \in G, \tag{2.3}$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – постоянные, а $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ – любой вектор. Из (2.3) в частности следует, что

$$0 < c_1 \le k_{\alpha\alpha} \le c_2, \quad \alpha = 1,2, \quad k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} \ge c_1^2.$$

В прямоугольнике $\bar{G}$ построим равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, $\omega_h = \{x_i = \left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right)$, $i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha - 1$, $x_\alpha^{(0)} = 0$, $x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha$, $\alpha = 1,2\}$ с постоянными шагами $h_1 = x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)}$, $h_2 = x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)}$, γ_h – множество граничных узлов. На сетке ω_h введем сеточные операторы

$$\Lambda_{\alpha\alpha}y = (a_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \left(a_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}(y^{(+1_\alpha)} - y) - a_{\alpha\alpha}(y - y^{(-1_\alpha)})\right)/h_\alpha^2,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{-}y = 0,5\left((k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}\right), \quad \alpha,\beta = 1,2, \quad \alpha \ne \beta,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{+}y = 0,5\left((k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}\right), \quad \alpha,\beta = 1,2, \quad \alpha \ne \beta,$$

$$a_{\alpha\alpha} = 0,5\left(k_{\alpha\alpha}(x_\alpha, x_{3-\alpha}) + k_{\alpha\alpha}(x_\alpha - h_\alpha, x_{3-\alpha})\right), \quad v^{(\pm 1_\alpha)} = v(x_\alpha \pm h_\alpha, x_{3-\alpha}).$$

В вычислительной практике при аппроксимации уравнения (2.1) используются следующие разностные схемы второго порядка локальной аппроксимации [1]

$$\Lambda^{-}y - dy = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{2.4}$$

$$\Lambda^{+}y - dy = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{2.5}$$

где $\Lambda^{-} = \Lambda_{11} + \Lambda_{12}^{-} + \Lambda_{21}^{-} + \Lambda_{22}$, $\Lambda^{+} = \Lambda_{11} + \Lambda_{12}^{+} + \Lambda_{21}^{+} + \Lambda_{22}$, $d \ge c_0$, φ — некоторые шаблонные функционалы соответственно от q и f [1].

Для получения априорных оценок устойчивости по правой части и граничным условиям используем принцип максимума. Для этого разностные схемы (2.4), (2.5) следует привести к каноническому виду (см. [1, с. 242])

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{2.6}$$

и проверить следующие достаточные условия на коэффициенты

$$A(x) > 0, \quad B(x,\xi) \geq 0, \quad D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) > 0, \quad x \in \omega_h. \tag{2.7}$$

Здесь $Ш'(x) = Ш(x)\setminus\{x\}$, $Ш(x)$ — шаблон схемы. На рис. 1–2 приведены шаблоны схем (2.4), (2.5) соответственно:

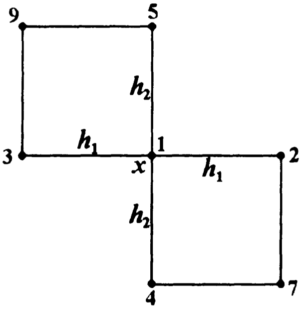

Рис. 1. Шаблон схемы (2.4).

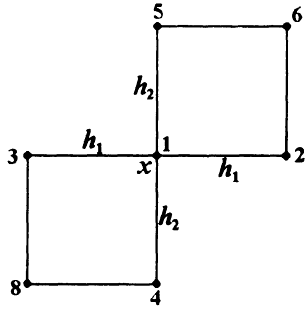

Рис. 2. Шаблон схемы (2.5).

Узлы шаблона пронумеруем согласно рис. 1, 2. Тогда для схемы (2.4) будем иметь $\sum\limits_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) = \sum\limits_{m=2}^{5} \overset{m}{B}{}^{-} + \overset{7}{B}{}^{-} + \overset{9}{B}{}^{-}$, соответственно для схемы (2.5) $\sum\limits_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) = \sum\limits_{m=2}^{6} \overset{m}{B}{}^{+} + \overset{8}{B}{}^{+}$. Выпишем значения коэффициентов $\overset{m}{B}{}^{\pm}$:

$$\overset{m}{B}{}^{-} = \frac{\overset{1}{k}_{11} + \overset{m}{k}_{11}}{2h_1^2} + \frac{\overset{1}{k}_{21} + \overset{m}{k}_{12}}{2h_1h_2}, \quad \overset{m}{B}{}^{+} = \frac{\overset{1}{k}_{11} + \overset{m}{k}_{11}}{2h_1^2} - \frac{\overset{1}{k}_{21} + \overset{m}{k}_{12}}{2h_1h_2}, \quad m = 2, 3,$$

$$\overset{m}{B}{}^{-} = \frac{\overset{1}{k}_{22} + \overset{m}{k}_{22}}{2h_2^2} + \frac{\overset{1}{k}_{12} + \overset{m}{k}_{21}}{2h_1h_2}, \quad \overset{m}{B}{}^{+} = \frac{\overset{1}{k}_{22} + \overset{m}{k}_{22}}{2h_2^2} - \frac{\overset{1}{k}_{12} + \overset{m}{k}_{21}}{2h_1h_2}, \quad m = 4, 5,$$

$$\overset{7}{B}{}^{-} = -\frac{\overset{2}{k}_{12} + \overset{4}{k}_{21}}{2h_1h_2}, \quad \overset{6}{B}{}^{+} = \frac{\overset{2}{k}_{12} + \overset{5}{k}_{21}}{2h_1h_2}, \quad \overset{9}{B}{}^{-} = -\frac{\overset{3}{k}_{12} + \overset{5}{k}_{21}}{2h_1h_2}, \quad \overset{8}{B}{}^{+} = \frac{\overset{3}{k}_{12} + \overset{4}{k}_{21}}{2h_1h_2},$$

$$A^{-} = k + \frac{\overset{1}{k}_{11}}{h_1^2} + \frac{\overset{1}{k}_{12} + \overset{1}{k}_{21}}{h_1h_2} + \frac{\overset{1}{k}_{22}}{h_2^2}, \quad k = \frac{\overset{2}{k}_{11} + \overset{3}{k}_{11}}{2h_1^2} + \frac{\overset{4}{k}_{22} + \overset{5}{k}_{22}}{2h_2^2} > 0,$$

$$A^{+} = k + \frac{\overset{1}{k}_{11}}{h_1^2} - \frac{\overset{1}{k}_{12} + \overset{1}{k}_{21}}{h_1h_2} + \frac{\overset{1}{k}_{22}}{h_2^2}.$$

Пользуясь условием эллиптичности (2.3) и полагая $\xi^{-} = (1/h_1, 1/h_2)$, $\xi^{+} = (-1/h_1, 1/h_2)$, убеждаемся в положительности коэффициентов $A^{\pm}$. Из структуры коэффициентов $\overset{m}{B}{}^{\pm}$ видно, что разностную схему (2.4) следует применять при отрицательных коэффициентах $k_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$, а схему (2.5) — при положительных.

Для исследования устойчивости одновременно по граничным условиям и правой части более удобной (особенно в нестационарном случае) является следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия положительности коэффициентов (2.7) для схемы (2.6). Тогда для решения задачи (2.6) справедлива оценка*

$$\|y\|_{\bar C} \le \max\left\{\|y\|_{C_\gamma}, \|F/D\|_C\right\}, \tag{2.8}$$

где $\|\cdot\|_{\bar C} = \max\limits_{x\in\omega_h\cup\gamma_h} |\cdot|$, $\|\cdot\|_{C_\gamma} = \max\limits_{x\in\gamma_h}|\cdot|$, $\|\cdot\|_C = \max\limits_{x\in\omega_h}|\cdot|$.

Доказательство. Максимум модуля сеточной функции может достигаться либо на границе области

$$\|y\|_{\bar C} \le \|y\|_{C_\gamma}, \tag{2.9}$$

либо во внутренней точке. Пусть $|y(x)|$ достигает наибольшего значения при $x = x^* \in \omega_h$, так что $|y(x^*)| \ge |y(x)|$ при любом $x \in \bar\omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$. Тогда из уравнения (2.6) при $x = x^*$ следует неравенство

$$A(x^*)|y(x^*)| \le \sum_{\xi\in Ш'(x^*)} B(x^*,\xi)|y(x^*)| + |F(x^*)|.$$

Отсюда находим

$$\left(A(x^*) - \sum_{\xi\in Ш'(x^*)} B(x^*,\xi)\right)|y(x^*)| = D(x^*)|y(x^*)| \le |F(x^*)|.$$

Следовательно,

$$\|y\|_{\bar C} \le \|y\|_C \le \|F/D\|_C .$$

Объединяя последнюю оценку с (2.10), приходим к утверждению леммы.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть при всех $x \in \omega_h$ выполнены условия положительности коэффициентов $\overset{m}{B}{}^{\pm}$, $m = 2,3,4,5$:*

$$\max_{m=4,5} \frac{|\overset{1}{k}_{12} + \overset{m}{k}_{21}|}{\overset{1}{k}_{22} + \overset{m}{k}_{22}} \le \frac{h_1}{h_2} \le \min_{m=2,3} \frac{\overset{1}{k}_{11} + \overset{m}{k}_{11}}{|\overset{1}{k}_{21} + \overset{m}{k}_{12}|}. \tag{2.10}$$

Тогда при $k_{\alpha\beta}(x) \le 0$, $\alpha \ne \beta$, разностная схема (2.4) (а при $k_{\alpha\beta}(x) \ge 0$ разностная схема (2.5)) устойчива по правой части, граничным условиям и для ее решения имеет место оценка

$$\|y\|_{\bar C} \le \max\left\{\|\mu\|_{C_\gamma}, \|\varphi\|_C / c_0\right\}. \tag{2.11}$$

Доказательство теоремы проведем для схемы (2.4) (для схемы (2.5) оно проводится аналогично). Так как коэффициенты $k_{12}(x)$, $k_{21}(x)$ для всех $x \in \bar G$ неположительны, то $\overset{7}{B}{}^{-} \ge 0$, $\overset{9}{B}{}^{-} \ge 0$. Используя предположение (2.11) легко показывается, что и все коэффициенты $\overset{m}{B}{}^{-} \ge 0$, $m = 2,3,4,5$, также являются неотрицательными. Непосредственно проверяется, что для любого узла сетки $x \in \omega_h$,

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi) = d(x) \ge c_0 > 0.$$

Так как теперь выполнены все условия леммы 1, то из априорной оценки (2.9) получаем требуемое неравенство (2.12). Теорема доказана.

Замечание. 1. Если матрица коэффициентов уравнения (2.1) имеет диагональное преобладание по строкам и столбцам: $k_{\alpha\alpha} \geq |k_{\alpha\beta}|$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $\alpha \neq \beta$, то можно, например, положить $h_1 = h_2 = h$ и условие (2.11) в этом случае всегда выполнено.

Рассмотрим вопрос о сходимости рассматриваемых разностных схем. Всюду в дальнейшем предполагаем существование ограниченных производных от решения $u(x)$ и коэффициентов уравнения (2.1). Подставляя $y = z + u$ в уравнения (2.4), (2.5), получим задачи для погрешности метода

$$\Lambda^- z - dz = -\psi^-, \quad x \in \omega_h, \quad z = 0, \quad x \in \gamma_h, \tag{2.12}$$

$$\Lambda^+ z - dz = -\psi^+, \quad x \in \omega_h, \quad z = 0, \quad x \in \gamma_h, \tag{2.13}$$

где $\psi^{\mp} = \Lambda^{\mp} u - du + \varphi$ — погрешность аппроксимации разностных схем (2.4), (2.5) на решении дифференциальной задачи (2.1). От шаблонных функционалов $d(x)$ и $\varphi(x)$ требуем выполнения обычных условий аппроксимации коэффициента $q(x)$ и правой части $f(x)$:

$$d(x) - q(x) = O(h_1^2 + h_2^2), \quad \varphi(x) - f(x) = O(h_1^2 + h_2^2). \tag{2.14}$$

Заметим также, (см. [1, стр. 268]), что на гладких решениях

$$\Lambda^- u - Lu = O(h_1^2 + h_2^2), \quad \Lambda^+ u - Lu = O(h_1^2 + h_2^2).$$

Следовательно, разностные схемы (2.4), (2.5) аппроксимируют исходную дифференциальную задачу (2.1) со вторым порядком, так что

$$\|\psi^-\|_C \leq M(h_1^2 + h_2^2), \quad \|\psi^+\|_C \leq M(h_1^2 + h_2^2),$$

где $M > 0$ — положительная постоянная, не зависящая от сеточных шагов h_1, h_2.

Применяя теорему 1 для решения задач (2.13), (2.14), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть при всех $x \in \omega_h$ выполнены условия (2.11). Тогда при $k_{\alpha\beta} \leq 0$, $\alpha \neq \beta$, решение разностной схемы (2.4) (а при $k_{\alpha\beta} \geq 0$, $\alpha \neq \beta$, решение разностной схемы (2.4)) сходится к точному решению дифференциальной задачи (2.1) и имеет место оценка*

$$\|y - u\|_C \leq M c_0^{-1}(h_1^2 + h_2^2).$$

3. Схемы для уравнений со знакопеременными коэффициентами

В данном пункте будут построены монотонные разностные схемы для решения краевой задачи (2.1) с недивергентным оператором L вида

$$Lu = k_{11}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2k_{12}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + k_{22}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{3.15}$$

в котором коэффициент $k_{12}(x)$ может менять знак при $x \in G$. При этом условие эллиптичности (2.3) считается выполненным. Дифференциальную задачу (2.1), (3.1) аппроксимируем монотонной разностной схемой второго порядка локальной аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ вида

$$\Lambda y - dy = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{3.16}$$

где

$$\Lambda y = k_{11} y_{\bar{x}_1 x_1} + k_{12}^+ \Lambda_{12}^+ y + k_{12}^- \Lambda_{12}^- y + k_{22} y_{\bar{x}_2 x_2}, \tag{3.17}$$

$$k_{12}^{+}(x) = 0,5(k_{12}(x) + |k_{12}(x)|) \geq 0, \quad \Lambda_{12}^{+} y = y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}, \quad x \in \omega_h, \tag{3.18}$$

$$k_{12}^{-}(x) = 0,5(k_{12}(x) - |k_{12}(x)|) \leq 0, \quad \Lambda_{12}^{-} y = y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}, \quad x \in \omega_h. \tag{3.19}$$

Шаблон схемы (3.2)-(3.5) в общем случае является 9-ти-точечным.

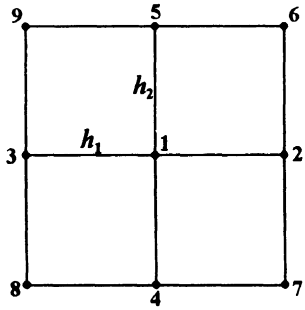

Рис. 3. Шаблон схемы (3.2)-(3.5).

Данная разностная схема (3.2)-(3.5) записывается в каноническом виде (2.6) с коэффициентами

$$\begin{gathered}
\overset{2}{B} = \overset{3}{B} = \frac{k_{11}}{h_1^2} - \frac{|k_{12}|}{h_1 h_2}, \quad \overset{4}{B} = \overset{5}{B} = \frac{k_{22}}{h_2^2} - \frac{|k_{12}|}{h_1 h_2}, \\
\overset{6}{B} = \overset{8}{B} = \frac{2k_{12}^{+}}{h_1 h_2} \geq 0, \quad \overset{7}{B} = \overset{9}{B} = -\frac{2k_{12}^{-}}{h_1 h_2} \geq 0, \quad A(x) = \sum_{m=1}^{9} \overset{m}{B}.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Очевидно, что все коэффициенты (3.20) являются положительными при любом $x \in G$ и

$$\frac{|k_{12}|}{k_{22}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \frac{k_{11}}{|k_{12}|}. \tag{3.21}$$

Для того, чтобы система неравенств (3.21) имела смысл, необходимо, чтобы коэффициенты уравнения (2.1), (3.1) удовлетворяли условию $k_{11}/|k_{12}| - |k_{12}|/k_{22} \geq 0$. Но так как из условия эллиптичности (2.3) следует оценка

$$k_{11} k_{22} - k_{12}^2 \geq c_1^2 > 0,$$

то шаги h_1 и h_2 всегда можно выбрать из соотношений (3.21). В этом случае разностная схема (3.2) - (3.5) является монотонной, и для ее решения имеет место оценка устойчивости по граничным условиям, правой части вида (2.12).

4. Разностные схемы для уравнений общего вида

К сожалению, непосредственно монотонных схем для дивергентных (консервативных) уравнений (2.1), (2.2) в случае знакопеременных коэффициентов $k_{12}(x)$, $k_{21}(x)$ при смешанных производных построить не удается. Чтобы приведенные выше результаты имели законченный характер, необходимо рассмотреть задачи с наличием младших производных. Вновь рассмотрим дифференциальную задачу (2.1) с

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(k_{\alpha\alpha}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + 2k_{12}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - q(x) u, \tag{4.22}$$

причем $|k_\alpha| \le c_3$, $q(x) \ge c_0 > 0$, а коэффициенты $k_{\alpha\beta}(x)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, удовлетворяют условиям эллиптичности (2.3). Отметим, что дивергентный оператор (2.2) всегда может быть приведен к виду (4.1). Для построения соответствующих монотонных схем второго порядка локальной аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ для уравнений с наличием младших производных воспользуемся идеей А. А. Самарского [1, стр. 184]. Входящие в (4.1) производные на неравномерной сетке ω_h заменим конечно-разностными соотношениями

$$k_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \frac{k_{\alpha\alpha}}{1+R_\alpha}u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + k_\alpha^+ u_{x_\alpha} + k_\alpha^- u_{\bar{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2),$$

$$R_\alpha = 0,5|k_\alpha|h_\alpha/k_{\alpha\alpha}, \quad k_\alpha^\pm = 0,5(k_\alpha \pm |k_\alpha|),$$

$$2k_{12}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = k_{12}^+\Lambda_{12}^+ u + k_{12}^-\Lambda_{12}^- u + O(h_1^2 + h_2^2).$$

В результате получим следующую разностную схему второго порядка локальной аппроксимации:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{k_{\alpha\alpha}}{1+R_\alpha}y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + k_\alpha^+ y_{x_\alpha} + k_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha}\right) + k_{12}^+\Lambda_{12}^+ y + k_{12}^-\Lambda_{12}^- y - dy = \varphi, \quad x \in \omega_h,$$
$$y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{4.23}$$

где операторы $\Lambda_{12\pm}$ определены соотношениями (3.4), (3.5), а d, φ — некоторые шаблонные функционалы [1], которые в частности могут быть взяты в виде: $d(x) = q(x)$, $\varphi(x) = f(x)$, $x \in \omega_h$. Для того, чтобы схема (4.2) была монотонной (и тем самым удовлетворяла принципу максимума), достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{|k_{12}(x)|(1+R_2(x))}{k_{22}(x)} \le \frac{h_1}{h_2} \le \frac{k_{11}(x)}{|k_{12}(x)|(1+R_1(x))}, \quad x \in \omega_h. \tag{4.24}$$

Так как $R_\alpha(x) = O(h_\alpha)$, то систему неравенств (4.3) всегда можно удовлетворить.

Замечание 2. Полученные выше результаты естественным образом обобщаются на p-мерные ($p \ge 2$ — любое число) эллиптические уравнения со смешанными производными.

5. Разностные схемы для многомерных параболических уравнений

Пусть теперь $G = \{0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = \overline{1,p}\}$ — p-мерный параллелепипед с границей Γ, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Требуется найти непрерывную функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0,T]$ начально-краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad x \in G, \quad t \in (0,T], \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u|_\Gamma = \mu(x,t), \tag{5.25}$$

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} L_{\alpha\beta}u, \quad L_{\alpha\beta}u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right). \tag{5.26}$$

Аналогично (2.3) предполагаются выполненными следующие условия:

$$c_1\sum_{\alpha=1}^{p}\xi_\alpha^2 \le \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \le c_2\sum_{\alpha=1}^{p}\xi_\alpha^2, \quad x \in G. \tag{5.27}$$

Зависимость коэффициентов от пространственных переменных предполагается лишь для сокращения несущественных выкладок. Для простоты рассуждений будем предполагать знакопостоянность коэффициентов при смешанных производных. Тогда с учетом (5.27) будем иметь:

$$0 < c_1 \le k_{\alpha\alpha}(x) \le c_2,\ \alpha = 1, 2,\ k_{\alpha\beta}(x) \ge 0,\ \alpha, \beta = \overline{1,p},\ \alpha \ne \beta,\ x \in G. \tag{5.28}$$

На отрезке $[0, T]$ введем в рассмотрение равномерную с шагом τ сетку по времени $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \dots, N_0;\ \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup T$, а в параллелепипеде $\bar{G}$ введем равномерную по каждому направлению x_α сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, γ_h — множество граничных узлов,

$$\bar{\omega}_h = \left\{x_i = \left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_p^{(i_p)}\right), \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\right.$$

$$\left. i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \quad h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p\right\}.$$

Операторы $L_{\alpha\alpha}$ аппроксимируем разностными:

$$\Lambda_{\alpha\alpha} y = (a_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad a_{\alpha\alpha} = 0,5\left(k_{\alpha\alpha}^{(-1_\alpha)} + k_{\alpha\alpha}\right), \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{5.29}$$

где $v^{(\pm 1_\alpha)} = v\left(x_1^{(i_1)}, \dots, x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, x_\alpha^{(i_\alpha)} \pm h_\alpha, x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \dots, x_p^{(i_p)}\right)$, а операторы $L_{\alpha\beta}$, $\alpha \ne \beta$, следующим образом:

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{+} y = 0,5\left((k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}\right), \quad \alpha \ne \beta. \tag{5.30}$$

На равномерной сетке $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$ дифференциальную задачу (5.25) аппроксимируем чисто неявной разностной схемой

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_{\alpha\alpha} \hat{y} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \Lambda_{\alpha\beta}^{+} \hat{y} + \varphi, \tag{5.31}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad \hat{y}|_{\gamma_h} = \mu(x, \hat{t}), \quad x \in \gamma_h, \tag{5.32}$$

где $\varphi = \hat{f}$, $y = y(x_i, t_n)$, $x_i \in \omega_h$, $t_n \in \omega_\tau$, $\hat{y} = y^{n+1} = y(x_i, t_{n+1})$, $y_t = (y^{n+1} - y^n)/\tau$. Используя формулы

$$\Lambda_{\alpha\alpha} y = \left(a_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}(y^{(+1_\alpha)} - y) - a_{\alpha\alpha}(y - y^{(-1_\alpha)})\right)/h_\alpha^2,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta} y = \left(k_{\alpha\beta}^{(+1_\alpha)}(y^{(+1_\beta, +1_\alpha)} - y^{(+1_\alpha)}) - k_{\alpha\beta}(y^{(+1_\beta)} - y) + \right.$$

$$\left. + k_{\alpha\beta}(y - y^{(-1_\beta)}) - k_{\alpha\beta}^{(-1_\alpha)}(y^{(-1_\alpha)} - y^{(-1_\beta, -1_\alpha)})\right)/(2h_\alpha h_\beta),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{a_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}}{h_\alpha^2} y^{(+1_\alpha)} - \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\ne\beta}}^{p} \frac{(k_{\alpha\beta}^{(+1_\alpha)} y^{(+1_\alpha)} + k_{\alpha\beta} y^{(+1_\beta)})}{2h_\alpha h_\beta} = \sum_{\alpha=1}^{p} D_\alpha y^{(+1_\alpha)},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{a_{\alpha\alpha}^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^2} y^{(-1_\alpha)} - \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\ne\beta}}^{p} \frac{(k_{\alpha\beta}^{(-1_\alpha)} y^{(-1_\alpha)} + k_{\alpha\beta} y^{(-1_\beta)})}{2h_\alpha h_\beta} = \sum_{\alpha=1}^{p} E_\alpha y^{(-1_\alpha)},$$

$$D_\alpha = \frac{a_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}}{h_\alpha^2} - \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\ne\alpha}}^{p} \frac{k_{\alpha\beta}^{(+1_\alpha)} + k_{\beta\alpha}}{2h_\alpha h_\beta}, E_\alpha = \frac{a_{\alpha\alpha}^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^2} - \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\ne\alpha}}^{p} \frac{k_{\alpha\beta}^{(-1_\alpha)} + k_{\beta\alpha}}{2h_\alpha h_\beta},$$

разностную схему (5.31) запишем в каноническом виде (2.6)

$$A(x)y(x,t) = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} \tau(B_{\alpha\beta}y^{(+1_\beta,+1_\alpha)} + C_{\alpha\beta}y^{(-1_\beta,-1_\alpha)}) + \\ + \sum_{\alpha=1}^{p} \tau(D_\alpha y^{(+1_\alpha)} + E_\alpha y^{(-1_\alpha)}) + F(x,t), \quad (x,t)\in\omega. \tag{5.33}$$

Здесь

$$B_{\alpha\beta} = \frac{k_{\alpha\beta}^{(+1_\alpha)}}{2h_\alpha h_\beta} \geq 0, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{k_{\alpha\beta}^{(-1_\alpha)}}{2h_\alpha h_\beta} \geq 0,$$

$$A = 1 + \tau\left(\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{a_{\alpha\alpha} + a_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}}{h_\alpha^2} - \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}} \frac{k_{\alpha\beta}}{h_\alpha h_\beta}\right), \quad F(x,t) = \tau\varphi + y.$$

Теорема 2. *Пусть при всех* $x \in \omega_h$

$$D_\alpha(x) \geq 0, \quad E_\alpha(x) \geq 0, \quad \alpha = 1,2,\dots,p.$$

Тогда решение разностной схемы (5.31), (5.32) при любом $\tau > 0$ безусловно устойчиво (без ограничений на τ и h_α, $\alpha = 1,2,\dots,p$) по начальным данным, граничным условиям, правой части и при любом $t_n \in \omega_\tau$ справедлива оценка

$$\|y^{n+1}\|_{\bar C} \leq \max\left\{\|y^0\|_{\bar C}, \max_{1\leq k\leq n+1}\|y^k\|_{C_\gamma}\right\} + \sum_{k=0}^{n} \tau\|\varphi^k\|_C.$$

Доказательство. Так как выполнены условия леммы 1, то на основании априорной оценки (2.9) $\|y^{n+1}\|_{\bar C} \leq \max\{\|y^{n+1}\|_{C_\gamma}, \|F\|_C\}$. Заметим, что $\|F\|_C \leq \|y^n\|_C + \tau\|\varphi^n\|_C$. Подставляя данную оценку в последнее неравенство, находим цепочку соотношений

$$\|y^{n+1}\|_{\bar C} \leq \max\{\|y^{n+1}\|_{C_\gamma}, \|y^n\|_{\bar C} + \tau\|\varphi^n\|_C\} \leq$$

$$\leq \max\{\|y^{n+1}\|_{C_\gamma}, \|y^n\|_{C_\gamma} + \tau\|\varphi^n\|_C, \|y^{n-1}\|_{\bar C} + \tau\|\varphi^{n-1}\|_C + \|\varphi^n\|_C\} \leq \dots \leq$$

$$\leq \max\left\{\max_{1\leq k\leq n+1}\|y^k\|_{C_\gamma} + \sum_{k=0}^{n}\tau\|\varphi^k\|_C, \|y^0\|_{\bar C} + \sum_{k=0}^{n}\tau\|\varphi^k\|_C\right\}.$$

Из данного неравенства и следует требуемое соотношение. Теорема доказана.

Замечание 3. Условия теоремы 2 всегда можно удовлетворить, если матрица коэффициентов уравнения (5.25) $K = \{k_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{p}$ имеет диагональное преобладание по строкам и столбцам, т. е. $k_{\alpha\alpha} \geq \sum\limits_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{p}|k_{\alpha\beta}|$, $k_{\alpha\alpha} \geq \sum\limits_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{p}|k_{\beta\alpha}|$. В этом случае можно положить $h_1 = h_2 = \dots = h_p$.

Замечание 4. Для того, чтобы построить монотонную разностную схему для знакопеременных коэффициентов $k_{\alpha\beta}(x)$, $\alpha\neq\beta$, уравнение (5.25) следует записать в недивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha x_\beta} + f(x,t).$$

Тогда монотонная разностная схема (при условии диагонального преобладания матрицы K) второго порядка локальной аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2)$ будет иметь вид

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{k_{\alpha\alpha}}{1+R_\alpha} \hat{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + k_\alpha^+ \hat{y}_{x_\alpha} + k_\alpha^- \hat{y}_{\bar{x}_\alpha} \right) + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha\neq\beta}} (k_{\alpha\beta}^+ \Lambda_{\alpha\beta}^+ \hat{y} + k_{\alpha\beta}^- \Lambda_{\alpha\beta}^- \hat{y}) + \varphi,$$

где

$$R_\alpha = 0,5|k_\alpha| h_\alpha / k_{\alpha\alpha}, \quad k_\alpha^\pm = 0,5(k_\alpha \pm |k_\alpha|),$$

$$k_{\alpha\beta}^\pm = 0,5(k_{\alpha\beta} \pm |k_{\alpha\beta}|), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^+ y = y_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + y_{x_1x_2}, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^- y = y_{\bar{x}_1x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.А. Самарский.* Теория разностных схем.– М.: Наука, 1977.
2. *А.А. Самарский, А.А. Гулин.* Численные методы.– М.: Наука, 1989.
3. *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич.* Нелинейные монотонные схемы для уравнения переноса // ДАН, 1998, т. 361, N 1, с.21-23.
4. *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич.* Разностные схемы для уравнения переноса. I // Дифференц. уравнения, 1998, т. 34, N 12, с.1675-1685.
5. *Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин.* Об одном подходе к построению адаптивных разностных схем // Докл. АН СССР, 1988, т. 298, N 1, с.64-68.

Поступила в редакцию 29.10.99.