ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2000, том 370, № 1, с. 27–30

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ

© 2000 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

Поступило 27.09.99 г.

Приближенное решение краевых задач математической физики в сложных расчетных областях проводится с использованием нерегулярных сеток [1–4]. Среди наиболее общих неструктурированных сеток выделим треугольные (при рассмотрении двумерных задач) сетки. Для заданного набора расчетных узлов существует единственная триангуляция Делоне, которая является оптимальной в смысле стремления полученных треугольников к равносторонним. Более точно отмеченное свойство формулируется следующим образом: при триангуляции Делоне максимизируется минимальное значение внутренних углов треугольников [5–7].

При построении дискретных аналогов в качестве основного используется универсальный метод баланса (интегроинтерполяционный метод) [8]. Он был предложен А.А. Самарским в работе [9] и с середины 50-х годов активно используется в вычислительной практике. В настоящее время в англоязычной литературе утвердился термин “метод конечного объема” (см., например, [10]). Конструктивизм такого подхода особенно сильно проявляется при построении разностных схем на нерегулярных сетках [11]. В качестве контрольного объема при триангуляциях Делоне естественно использовать многоугольники Вороного.

В качестве базовой математической модели для задач механики сплошной среды выступают краевые задачи для уравнений конвекции–диффузии, основные особенности которых связаны с несамосопряженностью эллиптического оператора. В книге [12] рассмотрены вопросы построения и исследования разностных схем для стационарных и нестационарных уравнений конвекции–диффузии на регулярных прямоугольных сетках. В данной работе отмечаются наиболее важные проблемы построения разностных схем при использовании треугольных сеток. Разностные схемы строятся на основе метода баланса с использованием триангуляций Делоне и многоугольников Вороного. Основное внимание уделяется свойствам разностных операторов конвективного и диффузионного переноса. Рассмотрены особенности аппроксимаций конвективных слагаемых в дивергентной (консервативной), недивергентной (характеристической) и симметричной формах.

1. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением двумерных задач. Будем считать, что расчетная область представляет собой выпуклый многоугольник Ω с границей $\partial\Omega$. Для точек области используем обозначения $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$.

В области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ введена сетка $\bar{\omega}$, состоящая из узлов $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, причем углы многоугольника Ω являются узлами. Пусть ω – множество внутренних, а $\partial\omega$ – множество граничных узлов, т.е. $\omega = \bar{\omega} \cap \Omega$, $\partial\omega = \bar{\omega} \cap \partial\Omega$.

С каждым из узлов $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, свяжем контрольный объем Ω_i как определенную часть расчетной области. В качестве контрольного объема выбираются многоугольники Вороного или их часть, принадлежащая Ω. Многоугольником Вороного для отдельного узла будет множество точек, которые лежат ближе к этому узлу, чем ко всем другим. Для двух точек множества определяются полуплоскостью, которая ограничена перпендикуляром к середине отрезка, соединяющего эти две точки. С каждой из вершин многоугольника Вороного связывается треугольник, построенный по соответствующим узлам контактирующих многоугольников Вороного. Эти треугольники определяют триангуляцию Делоне.

Контрольные объемы покрывают всю расчетную область, так что

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M}\bar{\Omega}_i, \quad \bar{\Omega}_i = \Omega_i \bigcup \partial\Omega_i, \quad \Omega_i \bigcap \Omega_j = \emptyset,$$
$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для общих граней контрольных объемов используем обозначения

$$\partial\Omega_i \bigcap \partial\Omega_j = \Gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для узла i определим множество соседних узлов $\mathcal{W}(i)$, для которых контрольные объемы имеют общие грани с контрольным объемом для узла i, т.е.

$$\mathcal{W}(i) = \{j \mid \partial\Omega_i \bigcap \partial\Omega_j \neq \emptyset, \ j = 1, 2, \ldots, M\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, M.$$

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

Введем также обозначения

$$V_i = \int\limits_{\Omega_i} d\mathbf{x}, \quad l_{ij} = \int\limits_{\Gamma_{ij}} d\mathbf{x}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M_,,$$

для площади контрольного объема и длины ребра многоугольника Вороного соответственно.

2. В качестве модельных рассматриваются стационарные краевые задачи конвекционно-диффузионного переноса. В области Ω ищется решение уравнения конвекции–диффузии в недивергентной (характеристической) форме

$$\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

которое дополняется простейшими граничными условиями

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{2}$$

В качестве основного рассматривается также уравнение конвекции–диффузии в дивергентной (консервативной) форме:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u) - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{3}$$

И наконец, будем отдельно исследовать случай, когда решение определяется из уравнения конвекции–диффузии в симметричной форме:

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} + \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u)\right) - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{4}$$

На множестве функций $u(\mathbf{x})$, удовлетворяющих граничным условиям (2), стационарную задачу конвекции–диффузии запишем в виде операторного уравнения

$$\mathcal{A}u = f, \quad \mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{D}. \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{D}$ – оператор диффузионного переноса, который определяется выражением

$$\mathcal{D}u = -\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right). \tag{6}$$

Оператор конвективного переноса $\mathcal{C}$ в соответствии с (1), (3), (4) записывается в различных формах. Для оператора конвективного переноса в недивергентной форме в соответствии с (1) положим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$, где

$$\mathcal{C}_1 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}. \tag{7}$$

Аналогично из (3) имеем $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$, где теперь

$$\mathcal{C}_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u). \tag{8}$$

С учетом (4) оператор конвективного переноса в симметричной форме имеет вид

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2),$$

причем

$$\mathcal{C}_0 u = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} + \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u)\right). \tag{9}$$

Решение дискретной задачи должно наследовать основные свойства дифференциальной задачи. Это обеспечивается, когда сеточные операторы будут иметь те же основные свойства, что и дифференциальные операторы.

3. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой

$$(u, w) = \int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x})w(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \|u\| \equiv (u, u)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{\Omega} u^2(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для произвольных функций $u(\mathbf{x})$ и $w(\mathbf{x})$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$.

Оператор диффузионного переноса, определяемый согласно (6), самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq \frac{\kappa}{\mathcal{M}_0}E \tag{10}$$

при $k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0$. Здесь E – тождественный оператор, а $\mathcal{M}_0$ – постоянная в неравенства Фридрихса

$$\int\limits_{\Omega} u^2 d\mathbf{x} \leq \mathcal{M}_0 \sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right)^2 d\mathbf{x}.$$

Для сеточных функций $y(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x})$, заданных в узлах $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$ и обращающихся в нуль в граничных узлах $\mathbf{x} \in \partial\omega$, определим скалярное произведение в $H = L_2(\omega)$ и норму соотношениями

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} V_i y(\mathbf{x}_i)w(\mathbf{x}_i), \quad \|y\| = (y, y)^{\frac{1}{2}}.$$

Определим расстояние между узлами $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j$:

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \left[\sum_{\alpha=1}^{2} (x_i^{(\alpha)} - x_j^{(\alpha)})^2\right]^{1/2}$$

и середину отрезка, соединяющего эти узлы:

$$\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)}), \quad x_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(x_i^{(\alpha)} + x_j^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2.$$

Будем для простоты рассматривать случай, когда коэффициенты уравнения конвекции–диффузии и само решение достаточно гладкие. Для разностного оператора диффузионного переноса интегроинтерполяционным методом получим представление

$$(Dy)_i = -\frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{y_j - y_i}{d(x_i, x_j)}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \quad (11)$$

Для сеточных функций $y_i \equiv y(\mathbf{x}_i) = 0$, $w_i = 0$, $\mathbf{x}_i \in \partial\omega$, как и в дифференциальном случае (см. (10)), имеем

$$D = D^* \geq \frac{\kappa}{M_0} E, \quad (12)$$

где M_0 – постоянная, не зависящая от сетки, в разностном неравенстве Фридрихса

$$\|y\|^2 \leq \frac{M_0}{2} \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \left(\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}\right)^2.$$

4. Непосредственно устанавливается сопряженность с точностью до знака операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах друг другу, т.е.

$$\mathcal{C}_1^* = -\mathcal{C}_2. \quad (13)$$

Оператор конвективного переноса в симметричной форме (9) будет кососимметричным $((\mathcal{C}_0 u, u) = 0)$:

$$\mathcal{C}_0 = -\mathcal{C}_0^*. \quad (14)$$

Для энергии операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах имеем

$$|(\mathcal{C}_\alpha u, u)| \leq \mathcal{M}_1 \|u\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \quad (15)$$

где постоянная $\mathcal{M}_1$ зависит только от $\operatorname{div}\mathbf{v}$:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_{C(\Omega)}, \quad \|w\|_{C(\Omega)} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |w(\mathbf{x})|. \quad (16)$$

Имеют место также оценки подчиненности оператора конвективного переноса оператору диффузионного переноса:

$$\|\mathcal{C} u\|^2 \leq \mathcal{M}_2(\mathcal{D} u, u) \quad (17)$$

с постоянной $\mathcal{M}_2$, зависящей от скорости. При $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ можем положить

$$\mathcal{M}_2 = \frac{2}{\kappa}\max_{\alpha}\left\{\left\|(v^{(\alpha)})^2\right\|_{C(\Omega)}\right\}. \quad (18)$$

Аналогично при $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ получим

$$\mathcal{M}_2 = \frac{2}{\kappa}\left(2\max_{\alpha}\left\{\left\|(v^{(\alpha)})^2\right\|_{C(\Omega)}\right\} + \mathcal{M}_0\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{C(\Omega)}\right). \quad (19)$$

При $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ имеем

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(3\max_{\alpha}\left\{\left\|(v^{(\alpha)})^2\right\|_{C(\Omega)}\right\} + \mathcal{M}_0\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{C(\Omega)}\right). \quad (20)$$

Приведенные оценки (15), (17) служат ориентиром при исследовании дискретных аналогов операторов конвективного переноса.

Будем относить нормальную компоненту скорости к середине отрезка, соединяющего узлы сетки. При использовании обозначений

$$b_{ij} = (\mathbf{v}, \mathbf{n})(\mathbf{x}_{ij})$$

для разностного оператора конвективного переноса методом баланса получим

$$(C_2 y)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} \frac{y_j + y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \quad (21)$$

Разностные операторы конвективного переноса в недивергентной и симметричной формах не очень удобно строить на основе прямого использования метода баланса. Отметим возможность согласования аппроксимаций операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах, которая понимается в том смысле, что один разностный оператор совпадает с другим в случае, когда соответствующее разностное условие несжимаемости имеет место.

Для операторов конвективного переноса имеем

$$\mathcal{C}_1 u = \mathcal{C}_2 u - \operatorname{div}\mathbf{v} u. \quad (22)$$

При построении конечно-разностных аппроксимаций операторов конвективного переноса естественно стремиться к отбору таких разностных операторов, которые имели бы отмеченное выше свойство (22) дифференциальных операторов. С учетом этого положим

$$C_1 y = C_2 y - \operatorname{div}_h \mathbf{v} y. \quad (23)$$

На основе метода баланса определим разностный оператор дивергенции соотношением

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v} = \frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \quad (24)$$

Из (21), (23) и (24) непосредственно следует

$$(C_1 y)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} \frac{y_j - y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{25}$$

Разностные операторы конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах, определяемые согласно (21) и (25), с точностью до знака сопряжены друг другу, т.е. аналогично (13)

$$C_1^* = -C_2. \tag{26}$$

Для оператора конвективного переноса в симметричной форме (9) с учетом представления

$$C_0 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

получим наиболее компактную аппроксимацию

$$(C_0 y)_i = \frac{1}{2V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij} y_j, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{27}$$

Основное свойство (см. (14)) этого разностного оператора есть

$$C_0^* = -C_0, \tag{28}$$

причем это свойство кососимметричности имеет место при любом поле скоростей (для произвольных векторов $\mathbf{v}$, необязательно удовлетворяющих какому-то разностному аналогу свойства несжимаемости).

Приведем также оценки энергии оператора конвективного переноса в недивергентной и дивергентной формах. Аналогично (15) имеем

$$|(C_\alpha y, y)| \le M_1 \|y\|^2, \quad \alpha = 1, 2. \tag{29}$$

Постоянная M_1 зависит только от сжимаемости среды (на разностном уровне),

$$M_1 = \frac{1}{2}\|\mathrm{div}_h \mathbf{v}\|_{C(\omega)}, \quad \|y\|_{C(\omega)} = \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} |y(\mathbf{x}_i)| \tag{30}$$

и согласована с (16).

Неравенству (17) на разностном уровне сопоставляется неравенство подчиненности

$$\|Cy\|^2 \le M_2 (Dy, y), \tag{31}$$

в котором при $C = C_1$ постоянная (см. (18)) есть

$$M_2 = \frac{2}{\kappa} \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} \max_{j \in \mathcal{W}(i)} |b_{ij}|^2.$$

Для оператора $C = C_2$ имеем оценку (31), в которой (см. (19))

$$M_2 = \frac{2}{\kappa}\left(2 \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} \max_{j \in \mathcal{W}(i)} |b_{ij}|^2 + M_0 \|\mathrm{div}_h \mathbf{v}\|^2_{C(\omega)}\right).$$

Для разностного оператора конвективного переноса в симметричной форме (27) аналогично устанавливается неравенство (31) с (см. (20))

$$M_2 = \frac{1}{\kappa}\left(3 \max_{\mathbf{x}_i \in \omega} \max_{j \in \mathcal{W}(i)} |b_{ij}|^2 + M_0 \|\mathrm{div}_h \mathbf{v}\|^2_{C(\omega)}\right).$$

Полученные оценки (29) и (31) разностных операторов конвективного переноса полностью согласованы с непрерывным случаем и служат основой при исследовании стационарных и нестационарных разностных задач конвекции–диффузии [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98–01–00335, 99–01–00958).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Фрязинов И.В.* // УМН. 1976. Т. 31. № 6. С. 167–197.
2. *Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. и др.* Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Критерий, 1996.
3. *Годунов С.Л., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
4. *Heinrich B.* Finite Difference Methods on Irregular Networks. B: Akad. Verlag, 1987.
5. *Aurenhammer F.* // ACM Comput. Surv. 1991. V. 23. P. 345–405.
6. *Fortune S.* In: Lecture Notes Series of Computing. Singapore: World Sci., 1992. V. 1. P. 193–233.
7. *George P.-L., Borouchaki H.* Delaunay Triangulation and Meshing: Application to Finite Elements. P.: Hermes, 1998.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
9. *Самарский А.А.* Тр. Всесоюз. совещ. по дифференциальным уравнениям. 1958. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960. С. 148–160.
10. *Versteeg H.K., Malalaseker W.* An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. L.: Longman, 1995.
11. *Соловьев А.В., Соловьёва Е.В., Тишкин В.Ф. и др.* // Дифференц. уравнения. 1986. V. 22. № 7. С. 1227–1237.
12. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999.