

Самарский А.А., Мажукин В.И. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОБМЕНА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ // Тепло- массоперенос – 2000. Минск: АНК "ИТМО им. А.В.Лыкова" НАНБ, 2000, с. 11.

Проблема построения расчетных сеток с оптимальным распределением узлов особенно актуальна в задачах эволюционного типа, в которых особенности решения могут возникать и распространяться во всей области определения решения. Работа посвящена всесторонней демонстрации возможностей метода динамической адаптации применительно к задачам теплообмена. Для этого рассматриваются две важные и имеющие широкое распространение задачи: горение вещества и быстрые фазовые переходы в металле. В проблеме горения вычислительной особенностью является возникновение и распространение зон больших (одномерных по пространству) градиентов, а в проблеме фазовых превращений - наличие двух взаимодействующих двумерных фазовых фронтов: плавления и испарения.

А.А. Самарский, В.И. Мажукин

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОБМЕНА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ

Институт математического моделирования РАН, Москва

Введение

Основные вычислительные особенности нестационарных задач теплообмена связаны с формированием и распространением фронтов (тепловой волны /1/, горения /2/, фазовых превращений /3/, контактных и свободных границ, ударных волн /4/), возникновением и перемещением зон больших градиентов /5/. В подобных ситуациях эффективность численного решения нелинейных дифференциальных задач определяется не только способами разностной аппроксимации и численной реализации сеточных уравнений, но и тем, насколько удачно было выполнено построение расчетных сеток. Проблема построения расчетных сеток с оптимальным распределением узлов особенно актуальна в задачах эволюционного типа, в которых особенности решения могут возникать и распространяться во всей области определения решения. При фиксированном общем числе узлов погрешность численного решения можно значительно уменьшить за счет управляемого перераспределения их из области медленного в область сильного изменения решения. В эволюционных задачах оптимальность расчетных сеток может быть достигнута посредством последовательной, на каждом шаге интегрирования, адаптации имеющейся сетки к решению.

Целью данной работы является всесторонняя демонстрация возможностей метода динамической адаптации /6-8/ применительно к задачам теплообмена. Для этого рассматриваются две важных и широко распространенных проблемы теплообмена: горение вещества и быстрые фазовые переходы в металле. В проблеме горения вычислительной особенностью решения является возникновение и распространение зон больших (одномерных по пространству) градиентов. В проблеме фазовых превращений вычислительные особенности обусловлены наличием двух взаимодействующих двумерных фазовых фронтов: плавления и испарения.

Проблема горения

Постановка задачи. Рассматривается гомогенная в тепловом и концентрационном отношении неподвижная газовая среда. Распространение фронта экзотермической реакции формулируется в простейшем варианте одностадийного горения. Процесс горения полагается изобарическим и описывается в диффузионно-тепловом приближении с помощью нелинейной системы из двух уравнений параболического типа: теплопроводности и диффузии. Процессы переноса характеризуются постоянными коэффициентами температуропроводности a и диффузии D . Скорость химической реакции имеет линейную зависимость от плотности ρ и экспоненциальную (аррениусовскую) от температуры T . В одномерном физическом пространстве $\Omega_{\tilde{x}, \tilde{t}}: \tilde{x}_0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_1, \tilde{t} \geq 0$ задача о горении имеет вид:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} = D \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{\rho} K \exp\left(-\frac{E}{R\tilde{T}}\right), \quad (1)$$

$$C_p \rho_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = k \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \Delta h \tilde{\rho} K \exp\left(-\frac{E}{R\tilde{T}}\right), \quad (2)$$

где \tilde{t} и \tilde{x} - независимые временная и пространственная координаты, Δh_A - массовая теплота сгорания, E - энергия активации реакции, k, C_p - коэффициент теплопроводности и удельная теплоёмкость вещества; Le - число Льюиса, $Le = D/\alpha$, $\alpha = k/C_p \rho_0$. В безразмерном виде система (1) - (2) приобретает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = Le \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \rho A \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho A \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \quad (4)$$

$$0 = x_0 \leq x \leq x_1 = L, \quad t \geq 0,$$

где

$$\alpha = \frac{k}{C_p \rho_0}, \quad Le = \frac{D}{\alpha}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{L}, \quad t = \frac{\tilde{t} \alpha}{L^2}, \quad T = \frac{\tilde{T} C_p}{\Delta h}, \quad \theta = \frac{E C_p}{R(\Delta h)}, \quad A = \frac{K L^2}{\alpha}.$$

Начальные условия и граничные условия задаются в следующем виде:

$$t = 0: \quad T(x, 0) = T_0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0;$$

$$x = 0: \quad T(x_1, t) = \begin{cases} T_0 + c^* t, & t \leq \frac{1}{c} \\ T_F = T_a & t > \frac{1}{c} \end{cases}, \quad c^* - \text{constant}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

$$x = L: \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Построение адаптирующейся сетки. Характерные особенности решения задачи (3)-(5) обуславливаются наличием процессов с сильно различающимися характерными временами: малым временем химической реакции и большим временем диффузионного механизма тепловой релаксации. Соответственно, высокая скорость химического пре-

вращения вещества и медленное распространение тепловых возмущений и диффузионного перемешивания реагирующей смеси приводят к формированию узкой зоны горения, характеризующейся большими градиентами температуры T и плотности ρ . Фронт горения зарождается на левой границе и быстро перемещается к противоположной. При численном решении требуется, чтобы в зоне реакции находилось определенное число узлов сетки. Эти два обстоятельства не позволяют при использовании сеток с фиксированными узлами производить дискретизацию пространственных переменных с крупным шагом. При больших отношениях размера рассматриваемой области к характерной толщине зоны горения эффективность вычислительных алгоритмов с фиксированными сетками становится очень низкой из-за большого числа используемых узлов. Значительно более эффективными в подобных ситуациях оказываются сетки, динамически адаптирующиеся к решению, которые позволяют оперативно концентрировать необходимое число узлов в зонах быстрого изменения.

В методе динамической адаптации /6/ построение расчетной сетки осуществляется на основе перехода к произвольной нестационарной системе координат с переменными (q, τ) , принадлежащими некоторому расчетному пространству $\Omega_{q,\tau}$. Переход из физического пространства $\Omega_{x,t}$ в расчетное $\Omega_{q,\tau}$ осуществляется с помощью замены переменных общего вида $x = \xi(q, \tau)$, $t = \tau$, имеющей обратное преобразование $q = \varphi(x, t)$, $\tau = t$. Якобианом такого преобразования является функция $\psi = \partial x / \partial q$. Частные производные зависимых переменных выражаются обычным образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial}{\partial q},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q},$$

где $\partial x / \partial \tau = -Q$ - скорость движения нестационарной системы координат. В новых переменных (q, τ) задача (3), (4) запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial W}{\partial q} + \rho A \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \quad W = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial T}{\partial q}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial \rho}{\partial q} = Le \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial \rho}{\partial q} - \rho A \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \psi, \quad (8)$$

$$0 = q_0 \leq q \leq q_L = L, \quad \tau \geq 0.$$

Функция Q по-прежнему является произвольной. Ее задание определяет конкретный вид преобразования координат и служит управляющим параметром движения узлов сетки. Правильный выбор функции преобразования Q обеспечивает движение узлов, согласованное с решением, и является одной из наиболее важных проблем в методе динамической адаптации. Для определения необходимой функции преобразования воспользуемся методом квазистационарности /8/. Согласно этому подходу полагается, что существует такая нестационарная система координат, в которой все процессы протекают стационарно, т.е. временные производные решения равны нулю или достаточно

малы. Распространив принцип квазистационарности на систему уравнений (6), (7), полагаем, что имеется такая система координат, в которой $\partial T / \partial \tau = \partial \rho / \partial \tau = 0$. Тогда, разрешая систему уравнений (6), (7) относительно Q , получим:

$$Q = \frac{\frac{1}{\psi} \left(\text{Le}_A \frac{\partial}{\partial q} \left| \frac{\partial \rho}{\partial q} \right| + \frac{\partial}{\partial q} \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right) + \left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \right) * \left(\text{Le} \left| \frac{\partial \rho}{\partial q} \right| + \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right) + \psi \left(\rho - A \exp \left(-\frac{\theta}{T} \right) \right)}{\left| \frac{\partial}{\partial q} (\rho + T) \right| + \frac{\text{reg}}{h}} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \right) * \left(\text{Le} \left| \frac{\partial \rho}{\partial q} \right| + \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right) + \psi \left(\rho - A \exp \left(-\frac{\theta}{T} \right) \right)}{\left| \frac{\partial}{\partial q} (\rho + T) \right| + \frac{\text{reg}}{h}} + \frac{\psi \left(\rho - A \exp \left(-\frac{\theta}{T} \right) \right)}{\left| \frac{\partial}{\partial q} (\rho + T) \right| + \frac{\text{reg}}{h}}.$$

Первое и третье слагаемые в этой формуле обеспечивают сгущение узлов сетки, а второе ограничивает сближение двух соседних узлов до некоторой конечной величины. Учитывая немонотонный характер решения, первые производные плотности и температуры взяты по модулю, $\text{reg} \ll 1$ - постоянная, предотвращающая обращение в нуль знаменателя в тех точках, где пространственные производные обращаются в нуль.

С целью повышения эффективности метода динамической адаптации задачу (6)-(8) целесообразно представить в виде задачи со свободной границей. Учитывая, что процесс горения инициируется на левой границе $q = q_0$, а затем волна горения распространяется по холодному фону в направлении правой границы $q = q_L$, целесообразно исключить из рассмотрения область, не охваченную возмущением. Для этого произвольная точка $q_* \in (q_0, q_L)$, удовлетворяющая условиям $q_* > q_0$, $q_* \ll q_L$, объявляется новой границей с граничными условиями [7]:

$$T(q_*, t) = T_0, \quad u = \lim_{q \rightarrow q_*} \frac{k}{cT} \frac{1}{\psi} \frac{\partial T}{\partial q}. \quad (9)$$

Для уравнения (8) граничные и начальные условия запишутся в виде:

$$Q(q_0, t) = 0, \quad Q(q_*, t) = -u, \quad \psi(q, 0) = 1. \quad (10)$$

Результаты моделирования. Анализ результатов численного решения системы (6) - (8) показал, что в зависимости от соотношения между коэффициентами теплопроводности α и диффузии D существуют два качественно различающихся режима распространения фронта реакции.

В первом режиме $\text{Le} = D/\alpha = 1$ после того, как влияние левого граничного условия (греющаяся стенка) становится малым, устанавливается режим стационарного горения, характеризующийся перемещением пространственных профилей $T(x)$ и $\rho(x)$ с постоянной скоростью $u(t)$, рис. 1.

Во втором случае, когда $\text{Le} = D/\alpha < 1$ и при выполнении дополнительных соотношений между адиабатической температурой T_a и энергией активации θ_A , горение приобретает колебательный характер, переходящий по мере удаления от границы устойчивости ($\text{Le} \ll 1$) в автоколебательный режим, рис.2. Автоколебательный режим горения характеризуется пульсирующим распространением плоского фронта горения с определенной частотой и постоянной средней скоростью на всем временном интервале. На диаграмме движения этим колебаниям соответствуют периодические сгущения узлов сетки, рис. 3. Динамика узлов адаптирующейся сетки характеризуется также пространственными профилями функции ψ , рис. 4, представленными на различные моменты времени. Функция $\psi(x)$ характеризует изменение пространственного шага h_x и

показывает, во сколько раз изменилось расстояние между соседними узлами в физическом пространстве. В моменты всплесков, которым соответствуют максимальные значения температуры и скорости, узлы сетки концентрируются в зонах теплового и диффузионного фронтов, что проявляется на графиках $\psi(x)$ в виде резких провалов.

Эффективность используемых алгоритмов определялась сравнением затрат компьютерного времени и количества узлов, необходимых для расчетов одних и тех же вариантов на адаптирующихся и эйлеровых сетках с фиксированными узлами. Сравнение показало, что во всех исследуемых режимах для адаптирующихся сеток достаточным было 30÷50 узлов, в то время как на эйлеровых сетках для сходящихся значений скорости и требовалось от 1000 до 6000 узлов. Затраты компьютерного времени для алгоритмов с адаптирующимися сетками оказались в 5-20 раз, меньше чем для алгоритмов с эйлеровыми сетками.

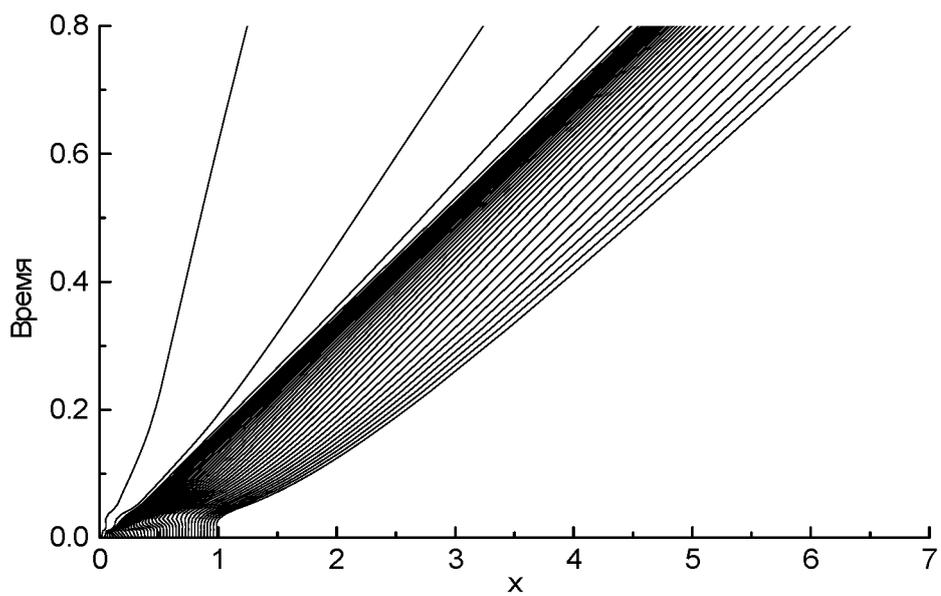
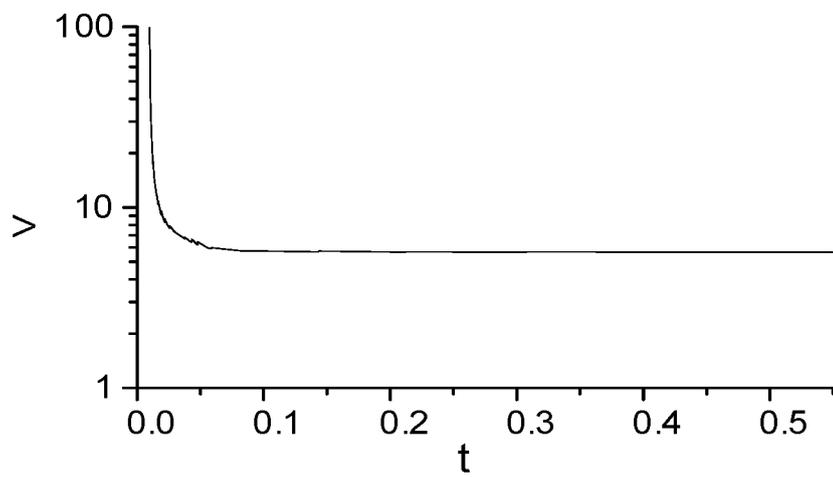
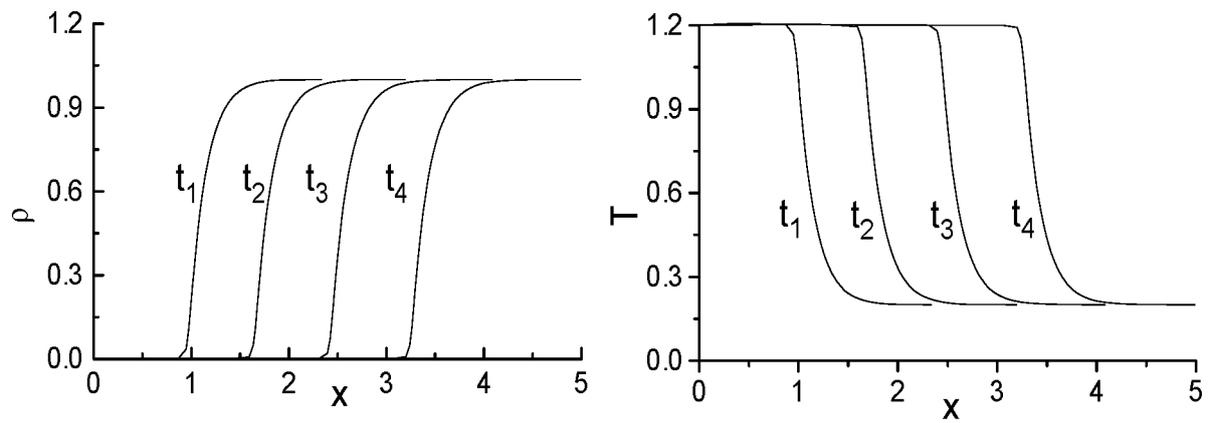


Рис. 1

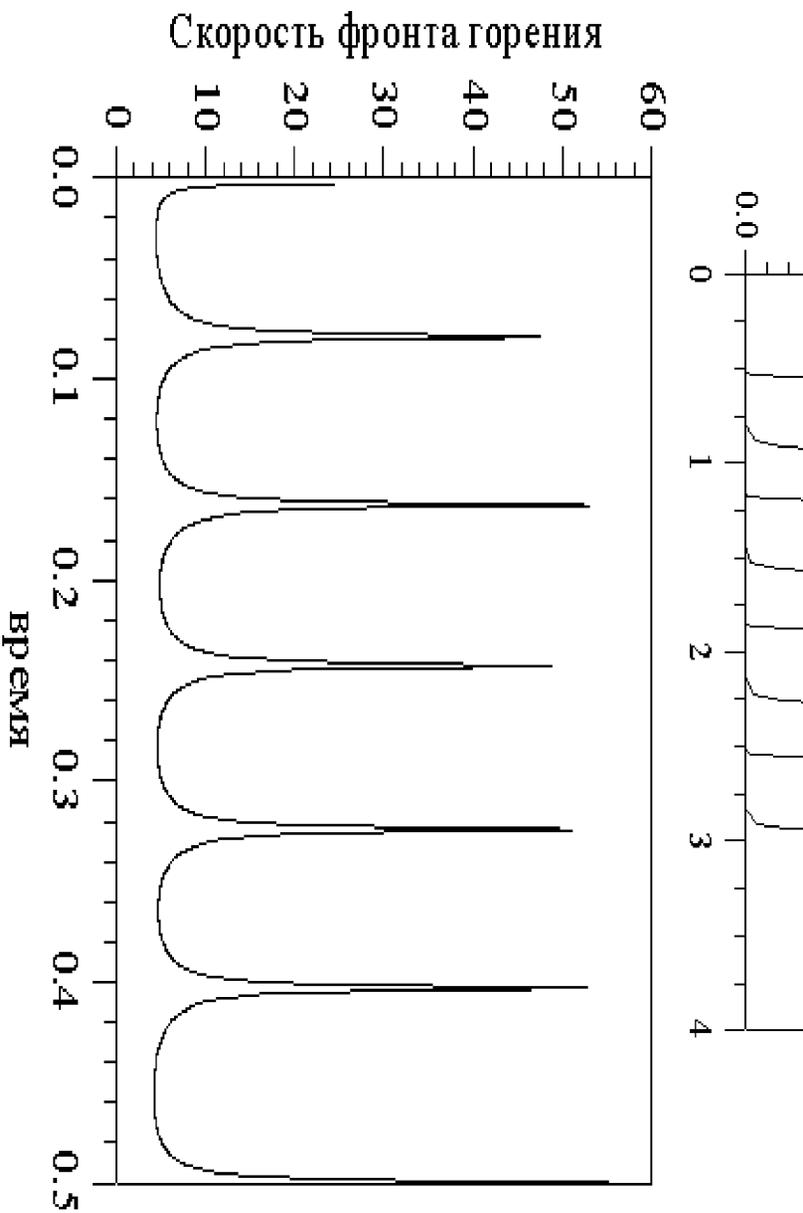
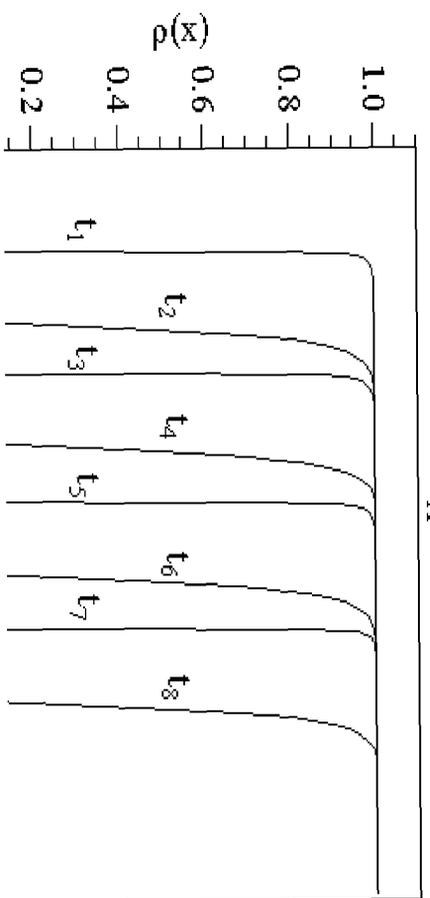
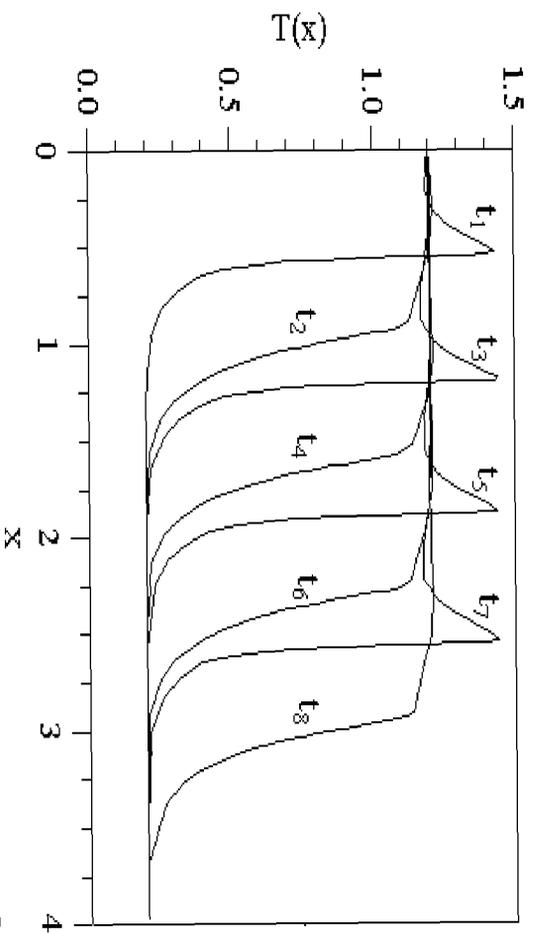


Рис. 2



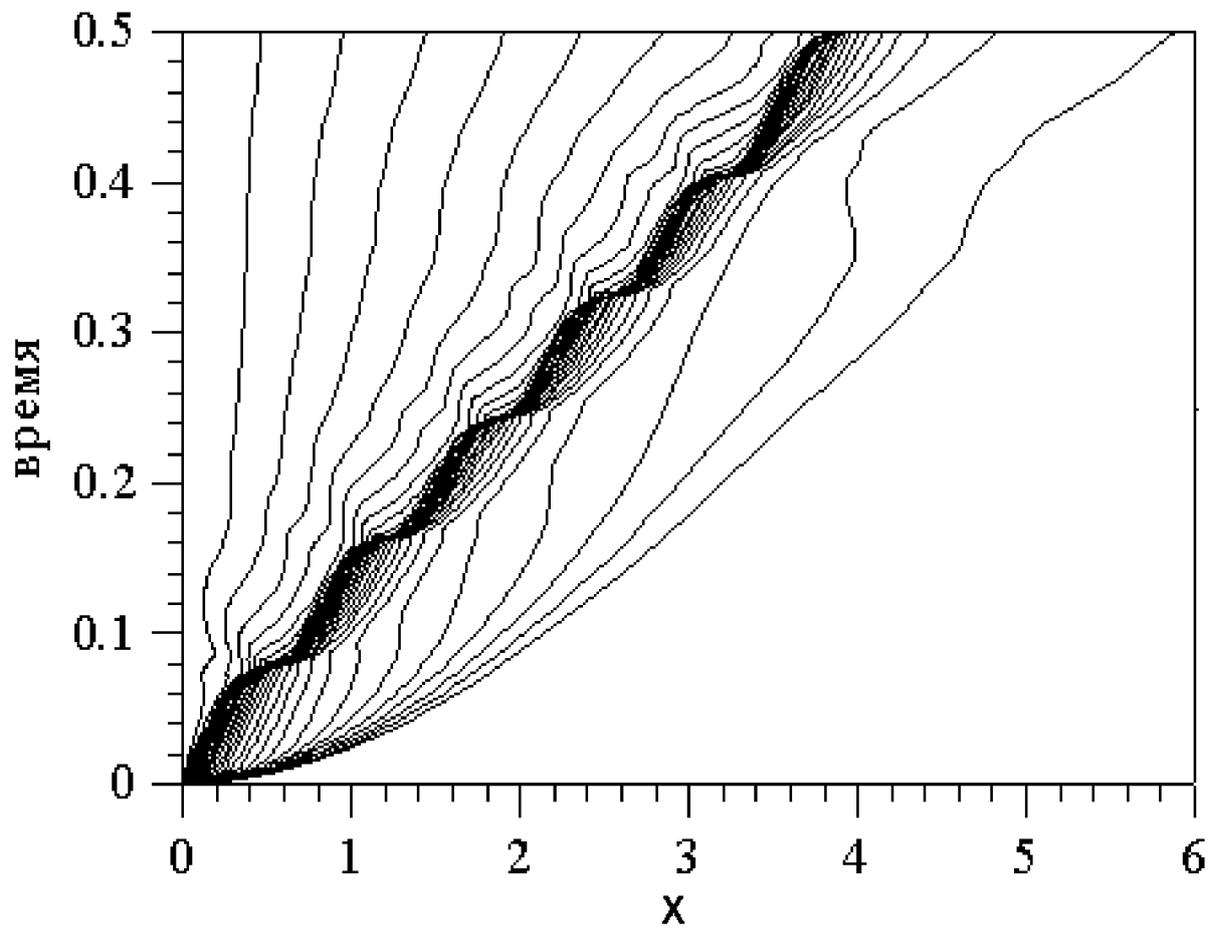


Рис. 3

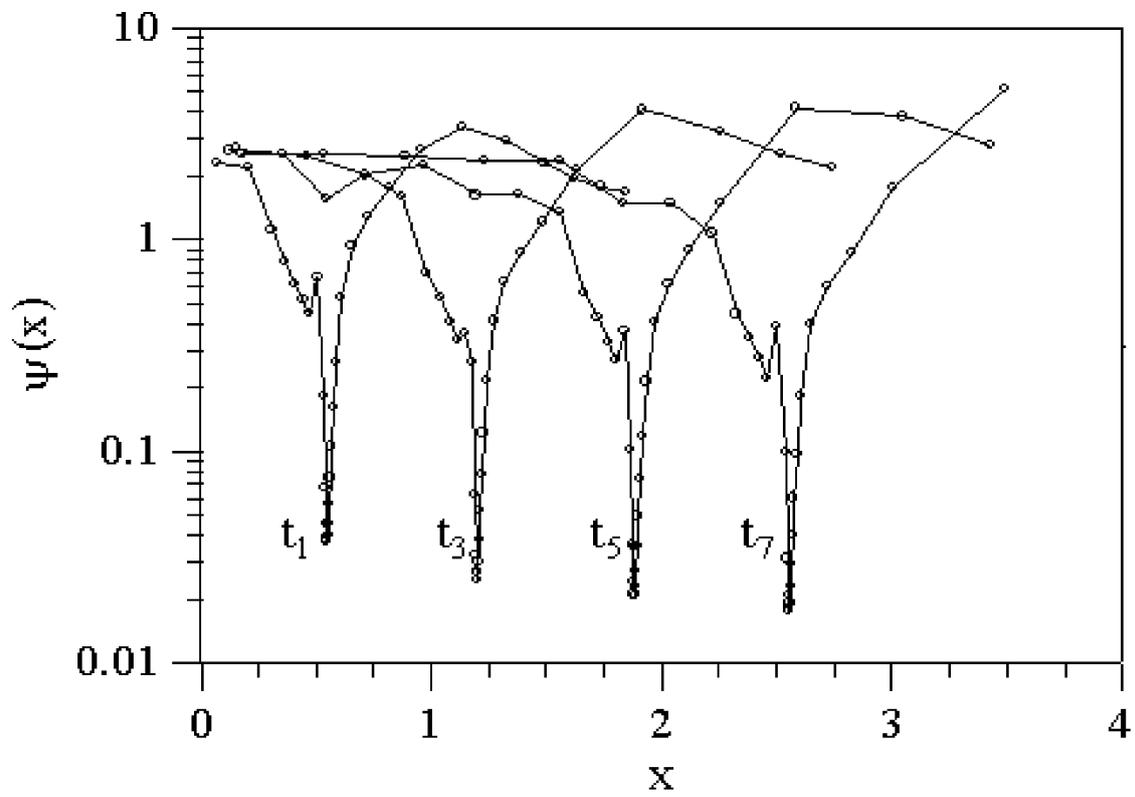


Рис. 4

Двумерная многофронтная задача Стефана

Интерес к задачам типа Стефана вызван как их теоретической значимостью /9/, связанной с развитием математического аппарата для нелинейных задач с подвижными и свободными границами, так и важными физическими и технологическими приложениями, возникающими, в области тепломассообмена /10/. Возможности метода динамической адаптации применительно к многомерным постановкам рассматриваются на примере численного решения многофронтной нестационарной двумерной по пространству задачи Стефана с явным выделением межфазных границ в произвольных областях.

Математическая формулировка классического варианта нестационарной двумерной задачи Стефана сводится к квазилинейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div} \lambda(T) \text{grad} T = -\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2}{\partial y} \quad (11)$$

в области $\Omega_{x,y}$, состоящей из двух подобластей $\Omega_s(t)$ и $\Omega_l(t)$: $\Omega_{x,y} = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)$, разделенных подвижной межфазной границей $\Gamma_{sl}(t)$, на которой выполняются дифференциальное условие Стефана $W_l^n - W_s^n = L_m \rho_s \mathfrak{G}_{sl}^n$ и равенство температур $T_s = T_l = T_m$. Здесь $H = c_p \rho T$ - энтальпия, $\vec{W} = (W_1, W_2)$ - тепловой поток, T_m, L_m - температура и теплота плавления (кристаллизации), \mathfrak{G}_{sl} - скорость движения границы раздела фаз, индексы s, l обозначают принадлежность вещества к твердой и жидкой фазам, а n - нормальную компоненту. Учет испарения осуществляется в рамках однофазного варианта задачи Стефана и приводит к появлению второй подвижной границы раздела фаз $\Gamma_{lv}(t)$: жидкость-пар в области $\Omega_{x,y}(t) = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)$. Процесс развитого поверхностного испарения описывается с помощью трех законов сохранения (массы, импульса, энергии):

$$\rho_l \mathfrak{G}_{lv}^n = \rho_v (u - \mathfrak{G}_{lv}^n), \quad P_l + \rho_l (\mathfrak{G}_{lv}^n)^2 = P_v + \rho_v (u - \mathfrak{G}_{lv}^n)^2, \quad -\lambda \partial T / \partial n = G^n - L_v \rho_l \mathfrak{G}_{lv}^n,$$

и двух дополнительных соотношений, характеризующих кинетику фазового перехода и определяющихся из приближения кнудсеновского слоя $T_v = T_v(T_l, M)$, $\rho_v = \rho_v(\rho_H, M)$.

Предположим, что для некоторого расчетного пространства $\Omega_{\xi, \eta, \tau}$, в котором определена произвольная нестационарная криволинейная система координат с переменными (ξ, η, τ) , и физического $\Omega_{x,y,t}$ с переменными (x, y, t) на каждый момент времени существует невырожденное взаимно-однозначное преобразование $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, $\tau = t$, отображающее физическую область произвольной формы $\Omega_{x,y}$ в прямоугольник $\Omega_{\xi, \eta}$ в плоскости криволинейных координат (ξ, η) . Якобианом такого преобразования является функция J :

$$\rho J^{-1} = \rho \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \psi.$$

Математическая постановка задачи (11) в произвольной нестационарной криволинейной системе координат (ξ, η, τ) приобретает вид:

$$\left[\frac{\partial(\psi H)}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\rho W_1 + HQ_1) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (\rho W_2 + HQ_2) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ - (\rho W_1 + HQ_1) \frac{\partial y}{\partial \xi} + (\rho W_2 + HQ_2) \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\} \right]_m, \quad m = s, l, \quad (12)$$

$$\left[\frac{\partial x}{\partial \tau} = - \frac{Q_1}{\rho} \right]_k, \quad Q_1 = -\rho \left(D_\xi \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + D_\eta \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right), \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial \tau} = - \frac{Q_2}{\rho} \right]_k, \quad Q_2 = -\rho \left(D_\xi \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + D_\eta \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right), \quad (14)$$

$$W_1 = - \frac{\lambda \rho}{\psi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right), \quad W_2 = - \frac{\lambda \rho}{\psi} \left(- \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right),$$

$$(\xi, \eta = \eta_{sl}) \in \Gamma_{sl} : \left[\left(- \frac{\partial y}{\partial \xi} W_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi} W_2 \right)_1 - \left(- \frac{\partial y}{\partial \xi} W_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi} W_2 \right)_s \right] \gamma^{-1/2} = -L_m Q_{sl}^n,$$

$$\begin{aligned} (\xi, \eta) \in \Gamma_{lv} : \quad & Q_{lv}^n = -\rho_v \left(u + Q_{lv}^n / \rho_l \right), \\ & P_1 + (Q_{lv}^n)^2 / \rho_l = P_v + \rho_v \left(u + Q_{lv}^n / \rho_l \right)^2, \\ & \left(- \frac{\partial y}{\partial \xi} W_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi} W_2 \right)_1 \gamma^{-1/2} = G^n + L_v Q_{lv}^n, \quad \eta = \text{const}, \\ & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} W_1 - \frac{\partial x}{\partial \eta} W_2 \right)_1 \alpha^{-1/2} = G^n + L_v Q_{lv}^n, \quad \xi = \text{const}. \end{aligned}$$

Сетки с динамическим распределением узлов использовались на этапе решения задачи Стефана, связанном с зарождением и распространением фазовых границ $\Gamma_{sl}(t)$ и $\Gamma_{lv}(t)$. Динамическое распределение основывалось на стремлении получить на каждый момент времени квазиравномерное распределение координатных линий по каждому направлению. Достижение этой цели осуществлялось заданием уравнений обратного преобразования (13), (14) в виде уравнений типа диффузии, где D_ξ , D_η имеют смысл коэффициентов диффузии, определяемых через параметры задачи. Численное решение уравнений (13), (14) позволяет определять координаты узлов сетки на каждый момент времени.

Рассмотрим пример задачи с сильно деформирующейся областью, численное решение которой сопровождается радикальной перестройкой сетки. В металлическом треугольнике на одну из вершин воздействует источник энергии, вызывающий его последовательный нагрев, плавление и испарение. Геометрические размеры треугольника (высота и длина основания) во много раз превосходят линейные размеры источника энергии, интенсивность которого составляла $G = 10^5$ Вт/см².

На этапе нагрева в расчетах использовалась сетка с фиксированными узлами общим количеством 19×23 . В физическом пространстве $\Omega_{x,y}$ координатные линии криволинейной сетки концентрируются в области воздействия источника энергии и остаются неподвижными вплоть до момента плавления, рис. 5. Расчеты с динамическим распределением узлов начинались с момента достижения облучаемым участком поверхности температуры плавления T_m . При этом в области $\Omega_{x,y}$ вводится новая подобласть Ω_1 , в которой строится расчетная сетка с общим числом узлов 19×6 . С появлени-

ем скорости $\overline{\vartheta_{sl}}$ во всей области $\Omega_{x,y} = \Omega_s \cup \Omega_l$ происходит радикальная перестройка сетки, осуществляемая посредством решения уравнений (13),(14). Численное решение этих уравнений позволяет получить квазиравномерное распределение координатных линий по каждому направлению. В дальнейшем пропорционально росту скорости ϑ_{sl} происходит деформация подобластей Ω_s , Ω_l , сопровождаемая динамическим распределением координатных линий, рис. 6. Достижение на поверхности температуры равновесного кипения приводит к формированию нового фазового фронта, характеризующегося скоростью ϑ_{lv} и дополнительной деформации подобласти Ω_l . В частности, процесс развитого поверхностного испарения вызывает удаление вершины треугольника, рис. 7. Дальнейший нагрев поверхности приводит к росту скорости ϑ_{lv} и формированию в жидкой фазе глубокого кратера, рис. 8.

Отметим, что появление второй подвижной границы $\Gamma_{lv}(t)$, вызывающее сильную деформацию подобласти Ω_l , не приводит к усложнению вычислительного алгоритма и не требует дополнительных вычислительных усилий, поскольку в методе динамической адаптации возникновение подвижной границы $\Gamma(t)$ связано лишь с появлением в граничных условиях отличного от нуля потока $Q_\Gamma : Q_\Gamma \neq 0$. Полученные результаты свидетельствуют об отсутствии серьезных ограничений, накладываемых используемым математическим аппаратом на наличие подвижных границ. По этой причине число подвижных границ может быть любым, и их количество будет определяться физическими условиями задачи. Рассмотренный пример свидетельствует также о том, что динамическая адаптация является надежным средством решения целого ряда задач, ранее считавшихся не решаемыми, к которым, в частности, относятся проблемы, связанные с сильной динамической деформацией области определения.

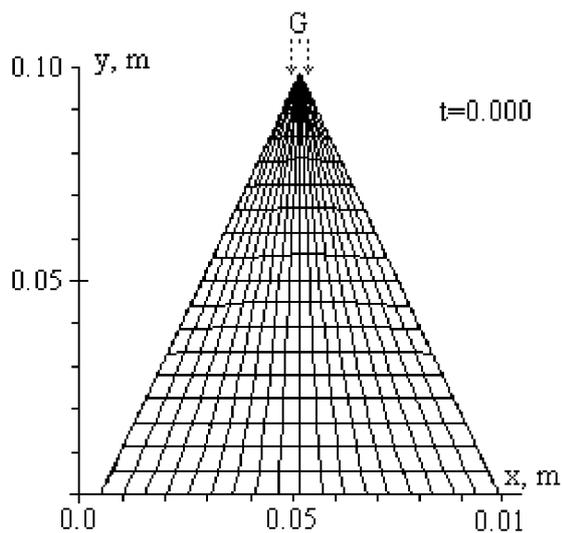


Рис. 5

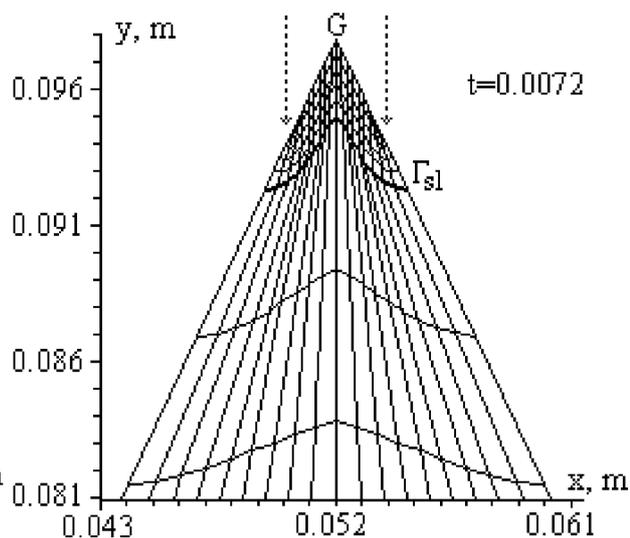


Рис. 6

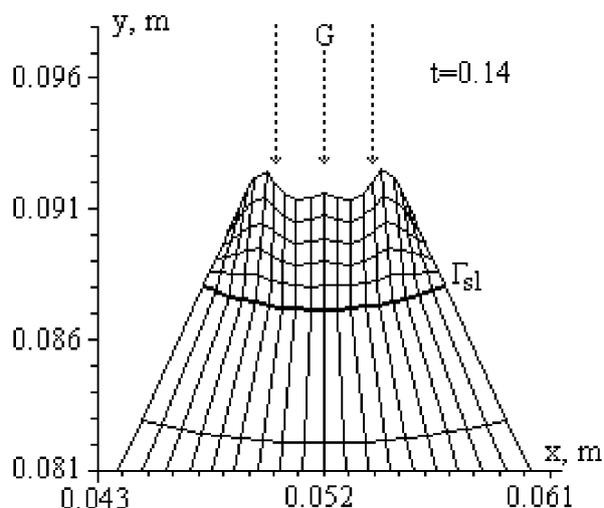


Рис. 7

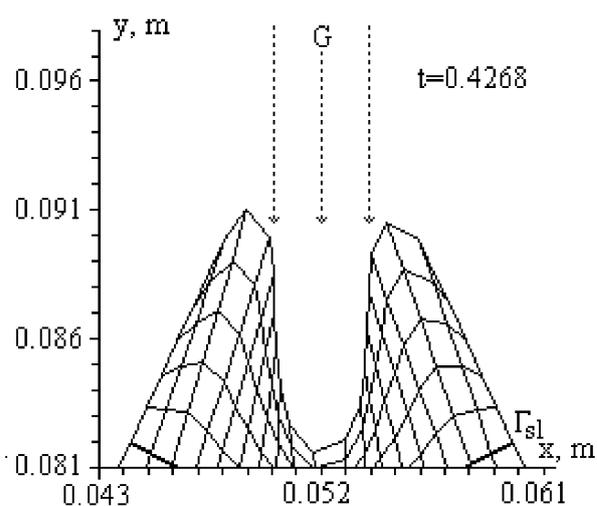


Рис. 8

Литература

1. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн // ЖВ и МФ, 1963, т.298, №1, с.64-68.
2. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрывы в газах. М.: Мир, 1968, 592 с.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Мир, 1964.
4. Баренблатт Г.И., Вишик И.М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикл. Матем. и мех., 1956, т.20, №3, с.411-417.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке. Дифференциальные уравнения. // 1987, т.23, № 7, с. 1154-1160.
7. Мажукин В.И., Такоева Л.Ю. Принципы построения динамически адаптирующихся к решению сеток в одномерных краевых задачах // Мат.моделир.1990, т.2, №3, с.101-118.
8. Мажукин В.И., Самарский А.А. и др. Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами. // Мат. моделир.1993, т.5, №4, с.32-56.
9. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосиб.: Наука, 1986. 239 с.
10. Дьюли У. Лазерная технология и анализ материалов. М.: Мир.1986. 502 с.