

Самарский А.А., Мажукин В.И. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОБМЕНА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ // Тепло- массоперенос – 2000. Минск: АНК "ИТМО им. А.В.Лыкова" НАНБ, 2000, с. 11.

Проблема построения расчетных сеток с оптимальным распределением узлов особенно актуальна в задачах эволюционного типа, в которых особенности решения могут возникать и распространяться во всей области определения решения. Работа посвящена всесторонней демонстрации возможностей метода динамической адаптации применительно к задачам теплообмена. Для этого рассматриваются две важные и имеющие широкое распространение задачи: горение вещества и быстрые фазовые переходы в металле. В проблеме горения вычислительной особенностью является возникновение и распространение зон больших (одномерных по пространству) градиентов, а в проблеме фазовых превращений - наличие двух взаимодействующих двумерных фазовых фронтов: плавления и испарения.

А.А. Самарский, В.И. Мажукин

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОБМЕНА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ

Институт математического моделирования РАН, Москва

### Введение

Основные вычислительные особенности нестационарных задач теплообмена связаны с формированием и распространением фронтов (тепловой волны /1/, горения /2/, фазовых превращений /3/, контактных и свободных границ, ударных волн /4/), возникновением и перемещением зон больших градиентов /5/. В подобных ситуациях эффективность численного решения нелинейных дифференциальных задач определяется не только способами разностной аппроксимации и численной реализации сеточных уравнений, но и тем, насколько удачно было выполнено построение расчетных сеток. Проблема построения расчетных сеток с оптимальным распределением узлов особенно актуальна в задачах эволюционного типа, в которых особенности решения могут возникать и распространяться во всей области определения решения. При фиксированном общем числе узлов погрешность численного решения можно значительно уменьшить за счет управляемого перераспределения их из области медленного в область сильного изменения решения. В эволюционных задачах оптимальность расчетных сеток может быть достигнута посредством последовательной, на каждом шаге интегрирования, адаптации имеющейся сетки к решению.

Целью данной работы является всесторонняя демонстрация возможностей метода динамической адаптации /6-8/ применительно к задачам теплообмена. Для этого рассматриваются две важных и широко распространенных проблемы теплообмена: горение вещества и быстрые фазовые переходы в металле. В проблеме горения вычислительной особенностью решения является возникновение и распространение зон больших (одномерных по пространству) градиентов. В проблеме фазовых превращений вычислительные особенности обусловлены наличием двух взаимодействующих двумерных фазовых фронтов: плавления и испарения.

## Проблема горения

*Постановка задачи.* Рассматривается гомогенная в тепловом и концентрационном отношении неподвижная газовая среда. Распространение фронта экзотермической реакции формулируется в простейшем варианте одностадийного горения. Процесс горения полагается изобарическим и описывается в диффузионно-тепловом приближении с помощью нелинейной системы из двух уравнений параболического типа: теплопроводности и диффузии. Процессы переноса характеризуются постоянными коэффициентами температуропроводности  $a$  и диффузии  $D$ . Скорость химической реакции имеет линейную зависимость от плотности  $\rho$  и экспоненциальную (аррениусовскую) от температуры  $T$ . В одномерном физическом пространстве  $\Omega_{\tilde{x}, \tilde{t}}: \tilde{x}_0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_1, \tilde{t} \geq 0$  задача о горении имеет вид:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} = D \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{\rho} K \exp\left(-\frac{E}{R\tilde{T}}\right), \quad (1)$$

$$C_p \rho_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = k \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \Delta h \tilde{\rho} K \exp\left(-\frac{E}{R\tilde{T}}\right), \quad (2)$$

где  $\tilde{t}$  и  $\tilde{x}$  - независимые временная и пространственная координаты,  $\Delta h_A$  - массовая теплота сгорания,  $E$  - энергия активации реакции,  $k, C_p$  - коэффициент теплопроводности и удельная теплоёмкость вещества;  $Le$  - число Льюиса,  $Le = D/\alpha$ ,  $\alpha = k/C_p \rho_0$ . В безразмерном виде система (1) - (2) приобретает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = Le \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \rho A \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho A \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \quad (4)$$

$$0 = x_0 \leq x \leq x_1 = L, \quad t \geq 0,$$

где

$$\alpha = \frac{k}{C_p \rho_0}, \quad Le = \frac{D}{\alpha}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{L}, \quad t = \frac{\tilde{t} \alpha}{L^2}, \quad T = \frac{\tilde{T} C_p}{\Delta h}, \quad \theta = \frac{E C_p}{R(\Delta h)}, \quad A = \frac{K L^2}{\alpha}.$$

Начальные условия и граничные условия задаются в следующем виде:

$$t = 0: \quad T(x, 0) = T_0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0;$$

$$x = 0: \quad T(x_1, t) = \begin{cases} T_0 + c^* t, & t \leq \frac{1}{c} \\ T_F = T_a & t > \frac{1}{c} \end{cases}, \quad c^* - \text{constant}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

$$x = L: \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

*Построение адаптирующейся сетки.* Характерные особенности решения задачи (3)-(5) обуславливаются наличием процессов с сильно различающимися характерными временами: малым временем химической реакции и большим временем диффузионного механизма тепловой релаксации. Соответственно, высокая скорость химического пре-

вращения вещества и медленное распространение тепловых возмущений и диффузионного перемешивания реагирующей смеси приводят к формированию узкой зоны горения, характеризующейся большими градиентами температуры  $T$  и плотности  $\rho$ . Фронт горения зарождается на левой границе и быстро перемещается к противоположной. При численном решении требуется, чтобы в зоне реакции находилось определенное число узлов сетки. Эти два обстоятельства не позволяют при использовании сеток с фиксированными узлами производить дискретизацию пространственных переменных с крупным шагом. При больших отношениях размера рассматриваемой области к характерной толщине зоны горения эффективность вычислительных алгоритмов с фиксированными сетками становится очень низкой из-за большого числа используемых узлов. Значительно более эффективными в подобных ситуациях оказываются сетки, динамически адаптирующиеся к решению, которые позволяют оперативно концентрировать необходимое число узлов в зонах быстрого изменения.

В методе динамической адаптации [6] построение расчетной сетки осуществляется на основе перехода к произвольной нестационарной системе координат с переменными  $(q, \tau)$ , принадлежащими некоторому расчетному пространству  $\Omega_{q,\tau}$ . Переход из физического пространства  $\Omega_{x,t}$  в расчетное  $\Omega_{q,\tau}$  осуществляется с помощью замены переменных общего вида  $x = \xi(q, \tau)$ ,  $t = \tau$ , имеющей обратное преобразование  $q = \varphi(x, t)$ ,  $\tau = t$ . Якобианом такого преобразования является функция  $\psi = \partial x / \partial q$ . Частные производные зависимых переменных выражаются обычным образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial}{\partial q},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q},$$

где  $\partial x / \partial \tau = -Q$  - скорость движения нестационарной системы координат. В новых переменных  $(q, \tau)$  задача (3), (4) запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial W}{\partial q} + \rho A \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \quad W = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial T}{\partial q}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial \rho}{\partial q} = Le \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial \rho}{\partial q} - \rho A \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \psi, \quad (8)$$

$$0 = q_0 \leq q \leq q_L = L, \quad \tau \geq 0.$$

Функция  $Q$  по-прежнему является произвольной. Ее задание определяет конкретный вид преобразования координат и служит управляющим параметром движения узлов сетки. Правильный выбор функции преобразования  $Q$  обеспечивает движение узлов, согласованное с решением, и является одной из наиболее важных проблем в методе динамической адаптации. Для определения необходимой функции преобразования воспользуемся методом квазистационарности [8]. Согласно этому подходу полагается, что существует такая нестационарная система координат, в которой все процессы протекают стационарно, т.е. временные производные решения равны нулю или достаточно

малы. Распространив принцип квазистационарности на систему уравнений (6), (7), полагаем, что имеется такая система координат, в которой  $\partial T / \partial \tau = \partial \rho / \partial \tau = 0$ . Тогда, разрешая систему уравнений (6), (7) относительно  $Q$ , получим:

$$Q = \frac{\frac{1}{\psi} \left( \text{Le}_A \frac{\partial}{\partial q} \left| \frac{\partial \rho}{\partial q} \right| + \frac{\partial}{\partial q} \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right) + \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \right) * \left( \text{Le} \left| \frac{\partial \rho}{\partial q} \right| + \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right) + \psi \left( \rho - A \exp \left( -\frac{\theta}{T} \right) \right)}{\left| \frac{\partial}{\partial q} (\rho + T) \right| + \frac{\text{reg}}{h}} + \frac{\left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \right) * \left( \text{Le} \left| \frac{\partial \rho}{\partial q} \right| + \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right) + \psi \left( \rho - A \exp \left( -\frac{\theta}{T} \right) \right)}{\left| \frac{\partial}{\partial q} (\rho + T) \right| + \frac{\text{reg}}{h}} + \frac{\psi \left( \rho - A \exp \left( -\frac{\theta}{T} \right) \right)}{\left| \frac{\partial}{\partial q} (\rho + T) \right| + \frac{\text{reg}}{h}}.$$

Первое и третье слагаемые в этой формуле обеспечивают сгущение узлов сетки, а второе ограничивает сближение двух соседних узлов до некоторой конечной величины. Учитывая немонотонный характер решения, первые производные плотности и температуры взяты по модулю,  $\text{reg} \ll 1$  - постоянная, предотвращающая обращение в нуль знаменателя в тех точках, где пространственные производные обращаются в нуль.

С целью повышения эффективности метода динамической адаптации задачу (6)-(8) целесообразно представить в виде задачи со свободной границей. Учитывая, что процесс горения инициируется на левой границе  $q = q_0$ , а затем волна горения распространяется по холодному фону в направлении правой границы  $q = q_L$ , целесообразно исключить из рассмотрения область, не охваченную возмущением. Для этого произвольная точка  $q_* \in (q_0, q_L)$ , удовлетворяющая условиям  $q_* > q_0$ ,  $q_* \ll q_L$ , объявляется новой границей с граничными условиями [7]:

$$T(q_*, t) = T_0, \quad u = \lim_{q \rightarrow q_*} \frac{k}{cT} \frac{1}{\psi} \frac{\partial T}{\partial q}. \quad (9)$$

Для уравнения (8) граничные и начальные условия запишутся в виде:

$$Q(q_0, t) = 0, \quad Q(q_*, t) = -u, \quad \psi(q, 0) = 1. \quad (10)$$

*Результаты моделирования.* Анализ результатов численного решения системы (6) - (8) показал, что в зависимости от соотношения между коэффициентами теплопроводности  $\alpha$  и диффузии  $D$  существуют два качественно различающихся режима распространения фронта реакции.

В первом режиме  $\text{Le} = D/\alpha = 1$  после того, как влияние левого граничного условия (греющаяся стенка) становится малым, устанавливается режим стационарного горения, характеризующийся перемещением пространственных профилей  $T(x)$  и  $\rho(x)$  с постоянной скоростью  $u(t)$ , рис. 1.

Во втором случае, когда  $\text{Le} = D/\alpha < 1$  и при выполнении дополнительных соотношений между адиабатической температурой  $T_a$  и энергией активации  $\theta_A$ , горение приобретает колебательный характер, переходящий по мере удаления от границы устойчивости ( $\text{Le} \ll 1$ ) в автоколебательный режим, рис.2. Автоколебательный режим горения характеризуется пульсирующим распространением плоского фронта горения с определенной частотой и постоянной средней скоростью на всем временном интервале. На диаграмме движения этим колебаниям соответствуют периодические сгущения узлов сетки, рис. 3. Динамика узлов адаптирующейся сетки характеризуется также пространственными профилями функции  $\psi$ , рис. 4, представленными на различные моменты времени. Функция  $\psi(x)$  характеризует изменение пространственного шага  $h_x$  и

показывает, во сколько раз изменилось расстояние между соседними узлами в физическом пространстве. В моменты всплесков, которым соответствуют максимальные значения температуры и скорости, узлы сетки концентрируются в зонах теплового и диффузионного фронтов, что проявляется на графиках  $\psi(x)$  в виде резких провалов.

Эффективность используемых алгоритмов определялась сравнением затрат компьютерного времени и количества узлов, необходимых для расчетов одних и тех же вариантов на адаптирующихся и эйлеровых сетках с фиксированными узлами. Сравнение показало, что во всех исследуемых режимах для адаптирующихся сеток достаточным было 30÷50 узлов, в то время как на эйлеровых сетках для сходящихся значений скорости и требовалось от 1000 до 6000 узлов. Затраты компьютерного времени для алгоритмов с адаптирующимися сетками оказались в 5-20 раз, меньше чем для алгоритмов с эйлеровыми сетками.

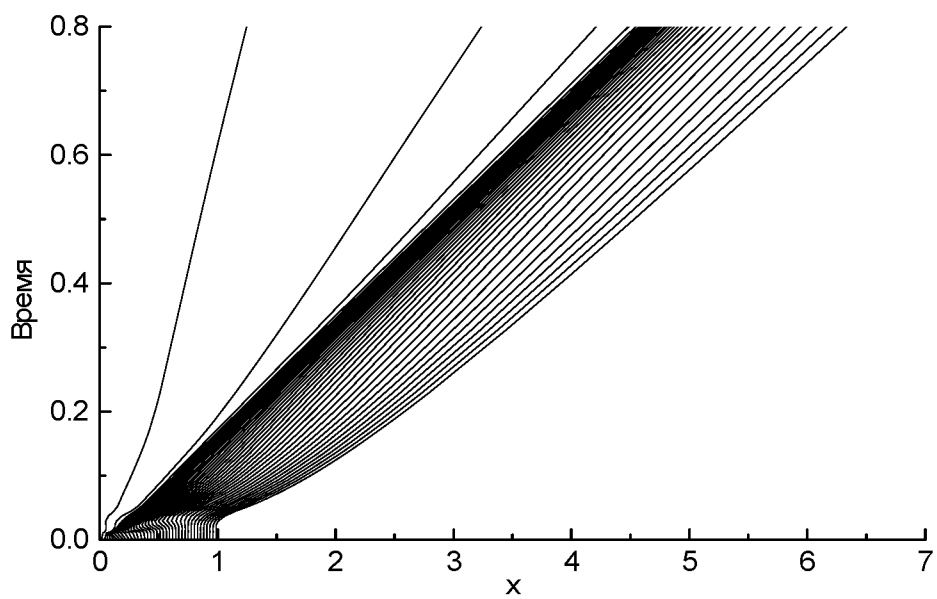
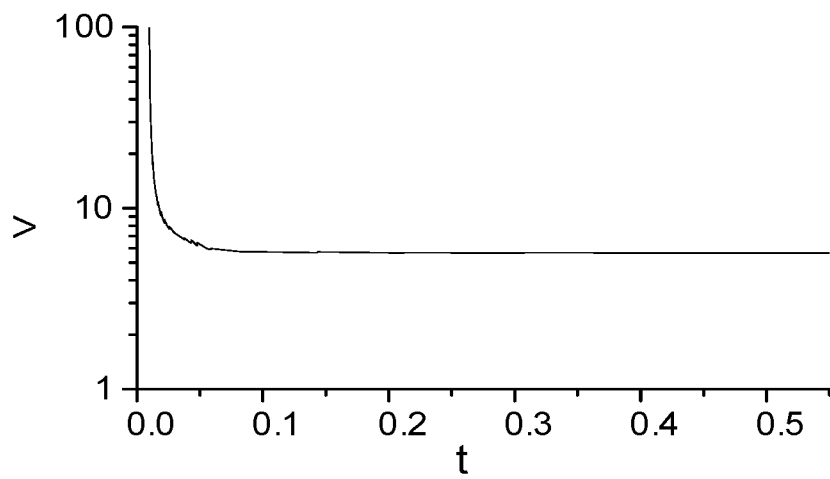
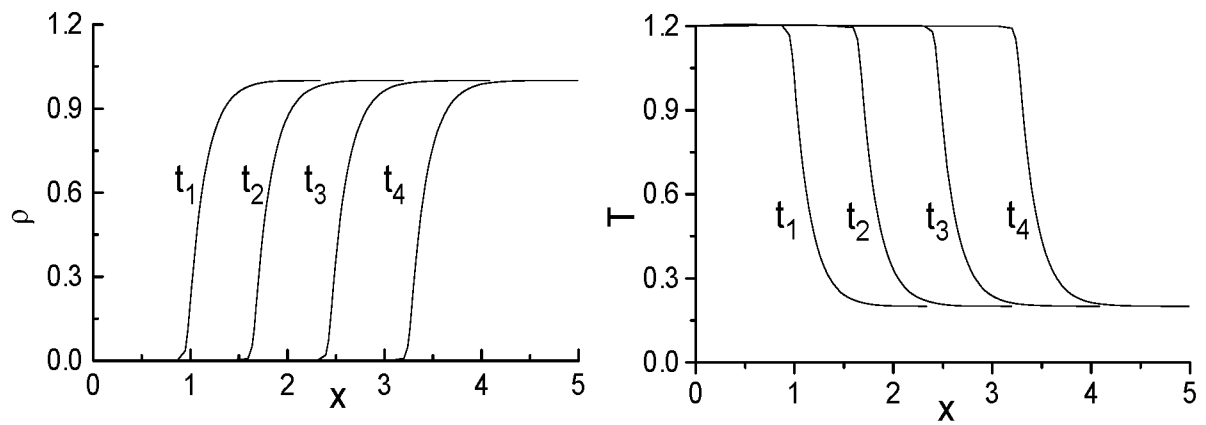


Рис. 1

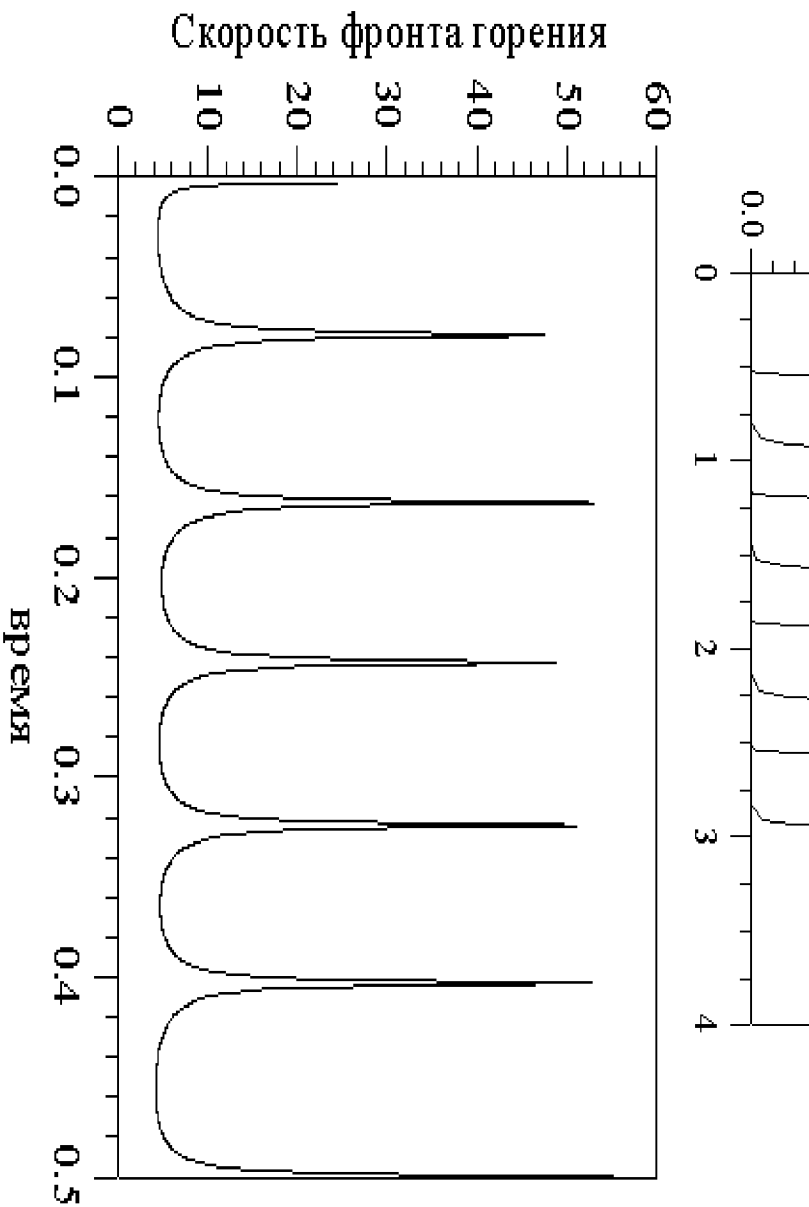
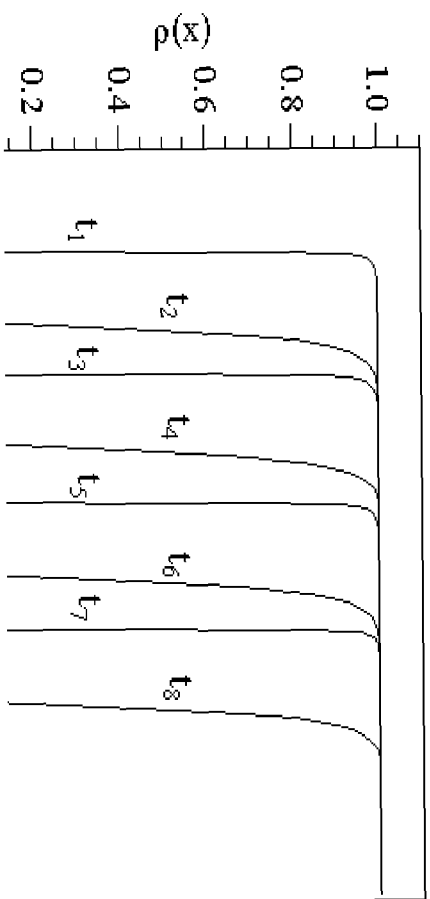
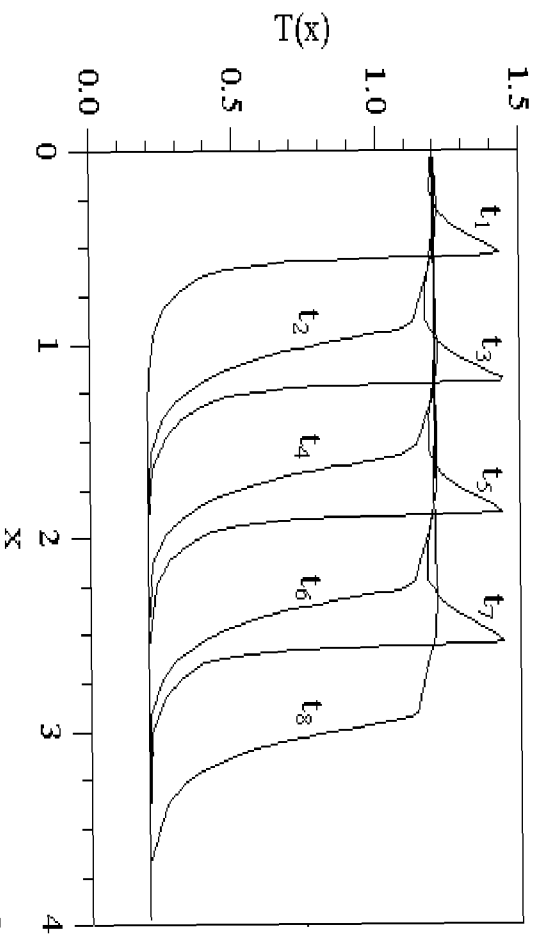


Рис. 2





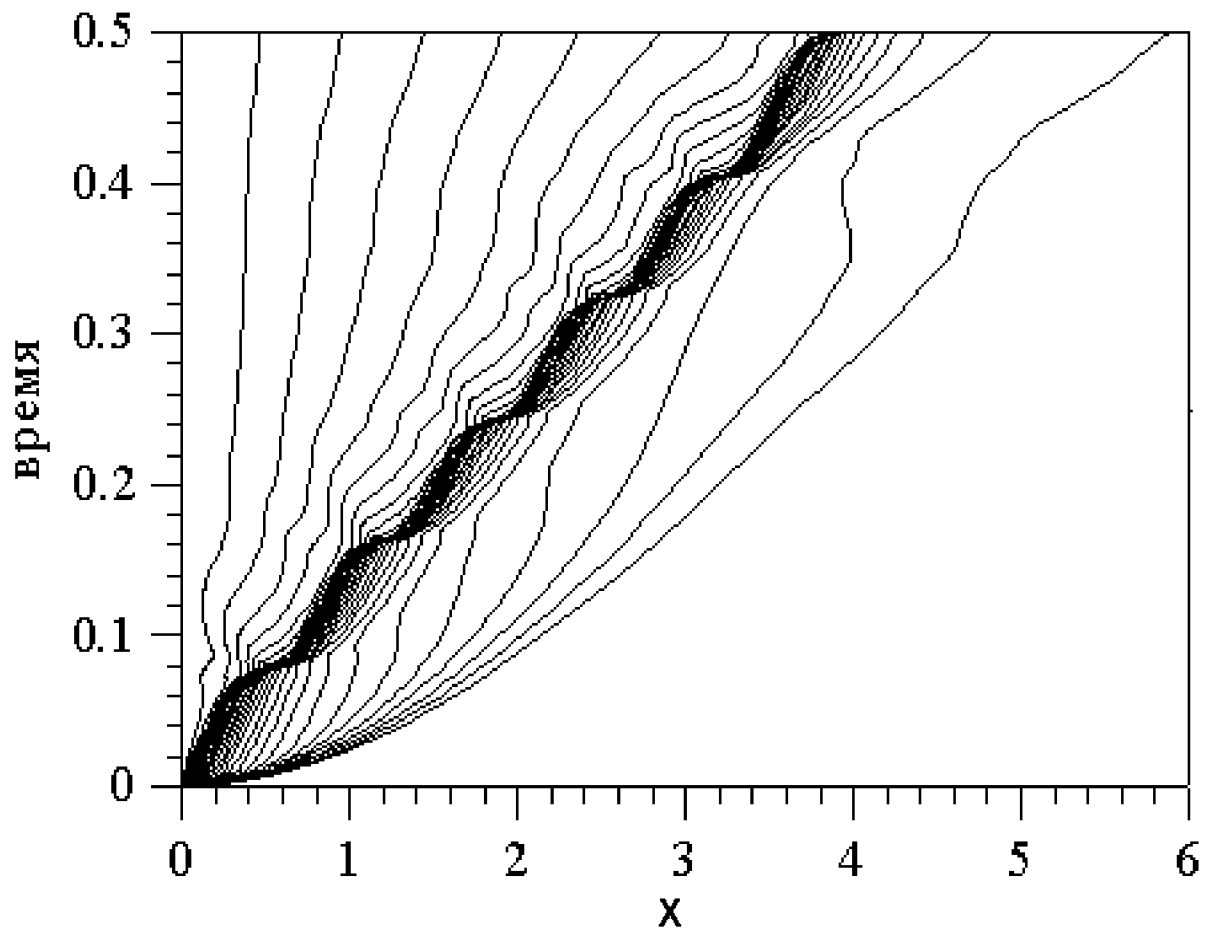


Рис. 3

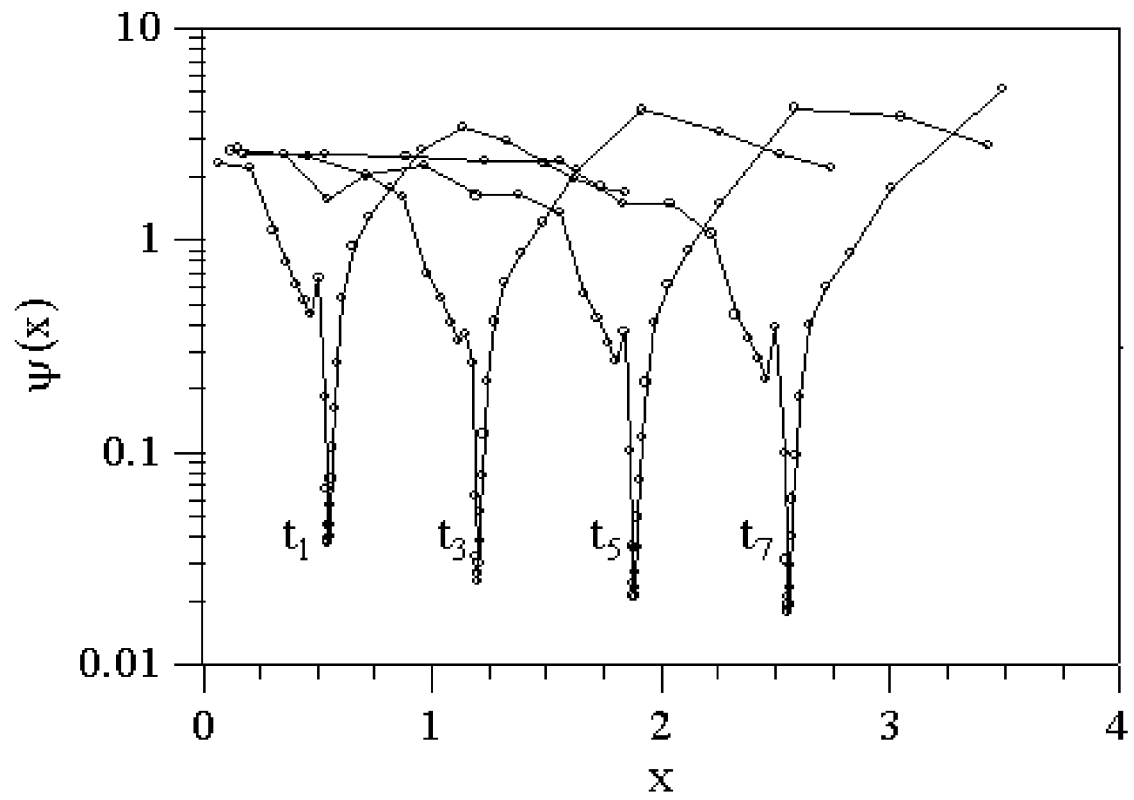


Рис. 4

## Двумерная многофронтная задача Стефана

Интерес к задачам типа Стефана вызван как их теоретической значимостью /9/, связанной с развитием математического аппарата для нелинейных задач с подвижными и свободными границами, так и важными физическими и технологическими приложениями, возникающими, в области тепломассообмена /10/. Возможности метода динамической адаптации применительно к многомерным постановкам рассматриваются на примере численного решения многофронтной нестационарной двумерной по пространству задачи Стефана с явным выделением межфазных границ в произвольных областях.

Математическая формулировка классического варианта нестационарной двумерной задачи Стефана сводится к квазилинейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div} \lambda(T) \text{grad} T = -\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2}{\partial y} \quad (11)$$

в области  $\Omega_{x,y}$ , состоящей из двух подобластей  $\Omega_s(t)$  и  $\Omega_l(t)$ :  $\Omega_{x,y} = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)$ , разделенных подвижной межфазной границей  $\Gamma_{sl}(t)$ , на которой выполняются дифференциальное условие Стефана  $W_l^n - W_s^n = L_m \rho_s \mathfrak{G}_{sl}^n$  и равенство температур  $T_s = T_l = T_m$ . Здесь  $H = c_p \rho T$  - энтальпия,  $\vec{W} = (W_1, W_2)$  - тепловой поток,  $T_m, L_m$  - температура и теплота плавления (кристаллизации),  $\mathfrak{G}_{sl}$  - скорость движения границы раздела фаз, индексы  $s, l$  обозначают принадлежность вещества к твердой и жидкой фазам, а  $n$  - нормальную компоненту. Учет испарения осуществляется в рамках однофазного варианта задачи Стефана и приводит к появлению второй подвижной границы раздела фаз  $\Gamma_{lv}(t)$ : жидкость-пар в области  $\Omega_{x,y}(t) = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)$ . Процесс развитого поверхностного испарения описывается с помощью трех законов сохранения (массы, импульса, энергии):

$$\rho_l \mathfrak{G}_{lv}^n = \rho_v (u - \mathfrak{G}_{lv}^n), \quad P_l + \rho_l (\mathfrak{G}_{lv}^n)^2 = P_v + \rho_v (u - \mathfrak{G}_{lv}^n)^2, \quad -\lambda \partial T / \partial n = G^n - L_v \rho_l \mathfrak{G}_{lv}^n,$$

и двух дополнительных соотношений, характеризующих кинетику фазового перехода и определяющихся из приближения Кнудсеновского слоя  $T_v = T_v(T_l, M)$ ,  $\rho_v = \rho_v(\rho_H, M)$ .

Предположим, что для некоторого расчетного пространства  $\Omega_{\xi, \eta, \tau}$ , в котором определена произвольная нестационарная криволинейная система координат с переменными  $(\xi, \eta, \tau)$ , и физического  $\Omega_{x,y,t}$  с переменными  $(x, y, t)$  на каждый момент времени существует невырожденное взаимно-однозначное преобразование  $\xi = \xi(x, y, t)$ ,  $\eta = \eta(x, y, t)$ ,  $\tau = t$ , отображающее физическую область произвольной формы  $\Omega_{x,y}$  в прямоугольник  $\Omega_{\xi, \eta}$  в плоскости криволинейных координат  $(\xi, \eta)$ . Якобианом такого преобразования является функция  $J$ :

$$\rho J^{-1} = \rho \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \psi.$$

Математическая постановка задачи (11) в произвольной нестационарной криволинейной системе координат  $(\xi, \eta, \tau)$  приобретает вид:

$$\left[ \frac{\partial(\psi H)}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\rho W_1 + HQ_1) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (\rho W_2 + HQ_2) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ -(\rho W_1 + HQ_1) \frac{\partial y}{\partial \xi} + (\rho W_2 + HQ_2) \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\} \right]_m, \quad m = s, l, \quad (12)$$

$$\left[ \frac{\partial x}{\partial \tau} = - \frac{Q_1}{\rho} \right]_k, \quad Q_1 = -\rho \left( D_\xi \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + D_\eta \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right), \quad (13)$$

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial \tau} = - \frac{Q_2}{\rho} \right]_k, \quad Q_2 = -\rho \left( D_\xi \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + D_\eta \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right), \quad (14)$$

$$W_1 = - \frac{\lambda \rho}{\psi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right), \quad W_2 = - \frac{\lambda \rho}{\psi} \left( - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right),$$

$$(\xi, \eta = \eta_{sl}) \in \Gamma_{sl} : \left[ \left( - \frac{\partial y}{\partial \xi} W_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi} W_2 \right)_1 - \left( - \frac{\partial y}{\partial \xi} W_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi} W_2 \right)_s \right] \gamma^{-1/2} = -L_m Q_{sl}^n,$$

$$\begin{aligned} (\xi, \eta) \in \Gamma_{lv} : \quad & Q_{lv}^n = -\rho_v \left( u + Q_{lv}^n / \rho_l \right), \\ & P_1 + (Q_{lv}^n)^2 / \rho_l = P_v + \rho_v \left( u + Q_{lv}^n / \rho_l \right)^2, \\ & \left( - \frac{\partial y}{\partial \xi} W_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi} W_2 \right)_1 \gamma^{-1/2} = G^n + L_v Q_{lv}^n, \quad \eta = \text{const}, \\ & \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} W_1 - \frac{\partial x}{\partial \eta} W_2 \right)_1 \alpha^{-1/2} = G^n + L_v Q_{lv}^n, \quad \xi = \text{const}. \end{aligned}$$

Сетки с динамическим распределением узлов использовались на этапе решения задачи Стефана, связанном с зарождением и распространением фазовых границ  $\Gamma_{sl}(t)$  и  $\Gamma_{lv}(t)$ . Динамическое распределение основывалось на стремлении получить на каждый момент времени квазиравномерное распределение координатных линий по каждому направлению. Достижение этой цели осуществлялось заданием уравнений обратного преобразования (13), (14) в виде уравнений типа диффузии, где  $D_\xi$ ,  $D_\eta$  имеют смысл коэффициентов диффузии, определяемых через параметры задачи. Численное решение уравнений (13), (14) позволяет определять координаты узлов сетки на каждый момент времени.

Рассмотрим пример задачи с сильно деформирующейся областью, численное решение которой сопровождается радикальной перестройкой сетки. В металлическом треугольнике на одну из вершин воздействует источник энергии, вызывающий его последовательный нагрев, плавление и испарение. Геометрические размеры треугольника (высота и длина основания) во много раз превосходят линейные размеры источника энергии, интенсивность которого составляла  $G = 10^5$  Вт/см<sup>2</sup>.

На этапе нагрева в расчетах использовалась сетка с фиксированными узлами общим количеством  $19 \times 23$ . В физическом пространстве  $\Omega_{x,y}$  координатные линии криволинейной сетки концентрируются в области воздействия источника энергии и остаются неподвижными вплоть до момента плавления, рис. 5. Расчеты с динамическим распределением узлов начинались с момента достижения облучаемым участком поверхности температуры плавления  $T_m$ . При этом в области  $\Omega_{x,y}$  вводится новая подобласть  $\Omega_1$ , в которой строится расчетная сетка с общим числом узлов  $19 \times 6$ . С появлени-

ем скорости  $\overline{\vartheta_{sl}}$  во всей области  $\Omega_{x,y} = \Omega_s \cup \Omega_l$  происходит радикальная перестройка сетки, осуществляемая посредством решения уравнений (13),(14). Численное решение этих уравнений позволяет получить квазиравномерное распределение координатных линий по каждому направлению. В дальнейшем пропорционально росту скорости  $\vartheta_{sl}$  происходит деформация подобластей  $\Omega_s$ ,  $\Omega_l$ , сопровождаемая динамическим распределением координатных линий, рис. 6. Достижение на поверхности температуры равновесного кипения приводит к формированию нового фазового фронта, характеризующегося скоростью  $\vartheta_{lv}$  и дополнительной деформации подобласти  $\Omega_l$ . В частности, процесс развитого поверхностного испарения вызывает удаление вершины треугольника, рис. 7. Дальнейший нагрев поверхности приводит к росту скорости  $\vartheta_{lv}$  и формированию в жидкой фазе глубокого кратера, рис. 8.

Отметим, что появление второй подвижной границы  $\Gamma_{lv}(t)$ , вызывающее сильную деформацию подобласти  $\Omega_l$ , не приводит к усложнению вычислительного алгоритма и не требует дополнительных вычислительных усилий, поскольку в методе динамической адаптации возникновение подвижной границы  $\Gamma(t)$  связано лишь с появлением в граничных условиях отличного от нуля потока  $Q_\Gamma : Q_\Gamma \neq 0$ . Полученные результаты свидетельствуют об отсутствии серьезных ограничений, накладываемых используемым математическим аппаратом на наличие подвижных границ. По этой причине число подвижных границ может быть любым, и их количество будет определяться физическими условиями задачи. Рассмотренный пример свидетельствует также о том, что динамическая адаптация является надежным средством решения целого ряда задач, ранее считавшихся не решаемыми, к которым, в частности, относятся проблемы, связанные с сильной динамической деформацией области определения.

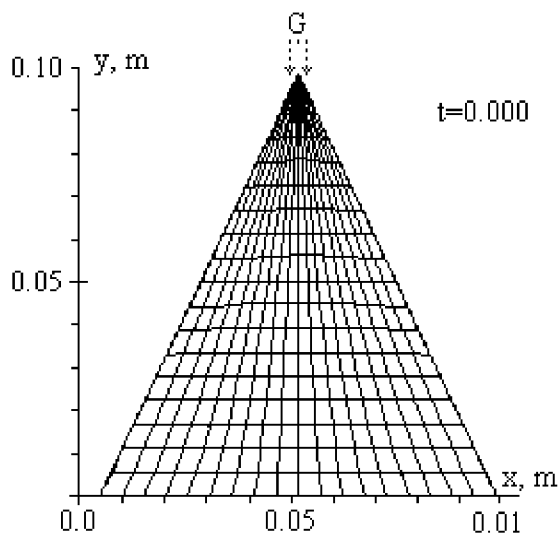


Рис. 5

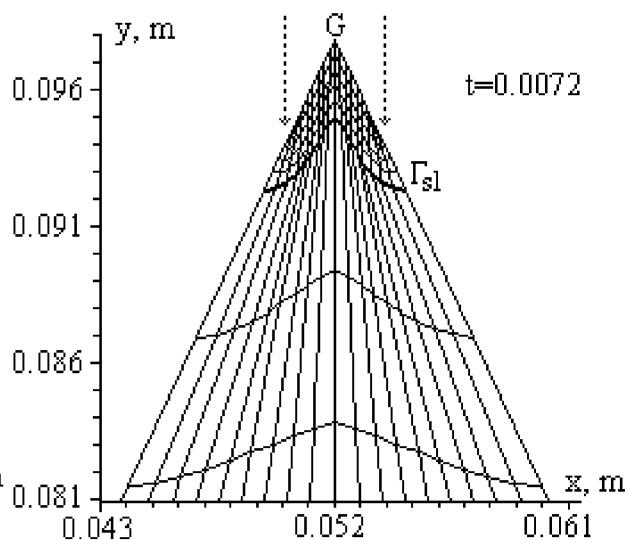


Рис. 6

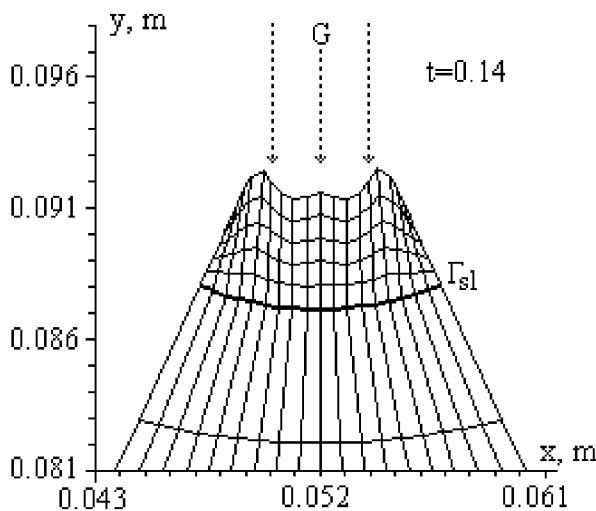


Рис. 7

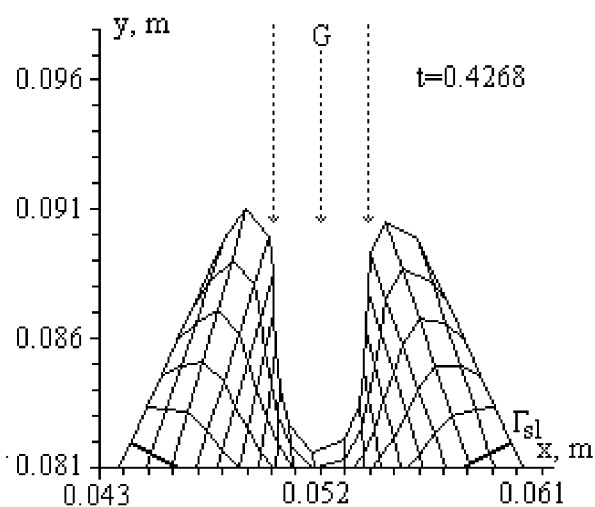


Рис. 8

### Литература

1. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн // ЖВ и МФ, 1963, т.298, №1, с.64-68.
2. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрывы в газах. М.: Мир, 1968, 592 с.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Мир, 1964.
4. Баренблатт Г.И., Вишик И.М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикл. Матем. и мех., 1956, т.20, №3, с.411-417.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке. Дифференциальные уравнения. // 1987, т.23, № 7, с. 1154-1160.
7. Мажукин В.И., Такоева Л.Ю. Принципы построения динамически адаптирующихся к решению сеток в одномерных краевых задачах // Мат.моделир.1990, т.2, №3, с.101-118.
8. Мажукин В.И., Самарский А.А. и др. Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами. // Мат. моделир.1993, т.5, №4, с.32-56.
9. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосиб.: Наука, 1986. 239 с.
10. Дьюли У. Лазерная технология и анализ материалов. М.: Мир.1986. 502 с.